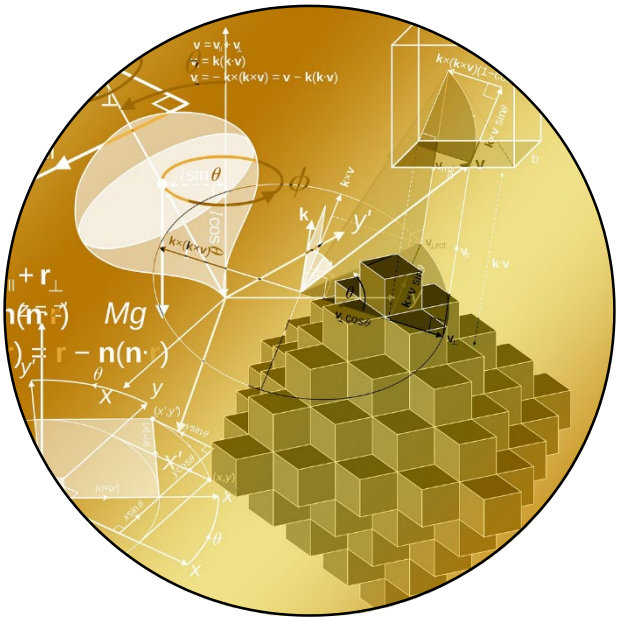
IV JID+ Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior



ACTAS DE LAS IV JID+

Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior

Burjassot (València), 11 y 12 de julio de 2024

Comité científico Javier

Javier Falcó Benavent

Francesco Fumagalli

Carmen Melchor Borja

Macarena Trujillo Guillén

Comité organizador

Álvaro Briz Redón

Esther Cabezas Rivas

Isabel Cordero Carrión

Enric Cosme Llópez

María García Monera

Adina Alexandra Iftimi

Leila Lebtahi Cherouati

Lucía Sanus Vitoria

Comité editorial

Álvaro Briz Redón

María García Monera

Dionisio Yáñez Avendaño

Edita:

Proyecto de Innovación Educativa y Calidad Docente: “Desarrollo de competencias transversales en matemáticas a través de la docencia presencial y on-line.” (UV-SFPIE_PIEE-2734112).

Burjassot (València) 2024

ISBN: 978-84-09-63772-0

Se distribuye bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento – No comercial- Sin obra Derivada 4.0 Internacional

II JID+ Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior

En esta publicación se presentan los resúmenes escritos de las comunicaciones de las II JID+ Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior, celebradas en la Facultad de Matemáticas de la Universitat de València los días 11 y 12 de julio de 2024 en el marco del Proyecto de Innovación Educativa "**CO^{3}MAT**: **CO**ntextualización, **CO**municación y **CO**ncretización en los grados de **MAT**emáticas"

Las jornadas se realizaron en formato semipresencial y se emitieron en directo en formato on-line. Toda la información relativa a las jornadas puede encontrarse en la página web https://www.uv.es/gidmes/posts/2024/IVJID+.html

ÍNDICE

Título	Página
{Des}programar *Begoña Cuquejo, Natasha Hrycan y Erika Roldán*	5
Diseño e implementación de materiales manipulativos, impresos en 3D, para la mejora de la visualización y estudio de las superficies cuádricas *Lucía Rotger García, Pedro Bibiloni y Juan Miguel Ribera Puchades*	14
Elaboración de video tutoriales por parte del estudiantado como método de aprendizaje y de evaluación *Aitor Alfonso Castelló, Daniel Isert Sales, Sergio López Ureña, MªCarmen Martí Raga, Miguel Morata Dolz, Ana Belén Pascual Venteo, Javier Pastor Murcia, José Manuel Ramón García, y David Rochera Plata*	22
Experiencias de Gamificación en la Educación Universitaria *Javier Falcó y Daniel Isert*	30
Formación en pensamiento computacional para futuros docentes *Carmen Campos, Pascual D. Diago, David Arnau y Juan Gutiérrez Soto*	52
Identificación y desarrollo del talento en la Facultad de Matemáticas *Paloma Merello Giménez, Pilar Herce Palomares e Isabel Cordero Carrión*	63
Sé más matemáticas que ChatGPT *Marta Pla-Castells y Carmen Melchor*	72
Tejidos de pensamiento: Explorando conceptos matemáticos a través del ganchillo *Ester Patiño, Mariló López, Sagrario Lantarón y Javier Rodrigo*	80

{des} programar

Begoña Cuquejo[1], **Natasha Hrycan**[1], **Erika Roldán**[1]

[1] ***SCADS.AI Leipzig University, e-mail: begonhacuquejo@gmail.com, natasha.hrycan@uni-leipzig.de.***
[2] ***Max Planck Institute for the Mathematics in the Sciences, e-mail: roldan@mis.mpg.de.***

{des} programming

RESUMEN

En este comunicado damos pistas de reflexión en torno a metodologías de aprendizaje que establecen un puente entre la matemática, la programación y la creación escénica. Este comunicado está basado en la creación e implementación de un taller en el que utilizamos como gadget educativo un robot programable que permite seguir instrucciones de movimiento (tipo turtle graphics que fue usado por primera vez en LOGO[a]) y otras interacciones que son usualmente accesibles con IoT (Internet of Things). El taller tuvo una duración de una semana y se llevó a cabo durante el campamento académico de verano Les Marmottes en Les Diablerets, Suiza [1]. Las actividades desarrolladas durante esa semana se fundamentaron en pedagogías abiertas que lograron estimular la autonomía y creatividad del alumnado. Para culminar el taller las alumnas compartieron puestas escénicas.

Palabras clave: Robot Finch, Programar, Creación escénica, Pedagogías abiertas, Inclusividad, Matemática y Ciencias de la Computación

ABSTRACT

In this paper, we give some ideas for reflection on learning methodologies that establish a bridge between mathematics, programming, and scenic creation. This paper is based on the creation and implementation of a workshop in which we used as an educational gadget a programmable robot that allows us to follow movement instructions (turtle graphics type that was first used in LOGO [b]) and other interactions that are usually accessible with IoT (Internet of Things). The workshop lasted one week and took place during the summer camp Les Marmottes in Les Diablerets, Switzerland [1]. The activities developed during that week were founded on open pedagogies that stimulated the autonomy and creativity of the students. To culminate the workshop, the students shared the performance with the rest of the mentors and the participants.

[a] *From Wikipedia.* In computer graphics, turtle graphics are vector graphics using a relative cursor (the "turtle") upon a Cartesian plane (x and y axis). Logo is an educational programming language, designed in 1967 by Wally Feurzeig, Seymour Papert, and Cynthia Solomon.

[b] *From Wikipedia.* In computer graphics, turtle graphics are vector graphics using a relative cursor (the "turtle") upon a Cartesian plane (x and y-axis). Logo is an educational programming language, designed in 1967 by Wally Feurzeig, Seymour Papert, and Cynthia Solomon.

Keywords: Robot Finch, Programming, Scenic creation, Open pedagogy, Feminism, Mathematics

INTRODUCCIÓN

{Des}Programar es un proyecto que trabaja el pensamiento algorítmico y la programación informática a la vez que se deconstruyen los prejuicios sobre las matemáticas, las ciencias de la computación y el arte, así como otros aspectos trasversales del acceso a la educación STEAM destancando la identidad de género. Este proyecto lo hemos llevado a distintos contextos, como el programa de verano de la Bibliothèque de la Cité en Ginebra, y el taller de verano les Marmottes, ambos en Suiza. Este último taller lo comentamos a detalle en este comunicado.

El campamento de verano Les Marmottes es un taller de iniciación a la investigación en matemáticas que está dirigido a estudiantes mujeres de instituto. Es auspiciado por Fonds National Suisse, MathScope y Université de Genéve, tiene una duración de una semana y se llevó a cabo en el 2024 en el mes de Abril en Les Diablerets, Suiza.
Con las estudiantes de Les Marmottes trabajamos con el Finch Robot para generar una presentación final a modo de espectáculo utilizando elementos escénicos básicos que derivan del objeto utilizado, en este caso: luz, música y movimiento. La coreografía fue decompuesta en comandos básicos que fueron programados en Python para que el robot pueda replicarlos. Los cambios de ritmo, la velocidad, la trayectoria, etc, son elementos esenciales de una coreografía del objeto. La disposición del público, y el ambiente para recibir la información creada forma parte de la reflexión de una dirección escénica, cuya forma de pensamiento queremos fomentar en las participantes.

Como ya se mencionó, en este taller brindamos a las participantes artefactos u objetos (en este caso el robot y los microcontroladores). Es por esto que nuestra propuesta pedagógica está enmarcada en metodologías de aprendizaje *body-artefact*. En [4], los autores concluyen que las acciones sensoriomotoras respaldan el surgimiento de estructuras perceptivas para el desarrollo de conocimiento en los estudiantes. Este concepto puede expandirse a enfoques histórico-culturales para una conexión más profunda en las tareas que el alumnado está experimentando. Teniendo en cuenta que las estructuras funcionales del conocimiento pueden ser extendidas a artefactos externos, el desarrollo tecnológico se convierte en una importante herramienta de apoyo para la experiencia sensoriomotora ([3]). Estos artefactos tecnológicos se convierten entonces en un puente que sirve para la materialización de conceptos matemáticos y de pensamiento algorítmico, brindando una estructura más fuerte a las ideas y conceptos que son presentados en el proceso usual de aprendizaje.

A nivel filosófico creemos en la *emancipación* intelectual del alumnado [2], por lo que el punto de partida consta de un problema abierto: ¿Cómo crear una presentación escénica con los robots? Para enfrentar esta tarea, los elementos de los que disponía el alumnado fueron la librería online de Finch y un documento a modo de guía escrito por nosotras con ejercicios de programación y creación artística para explorar las capacidades del robot. Durante todo el taller contaron con el apoyo y guía dos de las autoras de este comunicado que fungieron como mentoras tanto en la parte artística como en la parte matemática y de programación de los robots. Este comunicado introduce a continuación la estructura del taller. Esta sección ofrece una detallada explicación de el robot utilizado y sus funciones, para así llegar a las conclusiones donde se detallan los aprendizajes obtenidos a partir de los talleres realizados.

ESTRUCTURA DEL TALLER

Con el propósito de que docentes con interés en profundizar más en nuestra propuesta, a continuación presentamos la estructura del taller y una breve introducción a los elementos utilizados.

La estructura del taller El taller se desarrolló durante una semana, con sesiones diarias de 8 horas. A continuación, se detalla la estructura de cada día:

Día 1: Introducción

- **Toma de contacto:** Comenzamos con una actividad para conocernos y entender los intereses de las alumnas, además de reflexionar por qué eligieron nuestro taller entre todas las opciones disponibles.
- **Introducción técnica:** Explicamos los componentes del robot Finch, como el **Microbit**, que es el microcontrolador responsable de ejecutar los comandos.
- **Primera tarea de programación:** Las alumnas crearon líneas continuas con el Finch, reflexionando sobre su significado. Este ejercicio introdujo conceptos básicos de movimiento, bucles y comandos del **Python Finch Library**.

Día 2: Exploración y creatividad

- **Construcción geométrica:** Las participantes aprendieron a programar una trayectoria que representa el "Das Haus von Nikolaus,ün grafo que se traza sin levantar el lápiz y sin repetir líneas.
- **Símbolo del infinito:** Exploraron cómo crear un símbolo del infinito utilizando bucles y velocidades diferenciadas para las ruedas del Finch, experimentando con conceptos de continuidad y fluidez.
- **Dramaturgia inicial:** Reflexionaron sobre cómo estos trazados podían formar parte de una narrativa coreográfica para los robots.

Día 3: Diseño escénico

- **Reflexión espacial:** Las alumnas analizaron cómo disponer su dramaturgia en el espacio, considerando la transmisión del mensaje, la duración y la relación con el público.
- **Técnicas de acumulación:** Se les introdujo a una técnica narrativa basada en acumulación progresiva en lugar de una narrativa lineal. Esto permitió revelar capas de información de manera gradual mediante movimientos repetitivos del robot.
- **Integración de música:** Además de programar, exploraron el uso de música para enriquecer la narrativa.

Día 4: Práctica escénica Las alumnas practicaron sus piezas finales, ajustando sus programas y mejorando la integración de elementos visuales, espaciales y musicales.

Día 5: Presentación final Culminaron la semana con una presentación de sus trabajos, mostrando cómo combinaron programación, música, movimientos coreográficos y narrativas visuales. Las alumnas reflexionaron sobre el proceso creativo y técnico durante una sesión de evaluación.

Introducción al robot Finch

La guía mencionada contiene un conjunto de instrucciones para programar el robot para que realice distintas acciones. El robot Finch permite a uno controlar su movimiento, luces, sonidos, interacción con otros microcontroladores y con sus alrededores gracias a los sensores.

La guía contiene explicaciones y ejemplos de aplicación para usar los elementos más básicos del Finch: movimiento, dibujar figuras, luces y sonido, sensores y conexión por radio entre microcontroladores y robots. Después de cierta cantidad de instrucción de cómo usar y programar al robot, las estudiantes eran presentadas con tareas para usar las habilidades aprendidas, ejemplos de estas tareas son dibujar un símbolo de infinito y una casa. A pesar de que estas parezcan tareas triviales para cualquiera, programar estos dibujos con un robot, entender la estructura de las formas que componen una imagen, los comandos y el orden para obtener la figura que queremos, pueden ser tareas especialmente desafiantes para personas que no han trabajado con robots antes. Estos ejercicios y los ejemplos presentados en la guía sirvieron de fundamento para la creación de las presentaciones de las jovenes en el último día del Campamento, a pesar de que fueron mucho más allá eligiendo las formas que representar.

Antes de programar al robot Finch, es importante entender cómo funciona y sus componentes. El cerebro del robot es el microcontrolador Microbit, este elemento es el que recibe los comandos y señales de radio. Este microcontrolador puede ser programado de dos maneras: vía archivos .hex o Bluetooth. Abajo tenemos una breve explicación de cómo funciona cada uno:

- **Vía archivos .hex:** una vez que hayamos terminado de escribir el código para el robot Finch en el sitio de Makecode, el cual es la plataforma de Windows para programar al Microbit, podemos descargar el archivo .hex y subirlo como un archivo normal a la carpeta del robot Finch. Para ello, el robot Finch debe estar conectado a la computadora vía cable USB. Este método permitirá que el robot inicie el código cada vez que esté encendido, es por esto que es conveniente incluir comandos para acciones luego de una acción de activación. Esto podría ser, por ejemplo, la función se activa luego de presionar un botón, o si el robot recibe cierto número en el canal de radio. Subiendo el archivo .hex al robot nos permite que el robot funcione como imaginamos que un robot debería: de manera autónoma y con poca o nula asistencia humana para ejecutar acciones.

- **Vía Bluetooth:** este método de subir códigos al microcontrolador es considerado adecuado especialmente para personas que están empezando a programar. El modo de operación es bastante sencillo: escribimos el código en Python en el sitio de BirdBrain Tecnologies, enviamos el código por Bluetooth al robot Finch y éste lo ejecutará instantáneamente. La rapidez de este método facilita el proceso de prueba-error, el cual es un elemento importante en el aprendizaje de un lenguaje de programación. Los usuarios pueden notar más rápidamente si es que hay un

Figura 1: *Robot Finch [5]*

error en el código y esto incentiva a probar nuevas maneras de realizar una acción, analizar lo que estamos haciendo y planear de manera más eficiente.

Como se puede apreciar, cada vía para programar el robot tiene sus ventajas de acuerdo a lo que uno busca. El método vía Bluetooth está limitado en cuanto a los dispositivos, ya que presenta el problema mencionado anteriormente con dispositivos como Raspberry Pi o Macbooks. La plataforma de Makecode tiene comandos basados en Python pero limitaciones ya que sólo pueden usarse los comandos disponibles en su biblioteca. Esto no permite usar funciones de otras bibliotecas (time, numpy, etc.).

Las siguientes secciones en el manual presentan explicaciones paso por paso para realizar comandos de movimiento, uso de periféricos y conexión por señal de radio entre varios microcontroladores. En las siguientes líneas serán explicados a detalle ejemplos para programar al robot Finch utilizando el método vía archivos .hex, lo que implica que nuestros comandos provienen de la biblioteca de Makecode. La lista de comandos para programar vía Bluetooth está disponible en la librería Python del Finch. El sitio web de Birdbrain Technologies también ofrece explicaciones para poder preparar al robot Finch para programación vía Bluetooth, ya que es necesario instalar un archivo que servirá de identificador para conectar el robot (o el microcontrolador, este también puede trabajar independientemente de si está conectado a un robot o no).

Cuando trabajamos en la página de Makecode, es importante agregar la extensión de Finch a nuestra biblioteca. Como fue mencionado antes, solo podemos usar los comandos disponibles en el menú. Iniciando con los comandos de movimiento, debemos iniciar el Finch y luego determinar la dirección, distancia y velocidad de movimiento del robot. También es posible controlar de manera aislada los motores del robot, lo cual puede ser útil a la hora de dibujar curvas o circunferencias, estableciendo diferentes velocidades en cada una de las dos ruedas el robot no dibujará en línea recta y se desviará paulatinamente. Este puede ser un ejercicio de matemáticas y física básica para los usuarios, calcular cuántos segundos y a qué velocidades deben estar las ruedas del robot para poder dibujar una circunferencia o arco de determinado tamaño. Siguiendo este párrafo se encuentra un ejemplo de código que realiza las siguientes acciones: inicia el robot Finch, el robot se mueve hacia adelante 10 cm a 50 % de su velocidad máxima, luego gira hacia la derecha 90° a 50 % de su velocidad máxima, se mueve hacia atrás 10 cm a 80 % de su velocidad máxima y finaliza moviéndose para adelante formando una circunferencia, la rueda izquiera posee 30 % de la velocidad máxima y la rueda derecha 50 %.

```
1 finch.start_finch()
```

```
2
3 finch.set_move(MoveDir.FORWARD, 10, 50)
4 finch.set_turn(RLDir.RIGHT, 90, 50)
5 finch.set_move(MoveDir.BACKWARD, 10, 80)
6 finch.start_motors(30, 50)
```

Una vez que se posee conocimiento sobre cómo mover el robot es cuestión de diseñar las figuras que se quieran dibujar para determinar los comandos necesarios. Estos comandos para dibujos pueden ser activados, por ejemplo, al presionar el botón A del microcontrolador. Adicionalmente, uno puede incluir en el código comandos para prender las luces del robot, que una melodía suene, presentar un texto o icono sencillo en la pantalla LED del microcontrolador. El microcontrolador cuenta con sensores de temperatura, luz, compás, giroscopio y sonido, los cuales pueden ser utilizados para activar comandos de acciones. Aquí presentamos un ejemplo: el robot Finch prende sus luces delanteras de color blanco y se mueve 20 cm hacia adelante a 50 % de su velocidad máxima, si es que presionamos los botones A y B al mismo tiempo.

```
1 finch.start_finch()
2
3 def on_button_pressed_ab():
4     finch.set_beak(100, 100, 100)
5     finch.set_move(MoveDir.FORWARD, 20, 50)
6     pass
7 input.on_button_pressed(Button.AB, on_button_pressed_ab)
```

Luego de familiarizarnos con el movimiento y uso de periféricos del robot Finch podemos comunicar microcontroladores y robots entre sí. Esto es posible con la emisión de radiofrecuencias en distintos canales. Debemos seleccionar un número para el canal (por ejemplo, 25) y éste será el canal al cual el receptor y emisor deberán estar conectados. A modo de ejemplo, podríamos tener un microcontrolador en un guante, y cada vez que rotamos la mano hacia la derecha, éste enviará una señal DERECHA al canal 25. Este ejemplo no fue elegido por las alumnas en el Campamento pero si fue desarollado con más profundidad en el proyecto Desprogramar para creación coreográfica en Ginebra, en Agosto 2024.

```
1 radio.set_group(25)
2
3 def on_gesture_right():
4     radio.send_string("DERECHA")
5     pass
6 input.on_gesture(Gesture.TILT_RIGHT, on_gesture_right)
```

Ahora cualquier robot o microcontrolador receptor podrá recibir una señal DERECHA, en tanto esté conectado al canal 25. Digamos que tenemos un robot conectado a este mismo canal, y queremos que cada vez que giremos nuestra mano hacia la derecha, el robot dé una vuelta de 360° y dibuje una cara feliz en la pantalla LED del microcontrolador.

```
1 radio.set_group(25)
2 finch.start_finch()
3
4 def on_received_string(receivedString):
5     if receivedString == "DERECHA":
6         finch.set_turn(RLDir.RIGHT, 360, 50)
7         basic.show_icon(IconNames.HAPPY)
8     pass
9 radio.on_received_string(on_received_string)
```

Partiendo de aquí uno puede configurar las acciones a gusto para que el receptor y emisor trabajen en conjunto. Una de las limitaciones de la biblioteca de Makecode es que no cuenta con la función `else if` o `elif`, por lo que si tenemos distintas palabras o números enviados a través del canal será necesario usar una cadena de funciones `if` para abarcar todas las variables.

En esta sección de metodología nos hemos enfocado más en los elementos matemáticos y de programación. En cambio en las secciones de Resultados y Conclusiones haremos énfasis en el aspecto artístico del taller.

RESULTADOS

El resultado del taller fue una coreografía con los robots finch. Se alcanzaron varios objetivos escénicos. Por ejemplo, las alumnas pudieron implicar su cuerpo ante un público sin vigilar como caminan o "performan". Fueron capaces de no teatralizar sus movimientos disponiendo los elementos utilizados, cuando desplazaban robots o colocaban los papeles, los rotuladores en los finch, sincronizándose con la música y el momento de accionar. Todas las acciones tenían un fin performativo, por lo que no tenían que *representar* sus acciones sino *presentarlas*.

Pudieron aprender y probar cuestiones prácticas de forma más divergente que utilizando meramente la librería básica. Pudieron reflexionar a la disposición del receptor de su mensaje; en este caso dispusieron al público en un círculo alrededor de la escena. Durante la entrada de público están dispuestas en el espacio y deciden colocar el robot después de que todo el mundo esté sentado, cosa que permite dar la dimensión personal del acto y aumentar la idea de comunicación entre activos y públicos. La estructura que decidieron para la obra se basó en la repetición para subrayar el efecto sorpresa que generaban los movimientos de los robots. La primera coreografía fue sencilla, en ella toma relevancia el robot como personaje; en la segunda repetición, le colocan los rotuladores y los finch vuelven a realizar el mismo recorrido pero ahora podemos ver que además cobra importancia y otro significado el recorrido que dibujan estos robots-personajes. Previamente a la tercera escena presentan un interludio con un tercer robot que hace sonar la canción *Para Elisa de Beethoven* y comienza a dibujar la frase: 1+1=3, mientras se activa en el otro lado del escenario la tercera repetición. En esta última escena las alumnas deciden poner sobre los robots dos peluches de Marmotas, (el símbolo del campamento), con lo cual los robots adquieren otra significación más lúdica, haciendo un guiño a su propio público de complicidad, captando su atención. Para aumentar el ritmo, suena la verdadera *Para Elisa* lanzada desde un altavoz para hacer un aumento dramático de ritmo hasta el final. Lo importante de estas decisiones es que fueron la presentación de los elementos buscando una dramaturgia no explícitamente narrativa, sino trabajando otros aspectos sensibles de la creación escénica, además de ocuparse de la reiteración, y de *presentar* otra realidad.

CONCLUSIONES

En este taller, las alumnas lograron conectar las matemáticas con la programación y la creación escénica, presentando al final un producto que combinaba estas disciplinas. Esto permitió mostrar cómo estas áreas pueden integrarse de manera creativa para enriquecer el aprendizaje.

Resultados principales

- **Fomento de la creatividad:**

  Las alumnas exploraron cómo los movimientos del robot podían narrar historias o transmitir experiencias estéticas.

- **Refuerzo de conceptos matemáticos:**

  La programación de trayectorias permitió aplicar conocimientos de geometría de forma práctica, consolidando aprendizajes a través de ejercicios interactivos.

- **Desarrollo de habilidades técnicas:**

  Las participantes adquirieron competencias básicas en programación, lo que no solo facilitó su incursión en STEM, sino que también aceleró los tiempos de adquisición de conocimientos técnicos gracias al uso de herramientas visuales e interactivas como el robot Finch.

- **Adquisición de habilidades como creadoras escénicas:**

  Las alumnas aprendieron a transmitir información de manera escénica, reflexionando sobre aspectos clave como la disposición del público, los ritmos de los contenidos, el orden y la dramaturgia del taller, entre otros.

- **Generación de ideas propias en programación:**

  Más allá de replicar modelos preestablecidos de la librería, las participantes diseñaron y personalizaron sus propios programas para resolver problemas específicos y crear representaciones únicas.

Esta experiencia interdisciplinaria no solo motivó a las alumnas a explorar áreas de conocimiento nuevas, sino que también las animó a trabajar de manera colaborativa, combinando rigor técnico con creatividad artística. Asimismo, se destacó la importancia de conectar los aprendizajes teóricos con experiencias prácticas que desarrollan competencias múltiples y fomentan la autonomía en el pensamiento creativo.

Figura 2: *Representación grupo de almunado Les Marmottes. Diablerets, Suisse.*

Referencias

[1] *Les Marmottes - Filles et Maths*. Consultado: 2024-07-20. URL: https://indico.cern.ch/event/1358301/overview.

[2] Jacques Rancière. *El maestro ignorante*. Mimesis, 2008.

[3] A. Shvarts, R. Alberto, A. Bakker et al. "Embodied instrumentation in learning mathematics as the genesis of a body-artifact functional system". En: *Educational Studies in Mathematics* 107 (2021), págs. 447-469. DOI: 10.1007/s10649-021-10053-0.

[4] A. Shvarts, R. Bos, M. Doorman et al. "Reifying actions into artifacts: process-object duality from an embodied perspective on mathematics learning". En: *Educational Studies in Mathematics* (2024). DOI: 10.1007/s10649-024-10310-y.

[5] Birdbrain Technologies. *Finch Robot 2.0, Birdbrain Technologies*. Consultado: 2024-07-20. URL: https://store.birdbraintechnologies.com/collections/finch-robot/products/finch2.

Diseño e implementación de materiales manipulativos, impresos en 3D, para la mejora de la visualización y estudio de las superficies cuádricas

Lucía Rotger-García, Pedro Bibiloni, Juan Miguel Ribera-Puchades

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, Universitat de les Illes Balears, Crta. De Valldemossa, km. 7,5, 07122, Palma de Mallorca (Illes Balears), Spain e-mail: {lucia.rotger, p.bibiloni, j.ribera}@uib.es

Design and implementation of 3D printed manipulative materials to improve the visualization and study of quadratic surfaces.

RESUMEN

Este estudio explora el uso de modelos tridimensionales impresos en 3D para la enseñanza de superficies cuádricas en la asignatura de Geometría Afín y Métrica del Grado en Matemáticas de la Universitat de les Illes Balears. Los modelos diseñados proporcionan al estudiantado herramientas manipulativas para comprender las propiedades geométricas, promoviendo una mejor visualización e intuición geométrica. La integración de estos recursos en el aula ha mostrado potencial para mejorar la interacción de los estudiantes con conceptos matemáticos abstractos. Las respuestas del estudiantado y del profesorado indican una percepción positiva de la utilidad y aplicabilidad de los modelos en la enseñanza.

Palabras clave: Modelos tridimensionales, superficies cuádricas, Impresión 3D, Visualización geométrica.

ABSTRACT

This study explores the use of 3D printed three-dimensional models for the teaching of quadric surfaces in the course Affine and Metric Geometry of the Degree in Mathematics at the Universitat de les Illes Balears. The models designed provide students with manipulative tools to understand geometric properties, enhancing geometric visualization and intuition. The incorporation of these resources in the classroom has shown potential to improve students' interaction with abstract mathematical concepts. Students' and teachers' responses indicate a positive perception of the usefulness and applicability of the models in teaching.

Keywords: Three-dimensional models, Quadric surfaces, 3D printing, Geometric visualization.

INTRODUCCIÓN

La capacidad de visualizar y generar imágenes mentales de objetos tridimensionales es una destreza clave en el estudio avanzado de las matemáticas [1], particularmente en la comprensión de superficies cuádricas y sus propiedades algebraicas. Estos elementos, fundamentales en la geometría afín y métrica, incluyen conceptos como las secciones y las superficies tangentes, que pueden ser abstractos y complejos para el estudiantado. En concreto, la comprensión y la manipulación mental de las estructuras geométricas y sus transformaciones en el espacio puede constituir un obstáculo en el aprendizaje de la materia [2].

En este contexto, la innovación tecnológica ofrece nuevas posibilidades para mejorar la comprensión conceptual a través de recursos didácticos más interactivos, como es el caso del sistema de geometría dinámica GeoGebra. La introducción de modelos geométricos manipulables impresos en 3D, que representan físicamente estas superficies en el espacio, es otro recurso de utilidad para esta mejora. Al disponer de estas formas geométricas tridimensionales, el estudiantado universitario puede tanto visualizar las características que las definen como interactuar directamente con ellas. Esta interacción promueve una comprensión más profunda y significativa de las propiedades geométricas y las expresiones algebraicas que las caracterizan, mejorando así la capacidad del estudiando para resolver problemas en los que intervengan estas figuras [3]. La adaptación de los modelos tridimensionales a las necesidades específicas del currículo de la asignatura de “Geometría afín y métrica” permite una enseñanza más personalizada sobre la que construir los contenidos de la asignatura a partir de un aprendizaje activo basado en la resolución de problemas.

Centrando la atención en las finalidades educativas, este trabajo explora cómo los modelos tridimensionales impresos en 3D pueden ser diseñados y utilizados para facilitar la visualización de las superficies de interés.

METODOLOGÍA

Selección de Contenidos y Formas Geométricas

Entre las competencias específicas de la asignatura Geometría afín y métrica del grado en Matemáticas de la Universitat de les Illes Balears se encuentra “E5. Clasificar cónicas y cuádricas y resolver problemas relativos a ellas”. Concretamente, se espera que el estudiantado sea capaz de expresar matricialmente la ecuación cuadrática que define una superficie, a la vez que identificar, representar y calcular sus centros, tangentes y asíntotas. De esta

forma, y mediante el cálculo de su ecuación en forma normal, el estudiantado podrá comprender la clasificación euclídea de las cónicas y las cuádricas. Con este objetivo en mente, las clases de resolución de problemas son una buena oportunidad para plantear situaciones en las que el estudiantado tenga la "Capacidad de asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto en diferentes contextos".

Las figuras tridimensionales seleccionadas para la identificación de estos conceptos son: el hiperboloide de una hoja ($\boldsymbol{x^2 + 2y^2 - z^2 = 18}$), el paraboloide hiperbólico ($\boldsymbol{x^2 - y^2 = 2z}$), el cilindro parabólico ($\boldsymbol{x^2 = 2y}$) y el elipsoide ($\boldsymbol{2x^2 + y^2 + z^2 = 25}$). Dicha selección se ha llevado a cabo basándose en los siguientes criterios. Primero, en la diversidad: acotadas y no acotadas, de revolución o no, regladas o no, con y sin centros, cuyas tangentes por puntos exteriores son conos o son dos planos. Segundo, en la facilidad de su expresión algebraica: los coeficientes son números enteros y tienen un tamaño (en centímetros) adecuado para su visualización y medida sobre la impresión 3D. Tercero, en la facilidad de impresión: parametrizadas según el eje que requiere menos soportes. Cuarto, y más importante, en la elaboración conjunta de la actividad: se ha tenido en cuenta desde qué puntos se estudiarían las tangentes, diseñándose conjuntamente tres conos ($\boldsymbol{0.5x^2 + 0.5y^2 = z^2}$, $\boldsymbol{0.5x^2 + y^2 = z^2}$, $\boldsymbol{2x^2 + 2y^2 = z^2}$) que son tangentes a diversas de las figuras en puntos escogidos.

Las dificultades en el estudio de estas superficies tienden a ser de dos tipos: de visualización geométrica y de interpretación de la expresión algebraica que define las superficies cuadráticas y sus superficies tangentes. Del primer tipo, destacamos la interpretación de centro de una superficie (como punto de simetría central que deja invariante la superficie), la identificación de rectas completamente contenidas en cuádricas, y la interpretación geométrica de la superficie tangente (como unión de las rectas tangentes a la superficie que pasan por un punto dado). Del segundo tipo, destaca la expresión de estas mismas rectas mediante ecuaciones matriciales.

Diseño de los Modelos 3D

Existen diferentes herramientas de fácil acceso y uso que permiten el modelado de figuras geométricas tridimensionales a partir de formas primitivas o a partir del uso de la programación por bloques [4]. Estas herramientas pueden ser usadas para la formación en geometría tridimensional desde el alumnado en Educación Primaria hasta estudiantado universitario.

Sin embargo, estas herramientas presentan dificultades para el diseño de modelos más complejos, como las superficies cuádricas. De aquí surge la necesidad de estudiar las posibilidades que ofrece la herramienta OpenSCAD para el diseño detallado de modelos tridimensionales en términos de tamaño, grosor y precisión de la curvatura. OpenSCAD (https://openscad.org/) es una herramienta libre de modelado 3D basada en escritura de código que permite

utilizar un lenguaje funcional para definir el sólido en el espacio. A diferencia de programas de modelado tridimensional más convencionales que utilizan la manipulación directa de vértices y superficies mediante marcadores de tamaño en un espacio tridimensional, OpenSCAD emplea un enfoque basado en scripts para crear de forma precisa vértices y superficies.

Mediante un script en Python, se han parametrizado puntos de una superficie cuadrática, para después generar los vértices y caras de un polígono que aporta grosor a la superficie. El grosor de la superficie se genera, en cada punto, en la dirección normal a la superficie en ese punto. Se ha utilizado una parametrización de las superficies de la capa inferior a la capa superior optimizado para impresión (resolución eje Z de 0.2mm). Cada capa se ha parametrizado en función de la sección: seno y coseno para elipses, senh y cosh para hipérbolas, y equiespaciadas para rectas y parábolas (resolución ejes X, Y de 0.2mm).

Impresión de los Modelos 3D

La fabricación de los modelos 3D diseñados mediante OpenSCAD se llevó a cabo utilizando tecnología de impresión 3D, elegida por su capacidad para producir objetos complejos y precisos, que son complicados de lograr con otros métodos de producción. Para la fabricación de los modelos, se utilizó filamento tipo PLA (poliácido láctico) mediante la impresora 3D Prusa MK4. Este tipo de filamento es el más habitual y resulta ser un material resistente y de calidad que facilita la manipulación de los modelos por parte del estudiantado en el aula.

Los programas de laminación (o *slicer*) son utilizados para transformar el modelo elegido para imprimir en las diferentes capas que definirán la figura impresa 3D. En este caso, se puede utilizar el programa de la propia impresora, PrusaSlicer, que ya tiene una configuración predeterminada. Además, el programa, que es gratuito y de código abierto, se puede utilizar con diferentes niveles de configuración y ajuste, permitiendo ajustarse al nivel de conocimientos del usuario.

Durante la impresión de algunos modelos, es necesario implementar el uso de soportes removibles. Estos soportes se utilizan para mantener la estabilidad de las estructuras, especialmente aquellas con voladizos o con ángulos entre capas mayores de 45º, asegurando así la integridad de las formas finales y se generan de forma automática al seleccionar la opción en el programa de laminación. Una vez finalizada la impresión, los soportes son eliminados fácilmente. Habitualmente, durante el proceso de generación de soportes es necesario estudiar diferentes orientaciones de los modelos 3D con el objetivo de reducir el material utilizado en ellos y reducir así el desperdicio. Un ejemplo del uso de soportes se puede observar en la Figura 1 donde se aprecia en verde los soportes generados para poder imprimir el punto de silla correctamente.

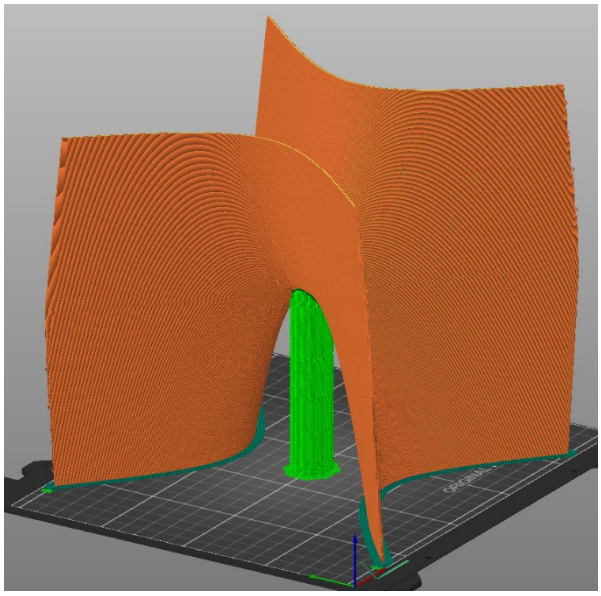


Figura 1: La figura (naranja) del paraboloide hiperbólico en el programa PrusaSlicer. En verde claro se observa los soportes generados automáticamente.
(Fuente: Elaboración propia)

Este proceso de optimización de recursos llevó a realizar ajustes en los diseños originales para optimizar el tamaño de los mismos con el fin de reducir material y tiempo de impresión. Se ajustaron las dimensiones de las figuras para que tuvieran como máximo 20 cm de altura. El grosor de la figura se definió para que fuera de 1.6mm. De esta manera, las figuras impresas resultan firmes, finas y de buen tamaño, el suficiente como para que el estudiantado pudiera interactuar cómodamente con ellas y así facilitar la visualización y manipulación.

Implementación en el Aula

La implementación de los modelos 3D se llevó a cabo en una de las clases prácticas en la que se suelen encontrar dificultades en la representación geométrica de los resultados algebraicos derivados del estudio de propiedades de las superficies cuádricas. Para ello, se desarrolló una secuencia de problemas específicos para cada superficie estudiada en la que los modelos 3D podrían ser de utilidad para la exploración y la comprensión de las propiedades y relaciones. Estas actividades estaban diseñadas para ser realizadas mediante trabajo cooperativo y fomentar un aprendizaje participativo, permitiendo a los estudiantes manipular físicamente los modelos mientras aplicaban conceptos teóricos en tiempo real.

En el caso del elipsoide, se le ofreció al alumnado tanto el modelo de la Figura 2 como el acceso a GeoGebra3D donde se podía encontrar el mismo modelo https://www.geogebra.org/m/a8f8yauj. De esta forma, el estudiantado debía responder a las siguientes preguntas:

1. La intersección entre la cuádrica y los planos $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{y = 0}$ **y** $\boldsymbol{z = 0}$ son cónicas. En la referencia dada, ¿qué cónicas se obtienen y cuál es la ecuación de cada una de ellas?

2. En la referencia dada, ¿Cuál es la ecuación de la cuádrica?
3. Considera el punto $(\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{0})^{\mathbf{t}}$. ¿Es de la cuádrica? ¿qué forma geométrica tiene la superficie tangente al punto dado? ¿Cuál es su expresión algebraica?
4. Considera el punto $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{5})^{\mathbf{t}}$. ¿Es de la cuádrica? ¿qué forma geométrica tiene la superficie tangente al punto dado? ¿Cuál es su expresión algebraica?

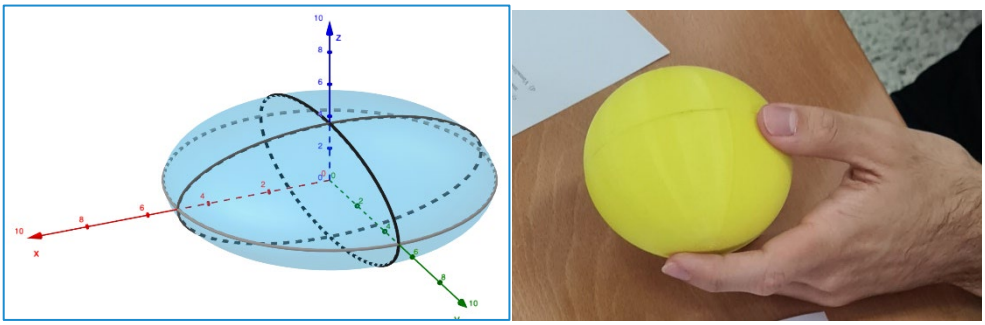


Figura 2: Elipsoide: modelo en GeoGebra (izquierda), y modelo impreso en 3D (derecha). (Fuente: Elaboración propia)

Las preguntas propuestas facilitaban la obtención de la ecuación que definía el elipsoide ($\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2z^2 = 25}$) y de sus superficies tangentes a los dos puntos estudiados: el plano tangente ($\boldsymbol{3x + 4y = 25}$) al punto $(\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{0})^{\mathbf{t}}$ y el cono tangente ($\boldsymbol{-x^2 - y^2 + 2(z-5)^2 = 0}$) al punto $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{5})^{\mathbf{t}}$.

Evaluación del uso de los modelos 3D

Para medir la efectividad de estos recursos en el proceso de enseñanza se realizó una observación del uso que realizó el estudiantado en la práctica. Adicionalmente, se recopiló retroalimentación tanto de estudiantado como del profesorado respecto a la utilidad y la aplicabilidad de los modelos en el aprendizaje. Esta retroalimentación se obtuvo mediante preguntas abiertas en las fichas de respuesta que buscaban obtener opiniones sobre la experiencia de interactuar con los modelos y la percepción de su valor educativo.

RESULTADOS

En el marco de este estudio, se logró la elaboración de cuatro tipos diferentes de cuádricas (Figura 3) y una colección de conos de tres tipos, diseñados específicamente para actuar como superficies tangentes en los problemas propuestos al estudiantado. Los archivos en formato. scad, con los códigos para la creación de los modelos en OpenSCAD, y. stl, disponibles para la impresión 3D, se encuentran disponibles en la página web: https://github.com/PBibiloni/openscad-quadrics/ Estos modelos, diseñados e impresos en 3D, han sido de utilidad para abordar los conceptos geométricos contemplados en la asignatura.

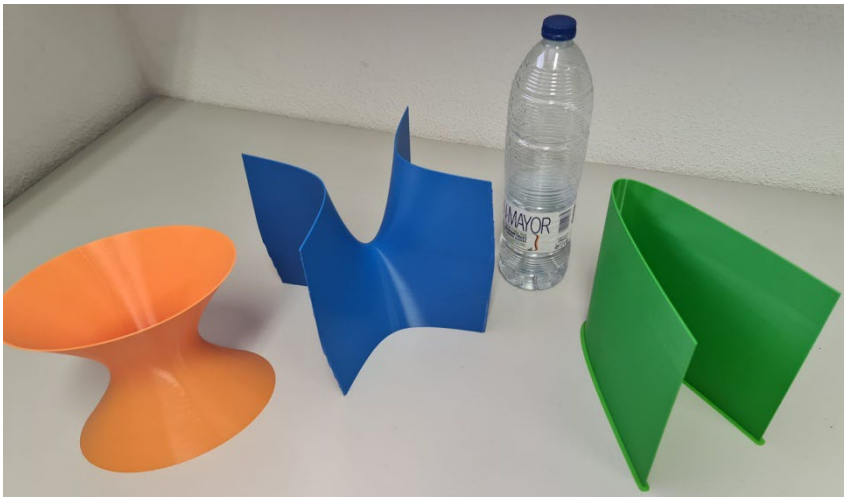


Figura 3: Modelos del hiperboloide de una hoja (izquierda), paraboloide hiperbólico (centro) y cilindro parabólico (derecha).
(Fuente: Elaboración propia)

Las observaciones sobre el uso de estos materiales manipulativos impresos en 3D muestran que, principalmente, se han centrado en promover la intuición geométrica del alumnado. La disponibilidad de estos modelos en el aula facilitó la comprensión de los problemas propuestos, aunque no se encontró una mejora significativa en la habilidad de los estudiantes para responder a los problemas.

Figura 4: Uso de los modelos impresos en el aula.
(Fuente: Elaboración propia)

La retroalimentación recibida por parte del estudiantado y del profesorado participante evidenció la utilidad de los modelos, destacando la posibilidad de manipularlos e interactuar con ellos, para la mejora de la visualización de las propiedades estudiadas. En concreto, el profesorado destacó cómo los modelos impresos en 3D contribuyeron a una mejor intuición geométrica en la resolución de problemas de su estudiantado. Si bien, una de las estudiantes destacó la utilidad de GeoGebra3D frente a los manipulativos impresos en 3D por la familiaridad con ese software.

CONCLUSIONES

Este estudio exploratorio ha permitido destacar la utilidad de los modelos tridimensionales impresos en 3D en la enseñanza de las superficies cuádricas en la asignatura del Grado en Matemáticas de Geometría Afín y Métrica. Los modelos diseñados han proporcionado al estudiantado recursos tangibles para explorar y comprender propiedades geométricas de las superficies. La implementación de estos modelos en el aula ha permitido promover la intuición geométrica de los estudiantes en la resolución de problemas y una mejor visualización de las superficies cuádricas y sus propiedades.

La retroalimentación recogida de estudiantado y profesorado indica una respuesta positiva hacia la utilidad y aplicabilidad de los modelos en el aula. Los resultados sugieren que la integración de recursos manipulativos impresos en 3D en la enseñanza universitaria puede ser beneficiosa, aunque es necesario realizar un estudio más minucioso. Es recomendable continuar explorando y expandiendo el uso de estas tecnologías en otros campos de las matemáticas, como el análisis matemático. Además, futuras investigaciones podrían enfocarse en comparar la eficacia de los modelos físicos frente a los modelos digitales, como los proporcionados por GeoGebra, para determinar las situaciones en las que cada tipo de modelo es más efectivo.

Al continuar integrando y evaluando los modelos tridimensionales impresos en 3D, podemos avanzar hacia un enfoque más inclusivo, que no solo permita mejorar la intuición geométrica y transformar conceptos abstractos en experiencias tangibles y visuales, sino que también permita aumentar el interés y la motivación del estudiantado.

REFERENCIAS

[1] Gutiérrez A. Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. *Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.*, 1, 3-19 (1996).

[2] Clements MA. Origen de las dificultades conceptuales que experimentan en matemática los jóvenes estudiantes. En: Morris R, editor. *Estudios en Educación Matemática*. Vol. 3. Montevideo: ROSTLA; 1983. pp. 134-162.

[3] Dilling F, Witzke I. The Use of 3D-Printing Technology in Calculus Education: Concept Formation Processes of the Concept of Derivative with Printed Graphs of Functions. *Digit Exp Math Educ*. 6, 320–339 (2020). Disponible en: https://doi.org/10.1007/s40751-020-00062-8

[4] Rotger L, Ribera JM, Cuadrado ML. Estrategias inclusivas para la visualización de contenido matemático tridimensional. En: *Actas de las III JID+, Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior*; Valencia; 2023. pp. 43–50.

Elaboración de videotutoriales por parte del estudiantado como método de aprendizaje y de evaluación

Alfonso-Castelló, Aitor [1]; Isert Sales, Daniel[1,2]; López-Ureña, Sergio[1]; Martí Raga, MªCarmen[1]; Morata Dolz, Miguel[3]; Pascual Venteo, Ana Belén[1,3]; Pastor Murcia, Javier[1]; Ramón García, Jose Manuel[1]; Rochera Plata, David[1].

[1] Departamento de Matemáticas, Universitat de València.
[2] Departamento de Análisis Matemático, Universitat de València.
[3] Image Processing Laboratory (IPL), Universitat de València.

Preparation of video tutorials by students as a learning and evaluation method

RESUMEN

En esta publicación, exponemos una iniciativa de innovación docente universitaria implementada en el curso de Matemáticas II, que forma parte de los grados en Ingeniería Electrónica Industrial, Ingeniería Química y del programa de doble grado en Química e Ingeniería Química de la Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de la Universitat de València.

Un objetivo fundamental de aprendizaje en esta asignatura es desarrollar la capacidad del alumnado para resolver ejercicios y problemas mediante la aplicación de conceptos matemáticos avanzados. Con el propósito de potenciar el proceso de aprendizaje, hemos implementado un canal que contiene videotutoriales que muestran la resolución de ejercicios representativos del programa de estudios. Estos vídeos fueron creados por los propios estudiantes y posteriormente revisados por el profesorado.

Cada estudiante preparó un videotutorial, el cual se puso a disposición de todos sus compañeros de curso, convirtiéndose así en un recurso colectivo para el estudio de la materia. Para evaluar tanto la participación en esta actividad como la utilización de los videotutoriales durante el período lectivo y la fase de preparación para los exámenes, se realizaron dos encuestas entre el alumnado.

Los resultados obtenidos de esta experiencia fueron notablemente positivos.

Palabras clave: videotutorial, Micro Flip Teaching, matemáticas, educación superior, resolución de ejercicios.

ABSTRACT

In this publication, we present a university teaching innovation initiative implemented in the Mathematics II course, which is part of the degrees in Industrial Electronic Engineering, Chemical Engineering and the double degree program in Chemistry and Chemical Engineering of the Escola Tècnica Superior d'Engineering from the University of Valencia.

A fundamental learning objective in this subject is to develop students' ability to solve exercises and problems through the application of advanced mathematical concepts. With the purpose of enhancing the learning process, we have implemented a channel that contains videotutorials that show the resolution of representative exercises from the study program. These videos were created by the students themselves and subsequently reviewed by the teaching staff.

Each student prepared a videotutorial, which was made available to all their classmates, thus becoming a collective resource for the study of the subject. To evaluate both participation in this activity and the use of the videotutorials during the teaching period and the preparation phase for the exams, two surveys were carried out among the students. The results obtained from this experience were remarkably positive.

Keywords: ODE, SDG

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Matemáticas II, que se imparte en los grados y dobles grados de Ingeniería de la Escola Tècnica Superior de Enginyeria (ETSE) de la Universitat de València (UV), se caracteriza por su amplio y complejo contenido curricular. El programa abarca temas avanzados como el análisis de funciones de varias variables, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, el estudio de las transformadas de Laplace, el análisis de sucesiones y series, y el cálculo de series de Fourier [3,4]. Debido a la complejidad inherente de estos conceptos y la extensa gama de temas que se deben cubrir en el curso, los estudiantes a menudo se sienten abrumados. Esta situación genera frecuentes dificultades para comprender en profundidad y aplicar eficazmente los principios matemáticos estudiados.

En respuesta a esta problemática, el alumnado habitualmente busca apoyo en recursos digitales, como los vídeos alojados en plataformas como YouTube o materiales educativos disponibles en la red. No obstante, estos contenidos en línea pueden presentar inconvenientes en términos de calidad, pertinencia y concordancia con la notación matemática empleada por el profesorado. Esta discrepancia suele incrementar la frustración entre los estudiantes, quienes encuentran dificultades para localizar materiales adecuados y verdaderamente

útiles para su proceso de aprendizaje.

La incorporación de videotutoriales en el ámbito educativo ha cobrado una relevancia significativa en el último decenio, debido a su capacidad para potenciar el aprendizaje del estudiantado. Un estudio exhaustivo sobre la utilización de podcasts de vídeo en educación, presentado en [2], ofrece una base teórica sólida para comprender tanto los beneficios como los retos que conlleva la implementación de esta metodología didáctica.

Nuestra propuesta tiene como objetivo involucrar activamente al alumnado en su proceso de aprendizaje, promoviendo su participación y mejorando su comprensión y habilidad para resolver problemas y para comunicarse en el ámbito matemático. La iniciativa consiste en que los propios estudiantes creen un canal de videotutoriales, donde ellos mismos elaboran vídeos resolviendo ejercicios seleccionados por el profesorado. Estos ejercicios son previamente presentados y corregidos en las sesiones prácticas de la asignatura. Además, el vídeo elaborado por un/a estudiante es enviado a un profesor/a para su revisión, previa publicación en el canal de vídeos. De esta manera, se proporciona una retroalimentación individualizada.

Esta aproximación innovadora busca enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la materia, ofreciendo recursos educativos de alta calidad y pertinencia, mediante una actividad colaborativa. Dichos recursos están diseñados para ser accesibles en cualquier momento y lugar, permitiendo al estudiantado complementar y reforzar su aprendizaje de manera flexible. De este modo, se proporciona una solución adaptada a las necesidades específicas del curso, superando las limitaciones de los recursos en línea genéricos y fomentando un aprendizaje más efectivo y personalizado.

Una vez concluida la fase principal de la actividad, que consistió en la grabación de los videotutoriales, se llevó a cabo un proceso de evaluación mediante diversas encuestas. Estas tenían como propósito medir la influencia de la iniciativa en el proceso de aprendizaje del alumnado, así como analizar la utilización de los recursos creados durante la preparación para los exámenes.

En el presente artículo, se exponen los hallazgos obtenidos a partir de esta experiencia educativa. Se pone especial énfasis en resaltar los elementos que han demostrado ser beneficiosos, así como en identificar aquellos aspectos susceptibles de mejora. Estas observaciones servirán como base para perfeccionar y optimizar futuras ediciones del proyecto, con el objetivo de maximizar su eficacia pedagógica y su impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

METODOLOGÍA

El método que presentamos se encuadra en la línea del 'Micro Flip Teaching' [1], pues implica que el alumnado genere un poco de contenido educativo en forma de videotutoriales para compartir con sus pares. Esta estrategia transforma al estudiante en productor de recursos didácticos, alejándose del papel pasivo tradicional. Nuestra aproximación emplea unidades de aprendizaje breves y

concretas, centradas en solucionar ejercicios típicos, que cada alumno puede consultar según sus necesidades. Así, se promueve una experiencia educativa más dinámica, individualizada y ajustable a los requerimientos de cada estudiante.

La actividad se inició con la selección, por parte del profesorado, de un conjunto de problemas representativos del programa de Matemáticas II. Cada uno fue asignado a un/a estudiante y a una correspondiente sesión de prácticas. Previamente a la sesión, los estudiantes debían preparar los ejercicios, para así poder exponerlos en clase y poder corregir colectivamente los posibles errores antes de la grabación del videotutorial.

Tras la presentación en clase, los alumnos procedían a grabar su vídeo y lo remitían al profesorado para su revisión, con el fin de mejorar la calidad de las grabaciones, la claridad expositiva y la eficiencia en la resolución. Los vídeos revisados se incorporaban al canal de videotutoriales en el Aula Virtual de la asignatura, como se muestra en la Figura 1.

Para incentivar la participación, se asignó un 10% de la calificación final a esta actividad, incluyendo tanto la exposición en clase como la realización del videotutorial.

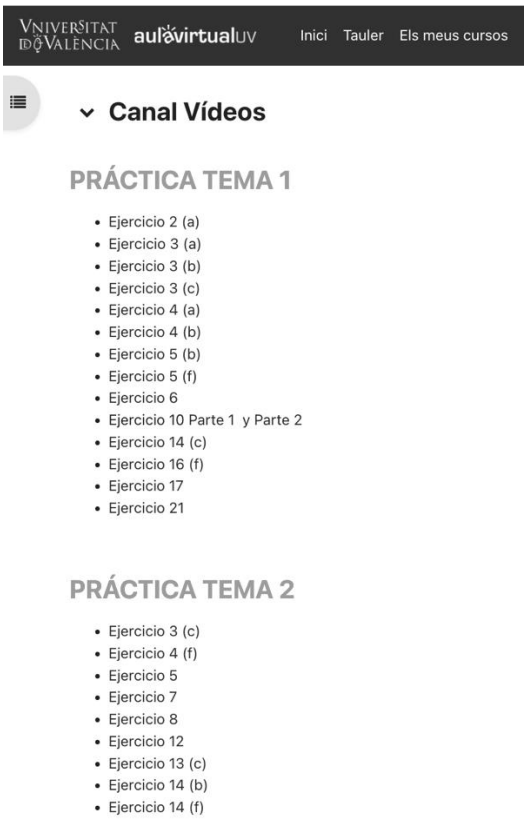


Figura 1: Captura del canal de videotutoriales accesible en la plataforma del Aula Virtual para la asignatura de Matemáticas II. Este recurso está disponible para los estudiantes del Grado en Ingeniería Química y del programa de doble grado en Química e Ingeniería Química de la Universitat de València, correspondiente al año académico 2023-2024.

RESULTADOS

Los resultados más significativos de la participación y las encuestas sobre la actividad realizada con el alumnado se resumen a continuación.

Se efectuaron dos encuestas: una al finalizar el curso para evaluar la satisfacción y el uso previsto de los videotutoriales, y otra posterior al examen para analizar su utilización real durante el estudio. Pueden consultarse los resultados completos en [5].

De los 133 estudiantes matriculados, 97 (72,9%) participaron en la actividad. La primera encuesta fue respondida por 48 alumnos (36,1%) y la segunda por 24 (18%). La participación fue similar entre los diferentes grados involucrados. Estos datos sostienen que se ha promovido la participación del alumnado, involucrándose en su aprendizaje.

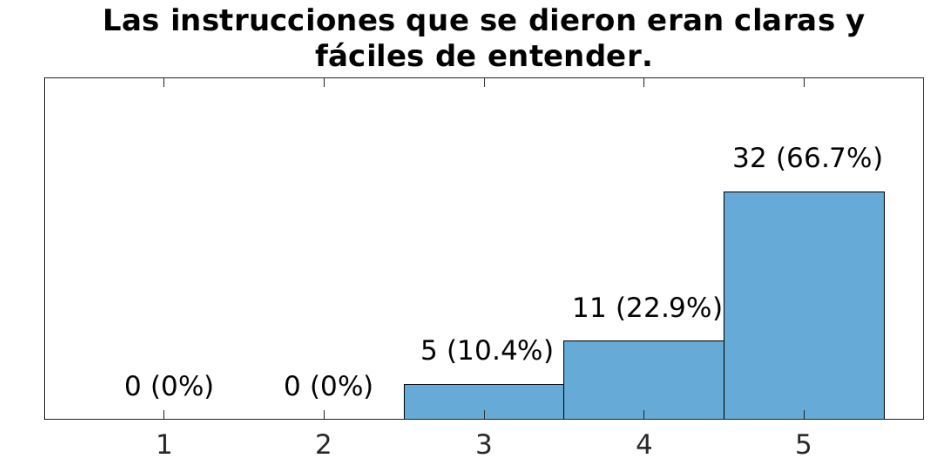
La primera encuesta reveló que, si bien todos los participantes estaban al tanto de la actividad, únicamente el 77,1% había visualizado algún video del canal. En contraste, la segunda encuesta mostró un aumento significativo, con un 95,8% de los encuestados habiendo utilizado este recurso, lo que indica su relevancia en la preparación para el examen y que la habilidad comunicativa de las y los estudiantes es suficiente, como también lo es su capacidad resolutiva de los problemas.

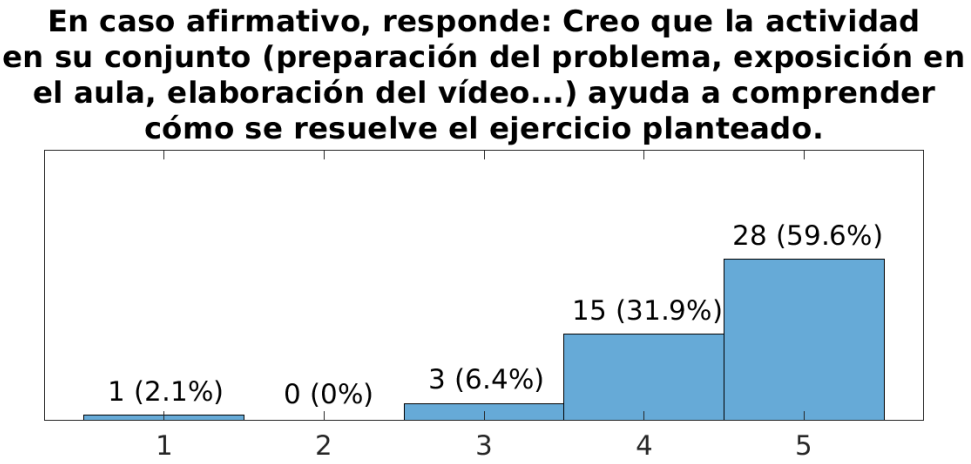
Ambas encuestas corroboraron que los videotutoriales facilitan la comprensión de los métodos de resolución de ejercicios. Esta percepción se alinea con las expectativas iniciales de los estudiantes, quienes en la primera encuesta anticiparon que probablemente recurrirían a estos videos durante su preparación para el examen. Este incremento en el uso de los videotutoriales subraya su eficacia como herramienta de estudio, especialmente en el periodo previo a la evaluación final.

Las encuestas evidencian una percepción predominantemente favorable de la iniciativa de crear videotutoriales para la asignatura, tal como se muestra en la Figura 2. Para la evaluación, se utilizó una escala de Likert de cinco puntos:
(1) Muy en desacuerdo, (2) En desacuerdo, (3) Indiferente, (4) De acuerdo, (5) Muy de acuerdo. Esta escala permitió a los participantes expresar su grado de conformidad con diversas afirmaciones sobre la experiencia, proporcionando una visión detallada de la recepción del proyecto por parte del alumnado.

Los resultados de la encuesta indican una recepción muy favorable de la actividad por parte del alumnado: La claridad y sencillez de las instrucciones recibieron una valoración altamente positiva. Igualmente, el conjunto de la actividad, que abarcaba la preparación del problema, su exposición en clase y la creación del videotutorial, fue bien acogido por los estudiantes. Una amplia mayoría, el 91,5% de los encuestados, consideró que la actividad contribuye significativamente a la comprensión de los métodos de resolución de los ejercicios propuestos. Además, el 87,5% de los participantes recomendaría la continuidad de esta actividad en futuras ediciones del curso, lo que refleja su percepción del valor educativo de la experiencia.

La segunda encuesta reveló que, si bien los estudiantes encontraban útil el canal de videotutoriales proporcionado, también recurrían a fuentes adicionales de información: Un 79,2% de los encuestados. Entre estos recursos alternativos, el formato de videotutorial sigue siendo el preferido por los estudiantes. Específicamente, la plataforma YouTube se destaca como una fuente frecuente de consulta para material educativo adicional. Esta diversificación en las fuentes de estudio, que combina los recursos oficiales del curso con otros materiales disponibles en línea, se interpreta como un enfoque positivo hacia el aprendizaje autónomo y la búsqueda activa de conocimiento por parte del alumnado.





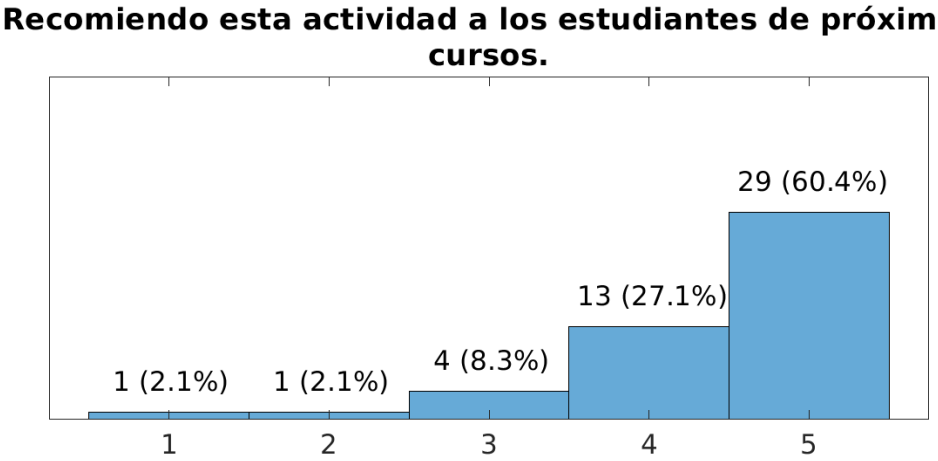


Figura 2: Resultados de la primera encuesta sobre la creación de videotutoriales en Matemáticas II, Grado en Ingeniería Química y doble grado Química-Ingeniería Química, UV, 2023-2024. Muestra la distribución de opiniones del alumnado sobre diversos aspectos de la actividad.

CONCLUSIONES

Este trabajo presenta una iniciativa de innovación pedagógica implementada en el curso de Matemáticas II, parte de los programas de Ingeniería Electrónica Industrial, Ingeniería Química y el doble grado en Química e Ingeniería Química en la Escola Tècnica Superior de Enginyeria de la Universitat de València.

La actividad ha demostrado un claro impacto positivo en el aprendizaje y desarrollo de competencias del alumnado. La elaboración de videotutoriales exige a los estudiantes explicar y demostrar su comprensión de los ejercicios, promoviendo así una asimilación más profunda del contenido y un aprendizaje activo. Además, la disponibilidad de estos recursos en el Aula Virtual para todos los compañeros de curso fomenta la colaboración y el intercambio de conocimientos, beneficiando el aprendizaje colectivo del grupo.

Los resultados de la encuesta de satisfacción y el análisis crítico subsiguiente indican que la actividad ha sido beneficiosa para la formación de los estudiantes. Además, se ha observado un incremento en el nivel de compromiso y participación del alumnado en las sesiones de clase de la asignatura.

Si bien la actividad se considera exitosa, se han identificado áreas de mejora. Destaca la necesidad de optimizar la logística de distribución y asignación de vídeos, que podría automatizarse mediante un procedimiento unificado. Esta mejora facilitaría la tarea del alumnado, clarificando los pasos a seguir, y simplificaría el proceso de revisión para el profesorado.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte de la Universitat de València dado a través del proyecto de innovación educativa UV-SFPIE_PIEE-2735089.

REFERENCIAS

[1] García-Peñalvo, F. J., Fidalgo-Blanco, Á., Sein-Echaluce, M. L., Conde, M. Á. Cooperative micro flip teaching. In *Learning and Collaboration Technologies: Third International Conference, LCT 2016, Held as Part of HCI International 2016, Toronto, ON, Canada, July 17-22, 2016, Proceedings* 3 (pp. 14-24). Springer International Publishing. (2016)

[2] Kay, R. H. Exploring the use of video podcasts in education: A comprehensive review of the literature. *Computers in human behavior*, 28(3), 820-831. (2012).

[3] Universitat de València. *Guía docente Matemáticas II, Grado en Ingeniería Química y doble grado en Química e Ingeniería Química. Curso 2023-2024.* Página web: <https://webges.uv.es/uvGuiaDocenteWeb/guia?APP=uvGuiaDocenteWeb&ACTION=MOSTRARGUIA.M&MODULO=34744&CURSOACAD=2024&IDIOMA=V> [Consulta 1 de julio de 2023]

[4] Universitat de València. *Guía docente Matemáticas II, Grado en Ingeniería Electrónica Industrial. Curso 2023-2024.* Página web: <https://webges.uv.es/uvGuiaDocenteWeb/guia?APP=uvGuiaDocenteWeb&ACTION=MOSTRARGUIA.M&MODULO=34913&CURSOACAD=2024&IDIOMA=V> [Consulta 1 de julio de 2023]

[5] Resultados de las encuestas. https://nuvol.uv.es/owncloud/index.php/s/JXFcWgjuwwuj5Wh

Experiencias de Gamificación en la Educación Universitaria

Javier Falcó[1], Daniel Isert[2]

[1] Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia, C/ Dr. Moliner 50, 46100 Burjassot (Valencia), Spain, francisco.j.falco@uv.es
[2] Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Valencia, C/ Dr. Moliner 50, 46100 Burjassot (Valencia), Spain, daniel.isert@uv.es

Gamification Experiences in University Education

RESUMEN

En los últimos años, la gamificación ha emergido como una innovadora estrategia educativa, transformando la manera en que se imparten y reciben las clases. Tradicionalmente, la educación se ha basado en clases magistrales con tiza y pizarra, donde el alumno permanecía sentado copiando lo que decía el profesor o resolviendo ejercicios. Sin embargo, durante los últimos años la gamificación como herramienta pedagógica ha cogido más fuerza. En la asignatura “Análisis Matemático I F-M” del primer curso del Doble Grado en Física y Matemáticas, hemos introducido la gamificación proponiendo el diseño de un juego de mesa basado en la asignatura. Los estudiantes prepararon preguntas relacionadas con la asignatura y, al final del curso, jugaron por equipos respondiendo a las preguntas que ellos mismos habían creado. Este enfoque ofrece una forma de enseñanza más dinámica y colaborativa, ayudando al alumnado a estudiar y comprender la materia para formular preguntas interesantes. En este documento, además de detallar la experiencia, analizamos el impacto que esta propuesta ha tenido dentro del curso.

Palabras clave: Gamificación, Dinámica de grupo, Colaboración, Estrategias de enseñanza, Participación activa

ABSTRACT

In recent years, gamification has emerged as an innovative educational strategy, transforming the way classes were taught and received. Traditionally, education was based on master classes with chalk and blackboard, where students remained seated copying what the teacher said or solving exercises. However, in recent years, gamification as a pedagogical tool has gained more strength. In the subject “Mathematical Analysis I F-M” of the first year of the Double Degree in Physics and Mathematics, we have introduced gamification by proposing the design of a board game based on the subject. The students prepared questions related to the subject and, at the end of the course, they played in teams answering the questions that they themselves had created. This approach offers a more dynamic and collaborative way of teaching, helping students to study and understand the subject to ask interesting questions. In this document, in addition to detailing the experience, we analyze the impact that this proposal has had within the course.

Keywords: Gamification, Group dynamics, Collaboration, Teaching strategies, Active participation

INTRODUCCIÓN

La gamificación, entendida como la aplicación de elementos y dinámicas de juego en contextos no lúdicos, ha demostrado ser una estrategia efectiva para aumentar la motivación y el compromiso de los participantes (Funding Startups, 2011; Vodafone España, 2017; Werbach & Hunter, 2012). En el ámbito educativo, se ha empleado para transformar la experiencia de aprendizaje, haciéndola más atractiva, dinámica y participativa para el estudiantado, como lo han evidenciado estudios previos (Oliva, 2017; Iosup & Epema, 2014; Espinosa, 2016).

En la Universidad de Valencia, hemos implementado una propuesta de gamificación dentro del proyecto “CO3MAT”, que se enmarca en el “Programa de Proyectos de Innovación Educativa en la Universidad de Valencia”. El objetivo de este programa es promover metodologías educativas que mejoren la calidad del aprendizaje y el compromiso de los estudiantes del Grado en Matemáticas.

La propuesta de gamificación se implementó en la asignatura “Análisis Matemático I F-M” durante el primer curso del Doble Grado en Física y Matemáticas en el año académico 2023-2024, con un total de 34 estudiantes

matriculados. La actividad principal consistió en el diseño y uso de un juego de mesa creado por los propios estudiantes, orientado a trabajar y reforzar los contenidos fundamentales de la asignatura de manera dinámica y participativa.

Aunque existen otras metodologías activas, se optó por introducir la gamificación debido a sus características únicas que, además de motivar a los estudiantes, favorecen el desarrollo de habilidades cognitivas y sociales esenciales. Además, la gamificación no solo incentiva la participación activa, sino que también permite crear un entorno de aprendizaje dinámico y competitivo de manera controlada, lo cual aumenta el compromiso de los estudiantes con el contenido. Su capacidad para transformar tareas tradicionales en desafíos estimulantes y proporcionar retroalimentación inmediata mejora la experiencia de aprendizaje, promoviendo la autoeficacia y el pensamiento crítico (*Lee & Hammer, 2011; Oliva, 2017*).

El propósito de este artículo es presentar y analizar la implementación de esta actividad de gamificación y su impacto en el aula. Específicamente, se busca:

- Describir el proceso de diseño y desarrollo del juego de mesa por parte de los estudiantes.
- Explicar cómo se organizaron y llevaron a cabo las sesiones de juego al final de cada cuatrimestre.
- Evaluar el impacto de esta actividad en términos de motivación, participación y rendimiento académico del estudiantado.

MARCO TEÓRICO

La gamificación ha emergido como una innovadora herramienta educativa que transforma el modelo tradicional de enseñanza hacia metodologías más activas y participativas. Tradicionalmente, la enseñanza universitaria se ha centrado en un enfoque magistral, donde los docentes transmiten conocimientos a los estudiantes, relegándolos a un papel pasivo en su propio aprendizaje. Sin embargo, las nuevas tendencias educativas buscan cambiar este paradigma, fomentando una postura dinámica por parte de los estudiantes dentro del proceso de aprendizaje (*Corchuelo Rodríguez, 2018; Espinosa, 2016; Iosup & Epema, 2014; Lee & Hammer, 2011; Oliva, 2017)*.

El término “gamificación” fue acuñado por primera vez por Pelling en 2002 (*The (Short) Prehistory of “Gamification”… | Funding Startups (& Other Impossibilities*, 2011)) para referirse a la integración de elementos y mecánicas de juego en entornos no lúdicos, como es la educación. Desde entonces, la gamificación ha

sido reconocida como una estrategia efectiva para motivar el aprendizaje y mejorar las dinámicas de grupo en el aula. Autores como (Oliva 2017) han encontrado en la gamificación una oportunidad para estimular el interés, la atención y el aprendizaje significativo de los estudiantes. Otros estudios también resaltan sus beneficios para mejorar y motivar el aprendizaje mediante diferentes dinámicas como (Iosup & Epema, 2014) y (Espinosa, 2016).

No obstante, la implementación de la gamificación en el contexto universitario no está exenta de desafíos. Es crucial diseñar cuidadosamente las mecánicas del juego, ya que de ellas depende en gran medida el éxito o fracaso de la propuesta. Por ejemplo, Contreras y Eguia (2016) identificaron que una implementación inadecuada de la gamificación puede llevar a una disminución en el nivel académico de los estudiantes e incluso, en algunos casos, transmitir una percepción errónea del nivel de exigencia de la asignatura.

Por esta razón, para el diseño e implementación de esta actividad nos basamos en los conceptos y fases propuestas por Werbach y Hunter, así como en los principios de gamificación enunciados por Yu-Kai Chou. Esta integración pretendía crear una experiencia de aprendizaje envolvente y motivadora para los estudiantes, alineando los objetivos educativos del curso con las mecánicas de juego y la psicología del usuario. Al incorporar los elementos clave de la gamificación, como la definición de objetivos claros y el diseño de actividades, buscábamos mejorar la participación y el rendimiento académico de los estudiantes, mientras fomentábamos una mayor inmersión y disfrute en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

METODOLOGÍA

A lo largo del cuatrimestre, los estudiantes participaron activamente en el diseño de un juego de mesa, con el objetivo de aplicar los conceptos teóricos aprendidos en clase de una manera práctica y creativa. Las sesiones de juego, realizadas al final de cada cuatrimestre, intentarón brindar una oportunidad para que los estudiantes interactuaran con el material de una forma lúdica y competitiva, reforzando su comprensión y consolidando sus conocimientos.

La propuesta que estamos analizando involucró a los estudiantes en un proceso activo de aprendizaje centrado en los contenidos de la asignatura. La participación de los estudiantes se desarrolló en cuatro fases principales:

1. **Creación del juego:**
    - **Objetivo**: Facilitar que el alumnado profundizara en los conceptos aprendidos, fomentando la reflexión y la comprensión a través del

diseño de preguntas individuales. Además, se buscaba ofrecer una oportunidad para que los estudiantes desarrollaran su creatividad y participaran activamente en la elaboración del material educativo.

- Al final de cada unidad didáctica, el alumnado creó preguntas de forma individual, abarcando aspectos teóricos, prácticos y aplicados relacionados con los contenidos vistos en clase. En total, el alumnado diseñó 418 preguntas (142 de teoría, 144 de prácticas, 132 de aplicadas), cada una de ellas con su respectiva respuesta correcta.

2. **Preparación para el Juego:**
   - **Objetivo**: Fomentar que los estudiantes repasaran y asedentaran los conceptos clave del curso mediante la creación de un resumen individual. Asimismo, se pretendía proporcionarles una herramienta de consulta útil durante el juego que facilitara la aplicación práctica de los conocimientos adquiridos.
   - Antes de las sesiones de juego, el alumnado tuvo la oportunidad de prepararse para la partida, creando un resumen individual de la asignatura que no sobrepasara una página de longitud. Este lo podrían utilizar durante el juego.

3. **Partida del juego:**
   - **Objetivo**: Crear un entorno dinámico y colaborativo donde el alumnado pudiera poner a prueba sus conocimientos de manera lúdica, promoviendo el trabajo en equipo y el intercambio de ideas entre los participantes.
   - Durante las sesiones de juego, al final de cada cuatrimestre, el alumnado jugó en equipos, avanzando en el tablero si respondían correctamente a las preguntas creadas por sus compañeros y compañeras. Esto les sirvió para poner a prueba sus conocimientos en un ambiente dinámico y colaborativo, a la vez que competitivo.

4. **Reflexión y Evaluación:**
   - **Objetivo**: Proporcionar al alumnado una oportunidad para expresar sus opiniones y comentarios sobre la experiencia, así como evaluar el impacto de la actividad en el aprendizaje y la participación, identificando posibles áreas de mejora para futuras implementaciones.
   - Después de las sesiones de juego, se llevó a cabo una fase de reflexión donde el alumnado respondió a una encuesta sobre la utilidad y el interés de la actividad.

La gamificación según Werbach y Hunter

(Werbach & Hunter, 2012) recomiendan seis pasos fundamentales para llevar a cabo una estrategia de gamificación exitosa. Estos incluyen; definir claramente los objetivos educativos, delimitar los comportamientos a potenciar en los estudiantes, identificar a los jugadores y desarrollar ciclos de actividad coherentes, entre otros aspectos. Estos elementos son cruciales para diseñar e implementar estrategias de gamificación efectivas que impulsen el aprendizaje y la participación de los estudiantes en el aula universitaria.

Durante la actividad de gamificación en el curso “Análisis Matemático I F-M”, se llevaron a cabo las siguientes acciones basadas en los seis puntos propuestos por Werbach y Hunter:

1. **Definir los objetivos educativos:**
    - Se establecieron objetivos claros relacionados con el aprendizaje de los contenidos matemáticos de la asignatura y la participación activa de los estudiantes.
2. **Delinear los comportamientos objetivos:**
    - Se identificaron los comportamientos deseables en los estudiantes, como la participación activa en las sesiones de juego, la colaboración en equipo y la resolución creativa de problemas matemáticos.
3. **Describir a los jugadores:**
    - Se realizó un análisis del perfil de los estudiantes participantes, teniendo en cuenta sus intereses, habilidades y preferencias en cuanto a juegos y respecto a la materia. Esto permitió adaptar las actividades de gamificación para que fueran relevantes y atractivas para el grupo.
4. **Desarrollar ciclos de actividad:**
    - Se planificaron y organizaron actividades a lo largo del curso que motivaron a los estudiantes a participar activamente en el desarrollo de la actividad. Para ello, se diseñó el desarrollo de la actividad en paralelo al avance de la asignatura.
5. **¡No olvidarse de la diversión!:**

- Se diseñaron experiencias de juego atractivas, mezclando las habilidades y conocimientos de los estudiantes con el azar. De este modo se mantiene el interés y la motivación de los estudiantes durante todo el desarrollo de la actividad.

6. **Implantar las herramientas apropiadas:**

    - Se seleccionaron y utilizaron herramientas adecuadas para la gamificación como es el uso del Aula Virtual (plataforma online de educación de la Universidad de Valencia) y materiales físicos con los que jugar. Esto permitió un contacto directo con el juego. Esta combinación de tecnología y manipulación buscaba un equilibrio entre la introducción de las nuevas tecnologías y la manipulación básica.

El objetivo de implementar estas acciones basadas en los seis puntos de Werbach y Hunter era crear una experiencia de gamificación efectiva que fomentara el aprendizaje activo, promoviera la participación de los estudiantes y aumentara la motivación en el aula.

La gamificación, según Yu-Kai Chou

La gamificación, según Yu-Kai Chou (*¿Qué Hace Divertido El Trabajo? ¿Y Que Un Producto Lo Sea También?*, 2017), es el arte de incorporar elementos lúdicos en actividades rutinarias y esenciales para hacerlas más atractivas y motivadoras. Los principios de gamificación de Chou, conocidos como los Ocho Principios del Octalysis, son fundamentales para entender cómo la motivación puede ser dirigida y aprovechada en diferentes contextos como son el educativo y el empresarial. Estos principios son: Significado y Vocación Épicos, Desarrollo y Logro, Potenciación de la Creatividad, Propiedad y Posesión, Influencia Social y Afinidad, Escasez e Impaciencia, Imprevisibilidad y Curiosidad, y Evitación de Pérdidas.

En el contexto de la asignatura, estos principios se aplicaron de la siguiente manera en las cuatro fases de la actividad:

1. **Fase de creación** en la que se realizó el diseño y creación del juego.
2. **Fase de preparación** realizada por el alumnado de modo individual antes de la fase de partida.
3. **Fase de partida** en la que se incluyen las sesiones de juego del final de cada cuatrimestre.
4. **Fase de reflexión** realizada por el alumnado de modo individual después de la fase de partida.

A continuación, detallamos el desarrollo de los principios en cada una de estas dos fases:

- **Significado y Vocación Épicos:** Se buscó que, al participar en el diseño del juego entre todo el estudiantado, el alumnado se sintiera parte de una comunidad académica más amplia, con el propósito compartido de dominar conceptos matemáticos complejos. Durante la fase de reflexión, se esperaba que los participantes analizaran activamente la actividad realizada, reflexionando sobre sus ventajas y posibles mejoras. (creación y reflexión)
- **Desarrollo y Logro**: A través de la creación del juego y el progreso de los equipos durante las partidas, se pretendió que el alumnado pudiera comprobar sus avances académicos y reconocer los conocimientos y destrezas adquiridos a lo largo del curso. (creación, partida y reflexión)
- **Potenciación de la Creatividad:** El objetivo fue que los estudiantes utilizaran su creatividad para diseñar problemas y retos matemáticos únicos durante la fase de diseño del juego, así como para preparar un resumen conciso de la asignatura que les sirviera durante el juego. (creación y preparación)
- **Propiedad y Posesión:** Se buscó que, al ser responsables del diseño del juego, del resumen y del análisis de la actividad, el alumnado desarrollara un sentido de pertenencia y compromiso con el proyecto. (creación, preparación y reflexión)
- **Influencia Social y Afinidad:** El objetivo de jugar en conjunto fue fomentar la colaboración al jugar por equipos y promover una competencia amistosa entre los estudiantes, creando así un ambiente de aprendizaje social. (partida)
- **Escasez e Impaciencia:** Se pretendió que las preguntas, diseñadas para ser desafiantes y difíciles de conseguir, motivaran a los estudiantes a esforzarse más para alcanzar el objetivo de ser el equipo ganador. (partida)
- **Imprevisibilidad y Curiosidad:** Las reglas del juego de mesa buscaron que los elementos aleatorios y los resultados inesperados mantuvieran el interés y la curiosidad de los participantes. (partida)
- **Evitación de Pérdidas:** Al poner fechas límite para la entrega de las tareas, se intentó que los estudiantes se esforzaran en crear las preguntas dentro del plazo establecido e intentaran resolverlas a tiempo, lo que pretendió incentivar un mayor compromiso tanto con la actividad como con la asignatura durante el desarrollo del juego. (creación y partida)

IMPLEMENTACIÓN DEL JUEGO DE MESA

El juego de mesa se estructuró de manera que los diferentes temas de “Análisis Matemático I - F-M” fueran presentados a través de desafíos y problemas que los estudiantes debían resolver para avanzar en el juego. Esto no solo pretendía ayudar a consolidar los conocimientos adquiridos, sino que también buscaba fomentar habilidades como el trabajo en equipo, la resolución de problemas y el pensamiento crítico.

El principal objetivo de esta actividad era mejorar la comprensión y retención de los conceptos de la asignatura, al mismo tiempo que se intentaba fomentar un ambiente de aprendizaje activo y participativo, donde el alumnado se sintiera motivado a colaborar y aprender de manera lúdica.

El juego diseñado durante esta actividad, con el título "El primero de la jubilación", tenia como objetivo principal guiar a los jugadores desde el inicio de su formación universitaria hasta su jubilación, representando de manera lúdica y educativa el camino académico y profesional de un estudiante universitario en el Doble Grado en Física y Matemáticas de la Universidad de Valencia.

Objetivo del Juego:

- El objetivo ara graduarse y avanzar en una carrera profesional hasta ser el primero en jubilarse.

Componentes del Juego:

- **Tablero pentagonal (Figura 1):** Cada lado del pentágono representaba un curso del doble grado. El tablero estaba compuesto por:
    - **Casillas de asignaturas:** Los jugadores se detenían en estas casillas para superar las asignaturas, respondiendo a una de las 418 preguntas de las categorías de teoría, práctica o de aplicaciones diseñadas por el alumnado. El estudiantado podía elegir el tipo de preguntas que quería responder. En las esquinas del tablero había una casilla libre que permitía al estudiantado elegir a qué curso y asignatura correspondía la pregunta que querían responder. Todas estas preguntas y sus respuestas fueron diseñadas por el alumnado.
    - **Casillas de comodín y tiempo extra:** Ofrecían ventajas y tarjetas especiales que los jugadores podían utilizar durante la partida.
    - **Caminos profesionales:** Al finalizar el grado universitario, los jugadores elegían entre tres opciones profesionales: enseñanza universitaria, enseñanza no universitaria o trabajo en la empresa. Cada camino tenía desafíos específicos que los jugadores debían

superar para avanzar. En cada turno, el alumnado destapaba una tarjeta de reto relacionada con el camino escogido y respondían a las preguntas. En la misma tarjeta se especificaba cuál era la recompensa o la penalización asociada a esta prueba.

○ **Pruebas específicas:** Para avanzar en sus respectivos caminos profesionales, los jugadores debían superar un desafío específico que estaba indicado en el tablero. Estos desafíos fueron:

■ **Enseñanza universitaria:** obtener el doctorado (una pregunta práctica y dos teóricas),

■ **Enseñanza no universitaria:** aprobar una oposición (una pregunta teórica y dos prácticas),

■ **Trabajo en la empresa:** superar una prueba de admisión (una pregunta práctica y dos aplicadas).

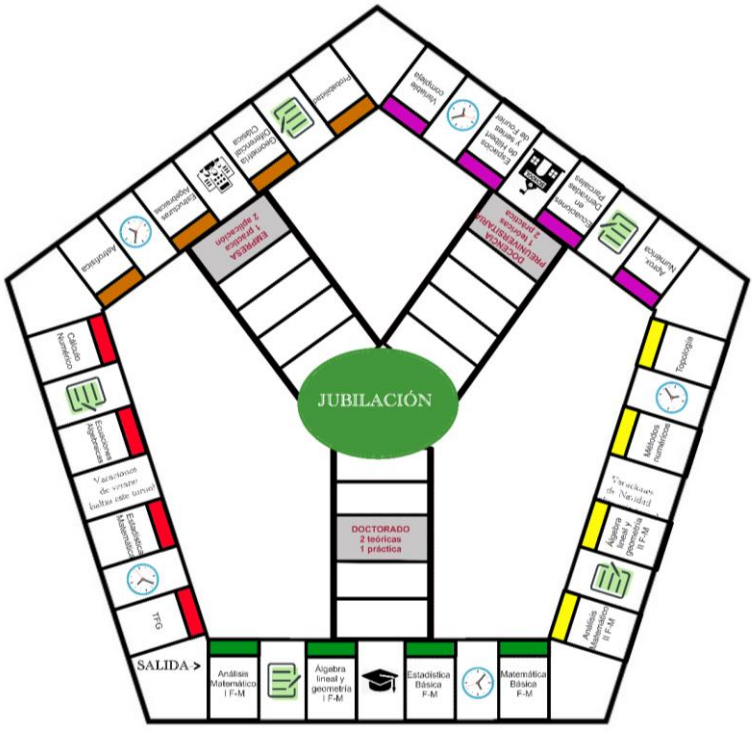


Figura 1: Tablero del juego

- **Tokens (Figura 2):** Utilizados para desplazarse por el tablero.
- **Dados poliédricos (Figura 2):** Estos dados fueron utilizados por los jugadores para desplazarse por el tablero. En cada turno, debían escoger dos dados y lanzarlos. El personaje se desplazaba alrededor del tablero tantas casillas como resultado sumaran los dos dados. El alumnado podía decidir qué dos dados utilizar en cada momento en función de sus

necesidades. Cuando se pasaba a la fase de caminos profesionales, se dejaban de utilizar los dados y se utilizaban las tarjetas de pruebas específicas para desplazarse por el tablero.

Figura 2: Tokens y dados

Figura 3: Fichas

- **Boletines de notas:** Estos boletines consistían en un listado que incluía dos espacios para cada uno de los cinco cursos del doble grado. Al superar una asignatura de un curso, los jugadores anotaban en su boletín de notas la asignatura superada. Cuando el boletín de notas estaba completo, los jugadores se graduaban del doble grado y pasaban al camino profesional de su elección.

Inicio del Juego:

Al inicio del juego, el alumnado se distribuyó en tres grupos. Cada uno de los grupos escogió un token al que le asignaron un nombre. Este token representaba al personaje que recorrería el tablero, avanzando tanto en su carrera académica como profesional. Junto al tablero se prepararon las tarjetas de las distintas categorías: preguntas de teoría, preguntas prácticas, preguntas aplicadas, tarjetas comodín, tarjetas de tiempo extra, tarjetas de ayuda, tarjetas de enseñanza universitaria, tarjetas de enseñanza no universitaria y tarjetas de trabajo en la empresa. Cada uno de los grupos recibió un expediente universitario que se utilizó para seguir el progreso del grupo.

Dinámica del Juego:

1. **Fase de Estudios:**

○ Los jugadores avanzaban por el tablero respondiendo preguntas relacionadas con las asignaturas del doble grado (Figuras 2 y 3). Para avanzar por el tablero, debían escoger dos de los cinco dados disponibles y lanzarlos. Los dados tenían forma de los sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro), ver Figura 2. Por tanto, los jugadores podían escoger los dados que más les convenían en función de su progreso y su posición actual en el tablero.
○ Al caer en una casilla de estudios de una asignatura que todavía no habían superado, podían intentar superar la asignatura respondiendo a una pregunta de teoría, de práctica o de aplicaciones (Figura 3). El tiempo para responder a la pregunta era de sesenta segundos.
○ Si disponían de una tarjeta de comodín (Figura 3), podían utilizarla en este momento. Las tarjetas comodín permitían consultar el resumen que el alumnado traía de casa o ampliar el tiempo para responder a la pregunta.
○ También podían escoger una tarjeta de ayuda (Figura 3) para obtener ventajas o desventajas, según el azar decidiera, adicionales en este momento de la partida.

2. **Fase Profesional:**

○ Al finalizar el grado, los jugadores elegían un camino profesional y se enfrentaban a desafíos específicos de cada camino hasta alcanzar la jubilación (Figura 1). Estos desafíos planteaban retos del día a día que dependían del camino escogido.
○ Debían superar pruebas como obtener un doctorado, pasar una prueba de admisión o aprobar una oposición, según el camino elegido.

3. **Objetivo:** Ser el primer grupo en conseguir jubilarse.

Estrategia y Competencia:

● Los jugadores debían combinar conocimientos académicos con habilidades estratégicas para avanzar y completar el juego.
● La competencia entre los jugadores se intensificaba a medida que se acercaban a la jubilación, lo que añadía emoción y desafío a la actividad.

RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos tras la implementación de la actividad de gamificación. Las conclusiones se basan tanto en la experiencia y percepción del profesorado participante como en los datos recopilados mediante una encuesta realizada a los estudiantes al finalizar la actividad, durante la fase de reflexión y evaluación. De los 34 estudiantes que participaron en la experiencia, 19 completaron la encuesta. Estos datos ofrecen una visión integral del impacto de la gamificación en el aprendizaje y la motivación del estudiantado, permitiendo así una evaluación exhaustiva de su efectividad en el contexto universitario. A continuación, se presentan los hallazgos clave del estudio, abarcando tanto los aspectos cuantitativos como cualitativos de la experiencia.

Resultados encuestas

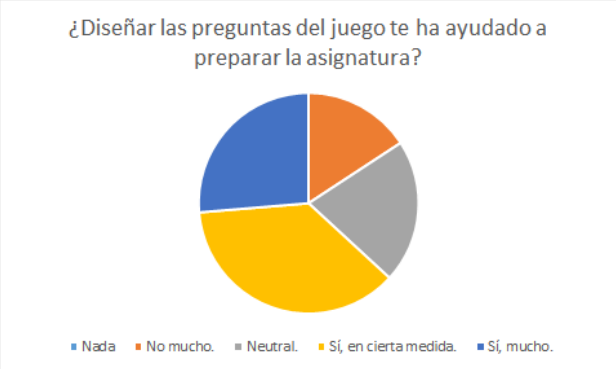


Figura 5: Respuesta al diseño de preguntas

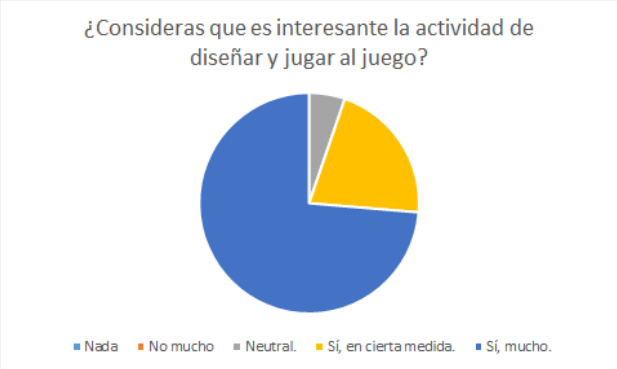


Figura 6: Respuesta al interés de la actividad

Figura 7: Respuesta al diseño del resumen

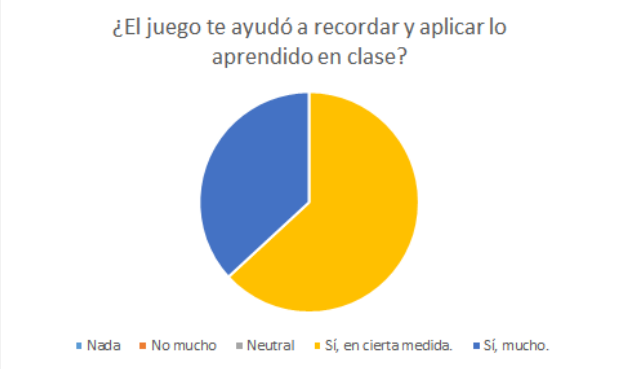


Figura 8: Respuesta al interés de la actividad

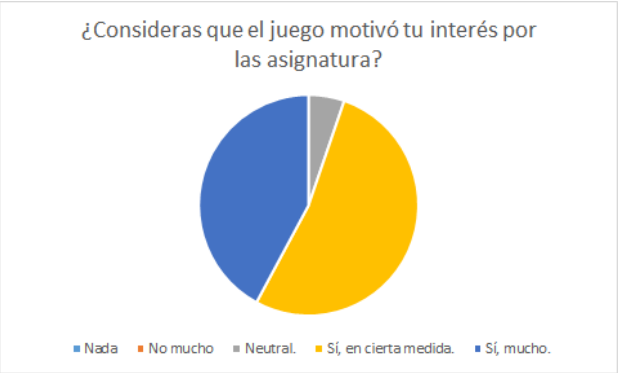


Figura 9: Respuesta al aumento de motivación

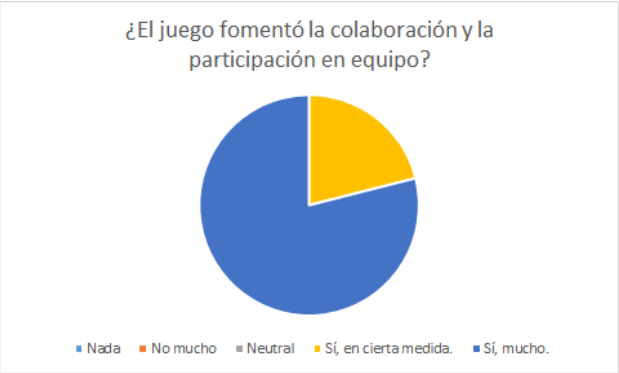


Figura 10: Respuesta al aumento de colaboración

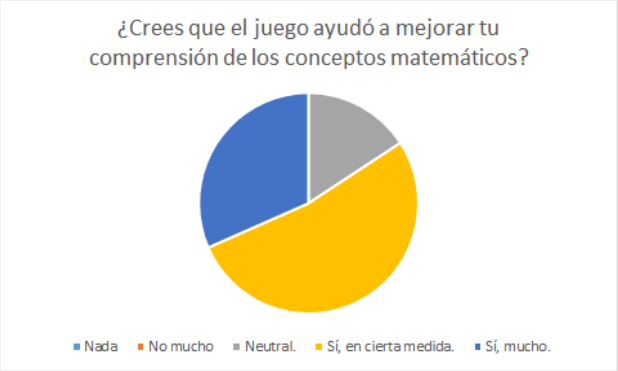


Figura 11: Respuesta a la mejora de comprensión

Figura 12: Respuesta al interés en participar

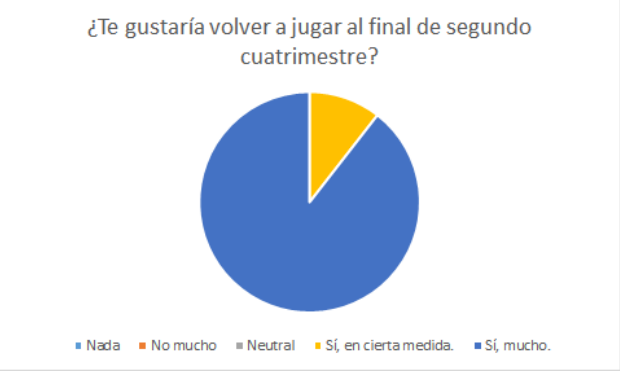


Figura 13: Respuesta al interés en repetir la actividad

Como podemos observar en las gráficas de la encuesta realizada a los estudiantes, encuentran altamente interesante diseñar y jugar al juego. Además, cabe destacar también que, al preparar y realizar el juego, el alumnado coincide mayoritariamente en que su nivel de interés hacia la asignatura aumenta significativamente. Donde encontramos más diversidad de respuesta es en las preguntas relativas a la preparación de la asignatura, aquí encontramos casi todo el abanico de posibilidades, hay una parte del alumnado a la que le ayudó mucho a preparar la asignatura tanto la realización de las tarjetas con preguntas y el resumen, mientras que hay otra parte del alumnado a la que no les ayudó tanto. Esto puede deberse a que éstos últimos ya tenían una gran comprensión de la

asignatura, o a que nos encontremos ante una parte del alumnado que no ha puesto mucho interés en la realización de las preguntas al no ser esta una actividad evaluable dentro de la asignatura. Ahora bien, como podemos observar, todo el alumnado coincide en que la actividad le ayudó a entender mejor y afianzar conceptos matemáticos, y le ayudó a recordar y aplicar aquellos conceptos explicados en clase. Por último, cabe destacar la unanimidad de respuesta que encontramos cuando les preguntamos si disfrutaron del juego y si querrían repetir el siguiente cuatrimestre. Todos ellos coinciden en que disfrutaron y en que repetirían sin duda alguna. Finalmente, una de las partes fundamentales del juego era la colaboración y el juego en equipo. En las gráficas obtenida podemos ver que cumplimos con el cometido y concluimos que hubo un trabajo en equipo en el que todo el alumnado se sintió partícipe y colaborador en sus respectivos grupos.

Análisis Cuantitativo

El análisis cuantitativo revela un alto nivel de participación y compromiso por parte de los estudiantes en todas las etapas de la actividad de gamificación. Se observó un aumento significativo en los niveles de motivación de los estudiantes tanto antes como durante las sesiones de juego. Esto se reflejó en las encuestas realizadas, donde la mayoría de los estudiantes expresaron un gran interés y entusiasmo hacia el desarrollo del juego y su participación activa en el mismo. Además, se registró un fenómeno notable donde los estudiantes, al finalizar el tiempo asignado para jugar la partida, decidieron continuar la actividad durante el descanso del almuerzo, renunciando a este descanso. Esto demuestra el alto grado de involucramiento y disfrute experimentado durante la actividad.

También se revela un alto nivel de aceptación y entusiasmo por parte de los estudiantes hacia la continuación de la actividad de gamificación en el segundo cuatrimestre. Según las encuestas realizadas al finalizar la primera sesión de juego, la gran mayoría de los estudiantes expresaron un fuerte interés en repetir la iniciativa durante el siguiente período académico. Este resultado refleja el impacto positivo que la actividad tuvo en la motivación y participación de los estudiantes.

Análisis Cualitativo

El análisis cualitativo profundiza en la experiencia vivida por los estudiantes durante las sesiones de juego. Se recopilaron testimonios y comentarios que resaltan el gran interés y compromiso demostrado por los estudiantes hacia el desarrollo de la actividad. Los estudiantes expresaron su entusiasmo por

participar activamente en la creación de las preguntas y en las sesiones de juego, destacando la sensación de diversión y aprendizaje que experimentaron. Además, el hecho de que los estudiantes optaran por continuar con el juego durante el descanso del almuerzo indica no sólo un alto grado de motivación, sino también un fuerte sentido de comunidad y compañerismo entre los participantes. En resumen, el análisis cualitativo confirma el impacto positivo de la actividad en la motivación y el compromiso de los estudiantes, así como en su interés por el aprendizaje de los contenidos de la asignatura.

FUTURAS MEJORAS

Como ya hemos podido observar, el juego ayudó a los estudiantes de cara a la asignatura de diversas formas. Ahora bien, durante la realización del juego pudimos observar ciertos aspectos del juego que podrían mejorarse para el próximo año. También en la encuesta realizada a los estudiantes, dejamos unos apartados en los que nos hicieron llegar sus comentarios con pros y contras que observaron en el juego. En este apartado proponemos una serie de cambios tanto en las reglas del juego como del enfoque de la actividad, fruto combinado de las mejoras propuestas por el alumnado y observada por nuestra parte, que ayudarán en una futura implementación de esta actividad al alumnado a disfrutar más plenamente de la actividad propuesta. Gran parte de las propuestas aquí presentes van dirigidas a dar un poco más de dinamismo al juego, ya que tras la realización nos dimos cuenta que no todos los grupos podían avanzar a la misma velocidad, o se tardaba mucho más de lo esperado en avanzar alrededor del juego. En cuanto a mejoras en las reglas del juego, proponemos las siguientes:

- Dejar algo más de tiempo en las preguntas prácticas, y dar la opción de repetir asignaturas para poder acabar antes.
- Poder volver a tirar los dados al caer en una casilla en blanco.
- Que haya más variedad en los tipos de pregunta, puesto que se repitió mucho la elección de las preguntas prácticas. Esta mejora podría implementarse poniendo en la casilla en la que caes la obligatoriedad de responder un tipo predeterminado de pregunta, en lugar de dejar que los estuantes escojan la categoría.

En cuanto al enfoque de la actividad, proponemos los siguientes cambios:

- Dar pautas en los enunciados para mejorar su redacción y claridad.
- Hacer un tablero más grande para que quepan hasta 4 grupos en un tablero, en vez de tan solo 2.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos hasta ahora han sido positivos como se puede apreciar en los análisis anteriores. Los estudiantes han mostrado mayor interés y motivación hacia la asignatura, y las evaluaciones han reflejado una mejor comprensión de los temas tratados. La retroalimentación del alumnado ha sido mayoritariamente favorable, destacando la utilidad de la gamificación para hacer el aprendizaje más ameno y efectivo.

Esta experiencia destaca cómo la gamificación puede ser una herramienta poderosa para transformar la educación universitaria, haciendo que el aprendizaje de temas complejos sea accesible y ameno para los estudiantes.

Resumen de los Hallazgos

El estudio realizado sobre la implementación de la gamificación en la asignatura “Análisis Matemático I F-M” ha arrojado resultados significativos. Los principales hallazgos indican un aumento en la motivación, participación y compromiso de los estudiantes durante las sesiones de juego. Además, se observó un impacto positivo en la percepción de los estudiantes hacia el aprendizaje de los contenidos de la asignatura. La actividad de gamificación demostró ser una herramienta efectiva para promover un ambiente de aprendizaje dinámico, colaborativo y estimulante.

Implicaciones para la Práctica Educativa

Las conclusiones de este estudio tienen importantes implicaciones para la práctica educativa. Se recomienda la implementación de actividades de gamificación en otros cursos y contextos universitarios como estrategia para mejorar la motivación y el compromiso de los estudiantes. No obstante, es fundamental diseñar las actividades de gamificación de manera que se alineen con los objetivos educativos y promuevan la participación activa de los estudiantes. Además, se sugiere la integración de la gamificación como parte de un enfoque pedagógico más amplio que fomente la innovación y la creatividad en el aula.

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro sincero agradecimiento a todos los colaboradores que hicieron posible la realización de este proyecto. En primer lugar, extendemos nuestro reconocimiento a los miembros del equipo del proyecto "CO3MAT" por su apoyo durante todas las etapas de desarrollo de la actividad de gamificación.

Su dedicación y compromiso fueron fundamentales para el éxito de esta iniciativa.

Además, deseamos agradecer al “Programa de Proyectos de Innovación Educativa en la Universidad de Valencia” por brindarnos la oportunidad de llevar a cabo esta innovadora propuesta educativa.

Nuestro reconocimiento también se extiende a todos los estudiantes que participaron activamente en el proyecto, así como a los profesores que brindaron su apoyo y orientación. Sin su entusiasmo, compromiso y colaboración, este proyecto no habría sido posible.

REFERENCIAS

[1] “The (short) prehistory of “gamification”… | Funding Startups (& other impossibilities).” 2011. Funding Startups (& other impossibilities). https://nanodome.wordpress.com/2011/08/09/the-short-prehistory-of-gamification/.

[2] Corchuelo Rodriguez, C. A. 2018. “Gamificación en educación superior: experiencia innovadora para motivar estudiantes y dinamizar contenidos en el aula.” *Edutec, Revista Electrónica De Tecnología Educativa* 63 (380): 29-41. https://doi.org/10.21556/edutec.2018.63.927.

[3] Espinosa, R. 2016. “Juegos digitales y gamificación aplicados en el ámbito de la educación.” *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia,* 19 (2): 27-33. https://doi.org/10.5944/ried.19.2.16143.

[4] Iosup, A., and D. Epema. 2014. “An Experience Report on Using Gamification in Technical Higher Education.” *Proceedings of the 45th ACM Technical Symposium on Computer Science Education*, 27-32. https://dl.acm.org/doi/10.1145/2538862.2538899.

[5] Lee, J., and J. Hammer. 2011. “Gamification in Education: What, How, Why Bother?” *Academic Exchange Quarterly* 12 (2): 1-5.

[6] Oliva, H. A. 2017. “La gamificación como estrategia metodológica en el contexto educativo universitario.” *Realidad Y Reflexión* 44:29-47. https://doi.org/10.5377/ryr.v44i0.3563.

[7] “¿Qué hace divertido el trabajo? ¿Y que un producto lo sea también?” 2017. Vodafone España. https://www.vodafone.es/c/empresas/grandes-clientes/es/nuestra-vision/los-ocho-principios-para-sentir-que-juegas-cuando-en-realidad-compites/.

[8] Werbach, K., and D. Hunter. 2012. “For the Win: How Game Thinking Can Revolutionize Your Business.” *Philadelphia: Wharton Digital Press*.

ANEXO - EJEMPLOS DE PREGUNTAS

Ejemplos de preguntas diseñadas por el alumnado:

- Preguntas teóricas:
  - ¿Cuál de los siguientes conjuntos no es numerable: la unión numerable de conjuntos numerables, el intervalo (0, 1] o el conjunto de los racionales?
  - Escribe la alternativa geométrica a la definición de derivada en un punto.
  - ¿En qué se diferencian la derivada y la diferencial?
  - ¿Cómo debe ser una serie para que se cumpla el teorema de condensación?

- Preguntas prácticas:
  - ¿Cuál es la serie de Maclaurin de la función exp(x)?
  - Escribe la fórmula general de la sucesión cuyos primeros elementos son: 3,5/2,9/4,17/8... y di a qué converge.
  - Calcula el siguiente límite $\square\square\square_{\square\to\infty}\sqrt[3]{\square\square\square(1/\square)}$.
  - ¿Cuál es el cambio de variable adecuado para resolver la integral de la función $\int_0^{\pi}\square\square\square^3(\square)\ \square\square$?

- Preguntas aplicadas:
  - Todas las matrículas de coches en España están formadas por 4 dígitos. Si defino el conjunto A, formado por los números que son el producto de las cifras de una matrícula, ¿cuál es el supremo de A?
  - Si tienes un tanque para líquidos y necesitas que durante la producción el nivel del líquido sea la mitad de su capacidad total. ¿Cómo aplicas el teorema de Bolzano para demostrar que en algún momento el tanque se encontrará a la mitad de su capacidad?
  - ¿Si una colmena de hormigas (con un kilo de azúcar recolectado ya) recoge 1 kilos de azúcar $1/2^{\square}$ de una despensa cada día (n), a cuanto tiende el azúcar total recogido por las hormigas?
  - Aquiles y la tortuga están echando una carrera. Cuando Aquiles ha recorrido 1m, la tortuga ha avanzado 1/2m, y después, Aquiles avanza 1/3m mientras que la tortuga avanza 1/4m, y así sucesivamente. Si siguen así hasta el final de los tiempos, razona cuál será la ventaja que lleva Aquiles sobre la tortuga.

Ejemplos de tarjetas de ayuda:

- Puedes consultar tu resumen mientras cocinas un plato matemático especial.
- Obtienes tiempo extra para responder. ¡Sí! Usa este tiempo sabiamente y encuentra la solución perfecta.
- Has hecho una jugada maestra y has acertado la respuesta. ¡Eres el estratega supremo de las preguntas matemáticas!
- Has decidido jugar al azar y la suerte no estuvo de tu lado. ¡A veces, las decisiones al azar no son tan acertadas como parecen!

Ejemplos de tarjetas de trayectoria profesional:

- Enseñanza universitaria:
    - Solicita tu primer proyecto de investigación respondiendo una pregunta. Si la respuesta es correcta, te conceden el proyecto y avanzas una casilla. Si no es correcta, te deniegan el proyecto y te quedas en la posición que estas.
    - Presenta un trabajo en un simposio matemático respondiendo a una pregunta relacionada. Si aciertas, avanzas dos casillas. Si fallas, retrocedes una casilla.
    - Participa en una revisión de pares respondiendo a una pregunta teórica sobre el trabajo de un colega. Si aciertas, avanzas una casilla. Si fallas, te quedas en tu posición actual.

- Enseñanza no universitaria:
    - Realiza una sesión de tutoría estudiantil respondiendo a dos preguntas prácticas. Si aciertas, avanzas dos casillas. Si fallas, retrocedes una casilla.
    - Prepara y administra un examen sorpresa respondiendo a dos preguntas variadas. Para cada pregunta, si respondes correctamente, avanzas una casilla. Si fallas, te quedas en tu posición actual.
    - Imparte una charla motivacional respondiendo a una pregunta aplicada. Avanza una casilla si la respuesta es correcta.

- Trabajo en la empresa:
    - Participa en un proyecto empresarial respondiendo a una pregunta práctica y una teórica. Avanza una casilla por cada respuesta correcta.
    - Participa en el desarrollo de un nuevo producto respondiendo a una pregunta práctica y una teórica. Si aciertas, avanzas dos casillas. Si fallas, retrocedes una casilla.
    - Enfréntate un desafío de proyecto internacional respondiendo a

dos preguntas aplicadas. Si aciertas las dos, avanzas dos casillas. Si fallas, retrocedes una casilla.

Formación en pensamiento computacional para futuros docentes

Carmen Campos[1], Pascual D. Diago[1], David Arnau[1], Juan Gutiérrez Soto[1]

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, Avda. Tarongers, 4, 46022, Valencia, Spain, e-mail: carmen.campos-gonzalez@uv.es.

Training in Computational Thinking for Preservice Teachers

RESUMEN

El Pensamiento Computacional (PC) se refiere a la capacidad para plantear y resolver problemas utilizando estrategias habitualmente empleadas en informática. Los procesos mentales del PC no se limitan únicamente a la programación, sino que incluyen habilidades como la descomposición, la abstracción, la identificación de patrones o la creación de algoritmos. La nueva ley educativa (LOMLOE) incluye el PC como una de las habilidades fundamentales que deben ser desarrolladas por el alumnado e incorpora competencias específicas dentro del área de matemáticas relacionadas con el PC. En este contexto, la formación del profesorado es fundamental para asegurar la adecuada trasferencia de esta competencia a los estudiantes. En este trabajo se presenta una intervención llevada a cabo en varios grupos de dos asignaturas de didáctica de la matemática del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universitat de València. Esta formación ha sido diseñada para mejorar la competencia en pensamiento computacional de los futuros docentes. Como consecuencia, el alumnado que ha recibido la formación ha podido profundizar en las diferentes habilidades asociadas con el pensamiento computacional y desarrollar competencias que les permitirán llevar a cabo proyectos de aula para promover el desarrollo del PC de sus futuros alumnos y alumnas.

Palabras clave: pensamiento computacional, resolución de problemas, programación, formación futuros maestros.

ABSTRACT

Computational Thinking (CT) refers to the ability to propose and solve problems using strategies commonly employed in computer science. The mental processes involved in CT are not limited solely to coding but also include skills such as

decomposition, abstraction, pattern recognition, and algorithm creation. The new Spanish educational law (LOMLOE) includes CT as one of the fundamental skills that must be developed and incorporates specific competencies within the area of mathematics related to CT. In this context, teacher training is essential to ensure the proper transfer of this competency to students. This paper presents an intervention carried out in several groups of two didactics of mathematics courses in the Primary Education Degree at the University of Valencia. This training has been designed to improve the computational thinking skills of future teachers. As a result, the students have been able to delve into the different skills associated with computational thinking and develop competencies that will enable them to carry out classroom projects to promote the development of CT in their future students.

Keywords: computational thinking, problem solving, programming, preservice teacher training.

INTRODUCCIÓN

El concepto de pensamiento computacional (PC) fue introducido por Wing [6] refiriéndose a la capacidad para plantear y resolver problemas utilizando estrategias propias de la computación. Según la misma autora en [7], el PC se define como “los procesos mentales involucrados en formular un problema y expresar su solución de manera que pueda ser ejecutada de forma eficiente por una computadora, ya sea humana o máquina”. Este enfoque de razonamiento implica un conjunto de habilidades, como la capacidad de descomponer problemas complejos en partes más manejables, el reconocimiento de patrones, la abstracción de conceptos y la creación de algoritmos, que facilitan la resolución de problemas de manera sistemática y eficiente.

Según destaca Bers en su informe [2], ha habido una tendencia mundial en fomentar las habilidades asociadas al PC y en introducir conceptos de programación desde la educación preescolar, ya que estas competencias son esenciales para prosperar en el mundo académico y profesional actual. En esta línea, el Plan de Acción de Educación Digital 2021-2027 de la Comisión Europea [4] resalta la educación en informática de alta calidad como uno de sus elementos clave.

Muchos países han incorporado el pensamiento computacional (PC) y la programación en sus planes de estudio de educación obligatoria. En España, la nueva ley educativa, Ley Orgánica por la que se modifica la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE), introduce explícitamente la programación y el pensamiento computacional como habilidades esenciales que deben ser desarrolladas en todos los niveles educativos no universitarios. En el caso de la Educación Primaria, el Real Decreto 157/2022 incluye la programación de manera explícita en los descriptores operativos de una de las Competencias Clave, la Competencia Digital. Además, el PC y las habilidades asociadas se

mencionan expresamente en una de las competencias específicas del área de matemáticas:
"Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar situaciones de la vida cotidiana".

Esta nueva exigencia hace necesario incluir esta área dentro del programa educativo del profesorado en formación para que éstos puedan integrarlo de manera adecuada en su enseñanza en el aula. Por ello, desde la Facultad de Magisterio de la Universitat de València, nos planteamos cómo debe llevarse a cabo la instrucción del alumnado en esta materia. Con este fin, en el marco de un proyecto de innovación docente, se diseñó una propuesta formativa con los siguientes objetivos:

1. Capacitar al alumnado en las características y habilidades del pensamiento computacional mediante la enseñanza de programación por bloques.
2. Evaluar la disposición del alumnado para utilizar la programación y el pensamiento computacional en su futura labor docente.

METODOLOGÍA

Se ha implementado una formación explícita en pensamiento computacional y programación por bloques para alumnado de cuarto curso del Grado de Maestro de Educación Primaria, en una asignatura relacionada con la didáctica de las matemáticas. Durante 8 sesiones de dos horas se llevaron a cabo diferentes actividades formativas y de evaluación.

Actividades formativas realizadas

Se llevó a cabo una sesión introductoria sobre el lenguaje de programación Scratch [5], diseñada para familiarizar al alumnado con su entorno de desarrollo y funcionalidades básicas. Durante esta sesión, se propuso como actividad principal la creación de un programa capaz de dibujar polígonos regulares. El aprendizaje se estructuró de forma progresiva: primero creando un programa para dibujar un cuadrado y su optimización utilizando una instrucción de repetición. Posteriormente, investigando los cambios necesarios para dibujar un pentágono, seguido de la generalización para N lados. El programa final debía recibir el número de lados como parámetro de entrada y dibujar el polígono regular correspondiente. En el anexo 1 se muestran imágenes de la ejecución de la aplicación "Polígonos regulares".

En una segunda sesión, se introdujo el concepto de pensamiento computacional, enfocado a la resolución de problemas, destacando las características y habilidades asociadas a este enfoque. Como parte de la sesión, se desarrolló una actividad práctica que consistió en utilizar la programación por bloques para resolver, mediante una simulación computacional, un problema de probabilidad en un contexto de un juego de azar. Los detalles de esta aplicación, junto con

imágenes ilustrativas, se encuentran en el Anexo 1, que también incluye un enlace a una implementación de dicho programa.

En sesiones posteriores, se profundizó en el conocimiento de las características del lenguaje Scratch a través de programas guiados sencillos, no directamente relacionados con las matemáticas, que incluían juegos simples. Durante estas actividades, se abordaron conceptos clave de dicho lenguaje, como la programación dirigida por eventos, el paso de mensajes y la concurrencia (clones), aunque esta última característica solo se mostró, sin llegar a trabajar directamente con ella. Al finalizar las sesiones, se solicitó al alumnado la creación de un programa libre (no guiado) para repasar las tablas de multiplicar. En el Anexo 2 se incluye una imagen de ejecución y el enlace a una de estas aplicaciones creadas por el alumnado como actividad final de estas sesiones.

Durante aproximadamente dos sesiones, se orientó a los estudiantes en la creación de recursos educativos digitales con contenido matemático para Educación Primaria, utilizando el lenguaje Scratch. El alumnado, organizado en grupos de hasta tres personas, debía desarrollar un programa para repasar algún contenido matemático. Los temas de los programas fueron asignados de forma aleatoria a cada grupo, a partir de un conjunto de aplicaciones posibles. Durante estas sesiones, los estudiantes pudieron resolver dudas y recibir orientación en el proceso de creación.

Como parte de la formación, los estudiantes realizaron una evaluación por pares de los programas desarrollados, valorando aspectos como el funcionamiento, el valor didáctico, la interactividad y el diseño estético.

En el Anexo 2 se incluyen imágenes de dos de los recursos creados por el alumnado, así como gráficas que muestran la valoración obtenida en la evaluación por pares.

Algunos de los recursos generados durante la formación, especialmente aquellos que se han considerado de mayor calidad, han sido alojados en un Estudio de Scratch. Estos programas seleccionados están disponibles para su consulta y uso en la plataforma en el siguiente enlace al estudio MatesMag: https://scratch.mit.edu/studios/35482803

Actividades de evaluación realizadas

Para evaluar la competencia en pensamiento computacional del alumnado, se realizaron dos pruebas: una antes de la formación y otra después. Ambas pruebas incluían problemas extraídos de la competición BEBRAS de pensamiento computacional [3]. Para obtener un nivel se dificultad similar en ambas pruebas, los problemas se seleccionaron utilizando las calificaciones de dificultad proporcionada en la descripción de los problemas de la competición. En cada prueba, se resolvieron 8 problemas con dificultad creciente.

Utilizando el cuestionario proporcionado en [8], se evaluó la actitud del alumnado

hacia la informática antes y después de la formación, teniendo en cuenta tres dimensiones: confort, interés y utilidad para sus futuras clases como docentes. Este cuestionario constaba de 11 preguntas evaluadas con una escala Likert de 5 puntos (*totalmente en desacuerdo*, *en desacuerdo*, *ni de acuerdo ni desacuerdo*, *de acuerdo* y *totalmente de acuerdo*).

Además, se evaluó el efecto de la intervención sobre la percepción del alumnado respecto a la competencia adquirida. Para ello, se utilizó el cuestionario proporcionado en [1], antes y después de la formación. Este cuestionario, que consta de 31 preguntas evaluadas con una escala Likert de 5 puntos, mide la autopercepción del alumnado en diversas dimensiones como conceptos de pensamiento computacional, elementos de programación por bloques, enseñanza de conceptos de PC y enseñanza de la programación por bloques.

RESULTADOS

En relación con la evaluación de la competencia en pensamiento computacional, la Figura 1 ilustra la distribución de notas obtenidas en las pruebas de problemas BEBRAS antes y después de la formación.

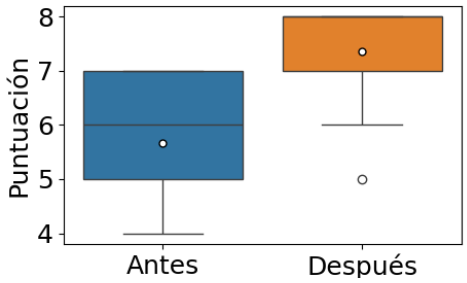


Figura 1: Distribución de las notas en los cuestionarios de problemas BEBRAS antes y después de la intervención.

Para evaluar la diferencia en la competencia en pensamiento computacional antes y después de la formación, se realizó un test de Wilcoxon para muestras emparejadas. Los resultados muestran una diferencia estadísticamente significativa entre las notas medias obtenidas antes y después de la formación ($W=18$, $p=1e-5$), lo que sugiere una mejora significativa en la competencia en PC del alumnado. Sin embargo, hay que tener en cuenta que los cuestionarios utilizados no habían sido validados, por lo que los resultados obtenidos deben considerarse preliminares y se requiere un estudio más profundo.

En la Figura 2 se presentan los resultados del cuestionario sobre actitud hacia la informática [8]. Se muestran las puntuaciones medias en las tres dimensiones consideradas: confort (D1), interés (D2) y utilidad para las clases (D3), en una escala de 1 a 5 correspondiente a la escala Likert de 5 puntos del cuestionario.

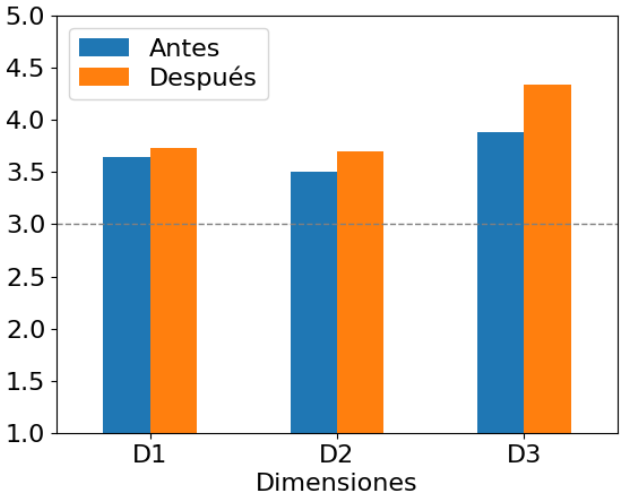


Figura 2: Actitud hacia la informática [8] en las dimensiones D1 (confort), D2 (interés) y D3 (utilidad para las clases). Se compara la situación antes y después de la formación.

Los resultados indican que la actitud hacia la informática era inicialmente positiva (por encima de 3) y que ha mejorado ligeramente tras la formación, en especial la valoración de la utilidad para las futuras clases como docentes. Sin embargo, la formación no parece haber provocado una mejora significativa en estas actitudes.

Los resultados relativos a la percepción de la competencia adquirida se presentan en la Figura 3, donde se muestran las puntuaciones medias para cada una de las dimensiones del cuestionario [1] antes y después de la formación. Las dimensiones evaluadas son:

D1. Elementos de programación por bloques de propósito general
D2. Conceptos de pensamiento computacional
D3. Prácticas de pensamiento computacional
D4. Enseñanza de conceptos de pensamiento computacional
D5. Enseñanza de la programación por bloques

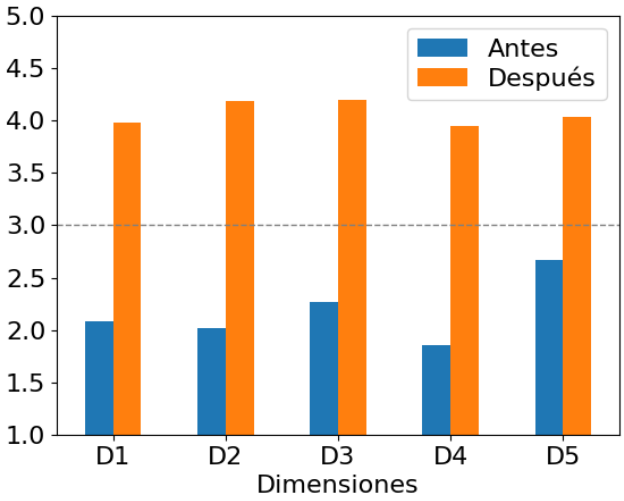


Figura 3: Competencia autopercibida [1] en las dimensiones D1 (elementos de programación por bloques de propósito general), D2 (conceptos de pensamiento computacional), D3 (prácticas de pensamiento computacional), D4 (enseñanza de conceptos de pensamiento computacional) y D5 (enseñanza de la programación por bloques). Se muestra la comparativa antes y después de la formación.

Los resultados indican una diferencia significativa en la competencia percibida por el alumnado antes y después de la formación en todas las dimensiones consideradas. Tras la formación, el alumnado considera que ha adquirido un nivel elevado en todas las competencias evaluadas. Este resultado sugiere un efecto positivo de la formación en cuanto a la disposición a incorporar el pensamiento computacional y la programación en su futura labor docente.

CONCLUSIONES

La formación llevada a cabo en el marco de un proyecto de innovación docente, cuyo objetivo era capacitar al alumnado en destrezas asociadas al pensamiento computacional y la programación, así como evaluar su disposición a transferir estas habilidades en su futura labor docente, ha tenido varios efectos positivos.

Por un lado, los resultados muestran una mejora en habilidades relacionadas con el PC en contextos de resolución de problemas. Sin embargo, las limitaciones del estudio hacen que se requiera una investigación más profunda para confirmar estos resultados.

Por otro, la mejora observada en la percepción de las competencias adquiridas sugiere una mayor disposición del alumnado a utilizar la programación por bloques y el pensamiento computacional en su futura labor docente. Esto significaría que no solo han mejorado su capacidad técnica, sino también la autoconfianza para integrar estas competencias en el ámbito educativo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha contado con el apoyo del proyecto UV-SFPIE_PIEC-2736985 del programa de Projectes d'innovació educativa i millora de la qualitat docent a la Universitat de València.

REFERENCIAS

[1] Bean, N., Weese, J., Feldhausen, R., y Bell, R. S. Starting from scratch: Deve- loping a pre-service teacher training program in computational thinking. *2015 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)*, 1-8 (2015).

[2] Bers, M. U., Strawhacker, A., y Sullivan, A. The state of the field of computational thinking in early childhood education. *OECD Education Working Papers*, (274) (2024).

[3] Dagiene, V. The BEBRAS contest on informatics and computer literacy students drive to science education. In: *Joint Open and Working IFIP Conference. ICT and Learning for The Next Generation* (2008).

[4] European Commission, Directorate-General for Education, Youth, Sport and Culture. Digital education action plan 2021-2027: improving the provision of digital skills in education and training. *Publications Office of the European Union* (2023).

[5] Scratch Foundation. Scratch. *Scratch Foundation*. (s. f.) Recuperado el 20 de junio de 2024, de https://scratch.mit.edu

[6] Wing, J. Computational Thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35 (2006).

[7] Wing, J. Computational Thinking's Influence on Research and Education for All. *Italian Journal of Educational Technology*, 1(1) (2017).

[8] Yadav, A., Mayfield, C., Zhou, N., Hambrusch, S., y Korb, J. T. Computational Thinking in Elementary and Secondary Teacher Education. *ACM Transactions on Computing Education*, 14(1), 1-16 (2014).

ANEXO 1

Sesión 1. Ejecución de la aplicación "Polígonos Regulares"

En la sesión 1 se hizo el programa "Polígonos regulares", que permite dibujar polígonos regulares de N lados, con el número de lados introducido como parámetro. A continuación, se muestran imágenes de su ejecución.

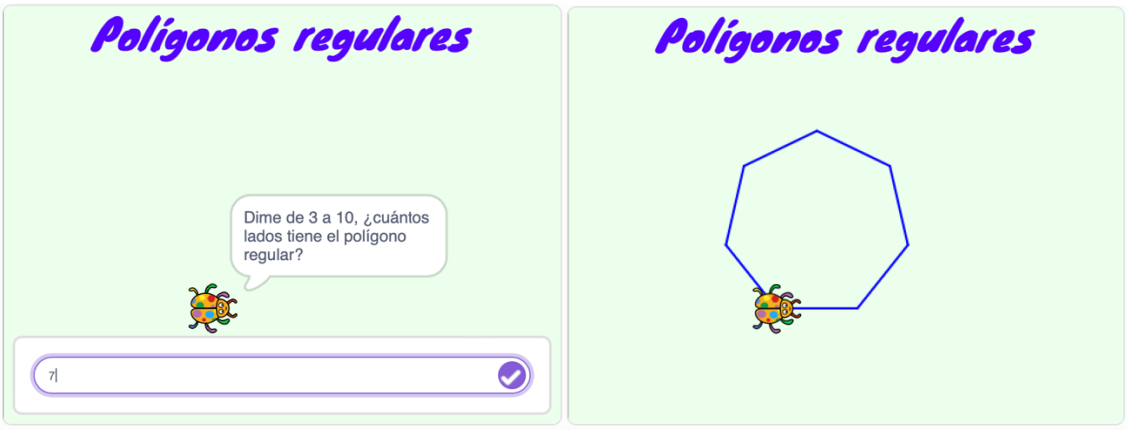


Figura A1.1. Muestra de la ejecución de la aplicación “Polígonos regulares”

Enlace a la aplicación: https://scratch.mit.edu/projects/1097185004

Sesión 2. Actividad práctica sobre Pensamiento Computacional

En la sesión 2, se propuso una actividad práctica para aplicar el pensamiento computacional mediante la resolución de un problema de probabilidad. Los estudiantes utilizaron la programación por bloques en Scratch para desarrollar una simulación computacional que permitiera analizar un juego de azar.
A continuación, se presenta el enunciado del problema planteado y una imagen de la simulación desarrollada durante la sesión.

Actividad 2.1

Considera el següent joc:
Dos jugadors fan llançaments consecutius de dos daus.

- *En cada llançament es resten els valors dels daus (major-menor)*
- *Si la diferència és 0, 1 o 2 el primer jugador anota un punt i si és 3, 4 o 5, és el segon jugador qui anota el tant.*

Penses que algú te avantatge? o els dos tenen la mateixa probabilitat de guanyar?

1. *Escriu la primera idea intuïtiva que has tingut*
2. *Realitza una simulació computacional del joc*
3. *Calcula la probabilitat emprant la regla de Laplace*

Figura A1.2. Enunciado problema práctico de la sesión 2.

Figura A1.3. Simulación realizada con la aplicación de la sesión 2.

Enlace a la aplicación: https://scratch.mit.edu/projects/1097176463

ANEXO 2

Sesiones de profundización en el lenguaje Scratch.
Como actividad de las sesiones de programación en Scratch se solicitó al alumnado la creación de un programa libre (no guiado) para repasar las tablas de multiplicar. A continuación, se muestra una imagen de la ejecución de una de estas aplicaciones, desarrollada por un estudiante.

Figura A2.1. Ejecución de una aplicación desarrollada por el alumnado para repasar las tablas de multiplicar en Scratch

Enlace a la aplicación: https://scratch.mit.edu/projects/904547880

Recursos Educativos Digitales desarrollados por el alumnado

A continuación, se presentan las imágenes de dos de los recursos educativos digitales creados por el alumnado utilizando Scratch: “El juego de las divisiones” y “Ruleta”.

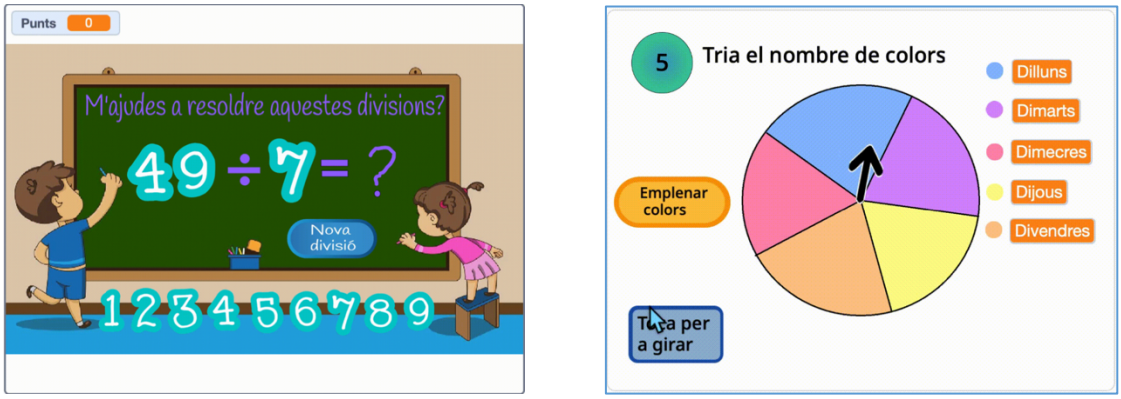


Figura A2.2. Recursos educativos "El juego de las divisiones" (izquierda) y "Ruleta" (derecha), desarrollados por el alumnado utilizando Scratch.

Enlaces a las aplicaciones:

- Divisiones: https://scratch.mit.edu/projects/912839093
- Ruleta: https://scratch.mit.edu/projects/910606336

Estos programas, diseñados para repasar contenidos matemáticos de Educación Primaria, fueron evaluados por los propios estudiantes según criterios de funcionamiento, valor didáctico, interactividad y diseño estético. Las gráficas que siguen reflejan la valoración obtenida en la evaluación por pares de dichos recursos.

Figura A2.3. Evaluación por pares de dos de los recursos educativos creados por el alumnado. " El juego de las divisiones" (izquierda) y "La ruleta" (derecha). Las dimensiones consideradas son: d1, Interactividad; d2, Valor didáctico; d3, Diseño estético y d4, Funcionamiento.

Identificación y desarrollo del talento en la Facultad de Matemáticas

Paloma Merello Giménez[1], **Pilar Herce Palomares** [2], **Isabel Cordero-Carrión**[3]

[1] Departamento de Contabilidad, Universitat de València, AVD Tarongers s/n, 46071 València, Spain, paloma.merello@uv.es.
[2] Departament de Psicología Evolutiva i de l'Educació, Universitat de València, Avd Blasco Ibáñez s/n 46071 València, Spain, maria.p.herce@uv.es
[3] Departament de Matemàtiques, Universitat de València, C/ Dr. Moliner 50, 46100 Burjassot (València), Spain, isabel.cordero@uv.es

Identifying and developing talent in Mathematics

RESUMEN

Las ciencias matemáticas suponen un recurso esencial para las sociedades, puesto que constituyen la base de un amplio abanico de disciplinas y resultan imprescindibles en la resolución de problemas complejos. La universidad debe promover el talento, sin embargo, al contrario que la educación obligatoria, no dispone de una regulación legislativa prescriptiva. Las altas capacidades son un proceso en desarrollo que se inicia con un potencial intelectual, pero que puede atravesar distintos estadios como la competencia, pericia y logros transformacionales. Desde este proyecto de innovación educativa de la Universitat de València, se ha puesto en marcha un proceso de identificación del alumnado con altas capacidades en la Facultad de Matemáticas. En este trabajo se exponen los principales resultados y las acciones educativas para brindar las oportunidades pertinentes para que el alumnado progrese con éxito en su trayectoria del talento.

Palabras clave: desarrollo del talento, altas capacidades, talento matemático, educación superior

ABSTRACT

Mathematics are an essential resource for societies, since they form the basis of a wide range of disciplines and are essential for solving complex problems. The university must promote talent, however, unlike compulsory education, it does not have a prescriptive legislative regulation. High abilities are a developing process that starts with intellectual potential, but can go through different stages such as competence, expertise and transformational achievements. From this educational innovation project, a process of identification of students with high

abilities in the Faculty of Mathematics has been launched. In this work we present the main results and the educational actions to provide the relevant opportunities for students to progress successfully in their talent trajectory.

Keywords: development of talent, high abilities, mathematical talent, higher education

INTRODUCCIÓN

La Alta Capacidad Intelectual (ACI) es un constructo psicológico [1]. La actual investigación plantea una visión multidimensional que señala los factores determinantes para el despliegue de trayectorias exitosas de desarrollo del talento [2,3], tanto a nivel endógeno (factores personales psicológicos cognitivos y no cognitivos o psicosociales) como a nivel exógeno (oportunidades del entorno). Por ello, las habilidades cognitivas (inteligencia general y aptitudes específicas) son necesarias, pero no suficientes, para que el individuo evolucione siguiendo una trayectoria de desarrollo del talento exitosa [3,4].
En [2] definen las altas capacidades como “la manifestación del rendimiento que se encuentra claramente en el extremo superior de la distribución en un dominio de talento específico, incluso en relación con otros individuos de alto nivel de funcionamiento en ese dominio” (p.7). La actual investigación busca conocer los factores que permiten que el talento avance en cuatro fases que se inician con el potencial intelectual, pasando a la competencia, la pericia y finalizando en el logro transformacional o eminencia [6]. Para que el potencial intelectual se transforme en competencia y después en pericia y logros transformacionales, es necesario el entrenamiento de los sujetos. En relación con esto, las habilidades psicosociales juegan un papel decisivo, pues son mucho más fácilmente maleables que las habilidades intelectuales. La investigación ha identificado un conjunto de habilidades psicosociales comunes a todos los dominios del talento, que son abordadas en el proyecto de innovación educativa: toma de riesgos creativa, habilidades sociales, autorregulación metacognitiva, autorregulación motivacional, autorregulación emocional, autorregulación cognitiva y conocimiento interno del dominio [7]. Además, existen otras propias de cada dominio específico, como es el talento matemático, pues cada dominio del talento presenta una trayectoria diferente. En matemáticas se inicia a corta edad y tiene una trayectoria de largo alcance y duración en el tiempo. Las personas expertas en este dominio destacan entre las habilidades cognitivas generales, elementos básicos de la inteligencia y algunas habilidades de pensamiento, como el pensamiento lógico y el pensamiento creativo [8]. Así, diferentes investigaciones han explorado las habilidades psicosociales en dominios STEM [7,8,9]. La creatividad también es una habilidad tangencial al talento matemático

[10,11,12], ya que la esencia de las matemáticas es pensar creativamente, no simplemente llegar a la respuesta correcta. Al tratar de facilitar el desarrollo de jóvenes matemáticas y matemáticos talentosos, descuidar el reconocimiento de la creatividad puede llevar a los talentos creativos a hacer que abandonen por completo el estudio de las matemáticas [10].

Alcanzar la pericia en las matemáticas necesita, a diferencia de otros dominios del talento, una intensiva práctica matemática [13]. Las personas expertas en matemáticas tienden a cuestionar y preguntar, plantear conjeturas, descubrir nuevos teoremas matemáticos, inventan nuevos conceptos matemáticos y hacen uso de herramientas y pruebas para refutar sus planteamientos [14]. Además, presentan una pronunciada fundamentación del proceso numérico-matemático sostenida en el tiempo [15].

Si bien son relevantes los factores endógenos, la educación se encuentra en los exógenos. La universidad tiene entre sus funciones la educación y la investigación, garantizando la formación de profesionales y académicos de alto nivel que ayudarán a dar respuesta a los retos sociales y tecnológicos del futuro, en línea con el Objetivo de Desarrollo Sostenible (ODS) número 4 de la Agenda 2030 de las Naciones Unidas. Este objetivo persigue alcanzar una educación de calidad e insta a garantizar una educación inclusiva, equitativa y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos. La educación superior es fundamental para preparar una fuerza laboral capacitada, generar conocimientos y promover el desarrollo socioeconómico. El talento matemático ha de ser objeto de interés. El estudio de la UNESCO (2022) *"Matemáticas para la acción"* analiza el impacto de su aplicación y su papel en desafíos como la lucha contra la pobreza, el retroceso de la biodiversidad o el cambio climático, siempre y cuando se pueda contar con personas con la suficiente cualificación. El talento matemático resulta un recurso imprescindible para hacer frente a estos desafíos y las matemáticas se encuentran omnipresentes en nuestras vidas. La educación superior, en su compromiso con la formación permanente y el principio de equidad, ha de ser capaz de proporcionar oportunidades para favorecer el talento matemático en el terreno universitario.

Este contexto motiva este trabajo en el que se presentan los resultados en la Facultad de Matemáticas de un proyecto de innovación educativa en la Universitat de València (UV) que tiene como objetivo la identificación, guía y atención educativa integral del alumnado con ACI. Se analizan los datos en la Facultad de Ciencias Matemáticas y se desprenden implicaciones educativas.

METODOLOGÍA

Proceso de identificación

El enfoque de identificación se fundamenta en el modelo del *Talent Pool* [16], por

lo que existe interés en identificar alumnado: (i) con alto potencial cognitivo (puntuación alta BADYG) y/o (ii) con alta motivación y/o potencial para el alto rendimiento (aproximado por indicadores psicosociales).

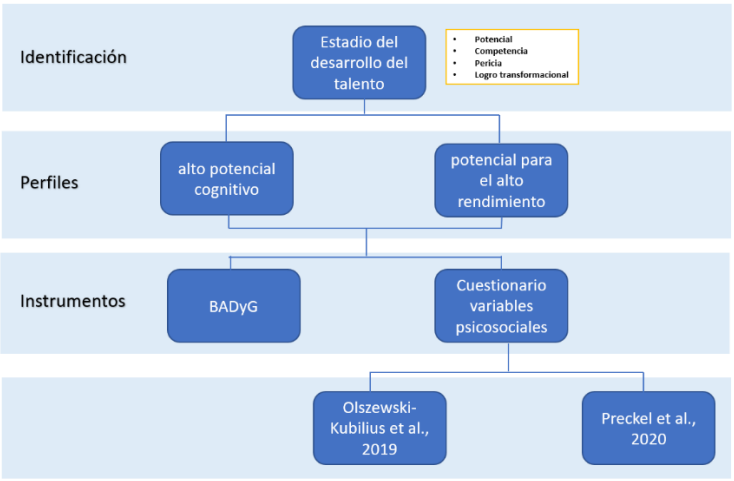


Figura 1: Diagrama del procedimiento de identificación. (Fuente: elaboración propia)

Talleres de desarrollo de habilidades psicosociales

El alumnado universitario con altas capacidades necesita un entorno atractivo y oportunidades de aprendizaje interesantes y estimulantes para desarrollar su potencial [18]. En el proyecto se han abordado las habilidades psicosociales comunes a todos los dominios, pues son maleables y precisan ser deliberadamente promovidas [2], con la implementación de cuatro talleres.

RESULTADOS

Resultados de la identificación

Entre el conjunto de estudiantes de la UV, en la Facultad de Matemáticas se implementó el proyecto en un grupo piloto de una asignatura con un total de 13 estudiantes participantes que respondieron el cuestionario de variables psicosociales, de los cuales 6 eran mujeres, con edades comprendidas entre los 17 y 20 años. De este grupo 4 estudiantes pertenecían a dobles grados, y la nota media de los estudios actuales es de 6.98 y de 12.35 la de acceso a los estudios universitarios.

Los resultados de la Tabla 1 sugieren un rendimiento similar en habilidades psicosociales, sin diferencias entre el alumnado en general y el de la Facultad de Matemáticas en particular, aunque debido al reducido tamaño de la muestra estos resultados deben ser considerados con cautela.

El alumnado de la Facultad de Matemáticas dispone de media de las mismas habilidades creativas, habilidades sociales y la misma capacidad de

autorregulación emocional, motivacional, cognitiva y metacognitiva.

Tabla 1: Resultados para el cuestionario de habilidades psicosociales para la muestra completa y para el alumnado que cursa estudios en Matemáticas.

TODA MUESTRA	TotalPscio	TCreatividad	THabiSociales	TMetacognitiva	TMotivacional	TEmocional	TCognitiva	TAutoconocimiento
Promedio	123,65	19,00	15,79	17,83	20,06	13,31	20,49	17,16
MAX	165,00	25,00	20,00	25,00	25,00	20,00	25,00	25,00
Min	71,00	11,00	9,00	7,00	7,00	4,00	10,00	6,00
desv.est	15,40	2,62	2,23	3,70	3,37	3,17	2,65	3,87
N	262,00	262,00	262,00	262,00	262,00	262,00	262,00	262,00
MATEMATICAS								
Promedio	122,85	19,38	16,00	17,85	19,77	13,46	21,23	15,15
MAX	139,00	24,00	20,00	21,00	23,00	20,00	25,00	19,00
Min	110,00	17,00	13,00	13,00	13,00	8,00	19,00	10,00
desv.est	8,64	1,66	2,08	2,91	3,52	3,36	1,88	2,73
N	13	13	13	13	13	13	13	13

Fuente: Elaboración propia a partir de datos del proyecto.

Por último, cabe señalar que de las 13 personas que estudian matemáticas y respondieron al cuestionario de variables psicosociales, sólo 9 se presentaron a realizar la prueba de aptitudes cognitivas (BADyG) de administración colectiva.

A partir de los resultados en esta prueba de aptitudes cognitivas y la nota media, tanto de acceso como de los estudios actuales, se seleccionó un *pool* del talento de 41 estudiantes. De estas personas seleccionadas se han incluido 4 estudiantes con alto potencial intelectual del grado en matemáticas. Ninguna persona del estudiantado de alto rendimiento pertenecía al grado.

Tabla 2. Resultados promedio de la prueba de aptitudes cognitivas BADyG en la Facultad de Matemáticas

	Matemáticas		**M-T**	**F-M**	**Total**	
	media	**d.e.**			**media**	**d.e.**
N	9		1	1	135	
Inteligencia General	130,72	14,05	129,5	139	108,27	20,13
Razonamiento	70,78	6,72	70	77	59,37	10,9
Factor Verbal	43	7,45	46	52	40,78	7,84
Factor numérico	40,06	5,05	47,5	42	34,5	9,65
Factor espacial	47,67	5,5	36	45	35,99	8,08

M-T: Estudios Matemáticas-telemática; F-M: Doble grado Física y Matemáticas.
Fuente: Elaboración propia a partir de datos del proyecto.

Implicaciones para los docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas

De los resultados alcanzados se puede concluir que el alumnado de la Facultad de Matemáticas necesita desarrollar las mismas habilidades psicosociales comunes a todos los dominios del talento que en el resto de facultades.

Por ello, se propone la participación en los talleres para la promoción de habilidades psicosociales junto al resto del alumnado, por lo que el profesorado de esta Facultad puede:

- Promover la identificación del talento matemático entre sus estudiantes.
- Favorecer la participación en actividades que desarrollan las habilidades psicosociales del alumnado de la UV.

Para la primera de las tareas sería conveniente: identificar, al iniciar las asignaturas, al alumnado con altas capacidades, bien invitándoles a participar en procedimientos sistemáticos de identificación de las habilidades intelectuales, bien considerando otros indicadores como: resultados en las tareas de clase o entregas evaluables (reconociendo al alumnado con mejores resultados), participación en el aula con cuestiones fuera de lo convencional y formas originales y pertinentes para resolver problemas, preguntar al alumnado si alguna persona ha sido identificada, entre otras.

Para la segunda, difundir entre el alumnado la guía de las oportunidades de la UV para promover el talento y facilitar información de los talleres para desarrollar sus habilidades psicosociales.

Por otro lado, una segunda implicación sustancial es el promover las habilidades psicosociales del talento matemático. Para ello, el profesorado ha de procurar [19]:

- Fomentar el interés hacia la asignatura con experiencias de aprendizaje suficientemente desafiantes que contribuyan a desarrollar su motivación, curiosidad, deseo de saber enfrentarse a las asignaturas y, lo más importante, pasión hacia cada asignatura.
- Encomendar tareas que permitan la resolución de problemas matemáticos de forma autónoma, búsqueda de métodos para resolver los problemas de forma original, relacionar unos problemas con otros y plantear nuevos problemas y cuestiones relacionados con la asignatura.
- Llevar a cabo una enseñanza respetuosa en la que el profesorado ofrezca su apoyo para alcanzar los mejores resultados y se enorgullezca de los éxitos de sus estudiantes.
- Permitir desarrollar tareas con creatividad, enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos de forma innovadora y novedosa, siendo un modelo para el alumnado.
- Transmitir no solamente conocimientos matemáticos, sino presentar una especial sensibilidad hacia sus preocupaciones y habilidades

psicosociales, sugiriendo la búsqueda de recursos, cuando fracasen.
- Expresar explícitamente la pasión por su asignatura, para generar un clima en el que las actividades más complejas, puedan ser superadas con un estado emocional ajustado.
- Facilitar el aprendizaje a partir de los errores, implicándolos en la resolución de problemas cada vez más complejos y que incluso superen el nivel de dificultad de la clase en general.
- Brindar la posibilidad de profundizar en el conocimiento de habilidades matemáticas a un nivel superior que el de sus iguales.
- Mostrar a sus estudiantes oportunidades en la línea de la guía de la UV, fuera de ella, que les permitan: presentarse a proyectos, concursos, campeonatos, entre otros, aprendiendo a desempeñar tareas propias de personas que son expertas en matemáticas.

CONCLUSIONES

Este proyecto de innovación educativa permite identificar al alumnado talentoso en la UV y delimitar su perfil tanto cognitivo como psicosocial, así como iniciar una oferta de recursos y servicios que contribuya a que su estancia en la UV optimice sus fortalezas.

Los resultados en el cuestionario de habilidades psicosociales se encuentran en consonancia con la literatura previa y ponen de manifiesto las habilidades psicosociales comunes a todos los dominios del talento.

Estas habilidades y las específicas del dominio de las matemáticas necesitan ser abordadas y enseñadas sistemáticamente, por lo que este trabajo propone estrategias y orientaciones para el profesorado de la Facultad de Matemáticas.

Es conveniente la implicación del profesorado en la identificación y promoción del talento, dado el considerable impacto que ejercen las matemáticas en la sociedad, permitiendo su avance y progreso. Optimizar las habilidades del alumnado de matemáticas revertirá en un beneficio para la sociedad a la hora de enfrentarse a los desafíos del siglo XXI.

Entre las futuras líneas que se derivan de este trabajo se encuentran (i) generar actitudes favorables en el profesorado de la Facultad hacia la identificación y la promoción del talento matemático; (ii) implicar activamente al profesorado de la Facultad de Matemáticas en la promoción del talento de sus estudiantes, conformando procedimientos de detección y acciones educativas; (iii) atraer al alumnado con talento matemático hacia la investigación; y (iv) abordar el estudio de las habilidades propias y específicas en el talento matemático, para que desde la Facultad se promuevan desde la entrada del alumnado a la universidad.

Agradecimientos: proyecto de innovación educativa con referencia UV-SFPIE_PIEE-2730082.

REFERENCIAS

[1] Pfeiffer, S. I. (2015). *Essentials of Gifted Assessment*. John Wiley & Sons Inc.

[2] Subotnik, R. F., Olszewski-kubilius, P., Worrell, F.C. Rethinking Giftedness and Gifted Education: A Proposed Direction Forward Based on Psychological Science. *Psychological Science in the Public Interest, Supplement, 12*(1), 3-54 (2011).

[3] Dai, D. Y. Envisioning a new foundation for gifted education: Evolving Complexity Theory (ECT) of talent development. *Gifted Child Quarterly, 61*, 172-182 (2017).

[4] Ziegler, A. (2005). The Actiotope Model of Giftedness. En R. J. Sternberg y J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 411–436). Cambridge University Press.

[6] Preckel, F., Golle, J., Grabner, R., Jarvin, L., Kozbelt, A., Müllensiefen, D., Olszewski-kubilius, P., Schneider, W., Subotnik, R., Vock, M., Worrell, F.C. Talent Development in Achievement Domains: A Psychological Framework for Within- and Cross-Domain Research. *Perspectives on Psychological Science*, 15 (3), 691-722 (2020).

[7] Olszewski-kubilius, P., Subotnik, R.F., Davis, L.C., Worrell, F.C. Benchmarking psychosocial skills important for talent development. New Directions for Child and Adolescent Development, 2019 (168), 161-176 (2019).

[8] Luo, L., Stoeger, H. Developing eminence in STEMM: An interview study with talent development and STEMM experts. Annals of the New York Academy of Sciences, 1521 (1), 112-131 (2023).

[9] Herce Palomares M. P., Román González M. y Giménez Fernández C. El talento STEM en la educación obligatoria: una revisión sistemática. [STEM talent in k-10: a systematic review]. *Revista de Educación, 396*, 537-549 (2022).

[10] Mann, E.L. Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260 (2006).

[11] Reid, A. y Petocz, P. Learning domains and the process of creativity. *Australian Educational Researcher, 31*(2), 45-62 (2004).

[12] Wadaani, M. A proposed model for understanding and supporting creativity and mathematical talent development. *Universal Journal of Educational Research, 7* (9), 1917-1925 (2019).

[13] Lehtinen, E., Hannula-sormunen, M., Mcmullen, J., Gruber, H. Cultivating mathematical skills: From drilland- practice to deliberate practice. *ZDM – Mathematics Education*, 49, 625–636 (2017).

[14] Leikin, R. 2020. Giftedness and high ability in mathematics. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education (p. 315–325). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

[15] Amalric, M., Dehaene, S. Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 113, 4909–4917 (2016).

[16] Renzulli, J.S., Reis, S.M. (2021). Defensible and Doable: A Practical, Multiple-Criteria Gifed Program Identifcation System. Reflections on Gifted Education: Critical Works by Joseph S. Renzulli and Colleagues, 91-128.

[18] Abunasser, F., Alali, R. Do Faculty Members Apply the Standards for Developing Gifted Students at Universities? An Exploratory Study. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*, 12(6), 579-600 (2022).

[19] Leikin, R. When practice needs more research: the nature and nurture of mathematical giftedness. *ZDM Mathematics Education* 53, 1579–1589 (2021).

Sé más matemáticas que ChatGPT

Marta Pla-Castells[1], Carmen Melchor[1]

[1] ***Departament de Didàctica de la Matemàtica - Facultat de Magisteri, Universitat de València, Av. Tarongers 4, 46022 València, Spain, e-mail: marta.pla@uv.es, carmen.melchor-borja@uv.es, emilia.garcia@uv.es***

I know more mathematics than ChatGPT

RESUMEN

La formulación eficaz de problemas matemáticos es esencial para una enseñanza de matemáticas de alta calidad. Por lo tanto, los docentes deben ser competentes en en el diseño y la presentación de problemas significativos para sus alumnos. En este trabajo se presenta una intervención diseñada para mejorar la competencia en planteamiento de problemas de los futuros docentes. En ella se pedía que los futuros docentes generaran problemas matemáticos adaptados al nivel matemático de Educación Primaria partiendo del visionado de una sola imagen. Una vez generados los problemas, se compararon con los producidos por ChatGPT y se analizaron las diferencias y la idoneidad de los problemas generados tanto por ellos como por la Inteligencia Artificial.

Palabras clave: planteamiento de problemas, inteligencia artificial, formación de futuros maestros

ABSTRACT

Effective mathematical problem formulation is essential for high quality mathematics teaching. Therefore, teachers must be competent in designing and presenting meaningful problems for their students. This paper presents an intervention designed to improve the problem-posing competence of prospective teachers. In this intervention, students were asked to generate mathematical problems adapted to the mathematical level of Primary Education by viewing a single image. Once the problems had been generated, they were compared with those produced by ChatGPT and the differences and suitability of the problems generated by both students and Artificial Intelligence were analysed.

Keywords: problem posing, artificial intelligence, teaching future teachers.

INTRODUCCIÓN

Por Planteamiento de Problemas Matemáticos (PPM) nos referimos a diversas actividades interrelacionadas que requieren que el profesorado o el estudiantado formule (o reformule) y enuncie un problema o tarea en un contexto específico [3].

El proceso de comprensión de las matemáticas está intrínsecamente relacionado con la generación y exploración de preguntas. De esta manera, Brown y Walter [2] resaltan la importancia del planteamiento de problemas durante el proceso de aprendizaje de las

matemáticas. Además, el planteamiento de problemas se ha incluido en los documentos curriculares actuales animando al profesorado a introducir actividades de planteamiento de problemas juntamente con las de resolución de problemas (véase, por ejemplo, [7]). No obstante, el estudiantado de matemáticas de todos los niveles educativos no tiene, generalmente, muchas oportunidades de plantear y construir sus propios problemas durante su aprendizaje [5].

Una de las competencias que el futuro profesorado debe desarrollar es el planteamiento eficaz de problemas matemáticos [7]. Sin embargo, la realidad de las aulas escolares es que se sigue trabajando con los libros de texto [5]. Es fundamental aprender a evaluar la calidad de las tareas matemáticas para poder plantearlas correctamente al alumnado y esta habilidad debería estar presente en los cursos de preparación docente del futuro profesorado [4]. Si bien es cierto que, tanto el profesorado en formación como en activo, defiende visiones de la enseñanza de las matemáticas en las que se ven planteando problemas matemáticos interesantes, existen diversos estudios que demuestran que esta visión está muy alejada de la realidad y el profesorado no está bien preparado para traducir su visión a la realidad del aula [4]. El auge de la Inteligencia Artificial (IA) en los últimos tiempos puede hacer que el futuro profesorado tienda a usar esta herramienta sin tener en cuenta la calidad de los resultados que puedan obtenerse.

En esta propuesta se aborda el trabajo del PPM con estudiantado de la Facultat de Magisteri. Para ello, se planteó una sesión de trabajo en la cual se pedía que el alumnado generara problemas matemáticos de modelización adaptados al nivel matemático de Educación Primaria partiendo del visionado de una sola imagen. Una vez generados los problemas, se compararían con los enunciados producidos por ChatGPT para analizar las diferencias y la idoneidad de los problemas planteados tanto por el alumnado como por la IA. Se analizaron los siguientes aspectos: el nivel de las matemáticas implicadas en la resolución, los conocimientos extra-matemáticos necesarios, la cercanía del contexto que aparecía en el enunciado y si se trababa realmente de un problema matemático que se pudiera resolver.

En este estudio se pretende, fundamentalmente, dar respuesta a las preguntas ¿cómo son los problemas matemáticos de modelización de nivel de Educación Primaria que plantea la IA? ¿son necesarios los conocimientos matemáticos del profesorado para revisarlos?

METODOLOGÍA

La muestra sobre la que se ha realizado la investigación está formada por un grupo matriculado en la asignatura de Propuestas didácticas de Matemáticas de 3^{er} curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universitat de València en el curso académico 2023-24. Uno de los objetivos de esta asignatura es formar al futuro profesorado para que sea capaz de desarrollar propuestas didácticas en matemáticas a partir de diversos tipos de materiales. La muestra la componen un total de 48 participantes (de los cuales el 77.08 % son mujeres) repartidos/organizados en 11 grupos de 4 o 5 componentes.

El alumnado trabajó en grupos formados a su conveniencia y ya habían trabajado anteriormente técnicas de trabajo cooperativo en la asignatura [6]. Para la generación de enunciados se utilizó la técnica del folio giratorio [1], de forma que una persona del grupo creaba inicialmente un problema el cual iba pasando por el esto del grupo para ser revisado y/o modificado

La propuesta se desarrolló durante una sesión de clase de dos horas. El enunciado de la tarea era el siguiente:

- Vamos a crear tareas de modelización para un determinado curso de Educación Primaria viendo sólo una imagen
- Cada tarea la creará una persona del grupo con la técnica del folio giratorio
- Tendréis 3 minutos para apuntar vuestra propuesta en el folio proporcionado
- Cuando cambie la imagen proyectada, pasareis el folio a otra persona del grupo para que genere el siguiente problema
- Así sucesivamente hasta que termine la ronda de imágenes

La tarea consistía en la generación de 11 enunciados con una imagen diferente cada uno. El tiempo de generación de enunciados fue reduciéndose a partir de la quinta imagen para incrementar la dificultad de la tarea. Al finalizar toda la ronda de imágenes, y debido a las restricciones de tiempo, se compartieron con el futuro profesorado los enunciados generados por las autoras y docentes con ChatGPT para las 4 primeras imágenes y se discutió en gran grupo la idoneidad de los resultados que se habían obtenido, tanto por el alumnado como por la IA.

RESULTADOS

Se presentan las reflexiones sobre dos de las imágenes trabajadas. La tarea empezó con la Imagen 1. Todas las imágenes utilizadas llevaban incluido el curso al que debería dirigirse el enunciado generado tanto por el futuro profesorado como por la IA, tal y como se puede observar en la Figura 1.

Figura 1: Primera imagen para generar los enunciados. (Fuente: Internet – Licencia Creative Commons)

Algunos de los resultados generados fueron los siguientes.

1. ¿Cuántos pétalos tiene la flor sobre la que está la abeja?

2. ¿Cuánto tardará una abeja en recolectar el néctar de las flores de nuestro huerto? (el huerto escolar)

3. ¿Cuántos metros debe volar una colonia de abejas para obtener 2 kg de miel?

4. Queremos hacer un dibujo para la clase de plástica en un folio y el profesor nos ha dicho que peguemos alrededor del papel pétalos de la flor de la imagen. ¿Cuántas flores como esa deberemos comprar para decorar nuestro folio?

5. Laura quiere ver la serie de "La abeja Maya". ¿Cuántos capítulos podrá ver los días pares después del cole?

Se puede observar que los tres primeros enunciados, o bien no se tratan de un problema de matemáticas o no se corresponden con el currículum de primaria. En el primer caso, encontramos una tarea de estimación que no supone un problema matemático complejo ya que se trata de una tarea de estimación. El segundo y tercer enunciados están claramente fuera del alcance del alumnado de primaria. El cuarto problema, sin embargo, es un problema de modelización abierto que incluye la estimación de cantidades, la medida de magnitudes y un contexto real y cercano a la realidad del alumnado de primaria. El quinto enunciado, por otra parte, es un problema de modelización y alejado del contexto de la imagen que difícilmente puede resolverse en un aula de primaria.
Tras analizar la idoneidad de los enunciados proporcionados por el futuro profesorado en una discusión en gran grupo, se mostró el enunciado proporcionado por ChatGPT. La petición hecha y el resultado obtenido fueron los siguientes:

- Quiero proponer un problema para un nivel de Educación Primaria. El contexto será «Una abeja en una flor». A partir de esta idea necesito un enunciado para ofrecérselo a estudiantes de 4.º curso de primaria. El enunciado debe ser breve, planteando un problema abierto. No ofrezcas datos en el enunciado. Cualquier dato necesario para resolver el problema deberá ser recabado o estimado por el estudiantado, como parte del proceso de modelización. No me contextualices ni justifiques la respuesta. Limítate a proponer el enunciado

- Respuesta: ¿Cuántas veces una abeja debe visitar una flor para recolectar suficiente néctar y polen para producir una gota de miel?

Claramente el enunciado proporcionado por la IA no era apropiado para el alumnado de primaria ni se utilizaban las matemáticas presentes en el currículum de esa etapa para la resolución del problema.
Como segunda imagen se proporcionó al futuro profesorado la que se muestra en la Figura 2.
Algunos de los enunciados proporcionados por el futuro profesorado fueron los siguientes:

1. Detrás de los niños que están corriendo hay dos árboles, ¿cuál es la distancia que hay entre los dos árboles, si un árbol mide el doble de la altura de una persona y entre los dos árboles, un niño puede dar 70 pasos?

2. Este sábado nos vamos de excursión toda la clase. Nos han dicho que hará mucho calor y es muy importante estar hidratados, ¿cuánta agua necesitarán llevar los profes?

Figura 2: Segunda imagen para generar los enunciados.
(Fuente: Internet – Licencia Creative Commons)

3. ¿Cuántas vueltas corriendo podrán dar los niños en 1 día, si el parque es igual de grande que Central Park de Nueva York?

4. Queremos saber si con todos los alumnos del colegio puestos en fila con los brazos estirados podríamos rodear el colegio. ¿Cuántos alumnos serán necesarios?

En la discusión posterior con el futuro profesorado se detectaron diversas carencias en los enunciados proporcionados. En el primero de los ejemplos se observó que, si bien el enunciado pretendía hacer una estimación de longitudes, el enunciado había quedado demasiado complejo para el curso al que debería ir dirigido. Además, al alumnado de segundo de primaria tampoco le resultaría fácil simular el problema propuesto en su entorno escolar debido a la complejidad de la redacción de este. El segundo de los enunciados propuestos trata un tema transversal interesante en el que los alumnos pueden aproximar la cantidad pedida ya que los cálculos necesarios pueden simplificarse y adaptarse a segundo de primaria. Respecto al tercero de los enunciados, si bien se trata de un problema que podría ser simulado en un entorno cercano al alumnado de primaria, el contexto principal del problema no es adecuado a su edad y conocimientos extra-matemáticos. Por otra parte, el cuarto enunciado, aunque se aleja de la imagen proporcionada, sí que puede ser trabajado por el alumnado de segundo de primaria y resuelto de forma satisfactoria.
El enunciado proporcionado por la inteligencia artificial fue el siguiente:

- ¿Cuánto tiempo tardaría un grupo de niños corriendo en dar una vuelta completa al parque de la escuela?

Como puede observarse, en esta ocasión el enunciado proporcionado era adecuado al nivel escolar demandado y era fácilmente reproducible en un contexto cercado al alumnado al que iba dirigido.

Imagen	IA	E-Res.	E-No-Res.
3. Trozos de pizza	Demasiado complejo	4	7
4. Mochila escolar	Problema correcto	3	8
5. Escalera	Problema correcto	7	4
6. Vaso de agua	Problema correcto	10	1
7. Balón de futbol	Demasiado complejo	8	3
8. Falla de Valencia	Demasiado complejo	7	4
9. Taquillas de una escuela	Demasiado complejo	9	2
10. Globos de agua	Problema correcto	3	8
11. Gatitos	Demasiado complejo	7	4

Tabla 1: *Resumen del análisis del resto de problemas propuestos (Inteligencia Artificial - Estudiantes resolubles - Estudiantes No Resolubles)*

Este proceso se repitió con las todas las imágenes. A modo de resumen, se presenta en la Tabla 1 un análisis de los enunciados proporcionados por la IA y por el futuro profesorado de educación primaria. Las imágenes utilizadas pueden consultarse en el Anexo 1 - Figura 3.
La mayoría de los enunciados propuestos por la IA eran demasiado complejos para el nivel educativo exigido en cada imagen. En todos los casos o bien se utilizaban matemáticas de un nivel superior o bien se trataba de problemas demasiado complejos para abordarlos en un aula de primaria. Respecto a los enunciados del futuro profesorado, se han definido como problemas resolubles los problemas de modelización que eran adecuados para el nivel de primaria definido y como no-resolubles aquellos que eran un problema matemático, tenían un pregunta incoherente o independiente del enunciado, no eran de de modelización, tenían matemáticas demasiado complejas para el nivel educativo proporcionado, tenían un contexto demasiado complejo y variables difíciles de definir así como si los enunciados exigían un conocimiento extra-matemático inadecuado para la edad.

CONCLUSIONES

El planteamiento de problemas matemáticos es una competencia fundamental que los futuros maestros de primaria deben adquirir durante su formación inicial y continua [7]. El auge de la IA en los últimos tiempos ha hecho que el futuro profesorado la considere una herramienta fundamental en la que apoyarse en las tareas intrínsecas a su profesión. Ahora bien, otra de las principales competencias que debe tener el profesorado es la capacidad de valorar y criticar los materiales que va a utilizar en su proceso de enseñanza [5].
En este artículo se muestra una experiencia llevada a cabo con futuro profesorado de primaria relativa a la generación de enunciados de problemas matemáticos. Se generaron problemas matemáticos a partir de una imagen y se discutió la idoneidad de los enunciados producidos en cuanto al nivel de las matemáticas implicadas en su resolución, los conocimientos extra-matemáticos implicados, si realmente suponían un problema matemático y el contexto del problema enunciado. Este mismo análisis se realizó con los enunciados proporcionados por la IA.
Este doble análisis proporcionó al futuro profesorado de primaria una visión más crítica sobre los resultados obtenidos, tanto por las personas como por la IA. Se reforzó en

el futuro profesorado la necesidad de evaluar en base al desarrollo de la competencia matemática cualquier material que el profesorado pone a disposición en sus tareas de enseñanza. Además, se reflexionó sobre el trabajo que un docente podría hacer para obtener resultados adecuados de la IA. Como futura línea de trabajo en el contexto de la innovación docente, se podrían plantear acciones similares a las de este trabajo en las cuales se incida en las repetidas peticiones que se formulan a la IA para ir modificando los enunciados obtenidos con el fin de alcanzar objetivos concretos.

REFERENCIAS

[1] Arra, C. T., D'Antonio, M. D., y D'Antonio Jr, M. (2011). Students' Preferences for Cooperative Learning Instructional Approaches: Considerations for College Teachers. *Journal of Research in Education*, 21(1), 114-126.

[2] Brown, S. I. y Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Psychology Press.

[3] Cai, J., y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391.

[4] Crespo, S. (2015). A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. In: Singer, F., F. Ellerton, N., Cai, J. (eds) *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education*. Springer, New York, NY.

[5]] Crespo, S., y Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 395-415.

[6] Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula* (Vol. 4). Buenos Aires: Paidós.

[7] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standard for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

ANEXO 1

Figura 3: Imágenes 3 a 11 para generar los enunciados.
(Fuente: Internet – Licencia Creative Commons)

Tejidos de pensamiento: Explorando conceptos matemáticos a través del ganchillo

Ester Patiño[1], Mariló López[2], Sagrario Lantarón[2], Javier Rodrigo[3]

[1] Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid (UPM), Avda. Juan de Herrera 4, 28040 (Madrid), Spain, ester.patino@upm.es
[2] Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a las Ingenierías Civil y Naval, UPM, C/ Profesor Aranguren 3, 28040 (Madrid), Spain, marilo.lopez@upm.es, sagrario.lantaron@upm.es
[3] Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Pontificia Comillas, C/ Alberto Aguilera 25, 28015 (Madrid), Spain, jrodrigo@comillas.edu

Thinking fabrics: Exploring mathematical concepts through crochet

RESUMEN

El proyecto *TejeMat: Tejemos Matemáticas* representa un nuevo enfoque basado en las interacciones. Promueve la colaboración entre disciplinas científicas (las matemáticas) y creativas basadas en el diseño y la artesanía (el ganchillo). La propuesta pretende ayudar a docentes y estudiantes a adentrarse en las matemáticas desde un punto de vista distinto. Ubica el diseño de los trabajos en un espacio límite respecto al conocimiento establecido. Esto aleja a los participantes de la especificidad y los moviliza hacia espacios novedosos e innovadores, hacia la curiosidad, la creación y la exploración.
TejeMat es un proyecto que se ha desarrollado durante el curso 23-24 en la Universidad Politécnica de Madrid (UPM). Con su puesta en marcha se ha pretendido acercar, sobre todo a estudiantes, al mundo de las matemáticas y del diseño utilizando el ganchillo como medio de enlace.

Palabras clave: Matemáticas y Ganchillo, Ciencia y Arte, El aprendizaje en y a través de las artes, Metodologías, experiencias y proyectos.

ABSTRACT

The project *Tejemat: Tejemos Matemáticas* represents a new scope based on the interactions. It promotes the collaboration between scientific (mathematics) and creative disciplines based on the design and the craft (the crocheting). The

proposal tries to help teachers and students to meet mathematics from a different point of view. It locates the design of the works in a space that constitute a boundary with respect to the established knowledge. This aparts the participants from the specifity and moves them to fresh and new spaces, to the curiosity, the creation and the exploration. Tejemat is a project developed in the Polytechnic University of Madrid (UPM) in the years 2023-2024. Its start up has pretended to approach to the people, mainly students, to the world of the mathematics and the design by means of the crocheting.

Keywords: Math and Crochet, Science and Art, Learning in and through the arts, Methodologies, Experiences and projects.

INTRODUCCIÓN

El ganchillo es una práctica que, en su aparente sencillez, esconde muchas matemáticas. Con este proyecto se propone intensificar su potencialidad como herramienta educativa y motivadora. El ganchillo se relaciona con las matemáticas mediante conceptos que se encuentran implícitos en la forma de hacer este tipo de labores y sus diseños: geometría, polígonos, poliedros, planos hiperbólicos, superficies regladas, espirales, superficie de Lorenz, fractales, teselaciones, series numéricas, proporción áurea, simetrías, etc. Todos ellos pueden ser representados mediante trabajos elaborados con esta técnica. Además, la aritmética también está muy presente: tanto las relaciones de divisibilidad como los múltiplos de un número se utilizan para realizar casi todos los diseños.

Introducir el ganchillo en el saber científico resulta sorprendente y motivador además de que revaloriza esta técnica. Hay que destacar que existen una serie de prejuicios que pueden hacer que el ganchillo no se valore socialmente y menos como herramienta académica. Por ello, con esta propuesta, queremos mostrar los motivos por los que su dimensión matemática queda claramente reflejada.

Consideramos que existen ciertas razones que han actuado negativamente en la consideración de esta técnica:

- Por un lado, al haber sido elaborado mayoritariamente por mujeres, ha sido siempre asociado al ocio propio de ellas.
- Por otro lado, se ha desarrollado casi siempre a nivel privado, en casa y reuniones pequeñas entre aficionadas. Su técnica no ha sido plasmada en libros de carácter científico o educativo.

Actualmente se está produciendo un reconocimiento de la práctica del ganchillo y se está dando a conocer como complemento al aprendizaje [4]. Como ejemplo, se puede destacar que profesores universitarios utilizan esta técnica para explicar y representar conceptos difíciles de transmitir y visualizar de manera “convencional”. Daina Taimina, profesora del Departamento de Matemáticas en

la Universidad de Cornell, utiliza en sus clases modelos tejidos con ganchillo para explicar y visualizar la geometría hiperbólica; esta profesora tiene publicados trabajos muy interesantes, uno de ellos premiado [2,6], relacionados con este tema. También existen trabajos publicados que unen ganchillo y teoría del caos. Un ejemplo es el que han llevado a cabo dos profesores de la Universidad de Bristol, Hinke Osinga y Bernd Krauskopf, que han conseguido tejer una representación de la superficie de Lorenz [5]. Otra aplicación de gran impacto ha sido dearrollada por Christine y Margaret Wertheim, fundadoras del Institute For Figuring [8], entidad que contribuye a la comprensión, difusión y divulgación de temas científicos entre cuyas actividades está un proyecto de arte comunitario que ha consistido en la creación de un arrecife de coral tejido con ganchillo (explicando y aplicando técnicas de ganchillo hiperbólico) en el que relacionan matemáticas, arte, ciencias y ecologismo [7]. Ha sido exhibido más de 36 veces en diversos países y ha generado la creación de numerosos arrecifes en distintos lugares. Otros autores trabajan el ganchillo y las superficies topológicas [1,3].

Esta unión de matemáticas y ganchillo ya está haciendo su aparición en centros de Educación Secundaria y forma parte de los programas de actividades de centros tales como el Museum of Mathematics (MoMath) de Nueva York [11], que incluye entre sus actividades cursos de ganchillo topológico, con gran éxito de asistencia.

EL GANCHILLO COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE

Descripción del proyecto

Con el proyecto que hemos desarrollado, *TejeMat*, se pretende transmitir y extraer el potencial del ganchillo como herramienta educativa transformadora. Impulsar una educación que, además de conocimiento técnico, transmita el trabajo en grupo, la convivencia, la aplicación de los conocimientos al diseño y la creatividad. Que las acciones propuestas ayuden a una educación que enfoque un cambio social. Para todo ello, es muy valiosa la transversalidad que ofrece el ganchillo. Con él se permite el fomento de espacios en los que crear redes entre estudiantes de diversas espacialidades e inquietudes. Pero no solo entre estudiantes, también entre docentes que participan en el proyecto, creando un lugar de encuentro en un ambiente distendido y cooperativo.

Con esta acción, se propone una educación en la que, a través de un taller de varias sesiones, la enseñanza del ganchillo ayude y complemente al aprendizaje de las matemáticas. Donde además de cuestionar los roles y la reproducción de estereotipos en los jóvenes, se fomenten capacidades como la concentración, la memoria, el cálculo numérico, la geometría, etc. La idea es enseñar y aprender matemáticas a través de la manipulación, el diseño y la creatividad, y hacerlo desde una mirada interdisciplinar basada en el disfrute y la recreación.

Desde este nuevo enfoque, el ganchillo se presenta como un saber

multidimensional que incorpora un proceso científico (matemático) cuya práctica abarca un amplio abanico de elaboraciones.

Para el buen desarrollo de la propuesta, el grupo ha trabajado junto con la Asociación de Labores Solidarias La IAIA [10] que ha sido la encargada de enseñar la técnica del ganchillo y Katia, marca de manualidades textiles [9], que ha donado todo el material necesario (lanas y agujas).

El proyecto ha seguido la siguiente estructura:

- Publicidad de la propuesta entre los estudiantes y profesores de la UPM.
- Inscripción de los participantes.
- Etapa formativa: una vez inscritos los participantes, se impartieron varias sesiones en las que se combinó el aprendizaje de las técnicas del ganchillo con la presentación y explicación de conceptos matemáticos que podrían ser representados en las creaciones posteriores. Fueron un total de 6 sesiones donde, en la parte dedicada a las matemáticas, se trataron temas relativos a la banda de Möbius, mosaicos, sólidos platónicos, fractales y geometrías no euclidianas.
- Etapa creativa: en ella los participantes se dedicaron a la creación de una propuesta artística sobre algún tema científico abordado durante la etapa formativa o algún otro tema de contenido matemático que despertó interés entre los participantes. En esta fase, que tuvo una duración de cuatro sesiones, estuvieron siempre acompañados por las profesoras de los talleres que les orientaban y aconsejaban.
- Tricotadora social: como final de proyecto, en la última sesión se realizó un taller de tricotado colectivo dinamizado por Elisabeth Lorenzi, profesora de Tecnología Textil de la Escuela Superior de Diseño de Madrid. Entre todos se tejió un cilindro emulando con las manos una tricotadora circular. Esta actividad dio lugar a un encuentro entre alumnos de estudios tecnológicos y alumnos de diseño y moda, trabajando en equipo y generando interacción entre estudiantes de distintas disciplinas.
- La exposición: todas las propuestas han configurado la exposición *TejeMat: Tejemos Matemáticas*, donde se muestran paneles explicativos y trabajos realizados y que se exhibe en diversos espacios educativos teniendo además una versión virtual.
- Audiovisual: se ha elaborado un vídeo resumen del proyecto que permite difundir el mismo y servir de inspiración para otros.
- Paralelamente se ha creado una página web asociada al proyecto en la que se encuentra toda la información sobre su desarrollo y que alberga la exposición virtual [12].
- Se ha creado una cuenta de Instagram, @TejeMat, canal de comunicación actual entre estudiantes, en la que se van publicando imágenes de las sesiones e información relativa al proyecto.

Objetivos

Con las actividades realizadas se ha querido fomentar la importancia del

conocimiento multidisciplinar, pero también, del “hacer”, algo que en la Universidad no siempre se tiene en cuenta. Se refuerza la intención de incorporar los saberes de carácter artístico y artesano, en muchas ocasiones considerados solo de las mujeres, a la ciencia. Permiten revindicar la importancia de visibilizar cómo se ha construido el conocimiento, a qué se ha dado valor y a qué no, revalorizando los saberes tradicionalmente femeninos en ocasiones infravalorados.

Dado que los conceptos fundamentales de las matemáticas pueden aprenderse mejor a través de disciplinas creativas y artísticas, estas metodologías activas que incorporan la expresión artística generan emociones positivas que favorecen la actitud hacia el aprendizaje de dichos conceptos.

Con la participación en el proyecto y en las actividades asociadas al mismo, se han tenido como objetivos principales:

- Promover la cultura científica entre los estudiantes, combinando los lenguajes del ganchillo y las matemáticas, dos herramientas directamente relacionadas con la creatividad humana.
- Desarrollar en los estudiantes universitarios competencias trasversales de gran valor en su formación. Fomentar en ellos las habilidades sociales y la creatividad a la vez que visualizan la utilidad de algunos de los contenidos que están aprendiendo en la carrera y otros que complementan su formación.
- Potenciar otras herramientas, en este caso el ganchillo, como herramienta educativa transformadora.
- Cuestionar los roles y la reproducción de estereotipos y fomentar, además, capacidades como la concentración, la memoria y el diseño, así como reforzar conceptos de geometría o de cálculo numérico.
- Crear un punto de encuentro entre los docentes y los alumnos universitarios para interrelacionarse, crear y reflexionar sobre la ciencia y su presencia en todas las áreas.
- Despertar la conciencia de hábitos y usos responsables de la lana y fibras naturales y trabajar objetivos de desarrollo sostenible que se ajustan a la naturaleza del proyecto: salud y bienestar, educación de calidad, igualdad de género, producción y consumo responsables y alianzas para lograr objetivos.

Las matemáticas del proyecto

Los temas que se han desarrollado en las sesiones teóricas han sido los siguientes:

- Banda de Möbius.
- Mosaicos y teselaciones.
- Fractales.
- Sólidos platónicos.
- Geometrías no euclidianas. Geometría hiperbólica.

Todas las presentaciones utilizadas para la exposición y profundización en estos

temas están disponibles en la página web del proyecto [12].

Las sesiones se complementaban con la enseñanza de la técnica del ganchillo: distintos tipos de puntos, aumentos y disminuciones, tejido circular, cuadrado, lectura de patrones, etc., para que los participantes adquiriesen las destrezas necesarias y así poder tejer su proyecto basado en alguno de los conceptos matemáticos trabajados.

Dado que eran proyectos abiertos, la curiosidad de algunos participantes los llevó a tejer otros objetos geométricos tales como la botella de Klein (a la que también se le dedicó un panel explicativo) o las esferas de Dandelin.

Productos resultantes

Con el desarrollo de la propuesta, además de lo comentado en los apartados precedentes, se ha conseguido un material tangible que forma parte de la exposición *TejeMat*, que está siendo expuesta en diversos centros educativos y culturales. Además, está disponible en la web del proyecto. Aunque la mayoría de los trabajos eran personales, se elaboraron algunas propuestas de forma colaborativa entre todos los participantes, tales como Triángulos de Sierpinski.

Se adjuntan imágenes de algunas de las sesiones realizadas y ejemplos de los proyectos y paneles que forman la exposición (Figuras 1-5).

Figura 1: Sesiones formativas.

Figura 2: Sesiones de trabajo.

Figura 3: Exposición *TejeMat*: muestra de los trabajos realizados.

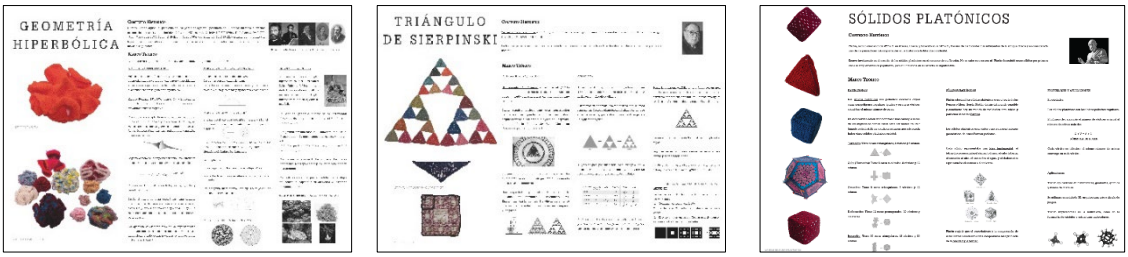


Figura 4: Exposición *TejeMat*: paneles explicativos matemáticos.

Figura 5: Última actividad del proyecto: Tricotadora Social: taller de tricotado colectivo. Estudiantes UPM y estudiantes de la Escuela Superior de Diseño de Madrid tejiendo un cilindro emulando con las manos el funcionamiento de una tricotadora circular.

VALORACIÓN DE LA ACTIVIDAD

El estrecho contacto entre todos los participantes (equipo de trabajo y asistentes) ha permitido un seguimiento directo de actividad, así como de su valoración. No obstante, se ha realizado una encuesta que facilita la evaluación y el conocimiento de las posibles modificaciones que puedan precisarse. La Tabla 1 recoge las preguntas realizadas en dicha encuesta.

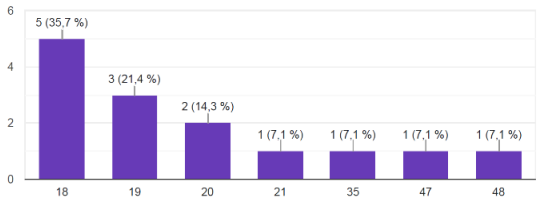
Tabla 1: Preguntas de la encuesta realizada entre los participantes

.

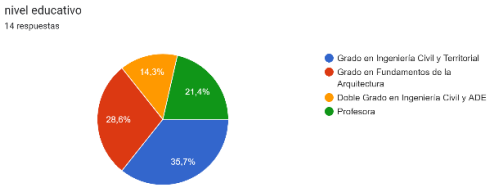
Preguntas realizadas

Edad	Nivel educativo
Género	¿Has asistido regularmente a TejeMat?
¿Habías tejido con ganchillo anteriormente? Si es así ¿cuánto tiempo?	Indica tu interés por las matemáticas
¿Consideras difícil tejer con ganchillo?	¿Estás satisfecho/a con el contenido del curso?
¿Qué aspectos del curso has disfrutado más?	Indica si han aumentado tus conocimientos matemáticos después del taller
¿Ha habido algún tema de contenido matemático que te haya resultado difícil de entender? Si ha sido así, ¿cuál de ellos?	¿Consideras que el taller ha cumplido con tus expectativas iniciales?
¿Cómo ha influido este taller en tu interés por las matemáticas?	¿Cómo ha influido este taller en tu interés por el ganchillo?
Indica brevemente los aspectos positivos que desees destacar de esta actividad.	Indica brevemente los aspectos negativos que desees destacar de esta actividad.
¿Qué sugerencias tienes para mejorar el contenido del curso?	¿Te gustaría continuar el próximo curso con este taller?
¿Hay algo más que quisieras compartir sobre tu experiencia en el curso?	

Los gráficos de la Figura 6 ilustran los resultados de algunas de las preguntas realizadas en la encuesta.



Edad de los encuestados



Nivel educativo

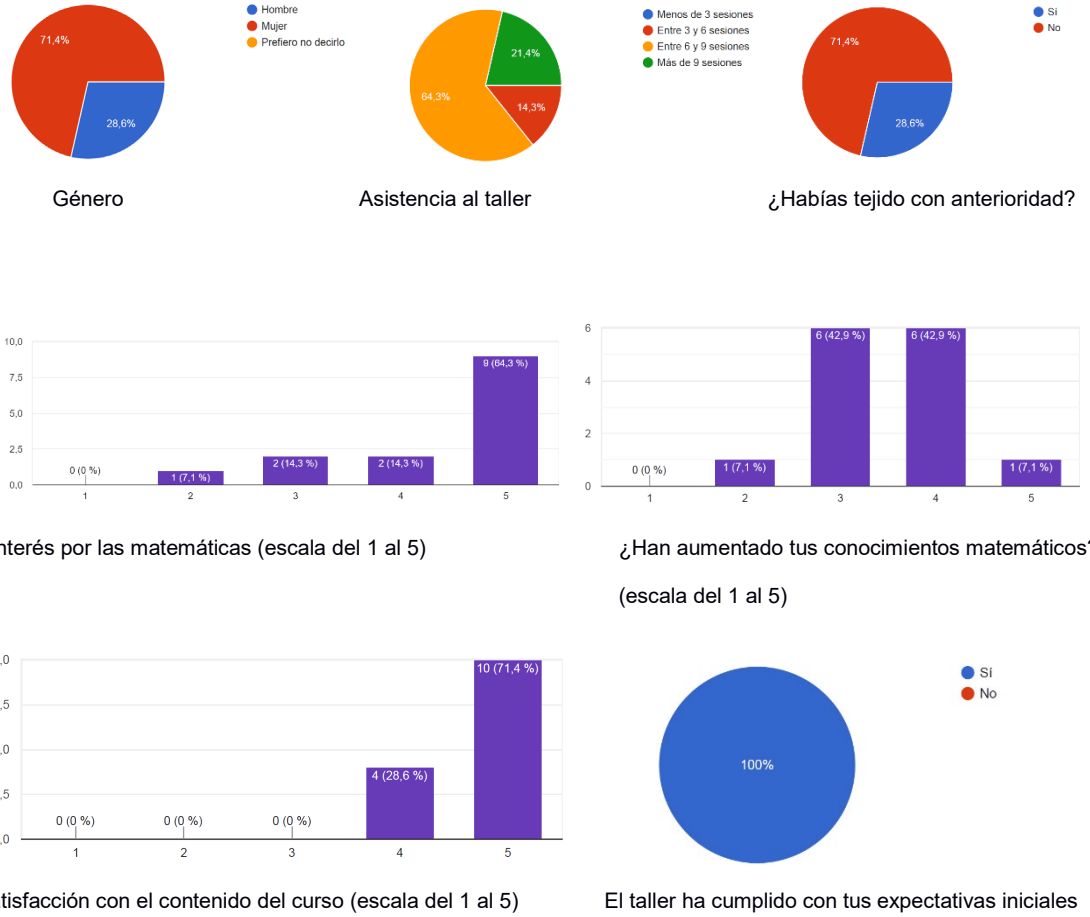


Figura 6: Resultados de algunas de las preguntas de la encuesta.

A continuación, se adjuntan también algunos de los comentarios incluidos en la encuesta relativos a ciertas preguntas:

- ¿Qué aspectos del curso has disfrutado más?
La compañía, el proyecto final, la gente que he conocido, aprender conceptos básicos que no conocía, las teselaciones y la geometría hiperbólica, el trabajo cooperativo, he aprendido mucho y me he divertido, ser capaz de interpretar patrones y ser capaz de manejarme lo suficientemente bien como para improvisar, la compañía y el ambiente de trabajo también muy agradables, el ambiente del taller.

- ¿Cómo ha influido este taller en tu interés por las matemáticas?
Positivamente, me ha motivado a aprender, me ha aclarado conceptos, he visto la relación entre matemáticas y vida cotidiana, ha aumentado mis conocimientos.

- ¿Cómo ha influido este taller en tu interés por el ganchillo?
La respuesta casi unánime ha sido que ha despertado gran interés y les ha aficionado a su práctica.

CONCLUSIONES

El contacto directo con los participantes, así como el interés mostrado durante el desarrollo del proyecto y finalmente la buena valoración de la actividad, permite afirmar que con acciones como la realizada se contribuye a:

- Aumentar la participación de los alumnos universitarios en actividades multidisciplinares que contribuyen a generar una opinión crítica.
- Acortar la distancia entre la Ciencia, la Tecnología, la Innovación y el Arte, y los estudiantes. Lograr mejorar la cultura científica de los alumnos.
- Concienciar, formar e informar a los estudiantes sobre la importancia de la conexión entre la Ciencia y el Arte. Fomentar la búsqueda de sinergias y poner en contacto a estas dos ramas que suelen estar muy alejadas.
- Acercar y visibilizar los conceptos técnicos.
- Fomentar el trabajo en común y la relación entre alumnos de diversas formaciones.
- Propiciar que los alumnos se conviertan en agentes principales en la organización de actividades de divulgación científica.

Un video ilustrativo de la actividad puede verse en: 20240131_Tejemat.mp4.

REFERENCIAS

[1] Dong, S. Sculpting Mapping Cylinders: Seamless Crochet of Topological Surfaces. *Bridges Conference Proceedings*, Halifax, Canada, Jul. 26–31, pp. 559–566 (2023).

[2] Henderson, D.W., Taimina, D. Experiencing geometry Euclidean and non-euclidean with history. ISBN: 978-1-4297-9985-0, *Pearson Prentince Hall* (2020).

[3 Krauskopf, B., Osinga H.M. How to crochet a space-filling pancake: the math, the art and what next *Proceedings of Bridges 2014: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (2014).

[4] Martínez Guerrero, A.M. et al. Las matemáticas del ganchillo*. XVI Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, Palma (2013).

[5] Osinga, H.M., Krauskopf, B. Crocheting the Lorenz manifold. *Mathematical Intelligencer*, 26(4), 25-37 (2004).

[6] Taimina, D.*,* Crocheting adventures with hyperbolic plane, *CRC Press*. (2009*).*

[7] Crochet Coral Reef: https://crochetcoralreef.org/about/theproject/

[8] Institute for Figuring: https://theiff.org/current/

[9] Katia, marca de manualidades textiles: https://www.katia.es/

[10] La IAIA: https://www.laiaia.org/

[11] National Museum of Mathematics: https://momath.org/onlinecrochet/

[12] TejeMat: https://blogs.upm.es/tejemat/; 20240131_Tejemat.mp4