

Las matemáticas que se pueden ver y también tocar

Lucía Rotger-García, Juan Miguel Ribera-Puchades

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, Universitat de les Illes Balears, Crt. De Valldemossa, km. 7,5, 07122, Palma de Mallorca (Illes Balears), Spain e-mail: {lucia.rotger, j.ribera}@uib.es

Mathematics that can be seen and also handled

RESUMEN

Este trabajo estudia cómo diferentes herramientas y representaciones pueden contribuir a la mejora de la resolución de problemas de geometría tridimensional, con especial atención al papel de las habilidades de visualización y la atención a la diversidad. Se presentan recursos manipulativos físicos, entornos digitales interactivos y representaciones simbólicas organizadas en función de su utilidad didáctica, así como una colección de problemas basados en la triple forma, una figura con proyecciones ortogonales de triángulo, cuadrado y círculo. Los problemas se clasifican en torno a categorías como exploración, análisis de propiedades, comparación y clasificación, promoviendo el uso de múltiples representaciones y estrategias. Se concluye que la integración de estas herramientas amplía las posibilidades de acceso al conocimiento geométrico y favorece una enseñanza más inclusiva y equitativa.

Palabras clave: visualización, resolución de problemas, geometría 3D, representaciones múltiples, accesibilidad

ABSTRACT

This work explores how different tools and representations can enhance the resolution of three-dimensional geometry problems, with a particular focus on spatial visualization skills and attention to diversity. It presents physical manipulatives, interactive digital environments, and symbolic representations organized according to their didactic value, along with a collection of problems inspired by the “triple form,” a figure with orthogonal projections of a triangle, square, and circle. The problems are grouped into categories such as exploration, property analysis, comparison, and classification, encouraging the use of multiple representations and strategies. The study concludes that integrating these tools broadens access to geometric understanding and fosters a more inclusive and equitable approach to mathematics education.

Keywords: visualization, problem solving, 3D geometry, multiple representations, accessibility

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas constituye una de las competencias fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el área de la geometría [1]. En este contexto, los procesos de visualización espacial permiten interpretar, manipular y transformar representaciones de objetos geométricos [2]. Sin embargo, las dificultades del alumnado para abordar problemas de geometría tridimensional suelen estar vinculadas, en gran parte, a las limitaciones inherentes a los formatos bidimensionales tradicionalmente empleados en los materiales educativos. Estas limitaciones pueden obstaculizar la comprensión profunda de las propiedades espaciales y dificultar el desarrollo de estrategias eficaces de resolución [3].

Desde la perspectiva del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) [4], se plantea la necesidad de ofrecer múltiples formas de representación de los objetos matemáticos para garantizar la accesibilidad y la equidad en el aprendizaje. En este sentido, integrar herramientas que favorezcan la manipulación directa, la interacción dinámica o la modelización tridimensional de las figuras geométricas permite atender a la diversidad del alumnado y potenciar distintas rutas de comprensión [5]. Esta pluralidad de representaciones resulta especialmente pertinente en el caso de estudiantes con dificultades de percepción espacial, pero también en contextos de altas capacidades, donde se requieren problemas abiertos ajustados a las capacidades del alumnado. El éxito en la resolución de problemas está fuertemente relacionado con la capacidad de los estudiantes para manejar diferentes tipos de representaciones y realizar traducciones entre ellas [6].

La incorporación de tecnologías emergentes, materiales manipulativos y entornos digitales interactivos se configura, por tanto, como una vía para enriquecer la enseñanza de la geometría. Estas herramientas facilitan tanto la interpretación y exploración de objetos tridimensionales como la apertura de nuevas posibilidades para el planteamiento y la resolución de problemas vinculados a la exploración tridimensional y la visualización espacial, conectados con el mundo físico y el pensamiento computacional. El objetivo de este trabajo es presentar diferentes recursos que, desde una mirada didáctica, pueden ayudar a superar las barreras de los soportes planos y promover experiencias significativas de visualización matemática en el aula.

METODOLOGÍA

Herramientas para ver y también tocar

A diferencia de otros enfoques centrados en la visualización como objetivo, aquí se abordan las herramientas desde su función como mediadoras en el proceso de resolución de problemas, facilitando la transición entre diferentes registros semióticos. De esta forma, las herramientas propuestas se organizan en tres categorías principales:

1. Herramientas manipulativas físicas

- a. **Impresión 3D:** Permite construir físicamente objetos geométricos que pueden ser, o bien, diseñados por el alumnado a través de programas de modelado 3D, o bien utilizados directamente para la manipulación física y la comprobación empírica de propiedades geométricas. Esta herramienta refuerza la comprensión espacial al permitir una interacción tangible con los modelos matemáticos.
- b. **Plastilina o materiales modelables:** Permiten construir, deformar y reinterpretar libremente formas tridimensionales con las manos, favoreciendo la exploración táctil del volumen, la simetría y las transformaciones espaciales. Resulta especialmente útil en niveles iniciales o contextos con acceso limitado a tecnología, y se alinea con un enfoque sensorial de la visualización geométrica. Su carácter flexible facilita representar modelos mentales en evolución durante la resolución de problemas.



Figura 1: A la izquierda, figura geométrica impresa en 3D; a la derecha, representación construida con plastilina. Fuente: elaboración propia.

2. Herramientas híbridas físico-digitaes

- a. **Cubo holográfico (Merge Cube):** Combina la manipulación física de un objeto real con la proyección aumentada de modelos tridimensionales interactivos. Esta herramienta permite al alumnado explorar objetos geométricos cuya visualización en realidad aumentada se ajusta en tiempo real a los movimientos físicos del cubo, uniendo lo tangible con lo virtual, y facilitando así una comprensión más integrada de la estructura espacial.

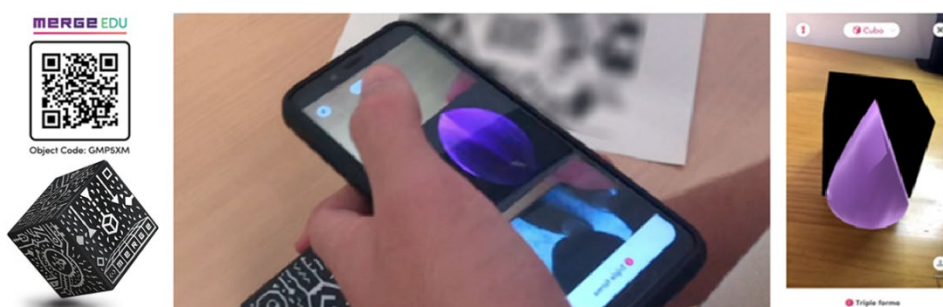


Figura 2: Uso del Merge Cube para la visualización aumentada de objetos tridimensionales. Fuente: elaboración propia.

3. Herramientas virtuales para el modelado y la exploración

- Tinkercad:** Plataforma basada en la manipulación directa de formas geométricas elementales. Es especialmente útil en etapas iniciales por su accesibilidad e interfaz gráfica intuitiva. Permite diseñar modelos de forma libre y desarrollar conceptos como volumen, simetría y combinación y sustracción de sólidos. Su uso fue presentado en las I JID+ [7].
- Blockscad/OpenSCAD:** Blockscad utiliza bloques de programación visual, mientras que OpenSCAD emplea sintaxis textual para modelar objetos tridimensionales. Ambas herramientas se enfocan en la construcción paramétrica, permitiendo definir modelos mediante variables y expresiones lógicas. Estas plataformas favorecen el pensamiento algorítmico y una mayor precisión en los diseños, siendo más adecuadas para alumnado con experiencia previa. Esta herramienta se incluyó como recurso representativo en las II JID+[8].
- GeoGebra 3D:** Herramienta de geometría dinámica que permite la representación algebraica y gráfica simultánea de objetos tridimensionales. A diferencia de las anteriores, se centra en la visualización de funciones y relaciones matemáticas a través de superficies, intersecciones y construcciones dinámicas basadas en ecuaciones.

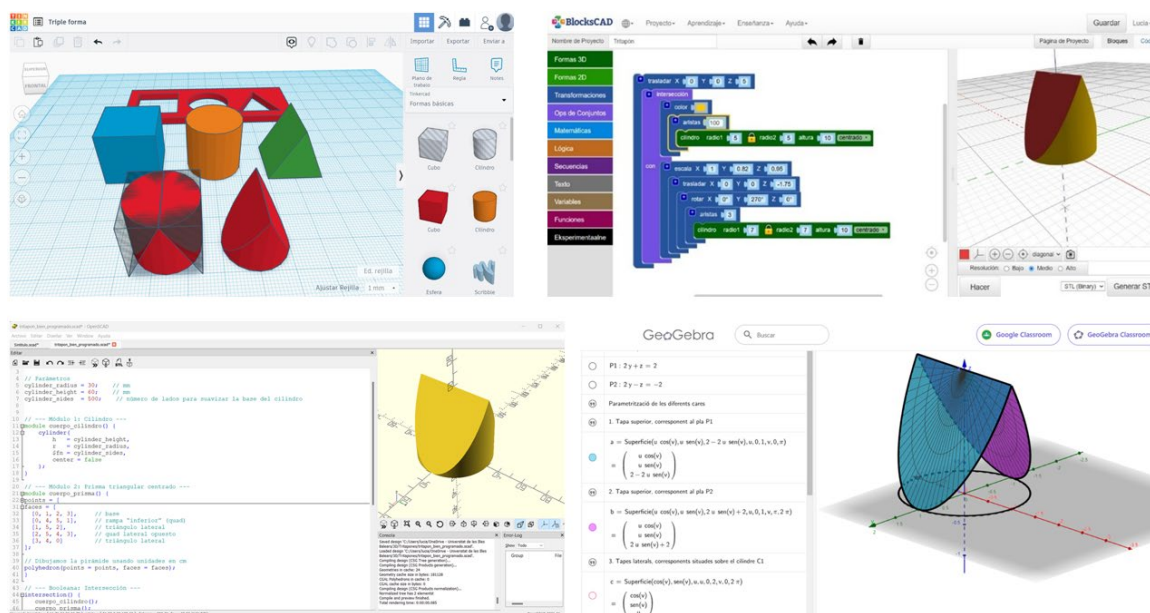


Figura 3: Herramientas digitales para el modelado y la visualización tridimensional. De izquierda a derecha y de arriba abajo: Tinkercad, Blockscad, OpenSCAD y GeoGebra 3D. Fuente: elaboración propia.

4. Herramientas virtuales para la visualización inmersiva

- a. **Assemblr EDU**: Aplicación de realidad aumentada que permite visualizar objetos modelados en el espacio físico a través de dispositivos móviles con cámara, favoreciendo una exploración contextualizada y accesible de las figuras tridimensionales.
- b. **CoSpaces EDU**: Entorno de realidad virtual que permite al alumnado crear y programar mundos tridimensionales interactivos, incorporando modelos geométricos, animaciones y secuencias lógicas mediante código visual o JavaScript. Facilita una inmersión total en escenarios diseñados con fines didácticos. Esta herramienta, junto con la anterior, fue analizada en la III JID+ [9].

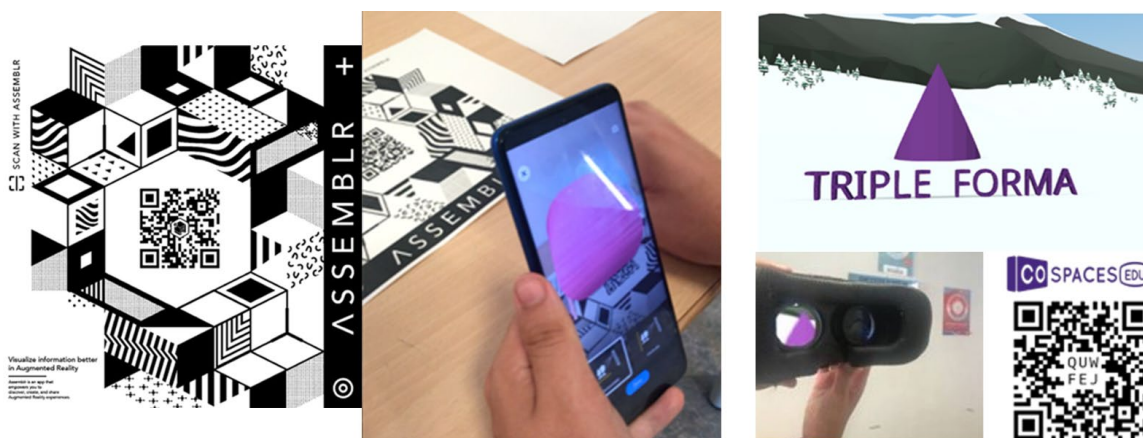


Figura 4: Herramientas de visualización inmersiva. A la izquierda, Assemblr EDU y a la derecha, CoSpaces EDU. Fuente: elaboración propia.

5. Representaciones estáticas o simbólicas

- a. **Dibujos planos**: Representaciones ortogonales o en perspectiva que permiten deducir o inferir propiedades geométricas. Este tipo de representaciones es el más habitual en libros de texto, y sirve como base para interpretar las formas tridimensionales desde vistas bidimensionales estándar, facilitando la transición entre lo visual y lo simbólico.
- b. **Ecuaciones algebraicas**: Definen con precisión superficies y relaciones espaciales, facilitando un análisis más formal y riguroso de las propiedades matemáticas implicadas. Esta representación resulta especialmente útil para establecer conexiones entre la geometría y el álgebra, y para formalizar modelos que posteriormente pueden aplicarse en contextos de diseño o fabricación digital. Su relación con la impresión 3D fue analizada en las IV JID+ [10]
- c. **Diagramas y esquemas**: Útiles en fases iniciales del problema para organizar información, identificar patrones de simetría, representar conexiones entre elementos geométricos o estructurar posibles vías de resolución a partir de esquemas visuales.

Una colección de problemas accesible

En este apartado se propone una colección de problemas matemáticos inspirados en la figura tridimensional que posee proyecciones ortogonales con forma de triángulo, cuadrado y círculo. Este problema fue popularizado por Yakov I. Perelmán en su libro “Problemas y experimentos recreativos” [11], publicado por primera vez en 1913. A partir de esta situación geométrica, se plantea una nueva perspectiva centrada en el diseño y la exploración de variaciones problemáticas que exijan distintas formas de razonamiento, vinculen representaciones múltiples y fomenten procesos de resolución más allá de la mera identificación de propiedades. La propuesta se articula en torno a varias categorías de problemas:

1. Exploración inicial de representaciones

- ¿Qué otras figuras podrían pasar por dos de los tres agujeros?
- ¿Son únicas?

2. Problemas de predicción de secciones planas

- Si se realiza un corte con un plano oblicuo a la figura, ¿qué tipo de sección aparecería?
- ¿Cómo varían las secciones si se modifica el ángulo o la orientación del plano de corte?

3. Problemas de comparación y clasificación

- Compara la figura con otras que puedan pasar por solo dos orificios. ¿Qué propiedades hacen posible o impiden que una figura pase por tres?
- Clasifica un conjunto de figuras propuestas en función de sus proyecciones. ¿A qué familias geométricas podrían pertenecer?

4. Problemas de análisis de propiedades geométricas

- ¿Qué simetrías presenta la figura y cómo se manifiestan en las proyecciones?
- ¿Qué orientación debe adoptar la figura para pasar por los tres orificios?

5. Problemas de construcción geométrica inversa

- ¿Es posible construir otra figura diferente con las mismas proyecciones ortogonales? ¿Qué condiciones debe cumplir?
- Diseña una figura cuyas proyecciones sean un pentágono, un óvalo y un trapecio. ¿Qué dificultades aparecen?

Estos problemas pueden implementarse en distintas fases de la secuencia didáctica o como actividades diferenciadas para evaluar competencias específicas vinculadas a la visualización, la argumentación, la comunicación matemática o el uso de herramientas tecnológicas.

Además, se recomienda invitar al alumnado a formular nuevos problemas a partir de una variación de la condición inicial (por ejemplo, cambiar las formas de las proyecciones, trabajar en otras orientaciones espaciales o considerar el uso de secciones planas no ortogonales), promoviendo así el pensamiento matemático creativo y el desarrollo progresivo de estrategias de resolución de problemas.

CONCLUSIONES

Las herramientas analizadas —manipulativas físicas, híbridas y virtuales, junto con las representaciones simbólicas— ofrecen diferentes posibilidades para

abordar la geometría tridimensional desde perspectivas complementarias. Su uso combinado favorece el tránsito entre representaciones, permitiendo adaptar el enfoque a distintas formas de razonamiento y mejorar la resolución de problemas. Las manipulativas físicas facilitan la interacción directa con los objetos; las híbridas integran lo tangible con lo digital ampliando las posibilidades de exploración; las virtuales permiten el modelado, la modificación y la inmersión en entornos tridimensionales; y las simbólicas ayudan a formalizar propiedades y conectar con otros dominios matemáticos.

Desde una perspectiva inclusiva, la diversificación de representaciones y herramientas no solo enriquece la comprensión matemática, sino que también amplía el acceso a la resolución de problemas. Ofrecer problemas con múltiples formas de entrada —ya sea a través de la manipulación, la exploración digital o el análisis simbólico— permite que más estudiantes encuentren vías accesibles para enfrentarse al reto propuesto. Esta estrategia no consiste en simplificar los contenidos, sino en garantizar que todos los alumnos puedan iniciar el proceso de resolución desde sus propias fortalezas, contribuyendo así a una educación matemática más equitativa y significativa.

REFERENCIAS

- [1] Duval, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1–2), 103–131 (2006).
- [2] Gutiérrez, A. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3–19). Universidad de Valencia (1996).
- [3] Parzysz, B. “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (1), 79–92 (1988).
- [4] CAST (Center for Applied Special Technology). *Universal Design for Learning guidelines version 2.0*. Author. Traducción al español versión 2.0 (2013) por Pastor, C. A., Sánchez Hípola, P., Sánchez Serrano, J. M. & Zubillaga del Río, A. *Pautas sobre el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA)*. Versión 2.0 (2011).
- [5] Kondo, Y., Fujita, T., Kunimune, S., Jones, K. & Kumakura, H. The influence of 3D representations on students’ level of 3D geometrical thinking. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 4, pp. 25–33). Vancouver: PME (2014).
- [6] Villegas, J. L., Castro, E. & Gutiérrez, J. Representaciones en resolución de problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, 7 (17), 279–308 (2017). <https://doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1342>
- [7] Rotger, L. & Ribera, J. M. Visualizando las matemáticas en la tercera dimensión a través de Tinkercad. In *Actas de las I JID+, Jornades d’Innovació Docent en*

Matemàtiques en Educació Superior (pp. 63–69). Valencia (2021). ISBN 978-84-09-32639-6

[8] Rotger, L. & Ribera, J. M. BlocksCAD para la construcción de figuras tridimensionales a través de la programación por bloques. *II JID+, Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior*, Valencia (11–12 de julio de 2022). [Ponencia].

[9] Rotger García, L., Ribera-Puchades, J. M. & Cuadrado Sáez, M. L. Estrategias inclusivas para la visualización de contenido matemático tridimensional. In *Actas de las III Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior* (pp. 43–50). Universitat de València (2023).
<https://www.uv.es/gidmes/JID/2023/files/ActasIIIJID%2B23.pdf>

[10] Rotger-García, L., Bibiloni, P. & Ribera-Puchades, J. M. Diseño e implementación de materiales manipulativos, impresos en 3D, para la mejora de la visualización y estudio de las superficies cuádricas. In *Actas de las IV Jornades d'Innovació Docent en Matemàtiques en Educació Superior* (pp. 14–20). Universitat de València (2024).
<https://www.uv.es/gidmes/JID/2024/files/24A2.pdf>

[11] Perelmán, Y. I. *Problemas y experimentos recreativos*. Moscú: Editorial Mir (1975).