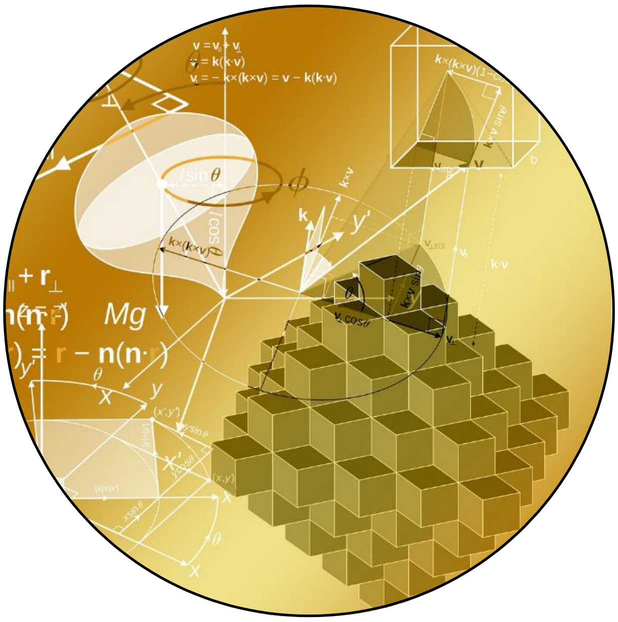
III JID+ Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior



ACTAS DE LAS III JID+

Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior

Burjassot (València), 10 y 11 de julio de 2023

Edita:

Proyecto de Innovación Educativa y Calidad Docente: "Desarrollo de competencias transversales en matemáticas a través de la docencia presencial y on-line." (UV-SFPIE_PID-2076848).

Burjassot (València) 2023

ISBN: 978-84-09-53190-5

III JID+ Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior

En esta publicación se presentan los resúmenes escritos de las comunicaciones de las III JID+ Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior, celebradas en la Facultad de Matemáticas de la Universitat de València los días 10 y 11 de julio de 2023 en el marco del Proyecto de Innovación Educativa "Desarrollo de competencias transversales en matemáticas a través de la docencia presencial y on-line. Versión 3.0"

Las jornadas se realizaron en formato semipresencial y se emitieron en directo en formato on-line. Toda la información relativa a las jornadas puede encontrarse en la página web links.uv.es//gidmes/IIIJIDMES.

ÍNDICE

Álgebra Lineal y Geometría I : El pódcast

Enric Cosme Llópez[1], **Adina Iftimi**[2]

[1] ***Departament de Matemàtiques, Universitat de València, Dr. Moliner, 50, 46100, Burjassot, València, Spain, e-mail: enric.cosme@uv.es.***
[2] ***Departament d'Estadística i Investigació Operativa, Universitat de València, Dr Moliner, 50, 46100, Burjassot, València, Spain, e-mail: adina.iftimi@uv.es.***

Linear Algebra and Geometry I : The podcast

RESUMEN

En este estudio presentamos una experiencia de innovación educativa llevada a cabo en la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría I del grado en Matemáticas. El alumnado formó grupos para realizar entrevistas en formato audio a personas que explicaban cómo aplicaban en su trabajo los conceptos estudiados en la asignatura. Los resultados fueron utilizados para crear un programa de pódcasts en línea. Al finalizar se llevó a cabo una encuesta para recoger la opinión del estudiantado sobre la actividad. Evaluamos la capacidad de la propuesta para involucrar al alumnado en el aprendizaje, contextualizar los conocimientos y fomentar habilidades interpersonales. Se presentan las conclusiones sobre esta experiencia y posibles mejoras para ediciones futuras del proyecto.

Palabras clave: Pódcast, Educación Superior, Matemáticas

ABSTRACT

In this study we present an educational innovation experience carried out in the subject of Linear Algebra and Geometry I in the Mathematics degree. Students formed groups to conduct audio interviews with people who explained how they applied to their work the concepts studied in the subject. The results were used to create an online podcast program. At the end, a survey was conducted to collect students' opinions on the activity. We evaluated the proposal's ability to involve students in learning, contextualize knowledge, and promote interpersonal skills. We present the conclusions about this experience and possible improvements for future editions of the project.

Keywords: Podcast, Higher education, Mathematics

INTRODUCCIÓN

La tecnología ha revolucionado la forma en que el profesorado se relaciona con el estudiantado, brindando nuevas oportunidades para el aprendizaje en entornos virtuales y a través de la educación en línea. En particular, los pódcasts han destacado como una herramienta eficaz y flexible para la enseñanza y el aprendizaje en diversos campos [5, 6, 7], incluyendo las matemáticas [2]. Estas investigaciones concluyen que los pódcast tienen efectos positivos en el compromiso, la satisfacción y los resultados de aprendizaje del estudiantado.

En este artículo, se presenta una experiencia innovadora en la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría I del grado en Matemáticas, donde se utilizó el pódcast como una forma de contextualizar los resultados y promover habilidades interpersonales. El objetivo principal del trabajo es analizar las características de este formato y discutir su capacidad para contextualizar los resultados en el ámbito de las matemáticas, así como su potencial para fomentar habilidades interpersonales y promover un aprendizaje significativo.

En esta experiencia, el estudiantado llevó a cabo entrevistas en formato de audio a profesionales que aplican los conceptos estudiados en la asignatura en su trabajo. Estas entrevistas se utilizaron para crear un programa de pódcasts en línea, donde el alumnado pudo compartir sus hallazgos y reflexiones con el resto de la clase y con una audiencia más amplia. Al finalizar la actividad, se recopiló la opinión del estudiantado a través de una encuesta para evaluar el impacto de la propuesta en su aprendizaje y desarrollo de habilidades. En este artículo, se presentan los resultados de esta experiencia, destacando los aspectos positivos y los desafíos encontrados. Además, se discuten posibles mejoras y recomendaciones para futuras ediciones de este proyecto.

CONTEXTO

La asignatura de Álgebra Lineal y Geometría I tiene carácter básico en el Grado en Matemáticas impartido en la Universitat de València y se cursa durante los dos cuatrimestres del primer curso, conformando una asignatura de 12 ECTS dentro de la materia “Matemáticas” dentro del módulo de asignaturas denominadas de “Formación Básica”.

Los objetivos generales de la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría I son el desarrollo de los conceptos de espacio vectorial y aplicación lineal entre espacios vectoriales, con especial atención a su representación matricial, así como los conceptos básicos de métrica en espacios vectoriales euclidianos y su aplicación en espacios afines. Cabe destacar que la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría I es una asignatura transversal que servirá de ejemplo constante sobre el que volver en relación a asignaturas de cursos superiores, bien sea por sus métodos, conceptos o razonamientos.

En esta asignatura es especialmente importante reflexionar acerca del uso de la multiplicación matricial, ya sea como ejemplo de transformación de ciertas estructuras afines o lineales, su interpretación geométrica, descrita principalmente mediante el uso de vectores y valores propios, su interacción con la métrica definida en algún espacio vectorial euclidiano o afín euclidiano o con la descripción de representaciones matriciales de isometrías (giros y reflexiones principalmente) o translaciones, homotecias o combinaciones de las anteriores. Se pretende evitar la concepción de la matriz como espacio contenedor y reafirmarla como elemento transformador. Además, se insiste en la capacidad de elección que se tiene para representar estas acciones, incidiendo especialmente en las bondades de una representación diagonal.

Desde el Grado en Matemáticas estas nociones pueden sufrir el problema de encontrarse descontextualizadas cuando, al contrario, todos los conceptos trabajados en la asignatura tienen una ingente cantidad de aplicaciones en contextos variados y transversales. Desde esta asignatura se pueden trabajar los conceptos de cadenas de Markov, análisis de grafos, coeficientes de correlación, criptografía, interpolación, predicciones a largo plazo, ecuaciones en diferencias, sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, análisis de redes, mínimos cuadrados lineales, modelos poblacionales, métodos de la potencia para la aproximación del valor propio dominante, aspectos de programación lineal, gráficos por ordenador, teoría de códigos, descomposición espectral, análisis de componentes principales, teoría de campos vectoriales, sistemas dinámicos discretos y continuos, soluciones iterativas, tratamiento de imágenes, flujos de tráfico o polinomios ortogonales, entre algunas de sus aplicaciones.

Descripción general del alumnado

El alumnado inscrito en la asignatura proviene, principalmente, de bachillerato científico y accede al grado mediante las pruebas de acceso a la Universidad. Son personas que sienten especial inclinación hacia el razonamiento abstracto, con afición y destreza para resolver problemas tanto de naturaleza lógica como calculista, que demuestran capacidad de síntesis, modelización, abstracción y razonamiento lógico, así como hábito de trabajo intelectual y dedicación al estudio. No obstante, suelen encontrarse con dificultades para la adaptación al grado, principalmente por problemas en su expresión matemática, en el desarrollo de razonamientos y demostraciones y en la adecuación del hábito de estudio y la carga de trabajo al contexto universitario.

Es importante tener en cuenta el bagaje sobre sistemas de ecuaciones lineales que el alumnado trae consigo desde bachillerato y que permite tener un anclaje desde el que poder avanzar la asignatura. La familiaridad con las soluciones de un sistema de ecuaciones lineal y los métodos para su obtención, así como la interpretación geométrica de estas soluciones como variedades afines y su representación matricial son fundamentales para el desarrollo de la asignatura. También ayudan las nociones básicas de trigonometría y de uso de determinantes que el alumnado haya podido obtener en los últimos cursos de instituto. Pero, sobre todo, ayudará el hecho de que el alumnado haya desarrollado con anterioridad un razonamiento crítico, más próximo a la actividad matemática.

ACTIVIDAD PROPUESTA

Se propuso una actividad en grupo de un máximo de 4 personas. El grupo debía identificar una persona de su entorno que utilizara algunos de los resultados vistos en clase. El grupo debía realizar previamente el guión de una entrevista donde se remarcara la relación de esta persona con las matemáticas y donde se identificaran los conceptos y resultados trabajados en el aula. La entrevista debía ser breve, con una duración total de entre 5 y 10 minutos. El grupo únicamente debía entregar el fichero de audio por correo electrónico. Las grabaciones se compartían con el resto de la clase mediante el Aula Virtual y eran puestas a libre disposición del público en formato pódcast.

La actividad se propuso como actividad evaluable para el seminario del segundo cuatrimestre de la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría del curso 21/22, dentro del Grado en Matemáticas. Al realizarla en el segundo cuatrimestre, el alumnado ya tenía una experiencia previa sobre los contenidos de la asignatura. Esta actividad formaba parte del proyecto de innovación docente “Desarrollo de competencias transversales a través de las Matemáticas. Versión 2.0” de la Facultad de Ciencias Matemáticas.

Objetivo

El objetivo principal de la actividad es contextualizar las definiciones, proposiciones y conceptos vistos en clase e identificar sus aplicaciones. Otro objetivo de esta actividad es caracterizar y diseñar secuencias de aprendizaje que favorecieran la adquisición de competencias transversales para el alumnado, centradas principalmente en la comunicación oral y el desarrollo de habilidades interpersonales. Estos objetivos están en consonancia con los resultados del aprendizaje y las habilidades sociales que se espera obtener al cursar esta asignatura [4].

Preparación

Se puso a disposición del alumnado en el Aula Virtual un documento informativo [3] con el objetivo de contextualizar la actividad, describir la propuesta y los objetivos y ayudar a la preparación de la actividad.

Se pidió al alumnado que buscara una persona que pudiera hacer servir algunas de las técnicas o nociones trabajadas en clase. Se les instó a pensar en el entorno familiar, en el profesorado de sus institutos, en compañeros o compañeras de otras titulaciones o en profesionales de todas las ramas del conocimiento. También se les instó a dejar de lado los prejuicios sobre las personas que pudieran utilizar el álgebra lineal en su trabajo.

Una vez identificada la persona a entrevistar, se les pidió identificar alguna de las nociones que esta persona pudiera utilizar en su campo de especialización, así como el significado específico que pudiera darle a esa noción en su contexto, esto es, qué nociones utiliza y qué significados les da. También se pidió al alumnado que investigara por su cuenta sobre el tema concreto y se preguntase cómo relacionarlo con los contenidos vistos en clase.

Se pidió a los grupos que preparasen la entrevista antes de grabarla, que redactasen un guión previo de lo que iban a preguntar y que trabajaran este guión con la persona entrevistada antes de iniciar la grabación. El público al que se tendría que dirigir la entrevista era a los compañeros y compañeras de la asignatura. Para la grabación se instó a la utilización del móvil y se animó a que realizasen el montaje que considerasen oportuno.

Se pidió también coherencia y cohesión en el desarrollo de la entrevista. Se pidió que la entrevista empezara con la presentación de las personas integrantes del grupo, la introducción adecuada de la persona entrevistada, incidiendo en la relación que tuviera esta persona con las matemáticas. Una vez realizada la presentación se pidió que se introdujese el tema o el concepto matemático a tratar en la entrevista y que ayudasen a la persona entrevistada a buscar la conexión entre su campo de especialización y los conceptos trabajados en clase, así como con otros temas relacionados. Se pidió concluir la entrevista con una pequeña reflexión sobre los temas tratados y su relación con los conocimientos vistos en clase.

Evaluación

La actividad se evaluó dentro del apartado de seminario de la asignatura, que representa un 10 % de la nota final. Se puso a disposición del alumnado la rúbrica recogida en la Tabla 1 para identificar los aspectos fundamentales de la entrevista y ayudar a la evaluación posterior.

Tabla 1: Rúbrica de evaluación.

Presentación del grupo	Hasta 1 punto
Registro lingüístico	Hasta 1.5 puntos
Introducción de la persona entrevistada	Hasta 1.5 puntos
Contenido de las preguntas	Hasta 2 puntos
Relación con los temas trabajados en clase	Hasta 2 puntos
Conclusiones y reflexión del grupo	Hasta 2 puntos

Al acabar el cuatrimestre se pidió al alumnado que realizaran una encuesta para valorar la actividad. Los resultados de esta encuesta constituyen la fuente principal que se ha utilizado para el desarrollo del presente trabajo.

RESULTADOS

Se presentaron 15 trabajos, que se pusieron a disposición del alumnado en el Aula Virtual y en dos plataformas de audio en línea, Ivoox y Spotify [1]. En las plataformas se detalló información sobre el proyecto y se utilizó un logo común para el contenido o la fotografía de las personas entrevistadas, según la disponibilidad.

Destacamos los siguientes detalles en relación a las entrevistas. De las 15 entrevistas, 13 (87 %) fueron realizadas a hombres y 2 (13 %) a mujeres. En relación a la profesión de las personas entrevistadas, 4 (26 %) eran docentes de secundaria, 3 (20 %) eran docentes universitarios, 3 (20 %) eran divulgadores, 3 (20 %) eran ingenieros, 1 (7 %) era físico y 1 (7 %) era economista. En relación al idioma utilizado en las entrevistas, 11 (73 %) fueron realizadas en catalán, 3 (20 %) en español y 1 (7 %) en inglés. La media de duración de los episodios fue de 10 minutos, con una desviación estándar de 3 minutos y 40 segundos.

La nota media del estudiantado en esta actividad fue de un 7.7 sobre 10. Se presenta en la Tabla 2 el detalle de la nota media en cada apartado de la rúbrica.

Tabla 2: Nota media en cada apartado evaluable.

Presentación del grupo	0.9 puntos	(sobre 1)
Registro lingüístico	1.3 puntos	(sobre 1.5)
Introducción de la persona entrevistada	1.2 puntos	(sobre 1.5)
Contenido de las preguntas	1.5 puntos	(sobre 2)
Relación con los temas trabajados en clase	1.7 puntos	(sobre 2)
Conclusiones y reflexión del grupo	1.1 puntos	(sobre 2)

Además de estos aspectos, es importante destacar otros hallazgos no previstos con anterioridad. Se ha observado una variabilidad significativa en el contenido de las entrevistas realizadas. La mayoría de las entrevistas reflejan una comprensión sólida de los conceptos trabajados en clase, mostrando aplicaciones de vectores y valores propios, de la representación diagonal de matrices o cuestiones de ortogonalidad y distancias, mientras que otras se centran en temas más generales relacionados con la importancia de las matemáticas en la sociedad o su aplicabilidad en un sentido abstracto. Estas entrevistas no abordan cuestiones concretas de la asignatura, lo cual era uno de los objetivos de la actividad.

Encuesta

Al acabar el semestre se pidió al alumnado que contestase una encuesta en el Aula Virtual que recogía los apartados detallados en la Tabla 3. Se pidió evaluar los campos mediante las siguientes etiquetas (1) Totalmente en desacuerdo, (2) En desacuerdo, (3) Indiferente, (4) De acuerdo, (5) Totalmente de acuerdo. De las 59 personas matriculadas en el grupo, contestaron a la encuesta 39 (66 %). Se recogen los resultados en la Figura 1.

Valoración

Los resultados de la encuesta reflejan una evaluación generalmente positiva de la experiencia de uso de los pódcasts como herramienta de contextualización en la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría I. El estudiantado ha valorado la claridad de la descripción de la actividad, con una puntuación media de 4.41, la utilidad de la rúbrica de evaluación, aproximadamente el 70 % de ellos estando de acuerdo o totalmente de acuerdo, la capacidad de la actividad para contextualizar contenidos, con una puntuación media de 3.77, y trabajar habilidades interpersonales (puntuación media de 3.90), así como su satisfacción general

Tabla 3: Apartados incluídos en la encuesta.

1. La descripción de la actividad ha sido clara.
2. La rúbrica de evaluación me ha sido de utilidad.
3. La actividad propuesta me ha comportado poca carga de trabajo.
4. La actividad me ha servido para contextualizar los contenidos.
5. La actividad me ha servido para trabajar habilidades interpersonales.
6. La actividad propuesta me ha gustado.
7. Prefiero este tipo de actividades para los seminarios de la asignatura.

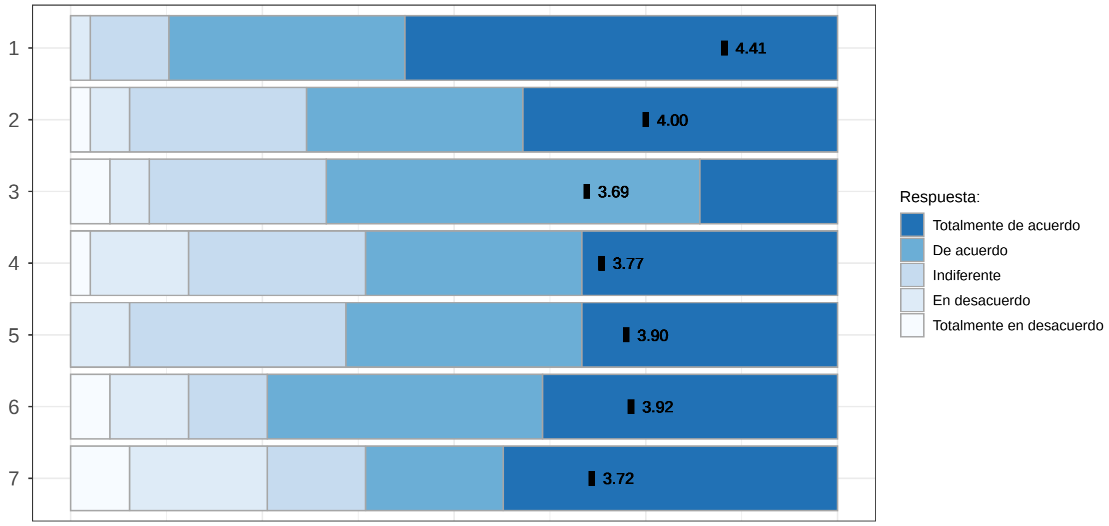


Figura 1: *Resultados de la encuesta.*

con la propuesta, 62 % de ellos estando de acuerdo o totalmente de acuerdo con este ítem.

Por otra parte, valoramos positivamente la experiencia desde el punto de vista del profesorado, pues esta actividad no ha generado una carga excesiva de trabajo y el formato utilizado ha permitido realizar una corrección eficiente y entretenida, en un entorno menos formal y estático. También se ha percibido que trabajar en equipo y escuchar las entrevistas de los compañeros ha fortalecido la interacción y la colaboración entre el alumnado, creando un ambiente más positivo y enriquecedor en la asignatura.

CONCLUSIONES

En conclusión, la experiencia de uso de pódcasts como herramienta de contextualización de resultados en la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría I ha demostrado ser beneficiosa tanto para el alumnado como para el profesorado. Los pódcasts han brindado al alumnado la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos en situaciones reales, a través de entrevistas a profesionales que utilizan esos conceptos en su trabajo diario.

Esta experiencia ha fomentado el compromiso y la participación activa del alumnado, al permitirles compartir sus hallazgos con sus compañeros y con una audiencia más amplia a través de las plataformas en línea. Además, el uso de pódcasts ha facilitado el acceso flexible al contenido, lo que ha permitido al alumnado revisar y profundizar en los temas de una manera más conveniente y autónoma. Además de la contextualización de resultados, se ha observado que los pódcasts han contribuido al desarrollo de habilidades interpersonales, como la capacidad de comunicación y la colaboración en grupo. El estudiantado ha tenido la oportunidad de interactuar con profesionales y de compartir sus propias ideas y reflexiones.

Si bien esta experiencia ha sido exitosa, también se han identificado áreas de mejora. Una de ellas es la necesidad de considerar la diversidad en las personas entrevistadas, evitando cualquier tipo de sesgo, incluyendo aquellos relacionados con cuestiones de género. Es fundamental asegurar una representación equitativa de distintas voces y perspectivas en los contenidos de los pódcasts, para fomentar un ambiente inclusivo y enriquecedor. Además, es imprescindible una planificación y coordinación adecuadas para garantizar la participación activa de todo el alumnado y para que realicen entrevistas significativas y de calidad. Asimismo, se deben establecer pautas claras que proporcionen orientación adicional al alumnado para asegurar que el contenido de las entrevistas se enfoque en los conceptos específicos estudiados en la asignatura, asegurando que el contenido generado cumpla con los estándares académicos.

En definitiva, el uso de pódcasts en la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría I ha enriquecido el proceso de aprendizaje al brindar una experiencia práctica y significativa. Esta experiencia ha destacado la importancia de integrar herramientas tecnológicas en el currículo de matemáticas para promover un aprendizaje activo, el desarrollo de habilidades y la contextualización de resultados. Se recomienda seguir explorando y promoviendo este tipo de experiencias en la educación matemática, en busca de una formación más enriquecedora y adaptada a las necesidades del estudiantado.

AGRADECIMIENTOS
Agradecemos la labor del equipo editorial de las Terceras Jornadas de Innovación Docente en Matemáticas en Educación Superior de la Universitat de València, así como la revisión del presente trabajo por las personas encargadas.

REFERENCIAS

[1] Àlgebra Lineal i Geometria I - El podcast. *Ivoox, Spotify* (2022).

[2] Bergqvist, T. Podcasting mathematics. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 20 (4), 147 (2013).

[3] Cosme Llópez, E. Descripció de l'activitat, Àlgebra Lineal i Geometria I - El podcast. Enlace al documento, Visitado: 2023-10-18, (2021).

[4] Crespo García, R. Memoria de verificación del título oficial de grado: Graduado/a en Matemáticas. Enlace al documento, Visitado: 2023-06-05, (2010).

[5] Evans, C. The effectiveness of m-learning in the form of podcast revision lectures in higher education. *Computers & education*, 50 (2), 491–498 (2008).

[6] McGarr, O. A review of podcasting in higher education: Its influence on the traditional lecture. *Australasian journal of educational technology*, 25 (3), (2009).

[7] Merhi, M. I Factors influencing higher education students to adopt podcast: An empirical study. *Computers & Education*, 83, 32–43 (2015).

Análisis Funcional, Teoría de Distribuciones de Schwartz y ChatGPT en Ingeniería Física

J. Alberto Conejero[1], **Lucas Goiriz**[2] **& Antoni López-Martínez**[3]

[1] ***Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València, Spain, e-mail: aconejero@upv.es.***
[2] ***Institute for Integrative Systems Biology (I2SysBio), CSIC–University of Valencia, Spain, e-mail: lucas.goiriz@csic.es.***
[3] ***Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València, Spain, e-mail: alopezmartinez@mat.upv.es.***

Functional Analysis, Schwartz Distributions Theory and ChatGPT in Physics Engineering

RESUMEN

La formación en matemáticas en titulaciones tanto de física como de ingeniería está esencialmente orientada a la presentación de los conceptos fundamentales y de sus aplicaciones. Sin embargo, cada vez hay una mayor disponibilidad de recursos online relacionados con la parte divulgativa, que podrían hacer más atractivas las asignaturas pero que acabamos obviando. Por otra parte, el auge de los Grandes Modelos de Lenguaje, como ChatGPT, ha iniciado una reflexión profunda sobre la práctica docente, principalmente en la evaluación.

En esta contribución presentamos una experiencia desarrollada en un curso de métodos avanzados de análisis matemático para ingeniería física. En ella combinamos la parte divulgativa y el uso de ChatGPT, proporcionando una visión actualizada de herramientas clásicas de análsis como pueden ser la Teoría de Distribuciones o las Series de Fourier para la resolución de EDP's.

Palabras clave: ChatGPT, Grandes Modelos de Lenguaje, Análisis Funcional, Teoría de Distribuciones, Series de Fourier, Ecuaciones en Derivadas Parciales.

ABSTRACT

Mathematics education in both physics and engineering degrees is essentially addressed to the presentation of fundamental concepts and their applications. However, there is an increasing availability of online resources related to the informative part, which could make the subjects more attractive, but which we end up ignoring. Besides, the rise of Large Language Models, such as ChatGPT, has initiated a deep reflection on teaching practice, mainly in evaluation.

In this contribution we present an experience recently developed in a course of advanced methods on mathematical analysis for engineering physics. In it we combine the informative part and the use of ChatGPT, thus providing an updated view of classical analysis tools such as the Theory of Distributions or Fourier Series for the resolution of PDEs.

Keywords: ChatGPT, Large Language Models, Functional Analysis, Theory of Distributions, Fourier Series, Partial Differential Equations.

INTRODUCCIÓN

En la docencia universitaria se habla con mucha frecuencia de la incorporación de *nuevas metodologías docentes*. En muchos casos, se utiliza el concepto de "nuevo" simplemente para indicar que se están empleando metodologías más allá de la lección magistral en el aula. No obstante, sería más preciso insistir en que esa "novedad" fuera real. En ese sentido, es pertinente que el profesorado no sólo domine la materia que imparte sino que se encuentre también en la parte metodológica y se mantenga lo más actualizado posible en ambos sentidos.

El 30 de noviembre de 2022 la tecnológica **Open AI**, fundada en el año 2015, lanzó al público y en abierto *ChatGPT* (Generative Pretrained Transformer), un chatbot basado en un *Gran Modelo de Lenguaje* (Large Language Model [9]) que ha sido desarrollado mediante aprendizaje por refuerzo basado en textos escritos, permitiéndole tener un aspecto conversacional. En los primeros días tras su lanzamiento causó furor, a nivel mundial, por la sorprendente capacidad de dar respuesta a cuestiones de lo más variado y de una manera bastante precisa. De hecho, ChatGPT consiguió en solo dos meses más de 100 millones de usuarios, entre los que podemos encontrar a gran parte de la actual comunidad de jóvenes universitarios, teniendo un crecimiento exponencial mucho más acusado que el de las también actuales y famosas redes sociales de *Tik-Tok* e *Instagram*. Con el tiempo se ha ido desarrollando la forma de preguntar a ChatGPT, tanto con el objetivo de obtener respuestas más precisas (prompting) [15], como para esquivar algunas de las limitaciones o simplemente forzarlo a que conteste de manera errónea, sacando a relucir algunos de los sesgos de los que adolece y que residen en los datos utilizados para el entrenamiento del mismo, véase [10].

Al poco de su lanzamiento apareció el debate de si se podría limitar su uso o bien de cómo debería integrarse correctamente en la docencia, así como las repercusiones que iba a tener en el área de la investigación científica. En este último campo ya existe una opinión bastante generalizada sobre la capacidad de la actual inteligencia artificial, y aunque ChatGPT ha demostrado ser de gran ayuda en diversas tareas, todavía esta muy lejos de poder llevar a cabo una investigación real por si mismo (véase [5]), sobre todo si nos centramos en las áreas de la ciencia más cercanas a la lógica como las matemáticas. En cuanto a la docencia, dado que los trabajos académicas que los estudiantes realizan no exigen tanto como una investigación científica, es entendible que los docentes quieran prohibir estas herramientas pensando en el proceso de evaluación.

Ante esta situación, en diciembre de 2022 nos propusimos aceptar el reto de incorporar ChatGPT en la docencia, explorando su uso como herramienta de apoyo al aprendizaje conjuntamente con los estudiantes. En esta comunicación describimos la experiencia docente llevada a cabo con los alumnos de una asignatura de matemáticas avanzadas, en un grado de ingeniería física, con el objetivo de responder a la pregunta: "¿Cuánto y cómo pueden nuestros alumnos usar ChatGPT en un trabajo de los que típicamente usamos para evaluarlos?".

Nos gustaría destacar que experiencias similares han sido llevadas a cabo en distintos contextos (véanse [8] y [14]), pero el punto de partida de todas ellas es el mismo: imponer el uso obligatorio de ChatGPT en una o varias tareas determinadas, sin seguir la norma general establecida en la docencia universitaria actual basada en la prohibición de su uso, y luego observar las consecuencias e impacto que tiene este hecho para los estudiantes y en sus trabajos.

El resto del artículo se ha organizado como sigue: en primer lugar se expone el **Contexto de la experiencia docente**, luego la **Metodología** empleada, para pasar finalmente a los **Resultados** obtenidos y a las **Conclusiones** finales.

Contexto de la experiencia docente

La asignatura en cuestión se titula "*Métodos Matemáticos II*" (MMII), que forma parte del "*Grado en Ingeniería Física*", el cual ha sido incorporado recientemente en la **Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación** (ETSIT) de la **Universitat Politècnica de València** (UPV).

En esta asignatura de 2º curso se presentan los espacios métricos en sentido abstracto, para posteriormente introducir los espacios de Banach y los espacios de Hilbert, así como operadores sencillos entre ellos. En concreto, se estudian operadores entre espacios de dimensión finita, pero también entre espacios de funciones y sucesiones, prestando especial atención al caso Hilbert por su gran interés para la formulación de la mecánica cuántica, temática que se trata en el grado pero en cursos posteriores. Luego se introducen los conceptos clave de serie y transformada de Fourier, desde un punto de vista abstracto y de manera complementaria a como se estudian en las asignaturas de grado relacionadas con teoría de la señal, observándolas desde el dominio de las frecuencias. Ya al final de la asignatura, se incluyen las distribuciones (definidas tanto en el espacio de funciones test como en el espacio de las funciones de la clase de Schwarz), sus transformadas y aplicaciones para resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales, analizando los casos particulares de la ecuación del calor, y sobre todo de la ecuación de ondas. Más en concreto, las *Unidades Didácticas* incluidas en la *Guía Docente* de la asignatura en la página web del grado son siete:

(1) Espacios métricos, espacios de Banach y espacios de Hilbert.
(2) Operadores en espacios de Banach y en espacios de Hilbert.
(3) Teoría espectral en espacios de Hilbert.
(4) Análisis harmónico.

(5) Series e integrales de Fourier.
(6) Aplicaciones a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.
(7) Aplicaciones: Teoría ergódica, caos, termodinámica y mecánica cuántica.

Los libros de Bollobás [1], Shima [12] y Stritcharz [13] forman un compendio de las referencias teóricas básicas de la materia en cuestión.

La asignatura consta de 6 ECTS, distribuidos en teoría de aula (3), prácticas de aula ($1{,}8$) y prácticas informáticas ($1{,}2$). En el aula se combina la exposición en forma de lección magistral con la resolución de problemas. No obstante, se insiste mucho en dar una visión computacional de todos estos temas, para lo cual se han desarrollado 5 prácticas para trabajar con el lenguaje de programación *Python* (véase [7] para una introducción al mismo), cubriendo los contenidos:

1. **Normas de vectores y operadores**: se revisan las distintas normas de vectores en espacios de dimensión finita, pero también se exploran sus extensiones más conocidas a espacios de funciones y sucesiones mediante las correspondientes técnicas de integración. Esta práctica forma parte y se incluye dentro de las Unidades Didácticas (1) y (2) mencionadas arriba.

2. **Teoría espectral, grafos y redes**: introduciendo el paquete “NetworkX” de Python, su utilidad para el tratamiento de grafos/redes y su relación con el álgebra lineal, la teoría espectral y en particular los valores propios de las matrices de adyacencia. Esta práctica forma parte y se incluye dentro de las Unidades Didácticas (2) y (3) anteriormente mencionadas.

3. **Series de Fourier**: revisando la teoría vista en clase sobre el clave sistema trigonométrico, pero llevando el tema a un terreno computacional mediante las distintas herramientas que Python presenta para el cálculo, simbólico y exacto, de los coeficientes de Fourier, exponiendo también aplicaciones. Esta práctica forma parte de las Unidades Didácticas (4) y (5).

4. **Transformada de Fourier**: estudiando de forma computacional tanto la transformada continua como la discreta, mostrando aplicaciones directas de dicha teoría como el tratamiento de señales de audio, y enfrontando la estabilidad de las transformadas en relación a la señal original. En esta práctica se trabajan las Unidades Didácticas (4), (5) y (6).

5. **Sistemas dinámicos, caos y fractales**: introduciendo el teórico concepto de sistema dinámico, exponiendo sus distintas aplicaciones y abordando el fenómeno conocido como caos, donde aparecen los famosos fractales, y sus aplicaciones, de manera natural. Esta práctica forma parte y desarrolla también la Unidad Didáctica (7) anteriormente mencionada.

En el curso 2022-2023 la teoría del aula fue impartida por Alberto Conejero y las prácticas fueron elaboradas por Lucas Goiriz y Antoni López-Martínez, e impartidas por este último, todos ellos siendo miembros y/o colaboradores docentes en el *Departamento de Matemática Aplicada* (DMA) de la UPV. La cantidad de alumnos que cursaron esta materia fueron 73.

La evaluación de la asignatura se realiza mediante la resolución de ejercicios, de respuesta abierta escritos ($70\,\%$), o basados en las prácticas de laboratorio y para resolver computacionalmente mediante el uso de Python ($20\,\%$). Además, se propone un trabajo a desarrollar en grupos de 2 ó 3 personas sobre alguno de los contenidos de la asignatura, que debe ser expuesto en grupo, con el fin de completar la calificación ($10\,\%$) y poder evaluar la competencia transversal de "*Comunicación efectiva*", que es la que se ha acordado adjudicar, desde la dirección del centro, a esta asignatura para su evaluación. Es en esta última parte de la evaluación, en el trabajo en grupo, en la que hemos desarrollado la innovación docente propuesta en esta comunicación.

METODOLOGÍA

A la hora de evaluar la competencia de comunicación efectiva se entiende que es importante considerar tanto la parte escrita como la parte oral. Es por ello que al comienzo del curso se pensó en facilitarle a los estudiantes materiales divulgativos sobre aspectos directa o indirectamente relacionados con el contenido de la asignatura para que elaborarán una presentación, y además entregaran un documento en el que se desarrollaba el trabajo realizado. Además, y con el fin de que profundizaran en el contenido y no sólo lo transcribieran, se les propuso que desarrollaran, computacionalmente, algunas de las cuestiones que hubieran aparecido alrededor del trabajo.

En relación con esta parte computacional, y teniendo en cuenta que ChatGPT no sólo había sorprendido con el grado más que razonable de precisión en sus respuestas si no también con la capacidad que tenía para desarrollar códigos que dieran solución a un problema, se les propuso a los alumnos que como parte del trabajo era **obligatorio usar ChatGPT** y documentar su uso, poniendo énfasis tanto en la **utilidad de su uso**, como en las **limitaciones encontradas**. Esta imposición *contrasta* con las *medidas usuales* que se han tomado durante los últimos meses sobre el uso de ChatGPT en la docencia universitaria, y que desde el principio se ha basado en el rechazo absoluto y la prohibición de una herramienta, a la cual tiene acceso todo el mundo de manera gratuita si se dispone de un dispositivo electrónico con internet y una cuenta de Google [6].

Si bien es cierto que es práctica común facilitar a los alumnos artículos, bien sea de investigación o de carácter divulgativo, se decidió ir un paso más lejos y facilitar como referencias artículos del agregador de blogs **Medium**. De hecho, tras realizar una inspección del contenido, los profesores propusieron los varios artículos que se relacionan en la Tabla 1, en la que indicamos el título de cada entrada, junto con su enlace, así como los contenidos que se tratan en estas. Como se puede observar, los contenidos cubren los temas propiamente dichos de la asignatura, como las series y transformadas de Fourier, las ecuaciones en derivadas parciales o la teoría de distribuciones, pero también contenidos que están indirectamente relacionados pero que no se cubren en otras materias del grado, como puede ser la teoría del caos, la ciencia de redes o el uso de Python para la realización de simulaciones numéricas.

Tabla 1: Lista de artículos publicados en el servicio de blogs Medium propuestos a los estudiantes de MMII para desarrollar con la ayuda de ChatGPT.

Título	***Contenidos tratados***
Fourier Series	Harmonic Analysis, Orthogonal Systems and Fourier Coefficients
Fourier Transform	Harmonic Analysis, Fourier Series and Fourier Transform
Fast Fourier Transform	Harmonic Analysis, Signal Processing and Neural Networks
Network Science with NetworkX	Graph Theory, Python Packages and Graph Representation
Montecarlo Tree Search	Data Science, Python Packages and Solving Algorithms
The Butterfly Effect	Dynamical Systems, Chaos Theory and the Butterfly Effect
Chaos Theory: Fractals	Dynamical Systems, Chaos Theory and Fractals
The Feigenbaum Constant	Dynamical Systems, Chaos Theory and Logistic Equation
Eduard Lorentz: Father of Chaos	Dynamical Systems, Chaos Theory and the Butterfly Effect
Python: Complex Systems	Dynamical Systems, Chaos Theory and Lorentz Attractor
Distributions: The Dirac Delta	Distributions, Measure Theory and the Dirac Mass distribution
The Wave Equation	Waves in Physics, some particular PDEs and its solution
PDEs using Fourier Analysis	Wave Equation, some particular PDEs and its solution

A los estudiantes se les propuso 10 minutos para la presentación y otros 10 minutos para debatir con ellos. Este trabajo, que podría haber sido individual, se planteó hacerlo en grupos de 2 ó 3 personas creándose 25 grupos. Esto se debe a que: por una parte, el impacto de la actividad era sólo de un $10\,\%$ de la nota final; y por otro lado, el periodo de tiempo de evaluaciones era limitado y debía ser asumible el poder asistir, por parte del profesorado, a todas las presentaciones y posteriormente preguntar a los alumnos sobre el trabajo desarrollado.

RESULTADOS

Los resultados que presentamos en esta sección son puramente cualitativos y están basados en las opiniones que los alumnos nos trasladaron después de la realización del trabajo y el uso de ChatGPT en el mismo. En concreto, hemos dividido esta sección en dos partes: incluimos primero las **limitaciones** que ha presentado ChatGPT y posteriormente los **puntos fuertes** del mismo.

Algunas limitaciones

Aunque inicialmente se pretendía que el uso de ChatGPT fuera en dirección a la obtención de código (la parte computacional del trabajo), los estudiantes han acabado utilizándolo (y documentando su uso) incluso para realizar preguntas aclaratorias sobre los conceptos teóricos. Sin embargo, como la actividad fue propuesta a los pocos días de aparecer ChatGPT, no eran todavía muy conocidas las diferentes opciones a la hora de realizar preguntas al chatbot.

La mayoría de las preguntas o peticiones sobre el contenido han ido en la línea de solicitar explicación o aclaración de los conceptos centrales de cada trabajo: "*¿Qué es la teoría del caos?*" o "*¿Qué es un fractal?*". En muchos de los casos los propios alumnos solicitan una síntesis de las respuestas recibidas "*¿Puedes explicármelo de manera más breve?*". No obstante, este conocimiento en ocasiones no distaba mucho de aquel que los propios estudiantes podían encontrar en Wikipedia y ellos mismos confesaban que "*es conveniente tener unas nociones a cerca de lo que se pregunta para entender la respuesta*". Esta es una limitación de ChatGPT que también ha sido expuesta en experiencias similares (véase [14]).

Si hablamos de "razonamientos", y en concreto de pedirle a ChatGPT que "razone", aunque el chatbot sí lograba contestar correctamente y hacer entender a los alumnos indicaciones generales a preguntas del tipo "*¿Cómo llegar desde la ecuación de Schrödinger a la ecuación de ondas?*", este era incapaz de dar respuestas coherentes a preguntas más complejas como "*Si la derivada de la función Heaviside es la delta en sentido distribucional, ¿existe alguna ecuación generalizada cuya n-ésima derivada sea la función delta?*". Es conveniente notar que este tipo de preguntas de mayor complejidad están más cerca de lo que sería investigación matemática y la lógica que de un mero trabajo de recopilación de información o definiciones, aunque ChatGPT tampoco resultó de gran ayuda a la hora de interpretar "*diagramas de bifurcación*" o de comprender conceptos más teóricos tales como "*la dependencia sensible de las condiciones iniciales*".

En relación a las limitaciones anteriormente incluidas, debemos tener en cuenta que la versión de ChatGPT utilizada fue la 3.0, y que esta y otras herramientas basadas en modelos generativos y Grandes Modelos de Lenguaje han seguido evolucionando en los últimos meses. De hecho, es conveniente mencionar que las versiones de ChatGPT 3.5 (gratuita) y 4.0 (de pago) ya están disponibles desde marzo de 2023.

Algunos puntos fuertes

Lo que sí llamó poderosamente la atención de los estudiantes es la capacidad de generar un código que diera solución a un problema formulado únicamente con texto: "*¿Puedes escribir un código en Python que que dibuje el diagrama de bifurcación de la ecuación logística?*" o "*¿Podrías facilitarme un código para calcular los coeficientes de Fourier de una función en Python?*". Si bien es cierto que en la mayoría de casos los códigos no compilaban correctamente nada más ser devueltos, estaban razonablemente escritos y estructurados, incorporando las librerías necesarias para ejecutar las funciones utilizadas. El avance de obtener estos códigos es sustancial para los estudiantes pues, aunque algunos alumnos sí se veían capaces de haber generado dicho código por sí mismos buscando ayuda en manuales de referencia o Stack Overflow, el ahorro de tiempo que implica es considerable: "*Me he ahorrado mucho tiempo a la hora de hacer la tarea, aunque si no supiera programar no habría podido completarla*".

Por otro lado, ChatGPT funciona muy bien para entender que hace un cierto código, "*¿Puedes documentar este código y decirme qué hace en cada línea?*", o a la hora de aprender a utilizar otras herramientas informáticas como LATEX "*¿Cómo se inserta una figura en un documento de LATEX?*" o "*¿Cómo puedo incluir en LATEX una tabla de valores con 4 filas y 5 columnas?*".

Cabe destacar que en seguida aparecieron mcuhos plugins para navegadores como "*YouTube summary with ChatGPT*" para resumir vídeos, o también como "*ChatGPT for Google Chrome Search*" para integrar las búsquedas en la barra del navegador, y que los propios alumnos empezaron a utilizar inmediatamente.

CONCLUSIONES

En esta contribución hemos mostrado como una herramienta computacional y muy novedosa, ChatGPT, ha podido ser incluida en el marco de un curso de matemáticas teóricas, en particular de contenidos de análisis vinculados con la física. El hecho de que fuera un curso orientado a presentar diversas herramientas matemáticas y a explorar su uso desde la parte computacional ha facilitado su incorporación. Tal como hemos comentado, ChatGPT resulta de gran ayuda para resolver cuestiones incluso a nivel universitario, sobre todo computacionalmente, aunque a nivel de posgrado todavía presenta limitaciones tal como se comenta en la mayoría de artículos que hablan del tema actualmente (véase [4]).

Con la progresión de la inteligencia artificial en la última década, y ahora más recientemente de los Grandes Modelos de Lenguaje, que ya llevan avisando de su gran potencial desde hace unos años (véase [9]), nos veremos cada vez más ante la urgencia de replantear los sistemas de evaluación que utilizamos para puntuar a los alumnos, sobre todo aquellos en los que el profesor no está totalmente presente durante el desarrollo del trabajo. Se ha visto como ChatGPT no sólo resulta de utilidad para los estudiantes, sino también al profesorado en el diseño de tareas, directamente preguntándole posibles actividades a realizar en un contexto concreto, o bien para facilitar tareas administrativas (véase [11]).

En este sentido, plantear análisis minuciosos de la respuesta de herramientas generadoras de contenido, y basadas en inteligencia artificial, nos puede aportar no sólo una manera de actualizar las herramientas que se manejan a la hora de exponer y evaluar una asignatura, sino que sirven además para fomentar el espíritu crítico de los estudiantes, potenciando también su capacidad a la hora de interaccionar exitosamente con ellas. Dado que su impacto va a ser considerable en las tareas de carácter matemático, tal y como se remarca en diversos artículos que tratan este tema (ver por ejemplo [2]), es conveniente formar a los alumnos teniendo presente cuales son las características y competencias que les pueden aportar, y que van a necesitar en un futuro totalmente cercano.

Por último, con esta experiencia se pretendía comunicar de manera clara que los alumnos no eran ajenos a las últimas tecnologías. De hecho, sólo un tercio de nuestros estudiantes (27 de 73) oyó por primera vez de la herramienta ChatGPT al ser presentada la actividad en clase. En ese sentido, y aunque los alumnos que ya la conocían la utilizaban para que resolviera (al menos parcialmente) ciertas tareas, el hecho de **tener que documentar** su uso favoreció que los estudiantes la vieran desde un punto de vista crítico, y no sólo como una **caja mágica** que les podría ayudar a resolver sus tareas mucho más rápidamente.

En cualquier caso, y como punto final a esta comunicación, debemos ser capaces de transmitir a los estudiantes que la **cautela** es nuestra mejor arma ahora mismo frente al uso de ChatGPT, pues actualmente es una herramienta útil pero incompleta y su uso indiscriminado (al menos en pleno 2023) puede llevar, por una lado al error en las tesis obtenidas, y por otro lado al rechazo por parte de la comunidad científica [3].

REFERENCIAS

[1] Bollobás, B. *Linear Analysis: an introductory course.* Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University PressElsevier, 1990.

[2] Eloundou, T. et al. GPTs are GPTs: An early look at the labor market impact potential of large language models. *arXiv* 2303.10130 (2023).

[3] Else, H. Abstracts written by ChatGPT fool scientists. *Nature*, **613** (7944), 423 (2023).

[4] Frieder, S. et al. Mathematical capabilities of ChatGPT. *arXiv* 2301.13867 (2023).

[5] Holden Thorp, H. ChatGPT is fun, but not an author. *Science*, **379** (6630), 313 (2023).

[6] Hao, Y. Reflection on whether Chat GPT should be banned by academia from the perspective of education and teaching. *Frontiers in Psychology*, **14** 1181712, (2023).

[7] Lutz, M. *Learning python: Powerful object-oriented programming.* O'Reilly Media, Inc, 2013.

[8] Pérez Colomé, J. "Obligo a usar ChatGPT en mis clases". Así es la irrupción inexorable de la nueva IA a las aulas. *El País*. <https://elpais.com/tecnologia/> [Consulta: 21 de septiembre de 2023]

[9] Radford, A., Wu, J., Child, R., Luan, D., Amodei, D., Sutskever, I. Language models are unsupervised multitask learners. *OpenAI blog*, **1** (8), 9 (2019).

[10] Ray, P.P. ChatGPT: A comprehensive review on background, applications, key challenges, bias, ethics, limitations and future scope. *Internet Things Cyber-Phys. Syst.*, **3**, 121-154 (2023).

[11] Sabzalieva, E., Valentini, A. ChatGPT and artificial intelligence in higher education. UNESCO (2023).

[12] Shima, H. *Functional Analysis for Physics and Engineering: An Introduction.* CRC Press, 2016.

[13] Strichartz, R.S. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. World Scientific Publishing Company, 2003.

[14] Vukovic R. ChatGPT lesson activity: Secondary students testing the fallibility of AI <https://www.teachermagazine.com/au_en>
[Consulta: 21 de septiembre de 2023]

[15] White, J. et al. A prompt pattern catalog to enhance prompt engineering with ChatGPT. *arXiv* arXiv:2302.11382 (2023).

Aprendizaje Basado en Proyectos y Coevaluación en la intensificación "Análisis Inteligente de Datos".

Ana Debón[1], Josep Domenech[2], Sonia Tarazona[1], Fernando Polo[2], Javier Ribal[2]

[1] ***Departamento de Estadística e I.O. Aplicadas y Calidad, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, e-mail: andeau@eio.upv.es;*** **sotacam@eio.upv.es.**

[2] ***Departamento de Economía y Ciencias Sociales, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, e-mail: jdomench@upvnet.upv.es; ferpogar@esp.upv.es;*** **frarisan@upv.es.**

Project-Based Learning and Co-evaluation in the specialization "Análisis Inteligente de datos"

RESUMEN

La nueva especialización denominada "Análisis Inteligente de Datos" del Grado en Administración y Dirección de Empresas de la Facultad de Administración y Dirección de Empresas de la Universitat Politècnica de València ofrece a los estudiantes conocimientos necesarios para integrar el análisis de datos en tareas empresariales rutinarias. En esta especialización, se integran las habilidades estadísticas e informáticas con la aplicación de modelos estadísticos avanzados para el análisis de datos multivariantes y la programación en lenguaje R. Todo lo mencionado se aprende a través de la metodología de Aprendizaje Basado en Proyectos, donde se ha potenciado el aprendizaje cooperativo a través de la coevaluación. Este enfoque ha permitido un alto nivel de manejo e integración del análisis de datos en las rutinas de trabajo dotando a los estudiantes de ADE de una formación altamente cualificada y diferenciada, que les permitirá extraer información útil de bases de datos para tomar mejores decisiones.

Palabras clave: Aprendizaje basado en proyectos, Aprendizaje Cooperativo, Coevaluación.

ABSTRACT

The new specialization called "Intelligent Data Analysis" in the bachelor's degree in Business Administration and Management at the Faculty of Business Administration and Management of the Universitat Politècnica de València provides students with the necessary knowledge to integrate data analysis into routine business tasks. In this specialization, statistical, computer, and ICT skills acquired in the degree are enhanced through advanced statistical models for multivariate data analysis and R language programming. This is learned through a Project-Based Learning methodology that promotes cooperative learning through co-evaluation. This approach has led to a high level of proficiency and integration of data analysis in work routines, providing ADE students with highly qualified and differentiated training that will allow them to retrieve useful information from databases to make better decisions.

Keywords: Project-Based Learning, cooperative learning, co-evaluation.

INTRODUCCIÓN

La educación superior actual y las nuevas exigencias del mercado laboral requieren que los profesores universitarios innoven en su enseñanza para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, el aprendizaje basado en proyectos (ABP) está ganando popularidad como herramienta para fomentar las habilidades del siglo XXI a través de la exploración, la creación y la construcción de soluciones a problemas reales [1].

Estrategias como el ABP ha demostrado ser fundamental para fomentar el trabajo cooperativo, la autonomía y la vinculación con el mundo profesional. Este aprendizaje se basa en los puntos clave [2] que resumimos a continuación: la identificación de una pregunta o problema auténtico relacionado con la realidad que guía el proyecto y la resolución de tareas complejas por parte de los estudiantes de manera colaborativa, con un alto grado de autonomía y toma de decisiones, donde se adopta un papel activo para resolver la cuestión inicial.

El trabajo cooperativo en las aulas de enseñanza universitaria es una herramienta metodológica muy adecuada para la adquisición de competencias transversales importantes para el alumnado. Pero dicha cooperación no debe entenderse como una suma de tareas independientes desarrolladas por los miembros del grupo. De acuerdo con Pla-Castells et al. [3] y Johnson y Jonhson [4], el aprendizaje cooperativo debe tener los siguientes elementos: (1) Interdependencia positiva, (2) interacción, (3) responsabilidad individual, (4) uso adecuado de habilidades sociales y; (5) procesamiento grupal.

La Universitat Politècnica de València (UPV), a través de su Instituto de Ciencias de la Educación (ICE), ha fomentado los proyectos de innovación y mejora educativa (PIME). En lo que respecta a la implementación de la metodología ABP, podemos encontrar un recopilatorio web [5] de esta en los años 2018, 2019 y 2020.

Aprovechando esta experiencia, en el curso 2020-21, en la UPV, comenzó la intensificación "Análisis Inteligente de Datos" del grado en Administración y Dirección de Empresas de la Facultad de Administración y Dirección de Empresas (FADE). El planteamiento inicial y sus resultados en 2020 se recogen en el trabajo Debón et al [6].

En este trabajo analizamos los resultados finales del proyecto y su continuación hasta el presente curso 2022-2023. El objetivo actual es implantar una estrategia de ABP en el ámbito de la economía y la empresa donde los estudiantes aprendan de forma colaborativa aplicando conocimientos avanzados de análisis de datos. Por ello, una parte importante es la evaluación de ese trabajo colaborativo a través de una rúbrica de coevaluación.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo este proyecto de innovación docente, se ha constituido un equipo compuesto por profesores de dos departamentos distintos: Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad (DEIOAC) y Economía y Ciencias Sociales (DECS). El software utilizado en la intensificación es R [7], un entorno de programación flexible que puede ampliarse con paquetes, bibliotecas o funciones personalizadas. Para facilitar la programación en R, se utiliza RStudio [8], una interfaz gráfica con funcionalidades adicionales.

Planificación

Para la enseñanza de las asignaturas, se han creado diversos materiales: prácticas guiadas para resolver con R, exámenes de preguntas tipo test, tareas de resolución de casos, una plantilla para redacción de informes a través de R Markdown, y una guía para la realización del proyecto. Poliformat[1] ha sido la herramienta principal utilizada para confeccionar y publicar los exámenes y tareas, así como para calificar a los estudiantes.

Por todo ello, estas son las habilidades y competencias del profesorado necesarias para llevar a cabo con éxito este proyecto:

1. Dominio en el manejo del programa R, sus R-packages y la interfaz RStudio.
2. Experiencia docente en asignaturas en el grado de ADE, tanto de estadística como de economía.
3. Manejo de la plataforma Poliformat y, en particular, cómo funciona la generación de baterías y exámenes.

En clase, para resolver los casos prácticos, se ha utilizado RStudio, R y R Markdown [9], lo que ha permitido integrar el código y la explicación, mostrando así cómo debían proceder los estudiantes en la elaboración del proyecto.

En la primera asignatura Inteligencia de negocios I (INI) se trabaja cómo

[1] PoliformaT es la plataforma de teleformación de la Universidad Politécnica de Valencia.

gestionar bases de datos, exploración y visualización de datos y relaciones entre variables. En esta asignatura se hace una entrega parcial del proyecto.

La entrega final del proyecto se produce en Inteligencia de negocios II (INII), si bien se hace uso de las conclusiones obtenidas en la primera parte. Los estudiantes, que trabajan durante todo el curso en grupos de 2-3 miembros, reciben diferentes conjuntos de datos seleccionados como muestras aleatorias de una base de datos más grande. Las temáticas trabajadas son del ámbito de la economía y la empresa. El primer curso describía la situación de desgaste de los empleados de IBM, el segundo la valoración de viviendas y este año ha versado sobre la orientación de una nueva campaña de marketing basada en la concesión o no de préstamos a los clientes de una entidad bancaria. El proyecto tiene tareas y plazos definidos para la entrega de un informe final en Poliformat. Este documento se somete a la herramienta de control de plagio "turnitin". Finalmente, los estudiantes hacen una presentación oral en el aula.

Coevaluación

Dado el incremento en el número de alumnos este curso, se ha introducido como novedad la co-evaluación intra-grupo del trabajo realizado por cada miembro del equipo. Así, tras la entrega y defensa del trabajo tanto de INI como INII, cada alumno debe valorar el esfuerzo y participación de sí mismo y de cada miembro de su equipo utilizando una rúbrica. Esta rúbrica supone valorar en una escala de 0 a 10 diversas dimensiones del trabajo realizado, concretamente: contribución y participación, actitud y resolución de conflictos, responsabilidad, asistencia y puntualidad. Además, deben asignar un porcentaje al trabajo que ha realizado cada uno de forma que el total sume 100. También, pueden añadir comentarios para justificar su asignación de notas y porcentajes.

A partir de las respuestas se elabora un factor corrector para la nota del proyecto. Este factor suele estar entre 0.5 y 1.5 aproximadamente y tiene en cuenta la coherencia de las respuestas de los integrantes del grupo y su justificación, además de la observación en clase y la presentación oral del proyecto donde se evalúan los conocimientos de cada estudiante a través de preguntas específicas dirigidas a cada componente del grupo. Finalmente, se obtiene la nota de cada estudiante a partir de la formula (1):

$$Nota\ proyecto = Nota\ memoria\ x\ factor\ corrector \qquad (1)$$

RESULTADOS

En este apartado, comentamos los resultados académicos de nuestros estudiantes que, en general, han sido buenos. Para ello, se muestran en la Figura 1 los resultados en ambas asignaturas en el curso 2020-21, la nota mediana en la primera parte (INI) ha sido ligeramente mayor. A continuación, se muestra en la Figura 2 los resultados del siguiente curso 2021-22, donde las notas en general bajaron y donde puede apreciarse de nuevo mayor nota en la primera asignatura. En tercer lugar, la Figura 3 muestra los resultados en este último curso 2022-23, las notas se han recuperado siendo mejores que el curso anterior y a niveles del primer año. Y vuelve a producirse el patrón de mejores notas en la primera parte de la intensificación.

Puesto que son los mismos estudiantes cabe la pregunta de si han obtenido resultados significativamente diferentes en ambas asignaturas, para lo que hemos realizado un t-test de comparación de medias para muestras pareadas, la Tabla 1 muestra el estadístico de contraste y su p-valor para cada curso.

En el curso 2020-21, el contraste arroja un p-valor= 0,2346, por lo que podemos concluir que no existe evidencia suficiente para pensar que las medias son significativamente diferentes. Sin embargo, en los dos años siguientes 2021-22 y 2022-23 con p-valor= 0,0023 y 0,0432, respetivamente. En estos cursos sí existe evidencia suficiente para pensar que las notas medias son significativamente diferentes debido a diversos factores como dificultad de los contenidos.

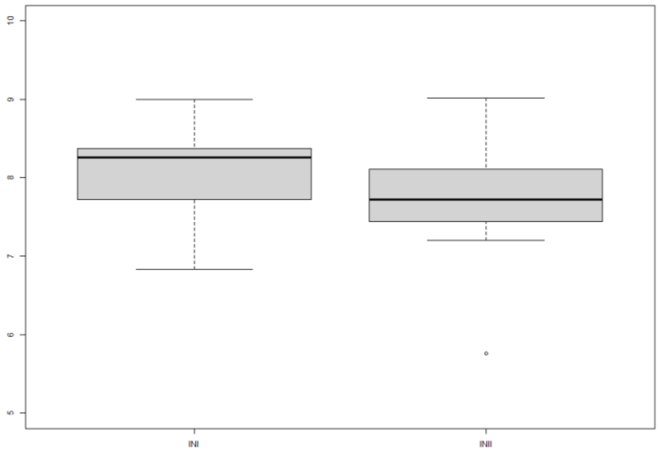


Figura 1: Notas finales de las asignaturas Inteligencia de Negocios I y II para el curso 2020-21.

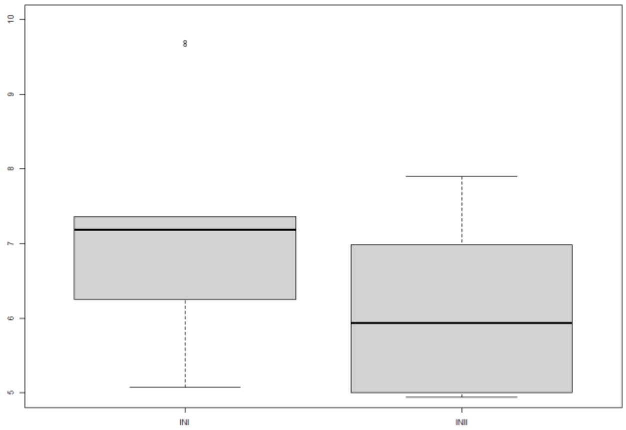


Figura 2: Notas finales de las asignaturas Inteligencia de Negocios I y II para el curso 2021-22.

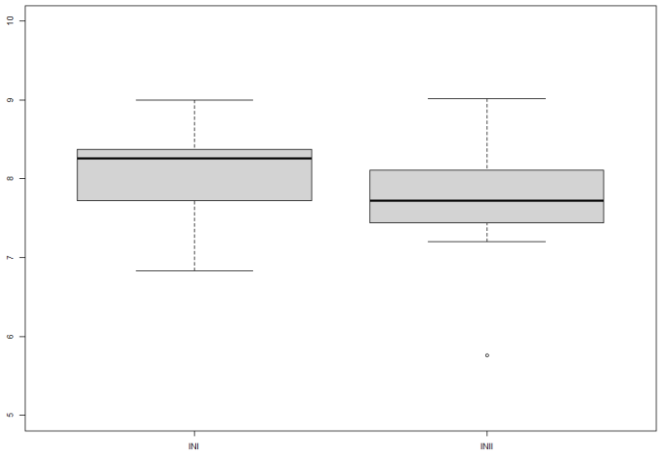


Figura 3: Notas finales de las asignaturas Inteligencia de Negocios I y II para el curso 2022-23.

Tabla 1: Contraste t-Student de comparación de medias para muestras pareadas.

Curso	*Estadístico t (p-valor)*
2020-21	1,28 (0,2346)
2021-22	4,64 (0.0023)
2022-23	2,14 (0,0432)

Fuente: Elaboración propia.

Respecto a las competencias transversales evaluadas, los resultados han sido también satisfactorios, puesto que todos los estudiantes han alcanzado las competencias de trabajo en equipo y liderazgo, aprendizaje permanente, así como el manejo de instrumental específico, la comunicación efectiva y el diseño y proyecto.

Por último, comentaremos los resultados de la co-evaluación intra-grupo realizada este curso, para ilustrar cómo ha afectado a la nota final de cada estudiante dentro de cada grupo Tabla 2.

En la Tabla 2, podemos observar que en el curso 2022-23 los valores del coeficiente corrector han oscilado entre 0.60 y 1.10. Mientras que muchos grupos han trabajado de forma equitativa y el coeficiente corrector es 1 para todos sus miembros, otros grupos (en rojo en la Tabla 2) no han tenido la misma contribución al trabajo por parte de todos sus miembros por lo que las notas finales se han podido ajustar en ese sentido. Notar también que, en algunos casos, la coevaluación en INI sirvió para detectar grupos que no estaban trabajando bien juntos y reorganizarlos para la segunda parte de la asignatura (por ejemplo, el grupo 10, que pasó a estar formado por una sola persona).

CONCLUSIONES

El objetivo de la innovación docente era implantar una estrategia de ABP en el ámbito de la economía y la empresa donde los estudiantes adquiriesen competencias de forma colaborativa aplicando conocimientos avanzados de análisis de datos. Por ello incluimos la evaluación de ese trabajo colaborativo a través de una rúbrica de coevaluación.

Tabla 2: Coeficiente corrector de la nota final obtenido a partir de la co-evaluación intra-grupo 2022-23 para cada grupo y estudiante en INI e INII.

Grupo I	Coef I	Grupo II	Coef II
1	1,00	1	1,00
1	1,00	1	1,00
1	1,00	1	1,00
2	1,00	2	1,00
2	1,00	2	0,60
2	1,00	2	0,90
3	1,00	3	1,00
3	0,95	3	0,70
3	1,00	3	1,00
4	1,00	4	1,00
4	1,00	4	1,00
5	0,75	5	1,00
5	1,10	5	1,00
5	1,00	5	1,00
6	1,00	6	0,85
6	1,05	6	1,00
6	0,90		
7	1,00	7	0,90
7	1,00	7	1,00
7	1,00	7	0,90
8	1,00	8	1,00
8	1,00	8	1,00
8	1,00	8	1,00
9	1,00	10	1,00
9	1,00		

Fuente: Elaboración propia. En rojo, aquellos grupos con coeficiente corrector distinto entre sus miembros.

En primer lugar, nos gustaría destacar la dificultad de la coordinación entre las asignaturas de la intensificación, impartidas por 5 profesores de dos departamentos. Dicha coordinación ha sido posible gracias al uso del mismo software, lo que ha generado una continuidad en la forma de trabajo del alumno con RStudio, R y Rmarkdown. Además, estableciendo un orden en los contenidos, se ha prestado atención a la exploración y visualización de datos, el manejo de bases de datos, así como a la transformación de la información y a la modelización y su aplicación a datos de negocios.

Con la inclusión de la coevaluación en este último curso se ha pretendido fomentar el trabajo cooperativo entre los integrantes del grupo recogiendo evidencias del buen funcionamiento del grupo a través de una rúbrica. Los resultados y comentarios honestos de los estudiantes han demostrado la utilidad de dicha co-evaluación para otorgar calificaciones más acordes al trabajo realizado por cada uno, así como para realizar cambios en los grupos que peor estaban funcionando en la segunda parte de la asignatura.

Este enfoque ha permitido un alto nivel de manejo e integración del análisis de datos en las rutinas de trabajo dotando a los estudiantes de ADE de una formación altamente cualificada y diferenciada. En resumen, se ha logrado una formación integral y completa en el manejo de datos y su aplicación en el mundo empresarial.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado con un proyecto de la convocatoria Aprendizaje + Docencia: Proyectos de Innovación y Mejora educativa (PIME/20-21/200) de la Universitat Politècnica de València.

REFERENCIAS

[1] La Fuente-Martinez, M. (2019) *¿Mejora el aprendizaje del alumnado mediante el trabajo por proyectos? ¿Qué funciona en educación?* Institut Catalá de Polítiques Públiques. Fundación Jaume Bofill, 2019.

[2] Chen, C. H., Yang, Y. C. Revisiting the effects of project-based learning on students' academic achievement: A meta-analysis investigating moderators. *Educational Research Review*, **2019**, 26, 71-81.

[3] Pla-Castells, M., Melchor, C., Garcia-Marques, M.E. (2022). La creación de rúbricas de coevaluación como herramienta de enseñanza-aprendizaje. Una experiencia con los futuros maestros de educación primaria. In *IIJID+: Jornades d'Innovació Docent en Matemátiques en Educació Superior.* Proyecto de Innovación Educativa y Calidad Docente: "Desarrollo de competencias transversales en matemáticas a través de la docencia presencial y on-line." (UV-SFPIE_PID-1640542), 2022, pp. 23-29.

[4] Johnson, D. W., Johnson, R. T. *La evaluación en el aprendizaje cooperativo*. Ediciones SM España, 2015.

[5] Instituto Ciencia de la Educación. Proyectos de Innovación Docente y Mejora Educativa (PIME). Aprendizaje basado en Proyectos. https://www.ice.upv.es/profesorado/plan-de-apoyo-al-desarrollo-profesional-del-docente-de-la-upv/innovacion/pime-proyectos-de-innovacion-y-mejora-educativa/pime/ [Consulta: 16 mayo de 2023].

[6] Debón Aucejo, A. M., Tarazona Campos, S., Doménech i de Soria, J., Polo Garrido, F. La intensificación "Análisis Inteligente de Datos": una experiencia de Aprendizaje Basado en Proyectos. In *IN-RED 2021: VII Congreso de Innovación Educativa y Docencia en Red;* Universitat Politècnica de València, 2021, pp. 962-969.

[7] R Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundati on for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2022. https://www.R-project.org/.

[8] Posit team. *RStudio: Integrated Development Environment for R.* Posit Software, P BC, Boston, MA, 2023. http://www.posit.co/.

[9] Xie, Y.; Dervieux, C.; Riederer, E. (2020). *R Markdown Cookbook*. Chapman and H all/CRC, 2020. https://bookdown.org/yihui/rmarkdown-cookbook.

Exemples d’ús de figures retòriques en exposicions orals acadèmiques de nivell universitari

Francisco Pedroche[1]

[1] ***Departament de Matemàtica Aplicada, Universitat Politècnica de València, Camí de vera s/n, pedroche@mat.upv.es.***

Examples of the use of rhetorical figures in academic oral presentations at university level

RESUM

Actualment, l’alumnat que s'incorpora als primers cursos de graus universitaris sol vindre amb un cert bagatge en fer exposicions orals. Per descomptat, cal ajudar-los a millorar les tècniques d'exposició, començant per la pròpia estructura de l'exposició oral, la tipografia, les tècniques de representació de les dades, el maneig del llenguatge verbal i no verbal, etc. Un dels aspectes importants en el discurs oral és l’ús de figures retòriques, això és, expressions que s’allunyen de l’ús gramatical normal per donar més expressivitat al llenguatge. L’objectiu d’aquesta comunicació és mostrar exemples de com ensenyar l’alumnat a fer servir figures retòriques per explicar conceptes matemàtics. En particular, ens centrem en les figures de l’analogia, la metàfora i l’el·lipsi. L’ús d’aquestes figures s’ha treballat en el desenvolupament de la docència de l’assignatura Projecte I, comprensió de dades, del grau de Ciència de Dades a l’Escola Tècnica Superior d’Enginyeria Informàtica de la Universitat Politècnica de València.

Paraules clau: Analogia, Metàfora, Estadística, Ciència de dades

ABSTRACT

Currently, students who join the first courses of university degrees usually come with a certain background in giving oral presentations. Of course, it is necessary to help them improve their presentation techniques, starting with the structure of the oral presentation itself, typography, data representation techniques, handling verbal and non-verbal language, etc. One of the important aspects in oral speech is the use of figures of speech, that is, expressions that depart from normal grammatical use to give more expressiveness to the language. The aim of this communication is to show examples of how to teach students to use figures of speech to explain mathematical concepts. In particular, we focus on the figures of analogy, metaphor and ellipsis. The use of these figures has been worked on in the development of the teaching of the Project I, data understanding subject, of the Data Science degree at the ETSE Informàtica of the Universitat Politècnica de València.
Keywords: Analogy, Metaphor, Statistics, Data science

INTRODUCCIÓN

L'alumnat dels primers cursos d'ensenyament universitari viu immers en el món de les aplicacions per a telèfons intel·ligents, principalment les dedicades a xarxes socials [1]. Alguns estudis ([2],[3],[4]) indiquen que un ús addictiu de les xarxes socials pot causar que els estudiants es troben més estressats o amb més ansietat. La meua experiència personal, amb els meus alumnes del grau de Ciència de Dades, és que estan acostumats a missatges ràpids i impactants, i quan han de fer alguna exposició oral es controlen molt bé el temps. Com a exemple, d'onze exposicions orals que vaig haver d'avaluar recentment, absolutament cap grup va excedir els 15 minuts reglamentaris. La majoria de l'alumnat desenvolupa les exposicions orals de manera desimbolta, venen entrenats de l'institut, però òbviament necessiten recomanacions i contingut teòric sobre diversos aspectes de les comunicacions orals. En la literatura hi ha moltes fonts sobre la importància de la retòrica tant en la ciència (v., per exemple, [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]) com en l'àmbit universitari (v. [12], [13], [14], [15]).

L'objectiu d'aquesta comunicació és mostrar exemples de com ensenyar l'alumnat a fer servir figures retòriques per explicar conceptes matemàtics. En particular, ens centrem en les figures de l'analogia, la metàfora i l'el·lipsi (vegeu més endavant per a les corresponents definicions). A eixe respecte és bo recordar que, en 1991, el professor de física R. Duit [16] deia que "poc es coneix sobre com s'usen les analogies en la classe". Tanmateix, l'ús d'analogies és molt comú en àmbits científics i tots podríem anomenar alguna analogia que recordem o usem contínuament en classe. Entre les analogies clàssiques que se solen usar en classes de matemàtiques i física podem citar:

- Analogia entre corrent elèctric i corrent d'aigua
- Analogia entre força gravitatòria i força elèctrica
- Analogia entre difusió d'un gas i difusió d'un virus
- Analogia entre ones de so i ones de llum

A més, quan posem un examen de matemàtiques, sol ser un exercici *com* els fets en classe però canviant els números. A eixe respecte, consulteu [17] sobre el grau d'analogia entre enunciats de problemes.

Si bé la primera construcció teòrica sobre l'analogia se sol referenciar a Aristòtil (v. [18],[19]), el concepte modern d'analogia es basa en les interpretacions de John Stuart Mill i, més actual, de Dedre Gentner (v. [20], [21], [22] i les referències que s'hi citen). D'acord amb Gentner, les analogies es basen en la semblança estructural. A més, segons [23] (text usual en les facultats de comunicació) la fórmula general d'una analogia seria: *A és a B allò que C és a D*. Pel que fa a l’ús en l’ensenyament s’accepta que l’analogia estableix una relació entre un concepte nou (l’objectiu d’aprenentatge, objectiu *target*) i un concepte familiar (l’objecte font de l’analogia, objecte *base*). Per exemple, en [24] es mostra una analogia per explicar com els pandes han sobreviscut malgrat ser poc eficients a l’hora de menjar i reproduir-se, usant com a objectiu base els programes de televisió que són pobres informant i entretenint però continuen en la graella. Indiquem, per últim, que una metàfora es pot considerar com una comparació abreujada (*A és B*), mentre que en una comparació o símil usem el connector “com” (*A és com B*) [v. 25].

Experiències similars

Treballs com [26], [27] i [28] han inspirat aquesta comunicació. En [26] es descriu una experiència docent posada en pràctica al llarg de diversos anys en una assignatura optativa sobre retòrica en l’àrea del Dret Romà centrada en l’alumnat de la Facultat de Dret de la UPV/EHU. L’objectiu inicial de l’experiència era millorar la comunicació oral en l’àmbit forense. L’alumnat havia de preparar una declamació poètica, un discurs polític i un discurs forense. A més participaven en un Torneig-Debat. Les conclusions del treball estan presentades de manera qualitativa (per exemple, es diu que es va aconseguir una millora de l’agilitat mental, millorar la capacitat d’anàlisi i lògica, foment del pensament crític, etc. No s’hi presenten dades ni taules de resultats. En [27] es tracta de determinar si l’ús d’analogies, comparacions i metàfores fa millorar les actituds cognitives i d’aprenentatge de l’alumnat. Sobre una mostra de 201 alumnes de biologia de quatre instituts de secundària d’Indiana (EUA) es compara l’efecte d’ensenyar dos conceptes (desenvolupament embrionari i genètica mendeliana) en forma d’analogia o en forma literal. L’estudi presenta una anàlisi estadística dels resultats però no arriba a conclusions definitives. En la meua opinió el treball és una bona mostra de la dificultat de mesurar el resultat d’aquests tipus d’experiències docents. A més, hem de pensar que els resultats es refereixen a l’efectivitat de les analogies concretes que s’han fet servir. El treball [28] se centra en les classes de tres professores de física explicant continguts de Mecànica, en el context de física universitària. Es mostren exemples de la utilització d’arguments basats en el l’exemple, argument per la il·lustració, per analogia, per metàfora, causa-efecte etc., seguint la nomenclatura d’arguments de [23]. En la comunicació es centren més en descriure cada tipus d’argument que en mesurar el resultat de l’argument sobre la comprensió dels estudiants usant indicadors o amb una anàlisi posterior dels resultats. Un dels aspectes interessants és com mostren que l’ús de diversos arguments enforteix l’explicació (així per a explicar el concepte d’energia cinètica es pot fer ús de l’exemple (llançament d’una moneda que impacta sobre algú), de l’autoritat (conservació de l’energia) i nexe causa-efecte (l’energia cinètica d’una bala és deguda a l’alta velocitat i fa molt mal si impacta sobre persones).

CONTEXT DE L’EXPERIÈNCIA DOCENT

En aquesta comunicació detallem alguns exemples que hem usat per a explicar figures retòriques en l’assignatura obligatòria de primer curs “Projecte I, comprensió de dades” del grau de Ciència de Dades impartit en l’Escola Tècnica Superior d’Enginyeria Informàtica de la Universitat Politècnica de València durant el curs 2022-23. L’assignatura té una càrrega de 6 crèdits ECTS, i està impartida en quatre grups per quatre professors. La experiència que es comenta en aquesta comunicació és la desenvolupada per l’autor, pertanyent al Departament de Matemàtica Aplicada, que impartia aquesta assignatura per primera vegada, impartint classes en dos grups d’aquesta assignatura. La innovació pedagògica no ha estat emmarcada en cap projecte d’innovació docent de la universitat. L’avaluació de l’assignatura es basa en el desenvolupament d’un projecte elaborat en grups d’uns 5 alumnes, al llarg del quadrimestre. Cada grup d’alumnes pot triar el tema que preferisca, sempre tenint en compte l’objectiu de tractar una quantitat considerable de dades. Els professors fan un seguiment continu del projecte i van donant retroalimentació. Al final del quadrimestre cada grup ha d’entregar una memòria (seguint les normes de TFG de l’Escola), un vídeo resum, les dades usades i els codis informàtics utilitzats. A més, han d’exposar oralment el treball.

METODOLOGIA

Com a mètode, en aquesta innovació, usem l’anomenat estudi de casos [29], en el sentit que s’estudien uns casos particulars en un context real, del tipus de treball en petits grups [30], ja que els exemples se solen fer en tutoritzar els grups d’alumnes, i amb una interpretació qualitativa [31]. És a dir, es tracta d’un estudi amb el mateix esperit que la referència [28] comentada abans, on les dades estan representades pels exemples que mostrem.

En aquesta comunicació ens interessem sobre com hem explicat l’ús de figures retòriques tant per a l’exposició oral final com per a motivar l’objecte de cada projecte. No entrem a detallar les figures retòriques que els alumnes han usat en els seus treballs, ja que l’autoria intel·lectual és dels propis alumnes, però cal destacar que en tots els treballs tutoritzats per l’autor (un total de sis treballs) els membres de l’equip han usat en major o menor mesura figures retòriques de manera conscient per il·lustrar aspectes del seu treball.

Seguint a [32] el mètode d'ensenyament usant analogies consisteix en els passos següents:

- Introduir el concepte objectiu
- Accedir a la font de l'analogia
- Identificar les característiques fonamentals de la font i l'objectiu
- Establir les similituds entre font i objectiu
- Analitzar on pot fallar l'analogia
- Establir les conclusions sobre l’analogia

Usarem aquest esquema per a explicar cadascun dels exemples ensenyats en classe. En [32], on es mostren exemples d'analogies per explicar conceptes estadístics com histograma de freqüències, diagrama de caixa i bigots, estandardització de variables, etc., es poden trobar també referències d'estudis experimentals que mostren l'efectivitat de l'ús de l'analogia per a ensenyament d'assignatures científiques.

EXEMPLES

1. Reducció de la dimensionalitat.

Quan s'usen gran quantitat de dades és interessant buscar relacions entre les variables de manera que es puga reduir les magnituds que expliquen la variabilitat de les dades i mantinguen les característiques fonamentals del problema. Com que aquest tipus de reducció pot ser usat també per estalviar dades, és la base d'alguns mètodes de compressió de dades, de visualització, i és de gran ajut en tècniques de *Machine Learning* per a entrenar models sense usar totes les dades a l'abast [33].
Per il·lustrar aquest concepte usem l'exemple següent: es considera el pla z=6 i tres punts que pertanyen a ell. Per exemple: P=(2,3,6), Q=(-1,4,6) i R=(-5,-6,6). Donat que els tres punts tenen la tercera component igual, és clar que podem estalviar-nos aquesta dada per tal d'identificar els punts (obviant el fet que tots pertanyen a eixe pla). Ací una possible analogia es pot fer amb un grup d'estudiants que formen una classe, agafant-ho com a conjunt inicial (*base*), i un conjunt que representa el pla (v. Figura 1).

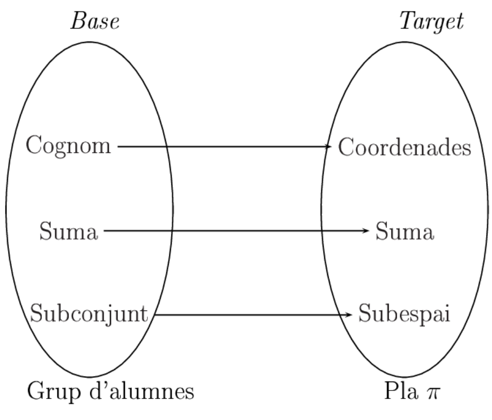


Figura 1: Analogia entre un grup d'alumnes i un pla

A l'igual que els punts pertanyen a un pla, els alumnes pertanyen a la classe. Per identificar un alumne de la classe no és necessari anomenar-ho amb nom i els dos cognoms, en la majoria de situacions bastarà amb usar només el cognom. Vet ací la reducció de dades. Clarament l'analogia falla en ser un conjunt finit i l'altre infinit, però permet explicar altres conceptes com ara que la suma de alumnes són alumnes, a l'igual que la suma de vectors són vectors (això, clar està, agafant un pla que passe per (0,0,0), no el pla inicial z=6). De la mateixa manera es pot fer l'analogia d'un subconjunt d'alumnes i un subespai vectorial d'un pla que passe per l'origen, etc.

A partir de l'explicació anterior podem abordar l'explicació de la tècnica de l'**anàlisi de components principals.** Hem de notar ací que l'alumnat estudiarà aquesta tècnica en segon curs, i que quan nosaltres l'abordem, elles i ells estan rebent en classe d'Àlgebra els fonaments d'espais vectorials. Per tant, disposem de molts pocs recursos teòrics per explicar-ne els fonaments i per això usem, directament, el programa Statgraphics (que l'alumnat ja sap utilitzar). Construïm tres variables x, y, i z, donant valors aleatoris a les dues primeres i imposant z=x+3y. A continuació, calculem una **anàlisi de components principals** sobre les tres variables i, en el nostre cas, hem obtingut la taula de variància explicada de la Figura 2. Com ha passat abans, donat que una de les variables es combinació lineal de les altres dues, només necessitem dues coordenades (components principals) per descriure les dades. De fet, només amb una coordenada explicaríem el 64% de la variabilitat de les dades.

Component	Valor propi	% Variància explicada acumulada
1	1,92	64
2	1,08	100
3	0,00	

Figura 2: Variància explicada amb una anàlisi de components principals

2. Equilibri Competitiu

En el camp de les competicions esportives és usual el terme equilibri competitiu (*Competitive Balance*, [34], denotat com CB) per referir-se al grau d'igualtat en una competició entre dos equips. En els manuals d'economia de l'esport s'assumeix freqüentment que una competició amb un gran equilibri competitiu dona lloc a un elevat grau d'incertesa en el resultat i això es tradueix en un alt interès del públic en assistir o presenciar tal esdeveniment esportiu. Una manera d'explicar l'equilibri competitiu es fent servir un balancí, com en la Figura 3.

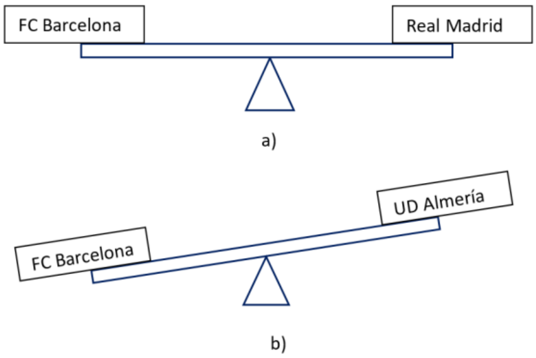


Figura 3: Analogia per explicar el concepte d'equilibri competitiu

En la Figura 3 a) es representa els dos primers equips de la Lliga espanyola de futbol 22/23. Un encontre entre aquest dos equips sempre apareix com molt equilibrat, i per tant amb gran CB. Tanmateix un enfrontament entre dos equips com Barcelona FC (campió del torneig) i la UD Almería (posició 17 del torneig) sempre apareix com a desequilibrat a favor de l'actual campió, i per tant, tindrà un valor baix de CB. Quan s'estudien tots els equips involucrats en un campionat, aquesta analogia es pot estendre a més equips, com en la Figura 4. Notem que aquesta analogia té l'estructura: el moviment dels equips en la classificació és com el moviment de persones en un balancí.

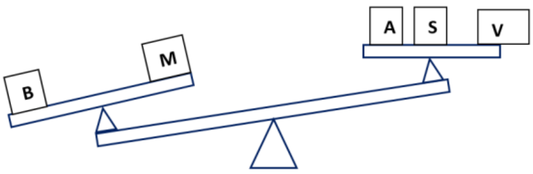


Figura 4: Equilibri competitiu entre cinc equips

3. Figura visual: el·lipsi

Una el·lipsi és una figura retòrica que consisteix a suprimir una o més paraules que no són necessàries per a la claredat del sentit [25]. Les figures retòriques també es poden fer servir de manera gràfica. Per exemple en la Figura 4 (realitzada amb dades de [35]) mostrem una el·lipsi visual: per tal de dibuixar en la mateixa gràfica un valor molt més gran que la resta, es fa un tall en un dels eixos (tall que no és real, és metafòric) perquè l'observador realitze una el·lipsi visual (en aquesta figura s'assumeix un salt continu des del valor 10000 al 100000).

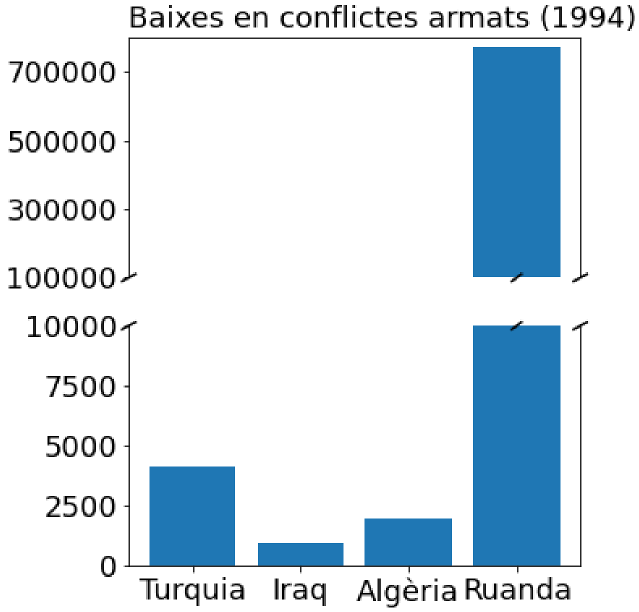


Figura 4: El·lipsi visual

4. Índex de qualitat de l'aire

L'índex de qualitat de l'aire mesura el nivell de contaminació en un lloc determinat a partir de les mesures de concentracions de certs contaminants. El fet característic d'aquesta mesura és que es defineix com el pitjor dels valors dels contaminants. Per exemple, segons [36], a les 12 h. del 7 de juliol de 2023 l'IQA de Burjassot era de 28 perquè aquest era el màxim indicador de contaminació, corresponent al O_3. En aquesta mateixa data, l'IQA de la zona de València-Politècnic era de 37 ja que eixe era el màxim indicador de contaminació, corresponent a les partícules PM2.5. L'analogia que es por fer servir ací és que donar l'IQA és com donar els resultats d'una analítica de sang: només ens importen els nivells que s'hi troben fora de control.

CONCLUSIONS

En aquesta comunicació hem donat un esquema formal de com usar analogies i hem presentat uns exemples usats a l'assignatura Projecte I, comprensió de dades, que il·lustren com ensenyar a usar analogies en classe per tal de motivar projectes escrits així com a usar-les en fer exposicions orals. La nostra experiència constata que l'ús d'analogies és una bona ferramenta per introduir conceptes nous, a la vegada que és motivadora i font de noves relacions entre els conceptes. Això està d'acord amb diverses fonts de la bibliografia. Per exemple, en [16] trobem "the role of analogies and metaphors in science must be considered to be an essential aspect of science instruction", mentres que [32] diu: "analogies can be extraordinarily powerful tools for enhancing learning outcomes", i en [15] trobem: "analogies provide the means by which fragments of poorly connected understanding can be accessed and integrated when explaining scientific phenomena”. Per acabar, cal destacar que l’objectiu últim de la experiència docent no és que l’alumnat use els mateixos exemples que el professor, sinó que siga un estímul per promoure les seues pròpies analogies. Així va ocórrer en els grups de treball tutoritzats per l’autor, els quals han usat de manera conscient figures retòriques tant en els seus treballs escrits com en les exposicions orals per tal d’explicar conceptes científics.

AGRAÏMENTS

L’autor vol fer constar el seu agraïment pels comentaris constructius de la persona revisora anònima que han servit per millorar l’estructura i el contingut de la comunicació.

REFERÈNCIES

[1] Organización de Consumidores y Usuarios. Los adolescentes e Internet: uso, actividades y riesgos. Encuesta OCU, 13 de marzo 2023. Pàgina web: https://www.ocu.org/tecnologia/internet-telefonia/informe/encuesta-adolescentes-online [Consulta: 6 de juliol de 2023]

[2] Arredondo-Hidalgo, M. G., Caldera-González, D. Tecnoestrés en estudiantes universitarios. Diagnóstico en el marco del covid-19 en México. *Educación Y Humanismo*, 24(42), (2022).

[3] Rozgonjuk, D., Saal, K., Täht, K. Problematic Smartphone Use, Deep and Surface Approaches to Learning, and Social Media Use in Lectures. *Int. J. Environ. Res. Public Hea*lth, 15, 92, (2018).

[4] Sanz-Blas, S., Buzova, D., Miquel-Romero. M.J. From Instagram overuse to instastress and emotional fatigue: the mediation of addiction. *Spanish Journal of Marketing - ESIC* Vol. 23 No. 2, pp. 143-161, (2019).

[5] Ruse, M. La retòrica de la ciència i per què és important, *Mètode*, 83, p. 6, (2015).

[6] Monzón-Laurencio, L. A. La retórica, otra ciencia de la educación. *La Colmena* (81), 29-40. (2014).

[7] Serrano, S. Paradoxes i argumentació. De la retòrica als refinaments de la matemàtica. En Fernández Planas, A. Ma. (ed.) (2016): 53 reflexiones sobre aspectos de la fonética y otros temas de lingüística, Barcelona, págs. 493-501. (2016).

[8] Oppenheimer, R. Analogy in science. *American Psychologist, 11*(3),127-135. (1956).

[9] Ramírez, V. Leyton, P. Andrés bello y la difusión de la astronomía: educación y retórica científica. *Asclepio. Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia* 69 (2), p. 198, (2017).

[10] Molina, I. La retórica de las matemáticas en los tratados aritmético-algebraicos del Renacimiento. *Rilce. Revista De Filología Hispánica*, 34(1), 286-311. (2018).

[11] Dreistadt, R. An Analysis of the Use of Analogies and Metaphors in Science, *The Journal of Psychology: Interdisciplinary and Applied*, 68:1,97-116, (1968).

[12] Obarrio, A., Masferrer, A., (Ed). Expresión oral y proceso de aprendizaje: la importancia de la oratoria en el ámbito universitario. Madrid. Dykinson, (2013).

[13] Hernández, J.M. Pervivencia de la retórica. La docencia universitaria y la comunicación empresarial. *Llengua Societat i Comunicació*, 3, 47- 57, (2005).

[14] Farina, J., Milicic, B., Jardón, A., Fernández, P. Estructuras retóricas en libros de texto de física: argumentaciones sobre la entropía. *Revista De Enseñanza De La Física*, *28*, 109–117. (2016).

[15] Wong, D. E. “Understanding the Generative Capacity of Analogies as a Tool for Explanation.” *Journal of Research in Science Teaching : the Official Journal of the National Association for Research in Science Teaching*., vol. 30, no. 10, pp. 1259–72, (1993).

[16] Duit, R. On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science Education*, 75(6):649-672. (1991).

[17] Bassok, M. Analogical transfer in problem solving. In J. E. Davidson & R. J. Sternberg (Eds.), *The psychology of problem solving* (pp. 343–369). Cambridge University Press. (2003).

[18] Aristòtil. Retórica (Traducción de Quintín Racionero). Ed. Gredos. Colección Nueva Biblioteca Clásica. (2022).

[19] Muñoz C. Analogía y ciencia en Platón: apuntes introductorios para la comprensión de su vínculo metafísico. *Revista de Estudios Clásicos* 53, pp 15-43, (2022).

[20] Gentner, D. Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science* 7(2), 155–170. (1983).

[21] Hoyos, C., Horton, W. S., Simms, N. K., Gentner, D. Analogical Comparison Promotes Theory-of-Mind Development. *Cognitive Science*, 44(9) e12891, (2020).

[22] Olmos, P., Vega, L. (Eds.) Compendio de lógica, argumentación y retórica. 3ª ed. Editorial Trotta. (2016).

[23] Perelman, C., Olbrechts-Tyteca, L. Tratado de la argumentación. La nueva retórica Gredos. 1a. ed. (1989).

[24] Thagard, P. Analogy, explanation, and education. *Journal of Research in Science Teaching* (29), 6, 537-544, (1992).

[25] Hervé, G. V. Diccionario práctico de figuras retóricas y términos afines. Ed Albricias. Buenos Aires, Argentina, (2009).

[26] Tamayo, J. A. La formación del alumnado universitario a través de la retórica Univest 2011: III Congreso Internacional "La autogestión del aprendizaje", (2011).

[27] Gilbert, S.W. An evaluation of the use of analogy, simile, And metaphor in science

texts. *Journal of research in science teaching.* 26(4), 315-327, (1989).

[28] Fagúndez, T., Castells, M. La argumentación en clases Universitarias de física: Una perspectiva retórica. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, Revista de investigación y experiencias didácticas*. Núm. 30.2, 153-174, (2012).

[29] Bromley, D.B. The Case-Study Method in Psychology and Related Disciplines. Chichester: Wiley. (1986).

[30] Herreid, C. F. Start with a story: The case study method of teaching college science. National Science Teachers Association. (2006).

[31] Gillham, Bill. Case study research methods.London, New York:Continuum. (2000).

[32] Martin, M. A. It's Like...You Know: The Use of Analogies and Heuristics in Teaching Introductory Statistical Methods. *Journal of Statistics Education*, 11, 1-28, (2003).

[33] Garzón, M. *et al* (Ed.) Dimensionality reduction in data science. Springer. (2022).

[34] Zimbalist, A. S. Competitive Balance in Sports Leagues: An Introduction. *Journal of Sports Economics*, 3(2), 111121. (2002).

[35] Upsala Conflict data Program. https://ucdp.uu.se/encyclopedia [Consulta: 6 de juliol de 2023]

[36] Indice de calidad del aire en València. https://www.eltiempo.es/calidad-aire/valencia [Consulta: 7 de juliol de 2023]

Estrategias inclusivas para la visualización de contenido matemático tridimensional

Lucía Rotger García[1], Juan Miguel Ribera Puchades[2], María Luisa Cuadrado Sáez[3]

[1] ***Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, Universitat de les Illes Balears, Crta. De Valldemossa, km. 7,5, 07122, Palma de Mallorca (Illes Balears), Spain e-mail: lucia.rotger@uib.es.***
[2] ***Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, Universitat de les Illes Balears, Crta. De Valldemossa, km. 7,5, 07122, Palma de Mallorca (Illes Balears), Spain, e-mail: j.ribera@uib.es.***
[3] ***I.E.S. Doctor Faustí Barberà, Conselleria de Educació Comunitat Valenciana, Spain, e-mail: l.cuadradosaez@edu.gva.es***

Inclusive Strategies for the Visualization of Three-Dimensional Mathematical Concepts

RESUMEN

El uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de los conceptos de geometría puede ser una estrategia que favorezca el diseño de propuestas inclusivas en la que se prevengan posibles dificultades. Es por ello que el objetivo de esta comunicación es el de presentar recursos tecnológicos de diferente tipo para el desarrollo de destrezas de visualización tridimensional y que permitan modelizar conceptos matemáticos tridimensionales. De esta forma, se pretende generar diferentes representaciones de una misma figura tridimensional a partir de herramientas como los programas de modelado tridimensional, la Realidad Aumentada o la Realidad Virtual, en línea con el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA). La propuesta que se presenta se ha llevado a cabo en un contexto de resolución de problemas de matemáticas con alumnado de último curso de Educación Secundaria. Los resultados muestran la preferencia de herramientas diferentes dependiendo de los diferentes contextos de los problemas propuestos.

Palabras clave: Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), Geometría Tridimensional, Realidad Aumentada, Realidad Virtual, Modelización Geométrica, Visualización

ABSTRACT

The use of technological tools in teaching geometry concepts can be a strategy that promotes the design of inclusive proposals aimed at preventing potential difficulties. Therefore, the objective of this communication is to present various types of technological resources for the development of three-dimensional visualization skills and to enable the modeling of three-dimensional mathematical concepts. In this way, the intention is to generate diverse representations of the same three-dimensional figure using tools such as three-dimensional modeling programs, Augmented Reality, or Virtual Reality, in line with Universal Design for Learning (UDL) principles. The proposed approach has been implemented in the context of mathematics problem-solving activities with high school students. The results reveal a preference for different tools depending on the various contexts of the problems presented.

Keywords: Universal Design for Learning (UDL), Three-Dimensional Geometry, Augmented Reality, Virtual Reality, Geometric Modelling, Visualization

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el estudiantado de niveles universitarios y preuniversitarios utiliza diferentes tipos de dispositivos para el afianzamiento de los conceptos vistos en el aula. El tradicional uso de libros, apuntes y calculadoras ha evolucionado a la consulta de referentes de diferente índole a través de Internet, así como de otras herramientas que favorecen la comprensión de los conceptos. De hecho, el Real Decreto 217/2022 [1] por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria indica, en la materia de matemáticas, que está diseñado con el objetivo de "facilitar el desarrollo de unas matemáticas inclusivas que permitan el planteamiento de tareas individuales o colectivas, en diferentes contextos, que sean significativas para los aspectos fundamentales de las matemáticas". Como se indica posteriormente, "se ha de potenciar el uso de herramientas tecnológicas en todos los aspectos de la enseñanza-aprendizaje ya que estas facilitan el desarrollo de los procesos del quehacer matemático". Es por esto que, siguiendo las directrices del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) [2], una de las estrategias que favorece el diseño de actividades inclusivas es la búsqueda de diferentes formas de representar los contenidos de aprendizaje; más concretamente, en la búsqueda de diferentes opciones que favorezcan la percepción, la notación y la comprensión.

Estas directrices que se presentan tanto en el currículo como en el DUA tienen una aplicación directa en las matemáticas y, en concreto, en el desarrollo de habilidades de visualización entre el alumnado. Proporcionar a los estudiantes formas alternativas de visualizar los objetos tridimensionales a partir del uso de herramientas tecnológicas de diferente tipo puede, por tanto, prevenir la aparición de problemas en el aprendizaje de los conceptos geométricos y favorecer la comprensión de los conceptos geométricos asociados [3].

Por todo esto, el objetivo de esta propuesta es el de presentar diferentes alternativas para la generación de propuestas educativas dirigidas al proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos que se pueden modelizar mediante objetos tridimensionales a través de la utilización de aplicaciones móviles. Para ello se pretende presentar las características de la elaboración de estos recursos educativos junto al estudio comparativo realizado con alumnado del último curso de Educación Secundaria.

METODOLOGÍA

Herramientas tecnológicas para la visualización 3D

Los avances de los últimos años en el diseño de programas de modelización, que anteriormente se usaban en la arquitectura o la ingeniería, han permitido simplificar las interfaces de usuario y las ha convertido en más accesibles e inclusivas para su posible aplicación en entornos educativos. Actualmente, se pueden encontrar tecnologías de diferente tipo:

- Herramientas para el modelado tridimensional (PM3D). Los programas de Diseño Asistido por Computadora (CAD) han generado versiones alternativas y que presentan finalidades educativas, como TinkerCAD o BlocksCAD. Estos programas utilizan diferentes estrategias para generar, a partir de unas formas primitivas, formas geométricas tridimensionales más complejas.
- Herramientas para la Realidad Aumentada (RA). Los programas de RA utilizan marcas de diferente tipo para incluir información adicional (en formato audio, imagen y/o vídeo) a la información captada por una cámara. Los objetos tridimensionales quedan, por tanto, integrados en la visualización del entorno. Existen diferentes alternativas como la RA con marcas planas (como los códigos QR) y la RA con objetos (como los cubos holográficos).
- Herramientas para la Realidad Virtual (RV). A diferencia de la RA, en los programas de RV el usuario se integra en un mundo virtual donde se encuentran los objetos tridimensionales y donde se puede interactuar con ellos o visualizar desde diferentes ubicaciones. Los programas, como CoSpaces, permiten su utilización mediante dispositivos sencillos, como dispositivos móviles, o en dispositivos más elaborados como las gafas de RV.

Para la propuesta realizada, se han diseñado cuatro alternativas tecnológicas en línea con las tecnologías presentadas: Programa de Modelado Tridimensional

(PM3D), Realidad Aumentada con marcas planas (RA), Realidad Aumentada a través de un cubo holográfico (HOLO) y Realidad Virtual a través del programa CoSpaces (RV). Como ejemplo, se va a mostrar las diferentes alternativas para la visualización de la triple forma o tritapón que se presentó con detalle en [4]. Para ello, se presentan los enlaces que permiten acceder a los elementos creados, así como las capturas de pantalla que muestran un fotograma dentro de las posibilidades que estas herramientas ofrecen:

- PM3D: A través del programa de modelado tridimensional se puede generar paso a paso, desarrollando habilidades de pensamiento computacional generalmente, figuras geométricas tridimensionales. En la página https://www.tinkercad.com/things/a6IYnMujUjA se puede encontrar tanto la Triple Forma como el proceso de construcción de esta que se puede encontrar detallado en [4].

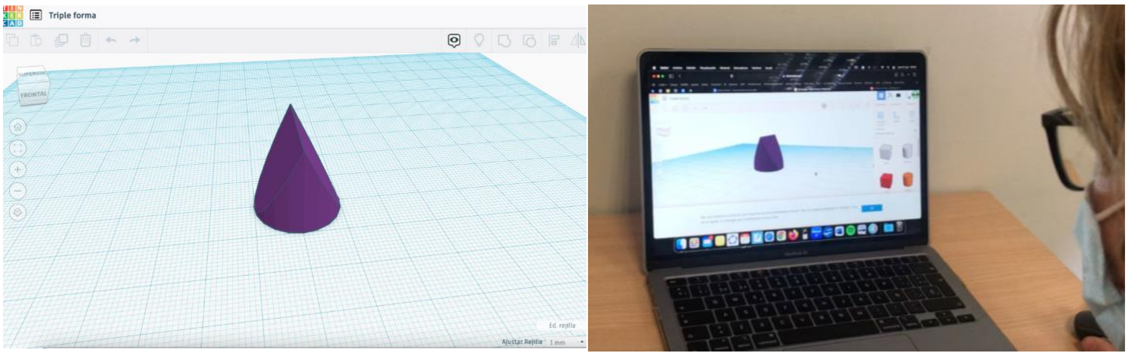


Figura 1: Diseño de la Triple Forma en TinkerCAD.

- RA: A través del programa de RA denominado Assemblr (https://www.assemblrworld.com/) y de su aplicación móvil con finalidad educativa, Assemblr EDU, el alumnado puede visualizar los objetos tridimensionales en RA mediante el uso de marcadores.

Figura 2: Visualización de la triple forma en Assemblr EDU.

- HOLO: Mediante el marcador tridimensional en forma Cubo Holográfico *Merge*, el programa Merge EDU (http://www.mergeedu.com/) permite una experiencia de RA manipulativa. La posibilidad de mover con la mano el cubo permite seleccionar manualmente la orientación del objeto tridimensional que se visualiza a través del dispositivo móvil.

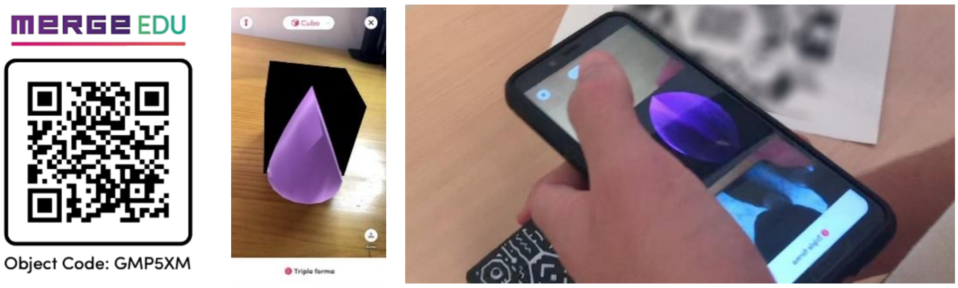


Figura 3: Visualización de la triple forma con el Merge Cube.

- RV: Sobre el programa CoSpacesEDU (https://cospaces.io/edu/) el alumnado puede introducirse en un mundo donde se pueden encontrar los objetos tridimensionales. Para ello, se puede utilizar un dispositivo móvil complementado con unas gafas de RV o algo más elaborado como las Cardboard de Google. La plataforma también permite introducirse en el mundo sin necesidad de usar gafas especiales; de esta forma, se puede pasear por los mundos generados con un estilo similar al de los videojuegos (se puede consultar en https://edu.cospaces.io/QUW-FEJ).

Figura 4: Visualización de la triple forma sobre CoSpaces con Gafas de RV.

Estudio comparativo de las herramientas tecnológicas.

La propuesta del uso de herramientas alternativas para favorecer la visualización de objetos matemáticos tridimensionales se ha llevado a cabo en un taller extraescolar de resolución de problemas de geometría con 4 estudiantes de 4º de E.S.O. de un centro educativo privado de la Comunidad Valenciana en el mes de junio de 2021. Para poder llevarlo a cabo el alumnado participante disponía de las herramientas de visualización presentadas en el punto anterior como recurso tecnológico de apoyo para la resolución de una secuencia de problemas de geometría en los que la visualización era una destreza clave. Con anterioridad a la resolución de los problemas y durante una sesión de 50 minutos, se instruyó al alumnado en el uso de cada una de las cuatro herramientas con el objetivo de facilitar su uso en la tarea posterior. Algunos de los problemas propuestos para el estudio de la esponja de Menger eran los siguientes:

- Explica cómo construirías la Esponja con 3 iteraciones ¿por composición o por eliminación?
- Observa una representación 3D de la esponja de Menger después de la tercera iteración. ¿Cuántos "túneles" atraviesan completamente la figura en cada dirección (x, y, z)?
- Al mirar la esponja de Menger desde arriba después de varias iteraciones, identifica la simetría presente en la figura. ¿Cuántos ejes de simetría puedes encontrar?
- Al rotar la esponja de Menger en diferentes ejes, ¿cómo varía su apariencia? ¿Hay algún eje en el que la rotación parezca no tener agujeros al otro lado?
- Piensa en la esponja de Menger como un laberinto tridimensional. Si entras desde un agujero en una esquina, ¿podrías encontrar un camino que te lleve al centro? Explica y justifica tu respuesta basándote en tus observaciones.
- Si la segunda iteración del cubo de Menger estuviera construida por cubitos pequeños pegados y le pintamos las caras exteriores del cubo original, ¿cuántos "cubitos" quedarían sin pintar? ¿Y después de la tercera iteración?

Una vez realizada la secuencia de problemas en los que se analizaban detalladamente las figuras geométricas de la triple forma y la esponja de Menger, el alumnado disponía de un cuestionario de preferencias de las herramientas usadas en la resolución de los problemas. El instrumento de análisis usado ha sido dicho cuestionario formado por dos preguntas: una pregunta de ordenación de la preferencia de las herramientas usadas y otra de respuesta abierta en la que el alumnado puede desarrollar su percepción de la usabilidad de las herramientas usadas y argumentar las decisiones tomadas en la pregunta anterior.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los datos que se presentan corresponden a las respuestas de todos los participantes en el taller extraescolar a la pregunta de ordenación y a una selección de las respuestas a la pregunta abierta realizada por los firmantes de la comunicación. En relación a la ordenación de las preferencias de las diferentes herramientas utilizadas en el taller de resolución de problemas se obtienen los siguientes resultados para la visualización de la triple forma y del Cubo de Menger:

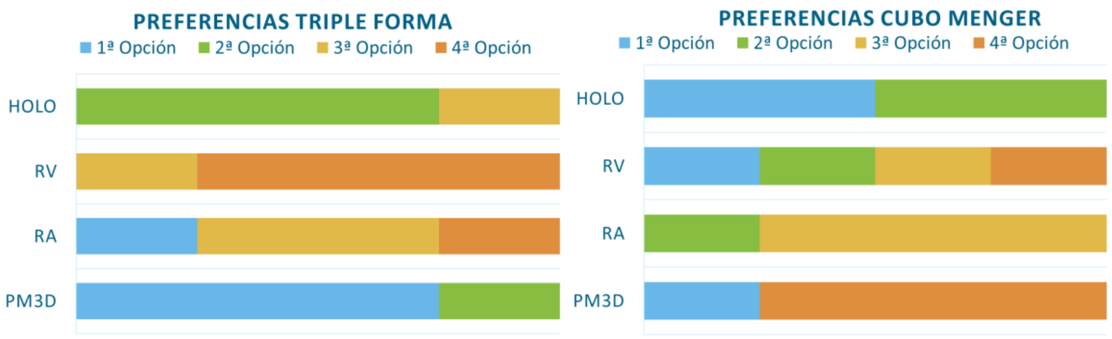


Figura 5: Resultados del orden de preferencia para las dos figuras geométricas.

Entre las herramientas disponibles, destaca la preferencia del programa de modelado tridimensional (Tinkercard) para el análisis de la triple forma, ya que “permite analizar completamente la figura en todas sus perspectivas” (Alumno 2) y “ver cómodamente la figura desde distintos ángulos” (Alumno 3). En segundo lugar, dentro de las preferencias de casi todos los alumnos, se encuentra el cubo holográfico dado que, como también menciona el Alumno 3, “también permite visualizar la forma desde los distintos ángulos”.

Sin embargo, para el estudio de la esponja de Menger, “la forma cúbica del cubo [holográfico] mejora su observación” (Alumno 1). Destaca, además, la baja preferencia otorgada al programa de modelado tridimensional debido, principalmente, a la forma análoga de todas las caras de la esponja de Menger.

En general, el alumnado prefiere la utilización de la realidad aumentada a través del cubo holográfico frente al uso de la aplicación Assemblr por la manipulación directa del objeto. Entre las principales limitaciones de la realidad virtual para la visualización se encuentra la imposibilidad de modificar el ángulo de visionado, en concreto, para poder visualizar los objetos desde la parte superior o inferior.

CONCLUSIONES

Las diferentes representaciones generadas de las figuras geométricas han permitido a los estudiantes seleccionar sus herramientas preferidas para dar respuesta a los retos planteados. Los resultados y el uso de las herramientas realizado por parte del alumnado sugiere la necesidad de usar diferentes herramientas dependiendo de las características de las formas geométricas y de los problemas asociados. A su vez, las herramientas alternativas presentadas favorece el diseño de actividades siguiendo el Diseño Universal de Aprendizaje propiciando el uso de múltiples formas para la representación, así como para la acción y la participación del alumnado.

Entre las limitaciones del estudio que se presenta se encuentra el reducido número de participantes en la experimentación. Además, podría ser de interés realizar este mismo estudio en un aula de docencia curricular de cuarto curso de Educación Secundaria. Otra limitación que se ha encontrado para un estudio más numeroso es la necesidad de disponer de herramientas tecnológicas para todo el alumnado.

Como trabajo futuro, se puede realizar un estudio comparativo entre el uso de herramientas tecnológicas que favorezcan la visualización y los materiales manipulativos, como puede ser la impresión 3D. En concreto, las figuras diseñadas a través de los programas de modelado tridimensional se pueden construir mediante la impresión 3D. Por ello, puede ser de interés analizar la preferencia entre los diferentes recursos educativos para la ayuda en la resolución de problemas de geometría tridimensional.

REFERENCIAS

[1] Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, 76, de 30 de marzo de 2022, 1–198. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

[2] CAST. *Universal Design for Learning Guidelines*, version 2.0. Wakefield, MA: Center for Applied Special Technology. 2011.

[3] Kondo, Y., Fujita, T., Kunimune, S., Jones, K., Kumakura, H. The influence of 3D representations on students´ level of 3D geometrical thinking. En *Proceedings of the Joint Meeting PME 38 and PME-NA* 36; Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., Allan, D., Eds.; Vol. 4; Vancouver: PME, 2014, pp. 25–33.

[4] Rotger, L., Ribera, J. M. Visualizando las matemáticas en la tercera dimensión a través de Tinkercad. En *Actas de las I JID+, Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior*; Valencia, 2021; pp. 63–69. ISBN: 978-84-09-32639-6.

Matemáticas… ¡Me aburro!

Mariló López González

Universidad Politécnica de Madrid, C/ Profesor Aranguren 7, 28040 Madrid (España), marilo.lopez@upm.es.

Mathematics… I'm bored!

RESUMEN

Trabajar la predisposición de la sociedad en general y de los estudiantes en particular hacia las matemáticas es una tarea clave para todo docente. Fomentar el pensamiento lógico matemático y el acercamiento a las matemáticas es necesario en un mundo donde el conocimiento de esta ciencia es simplemente necesario para cualquier ciudadano y, especialmente, para los universitarios.
Esta ponencia plantea un acercamiento al razonamiento lógico y a la utilidad de las matemáticas a través de la diversión y la competición de la mano del desarrollo de estrategias para asegurarse la victoria en diversos juegos.

Palabras clave: Desarrollo del pensamiento lógico matemático**,** Divulgación matemática, Matemáticas y juegos, Estrategia ganadora.

ABSTRACT

Working on the predisposition of society in general as well as students, particularly, towards mathematics is a key task for every teacher. Developing logical mathematical thinking and forming an approach to mathematics is required for a better understanding of our world, especially for university students.
This paper presents an approach to logical reasoning, but also shows the usefulness of mathematics with various strategies to insure victory in all kinds of different games.

Keywords: Development of logical mathematical thinking, Usefulness of mathematics, Mathematics in games, Winning strategy

INTRODUCCIÓN

Quizás estamos abusando demasiado de ciertos comentarios relativos a las Matemáticas que pueden desembocar en que nuestros estudiantes, al igual que parte de la ciudadanía en general, estén en cierto modo hartos de escuchar que:

- Las Matemáticas son muy importantes.
- Son necesarias para todo.
- Hay Matemáticas por todos lados.
- Las Matemáticas son DIVERTIDAS.

Pero la verdad es que lo que sí puede gustar, lo que sí es divertido es JUGAR, y más allá de jugar… GANAR.

Figura 1: A todo el mundo le gusta ganar.

De esta forma, si enseñamos que las Matemáticas pueden dar la oportunidad de disfrutar, de sacar partido a los juegos y más allá, de asegurarte la victoria, estaremos fomentando el interés por esta ciencia y las ganas de explorar, aprender y entender sus estrategias. Se mostraría entonces que, así como el razonamiento matemático puede resultar muy útil en la vida académica, también puede ayudarte a disfrutar en tu vida cotidiana y en la relación con tu entorno, por ejemplo, jugando y ganando. Quedaría latente que las Matemáticas pueden abrir una puerta para disfrutar más.

La RAE (Real Academia Española) define el juego como un “Ejercicio recreativo o de competición sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde”. Con esta idea, en este artículo se presentarán diversos juegos en los que, a través de la estrategia lógico matemática se analiza si es posible asegurarse la victoria y en su caso, cómo hacerlo [4].

La finalidad entonces es presentar un planteamiento lúdico de esta ciencia que pueda ser usado para el acercamiento y el fomento del gusto y el interés por ella [1], [2]. Demostrar que conviene tener algo de “matemático” incluso para jugar y salir victorioso en una tarde de juegos con los amigos.

“El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?”

Miguel de Guzmán

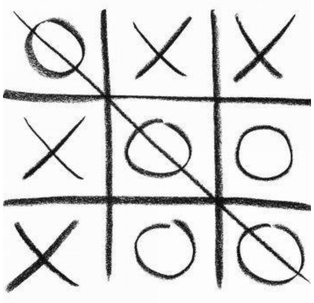
JUEGOS

Con la finalidad de dejar constancia de la importancia de las Matemáticas para ganar en ciertos juegos y con ello asegurar un estado de satisfacción y disfrute, se plantean algunos retos en los que el conocimiento y razonamiento matemático ayuda a buscar y/o encontrar una estrategia ganadora.
Con estrategia ganadora se quiere decir "estrategia mediante la cual uno de los jugadores, el primero o el segundo, se asegura ganar la partida". Esto siempre que los dos jugadores jueguen de forma ideal, es decir, en todo momento realicen movimientos lógicos encaminados a ganar la partida.

Juegos clásicos

a) Las tres en raya:

Este juego no tiene gracia. Perder es prácticamente imposible: empieza el 1º poniendo, normalmente, en el centro, el otro contesta y, a partir de allí, todo es fastidiar al contrario. No puedes perder, termina siempre en empate.



Es un juego en el que se puede jugar perfecto, hay una estrategia para jugar perfecto. En estos casos los jugadores empatan, no hay estrategia ganadora para ninguno de los jugadores. La mejor estrategia es un empate.
De esta forma, el razonamiento lógico, las Matemáticas, demuestran que este juego no tiene estrategia ganadora.

b) Las damas

Para este juego, también se demostró (2007) que se puede jugar perfecto. Si así lo hacen los 2 jugadores, se termina en tablas.

Lo que pasa es que, para las damas, esta estrategia es más compleja, no es tan fácil jugar perfecto y por ello puede tener interés jugar una partida de damas con alguien.
Desde luego, estos juegos en los que se puede jugar perfecto, son muy malos para jugar con el ordenador ya que es posible programarlos para jugar perfecto.

c) El ajedrez

En este juego, la cosa se complica. No se sabe si se puede jugar perfecto, si existe una estrategia ganadora. Los matemáticos están en ello, pero existen tantas posibilidades de jugadas que no es posible hasta ahora diseñar la estrategia perfecta.
Pero sí se programa a los ordenadores para que lo hagan

muy bien. De hecho, ya un ordenador ha ganado al maestro del ajedrez Kaspárov.

Propuestas sencillas para hacer pensar

Si como parece ser evidente, lo importante y motivante es ganar, las Matemáticas pueden ayudar en el juego y, de esta forma, transmitir que desarrollar el pensamiento lógico matemático se vea como una herramienta vital.
A continuación, se presentan algunos sencillos retos que pueden plantearse fácilmente para captar la atención y fomentar el interés por “saber” Matemáticas y que hacen pensar. Pueden entonces utilizarse como herramientas de estímulo y de acercamiento a esta ciencia [4], [5].
Uno posible propuesta es realizarlos con los estudiantes. Primero ganar a algún voluntario que se atreva con el desafío, luego dejar que todos jueguen por parejas para que descubran cuál es la estrategia a seguir para asegurarse la victoria. Después explicar la metodología para todos.

a) Juego de retirar monedas

Este juego para dos jugadores consiste en situar, en este caso 12 monedas en la mesa y en que cada jugador elimina por turnos monedas: una o dos (si se eliminan 2 deben estar contiguas, juntas, no puede haber huecos entre ellas). Gana el que elimina la última moneda.

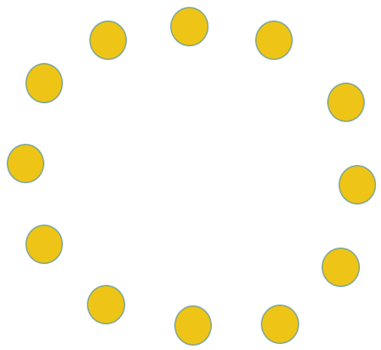


Figura 2: Ejemplo del reto “retirar monedas”

Experimentando un poco, el razonamiento permite deducir que, para este juego, existe estrategia ganadora para el segundo jugador. Esta es:

- Siempre quitar el mismo número de monedas que tu adversario.
- En la primera respuesta dejar divididas las monedas en dos partes iguales desconectadas.
- Luego hacer lo que hace el adversario en el bloque opuesto. Hacerlo de forma simétrica.

b) Fila de monedas

En este reto se tienen 6 monedas de diferentes valores, los que se quieran seleccionar y se colocan como quiera la victima del juego.
La idea es ir quitando por turnos una moneda siempre de los extremos. El jugador que al final se queda con mayor valor gana, si hay empate gana el que ha propuesto el juego.

Figura 3: Ejemplo del reto "Fila de monedas"

Para este reto, pensando y experimentando un poco, puede descubrirse que existe estrategia ganadora para el primer jugador, válido para cualquier número de monedas par.
La idea consiste en dividir mentalmente las monedas en dos bloques:

X Y X Y X Y

Sumando cada uno de los valores de esos dos bloques, uno u otro vale más o suman lo mismo.

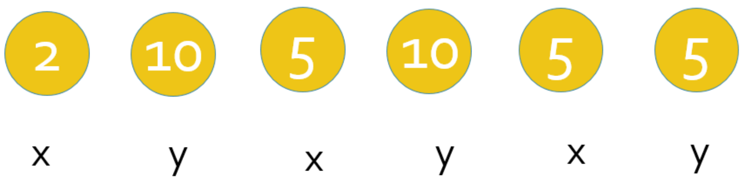


Figura 4: Estrategia para el reto "Fila de monedas"

La estrategia del primer jugador consiste es escoger el bloque que suma más. Como comienza él, elije una moneda del conjunto que vale más, su contrario va forzado a coger del otro conjunto, el que vale menos, y así sucesivamente.
Pese a que a simple vista parece una estrategia sencilla, no suele captarse rápidamente y es conveniente jugar con diversas disposiciones de las monedad.
Una vez presentado y trabajado este reto, puede ser buen momento para ampliar el estudio introduciendo el Teorema de la Pizza [6]:
Decides cenar con tu amigo y pedís una pizza. Cuando llega la comida, la pizza está cortada en ocho trozos y en condiciones ideales, es decir, que los cuatro cortes pasen por el centro y estén igualmente espaciados, lo que significa que están formando un ángulo de 45º entre cada dos de ellos, estos serán completamente iguales. En ese caso, repartir la pizza, es fácil, si cada uno de vosotros va cogiendo un trozo de los extremos, cada comensal comerá exactamente lo mismo.
Pero lo normal es que esos cortes realizados en la pizzería no sean tan perfectos y los cortes no coincidan en el centro de la pizza ¿Se podrá repartir de todas

formas la comida a partes iguales? Pues las Matemáticas ayudan.
Teorema de la pizza: Si una pizza es dividida en ocho trozos, obtenidos mediante cuatro cortes que pasan por un punto común y forman un ángulo de 45º entre ellos, entonces la suma de las áreas de los trozos alternos son iguales.

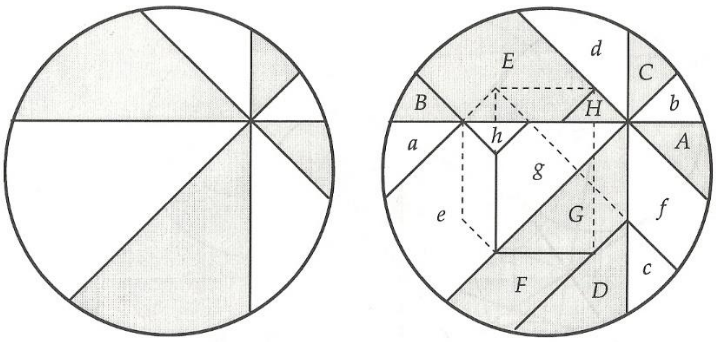


Figura 5: Teorema de la Pizza

Nota: el teorema sigue siendo cierto para un número de cortes par mayor que 2, es decir, 4, 6, 8, etc. Una demostración ha sido dada por Greg Frederickson [3]. No es cierto para 2 cortes ni para un número impar de cortes.

C) El problema de Josefo

Este problema se le atribuye a Flavio Josefo quién vivió en la región de Alejandría en el primer siglo. Se cuenta que asediado por los romanos en una cueva con sus tropas propuso que, para evitar ser capturados y vendidos como esclavos, muriesen y, para cumplir esta macabra decisión, decidieron que se colocarían en círculo con los lugares numerados y se matarían entre ellos con una espada siguiendo el siguiente procedimiento:
El primero mataría al segundo y pasaría la espada al tercero, el cual acabaría con al cuarto, pasaría la espada al quinto y así se seguía el ciclo sucesivamente, hasta que quedara uno solo, el cual se quitaría la vida él mismo. Milagrosamente él se salvó ¿sabía Matemáticas?

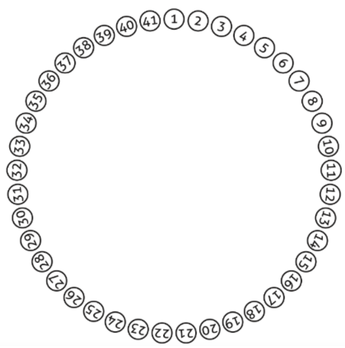


Figura 6: El problema de Josefo

Analicemos de forma "matemática" el problema. Un primer paso realizar un tanteo para algunos casos según el número de participantes:

Resultados según el número de jugadores:

Jugador	1	2
Eliminados primera ronda		2

Jugador	1	2	3
Eliminados primera ronda		2	
Eliminados segunda ronda	1		

Jugador	1	2	3	4
Eliminados primera ronda		2		4
Eliminados segunda ronda			3	

Jugador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Eliminados primera ronda		2		4		6		8		10		12		14	
Eliminados segunda ronda	1				5				9				13		
Eliminados tercera ronda			3								11				
Eliminados cuarta ronda							7								

De esta forma es posible generar esta tabla con posiciones "ganadoras" según el número de implicados:

Número de jugadores	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Posición ganadora	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

¿Qué se puede deducir?:

- Las posiciones ganadoras son siempre números impares. Si te colocas en una posición par, sea cual sea el número de implicados, estas muerto: pierdes.
- Cuando el número de jugadores es una potencia de 2 (2, 4, 8, 16,…) la posición ganadora es la número 1.
- Cuando el número de implicados no es potencia de 2, el ganador ocupa siempre una posición impar desde 3 en adelante. El número estará comprendido entre dos potencias de 2 y la posición ganadora serán sucesiones de números impares que comienzan desde 3 y están formadas por tantos términos como lugares haya entre las potencias de 2.

Veamos un ejemplo de cómo calcular la posición ganadora, por ejemplo para 23 jugadores:

Número de jugadores	16	17	18	19	20	21	22	23
Posición ganadora	1	3	5	7	9	11	13	15

Potencias de 2	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
Resultado	2	4	8	16	32	64

23 está comprendido entre las potencias de 2, $2^4=16$ y $2^5=32$. Asignamos entonces posiciones ganadoras desde 16 a 23 jugadores sabiendo que en 16 está el 1 y luego vamos con sucesión de impares. A 23 le toca el 15, 15 será entonces el sitio que debes elegir para ganar.

Estos han sido solo tres ejemplos de los muchos retos que pueden proponerse y en los que una estrategia razonada puede asegurarte la victoria. Conocerlos y utilizarlos pueden ser una fuente motivadora para el fomento y el gusto por las Matemáticas.

CONCLUSIONES

Jugar es motivante y sobre todo es divertido. De esta forma, jugar y ganar usando las Matemáticas, la lógica y el razonamiento debería ser mucho más entretenido.
En este trabajo se ha propuesto una pequeña muestra de retos donde la capacidad de razonar, la abstracción y la utilización de ciertos conceptos matemáticos permiten deducir si existe una estrategia ganadora y, en su caso, diseñarla.
Usar este tipo de acciones puede ser una herramienta muy útil para atraer a los estudiantes en particular y la sociedad en general a las Matemáticas y hacerla más atractiva.

REFERENCIAS

[1] Deulofeu, J. Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de juegos. Colección “El mundo es matemático”. RBA (2011).

[2] Deulofeu, J, M.EDO. Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. Enseñanza de las Ciencias, 24 (2), 257-268 (2006).

[3] Frederickson, G. The Proof Is in the Pizza, Mathematics Magazine 85, 26–33 (2012).

[4] Sáenz, E. Inteligencia Matemática. Plataforma (2016).

[5] Sotornil, D. ¿A qué quieres que te gane? SUMA, 98, 59-67 (2021).

[6] Upton, L. J. Problem 660, Mathematics, 41 (1): 46 (1968).

Planteamiento de Problemas Matemáticos como parte de la formación matemática de los futuros docentes

Carmen Melchor-Borja[1], María Emilia García-Marques[1], Carmen Campos-González[1], Marta Pla-Castells[1]

[1] ***Departament de Didàctica de la Matemàtica - Facultat de Magisteri, Universitat de València, Av. Tarongers 4, 46022 València, Spain, carmen.melchor-borja@uv.es***

Mathematical problem posing as part of the mathematical training of future teachers

RESUMEN

El planteamiento eficaz de problemas matemáticos es fundamental para una enseñanza de las matemáticas de alta calidad y por lo tanto los docentes deben ser capaces de formular y plantear problemas que supongan un reto para su alumnado. En este trabajo se presenta una intervención diseñada para mejorar la competencia en planteamiento de problemas de los futuros docentes. Esta intervención se ha aplicado en varios grupos de una de las asignaturas del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universitat de València. Como consecuencia, el alumnado ha podido profundizar en algunas de las definiciones actuales de problema de alta demanda cognitiva y desarrollar competencias que le permitirán plantear problemas de calidad que promuevan el desarrollo cognitivo matemático de sus alumnos.

Palabras clave: planteamiento de problemas, niveles de demanda cognitiva, formación futuros maestros.

ABSTRACT

Effective mathematical problem posing is fundamental to high quality mathematics teaching and therefore teachers must be able to formulate and pose challenging problems for their students. This paper presents an intervention designed to improve the problem-posing competence of future teachers. This

intervention has been applied in several groups of one subject of the Degree in Teacher in Primary Education. As a result, students have been able to deepen their understanding of some of the current definitions of problems with high cognitive demand and develop competences that will allow them to pose quality problems that promote the mathematical cognitive development of their students.

Keywords: problem posing, levels of cognitive demand, teaching future teachers.

INTRODUCCIÓN

Por Planteamiento de Problemas Matemáticos (PPM) nos referimos a varios tipos de actividades relacionadas que implican que el profesorado o su estudiantado formule (o reformule) y exprese un problema o tarea en función de un contexto particular [3].

Brown y Walter [2] defendieron la importancia del planteamiento de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Argumentaron que llegar a comprender las matemáticas está intrínsecamente relacionado con la generación y exploración de preguntas. El planteamiento de problemas aparece junto a la resolución de problemas en los documentos curriculares que recomiendan al profesorado que introduzca actividades de planteamiento de problemas para su alumnado [8]. Sin embargo, el estudiantado de matemáticas a todos los niveles tiene generalmente pocas oportunidades de construir y plantear sus propios problemas [5].

El planteamiento eficaz de problemas es una de las competencias que el alumnado de magisterio debe desarrollar [7]. Sin embargo, la realidad de la mayoría de las aulas escolares es que los problemas de matemáticas provienen de los libros de texto [5]. Aprender a evaluar la calidad de las tareas matemáticas antes de plantearlas al alumnado forma parte de lo que se debe aprender en los cursos de preparación docente [4]. El trabajo en el planteamiento de problemas matemáticos de calidad es útil en el desarrollo profesional del profesorado para (a) comprender el pensamiento del alumnado, (b) desarrollar la competencia matemática del profesorado y (c) ayudar al profesorado a plantear problemas de calidad [3]. Por su parte, Crespo [4] afirma que, aunque el profesorado en activo o en formación, defiende creencias y visiones de la enseñanza de las matemáticas en las que se ven a sí mismos como docentes que plantean problemas matemáticos interesantes y valiosos, no están bien preparados para traducir su visión a la realidad del aula. Por tanto, aunque la definición precisa de un problema matemático matemáticamente interesante o de calidad varía según el contexto y el propósito del estudio, es una cuestión importante cómo se puede apoyar a profesorado en formación o en activo para que planteen este tipo de problemas [3].

En esta propuesta se aborda el trabajo de PPM con futuros maestros y futuras maestras de la Facultat de Magisteri de la Universitat de València. Desde el enfoque profesional, recibirán una formación que consistirá en el desarrollo de criterios y estrategias para identificar y juzgar la calidad de los problemas matemáticos. Además, el propio estudiantado planteará problemas cuyos enunciados serán analizados y evaluados dentro del aula tras su resolución. Se incluirán marcos explícitos y esquemas de clasificación como el marco de "demanda cognitiva de las tareas" de Smith y Stein [13], para formar al profesorado en formación, no solamente en analizar, seleccionar y crear las tareas que podrían utilizar con su alumnado, sino también en desarrollar estrategias para realizar adaptaciones que mantengan o aumenten la demanda cognitiva de las tareas elegidas. Además, se abordará una formación en los diferentes tipos de problemas matemáticos que se pueden plantear y se analizará si el alumnado es capaz de distinguir y transferir las características de cada tipo de problema.

En este proyecto se pretende, fundamentalmente, dar respuesta a la pregunta ¿qué nivel de calidad tienen los problemas planteados por futuros docentes antes y después de una formación en PPM?

METODOLOGÍA

La muestra sobre la que se ha realizado la investigación está formada por cinco grupos matriculados en la asignatura de Didáctica de la Geometría, Medida, Estadística y Probabilidad de 4º curso del Grado de Maestro/a en Educación Primaria de la Universitat de València en el curso académico 2022-23.

El proyecto se ha estructurado en tres fases. En la primera fase, se propuso al alumnado participante, a modo de pretest, una tarea con una duración de 30 minutos. Esta tarea estaba formada por dos partes y para su realización no se había recibido ninguna formación previa. La primera parte consistía en plantear individualmente un problema matemático para estudiantes de 6º de Educación Primaria dado un contexto concreto. A cada estudiante se le asignó uno de los siguientes contextos: Valla publicitaria; Gallinero y gallinas; Jardinero municipal; Pastor de ovejas; Frutero en puesto del mercado; Taxista; Ascensor edificio +10 pisos; Maternidad de un hospital; Entrenador de un equipo deportivo; Valla publicitaria. En la segunda parte debían predecir la respuesta del alumnado de 6º de EP al problema planteado proponiendo una posible solución.

En la segunda fase, se implementó una formación en PPM con una duración de 2 sesiones de 2 horas. En cuanto a los contenidos, se abordaron conceptos y procedimientos relacionados con los tipos de tareas matemáticas [1,10], los niveles de demanda cognitiva [13], los criterios de clasificación de los problemas matemáticos [1], la definición de problema matemático [9,11,12], los modelos y heurísticos de resolución de problemas [10] y el PPM [3]. Además, el desarrollo de las sesiones incluía oportunidades para debatir en grupo, resolver, analizar y plantear problemas matemáticos.

En la tercera fase, se realizó un postest que consistía en una tarea similar a la del pretest. Los participantes disponían de 30 minutos para plantear de manera individual dos problemas matemáticos a partir de una situación dada para alumnado de 6º de Educación Primaria. Pero, en este caso, debían ajustarse a dos condiciones: un nivel elevado de demanda cognitiva en ambos problemas, y diferentes en cuanto al tipo de final (abierto y cerrado). Al igual que en el pretest, tenían que predecir las respuestas de los estudiantes de 6º de Educación Primaria y resolver los problemas. Asimismo, en esta ocasión se incorporó una tarea adicional en la que el alumnado se organizaba en pequeños grupos para reflexionar, analizar y debatir sobre las características de los problemas planteados por cada integrante, según lo estudiado previamente en las sesiones de la intervención, la idoneidad del enunciado, cómo mejorarlo o incluir nuevos elementos, y buscar soluciones alternativas al problema. Esta tarea se llevó a cabo de forma oral y no fue objeto de análisis explícito de este estudio, sino que formó parte de la formación que recibió el alumnado.

A partir de la muestra total de los cinco grupos, con más de 200 estudiantes, se ha seleccionado de forma aleatoria una submuestra más reducida y manejable con un tamaño de 40 sujetos, con lo que se han obtenido 40 problemas pretest y 80 problemas postest. Los problemas planteados se analizaron aplicando el instrumento de evaluación de la calidad de problemas matemáticos para Educación Primaria, F-PosE, diseñado por Leavy y Hourigan [6] (Tabla 1).

Tabla 1: Instrumento F-PosE

Ítems de evaluación	***Niveles de evaluación***
Contexto interesante y motivador	5 niveles: ausente, débil, adecuado, bien y excelente
Claridad en el lenguaje y en el contexto cultural	5 niveles: ausente, débil, adecuado, bien y excelente
Coherencia con el currículum	5 niveles: ausente, débil, adecuado, bien y excelente
Atención a la demanda cognitiva	3 niveles: bajo, medio y alto
Número apropiado de pasos en la resolución para promover el razonamiento	2 niveles: un paso y múltiples pasos
Variedad de estrategias de resolución	2 niveles: sí y no
Facilitar múltiples soluciones	2 niveles: sí y no

Oportunidad de éxito	5 niveles: ausente, débil, adecuado, bien y excelente

Fuente: Elaboración propia (extraído de [1])

RESULTADOS

A cada uno de los problemas analizados mediante un análisis de triangulación de expertos, se le ha asignado una calificación de entre 0 y 8 puntos. Estas puntuaciones se han agrupado en intervalos de manera que, los problemas con una puntuación superior a 0 e inferior o igual a 4 se han considerado de calidad insuficiente, los problemas con puntuaciones entre 4 y 7 se les ha atribuido una calidad moderada y los problemas con una calificación igual o superior a 7 se les ha asignado una calidad sobresaliente.

Cerca de la escuela se encuentra una valla publicitaria, donde se anuncia una empresa de decoraciones de vivienda. En el anuncio se muestran diferentes diseños para decorar.

Haz un listado de las figuras geométricas que observa y, en el cado de encontrar triángulos, clasifícalos según sus ángulos y sus lados.

Figura 1: Problema 1 de calidad insuficiente

En el problema de la Figura 1, los estudiantes sólo tienen que localizar los triángulos presentes en la imagen y recordar la clasificación de los triángulos según sus ángulos y sus lados. Tal y como se ha puntuado en la Tabla 2, no promueve el razonamiento de los estudiantes, no se puede resolver con diversas estrategias de resolución ni facilita múltiples soluciones.

Hemos hecho un viaje a Nueva York y hemos alquilado un apartamento en uno de los edificios más altos que hay. Nos han dicho que nuestro apartamento se encuentra en la planta núm. 15. Nos han dicho que el ascensor va más deprisa según el peso que lleva. Por ejemplo, una persona de 50 quilogramos llega a la planta núm. 15 en 40 segundos…, estos segundos serán los mismos en la subida como en la bajada.

Si nosotros somos dos hermanas (la mayor pesa 55 kg y la pequeña 30) con una maleta de 10 kg cada una, ¿cuánto tardaremos en subir?

Después las hermanas han querido bajar a desayunar. Las dos hermanas han decidido dejar las maletas, ¿cuánto tardarán ahora sin ellas?

Figura 2: Problema 2 de calidad moderada

¿Cuál es tu marca preferida? Ve a una tienda y mida qué longitud tiene su logotipo. Teniendo en cuenta que tenemos una valla publicitaria que mide 100 cm de largo y 50 cm de ancho, ¿cuántos logotipos pueden caber dentro de esta?

Figura 3: Problema 3 de calidad excelente

En los problemas mostrados en las Figuras 2 y 3 encontramos ejemplos de problemas que promueven el razonamiento de los estudiantes y en los que se pueden utilizar una variedad de estrategias de resolución que faciliten múltiples soluciones. Las puntuaciones de estos problemas se encuentran, también, en la Tabla 2.

Tabla 2: Calificaciones de los problemas en cada ítem del F-pose.

Indicador	***Puntuación Problema 1***	***Puntuación Problema 2***	***Puntuación Problema 3***
Contexto interesante y motivador	Adecuado – 0’5	Adecuado – 0’5	Excelente – 1
Claridad en el lenguaje y en el contexto cultural	Adecuado – 0’5	Bien – 0'75	Excelente – 1
Coherencia con el currículum	Adecuado – 0’5	Excelente - 1	Excelente – 1
Atención a la demanda cognitiva	Bien – 0’75	Bien – 0’75	Bien – 0’75
Número apropiado de pasos en la resolución para promover el razonamiento	Baja - 0	Medio – 0'5	Alto – 1
Variedad de estrategias de resolución	Un paso – 0	Múltiples pasos - 1	Múltiples pasos – 1
Facilitar múltiples soluciones	No – 0	Sí - 1	Sí – 1
Oportunidad de éxito	No – 0	Sí - 1	Sí – 1
Puntuación total	**2’25/8**	**6,5/8**	**7’75/8**

Fuente: Elaboración propia.

A través del análisis de la muestra de los 40 sujetos seleccionados se trató de responder a la pregunta ¿Qué nivel de calidad poseen los problemas matemáticos planteados antes y después de recibir formación en PPM?

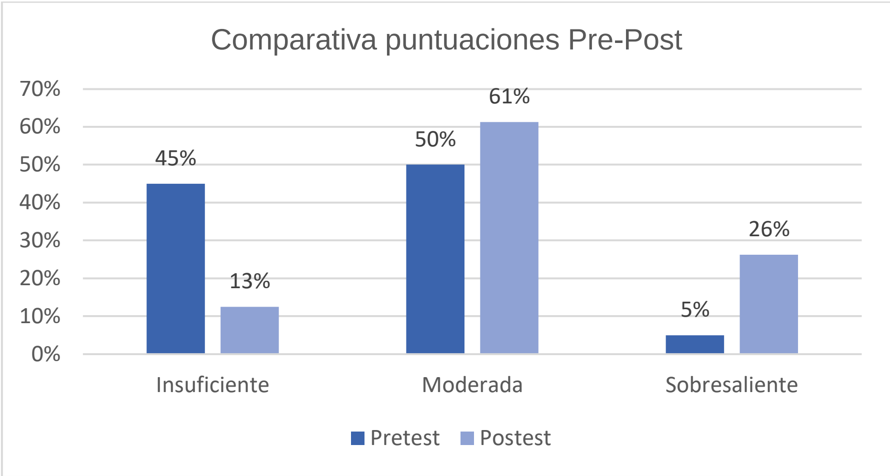


Figura 4: Puntuaciones de asignadas a los problemas antes y después de la intervención

Tal y como muestra la Figura 4, los resultados del pretest indican que la mayoría de los problemas planteados por el profesorado en formación poseen una calidad insuficiente, mientras que solamente el 5% de la muestra planteó un problema de calidad sobresaliente. Así pues, estos datos revelan una gran dificultad a la hora de plantear problemas interesantes matemáticamente, lo que se entiende como una carencia en la habilidad de PPM. Además, las puntuaciones del instrumento F-PosE señalan que los ítems que han obtenido una calificación menor en este primer momento de evaluación han sido “Facilitar múltiples soluciones” y “Atención a la demanda cognitiva”. De esta manera, revelan que las principales causas, que han provocado el planteamiento generalizado de problemas con calidad insuficiente, son la formulación de problemas cerrados que no admiten soluciones alternativas y que no requieren un elevado nivel de esfuerzo cognitivo.

Los resultados del postest indican un aumento en la calidad de los problemas matemáticos con respecto al pretest. De esta manera, la cantidad de problemas de calidad sobresaliente ha crecido hasta alcanzar el cuarto del total de problemas en este segundo momento de evaluación. Por el contrario, solamente 10 de los 80 problemas poseen una calidad insuficiente. Según esto, los ítems que han puntuado más alto en el instrumento F-PosE, y que, por lo tanto, han aportado más a esta visión global son “Variedad de estrategias de resolución” y “Número apropiado de pasos en la resolución para promover el razonamiento”. Igualmente, tras la formación en PPM se ha registrado un aumento en las puntuaciones globales de los ítems “Facilitar múltiples soluciones” y “Atención a la demanda cognitiva” en comparación con las obtenidas en el pretest. De ahí que, tras la formación en PPM, los resultados determinan que el profesorado en formación ha planteado problemas interesantes matemáticamente en los que han tenido en cuenta el proceso de resolución y el tipo de final.

CONCLUSIONES

Tal y como muestra la literatura científica, el PPM es una de las competencias fundamentales que todo docente debe tener. En este artículo se muestra la experiencia al realizar una formación específica en PPM. Con anterioridad a la formación la mayor parte del profesorado en formación no estaba preparado para plantear problemas de calidad, pero se observa un avance muy positivo tras la formación. Estos resultados indican la conveniencia de seguir introduciendo este tipo de formaciones e investigando con muestras más numerosas para afianzar las conclusiones de este estudio.

REFERENCIAS

[1] Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L. y Muñoz Escolano, J. M. (2019). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Editorial Síntesis.

[2] Brown, S. I. y Walter, M. I. (2005). The art of problem posing. Psychology Press.

[3] Cai, J., y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research, 102, 101391.

[4] Crespo, S. (2015). A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. In: Singer, F., F. Ellerton, N., Cai, J. (eds) Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_24.

[5] Crespo, S. y Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. J Math Teacher Educ 11, 395-415.

[6] Leavy, A. y Hourigna, M. (2022). The Framework for Posing Elementary Mathematics Problems (F-PosE): Supporting Teachers to Evaluate and Select Problems for Use in Elementary Mathematics. Educational Studies in Mathematics 111, 147-176. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10155-3.

[7] National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1991). Principles and standard for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[8] National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and standard for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[9] Ortega, T., Pecharromán, C. y Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. Educatio Siglo XXI, 29(2), 99-116.

[10] Pólya, G. (1945). How to solve it. Uchpedgiz.

[11] Pólya. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. John Wiley & Sons.

[12] Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Comares.[13] Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3 (5), 344–350.