



VNIVERSITAT  
DE VALÈNCIA

## Proyecto investigador

para optar al concurso público para la provisión de la plaza de Profesor Titular de Universidad núm. 1321, convocada a concurso público mediante la resolución de 23 de junio de 2022, de la Universitat de València (convocatoria núm. 167)

Área de Matemática Aplicada  
Departamento de Matemáticas  
Perfil docente: Aproximación numérica  
Perfil investigador: Análisis Numérico

Convocatoria publicada en el Boletín Oficial del Estado núm. 157, de 1 de julio de 2022

Dionisio Félix Yáñez Avendaño  
Burjassot, 28 de septiembre de 2022



---

# Índice general

<b>A modo de introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Métodos de interpolación no lineales</b>	<b>3</b>
1.1. Interpolación cúbica de Hermite monótona con máximo orden . . . . .	4
1.2. <i>Splines</i> cúbicos evitando el fenómeno de Gibbs . . . . .	7
1.3. Algoritmo WENO progresivo . . . . .	9
1.4. Interpolación racional no lineal . . . . .	14
1.5. L1. Interpolantes no lineales . . . . .	15
<b>2. Tratamiento de señales e imágenes</b>	<b>19</b>
2.1. Multirresolución basada en RLPP . . . . .	21
2.2. Multirresolución basadas en técnicas estadísticas de aprendizaje . . . . .	24
2.3. L2. Esquemas de multirresolución . . . . .	25
<b>3. Diseño de curvas y superficies</b>	<b>27</b>
3.1. L3. Esquemas de subdivisión . . . . .	30
<b>4. Aproximación de funciones utilizando medias en celda</b>	<b>33</b>
4.1. L4. Aproximaciones globales explícitas . . . . .	35
<b>5. Resumen y conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>



---

# A modo de introducción

Este proyecto investigador se ha redactado para la participación en el concurso público para la provisión de plazas en la Universitat de València convocado mediante la *Resolución de 23 de junio de 2022, de la Universitat de València, por la que se convoca concurso de acceso a plazas de cuerpos docentes universitarios. Convocatoria Num. 167*, publicada en el Boletín Oficial del Estado Núm. 157/2022, de 1 de julio. En concreto, este proyecto se presenta para el concurso público de la plaza núm. 1321, correspondiente al área de conocimiento de Matemática Aplicada, del Departamento de Matemáticas.

Este documento constituye el proyecto investigador a que se refiere el punto 6.1 de las bases de dicha convocatoria. En el apartado 7.1 se indica lo siguiente:

*La segunda prueba consistirá en la exposición oral y pública, durante un máximo de noventa minutos, del proyecto investigador del candidato o candidata. En caso de que la convocatoria exprese un perfil investigador el proyecto habrá de ajustarse al mismo. A continuación, la Comisión debatirá con el concursante durante un máximo de dos horas.*

La memoria la hemos dividido en cinco capítulos, uno para cada línea de investigación futura propuesta por el candidato. Finalmente, añadimos un capítulo para conclusiones y un breve resumen. La estructura de cada capítulo es la siguiente: en primer lugar se presenta el tema de manera global, seguidamente se establecen distintos subproblemas que dan lugar a sublíneas de investigación que se explican brevemente. En la última parte de

cada tema se explicitan las posibles futuras investigaciones, sus objetivos y los colaboradores.

Es difícil afirmar con certeza que todo lo que contiene este documento se cumplirá. Estas son las humildes intenciones del candidato, sin embargo, en el mundo de la investigación los giros en las expectativas son muy comunes. En algunas ocasiones, porque una sublínea de investigación es mucho más profunda de lo que se pensaba; en otras porque lo que se pensaba no es acertado. En cualquier caso, dejamos por escrito esta ruta con el fin de que su simple seguimiento nos lleve a mundos desconocidos y, esperamos, interesantes para la sociedad.

---

# Capítulo 1

---

## Métodos de interpolación no lineales

En los últimos años, las técnicas de interpolación no lineal han sido desarrolladas en el contexto de diversas aplicaciones como la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales (EDP), el tratamiento de señales y de imágenes, el diseño de curvas, el diseño asistido por ordenador y otras muchas. Estos métodos consisten en obtener la aproximación a una función, sabiendo los datos de la misma en ciertos nodos, combinándolos de manera no lineal. La idea es diseñar un aproximante que tenga las propiedades deseadas de los interpolantes lineales más ciertas características que de esta forma no logramos, como son: conservar la monotonía de los datos, suavidad, evitar el fenómeno de Gibbs cuando los datos presentan discontinuidades, máximo orden en las zonas alejadas de una discontinuidad de salto o en la primera derivada.

Dependiendo de estas características hemos diseñado distintos métodos que nos han permitido crear líneas de investigación y propuestas que presentamos en este capítulo. Lo estructuramos de la siguiente manera: en primer lugar veremos una introducción breve de cada problema y qué artículos hemos publicado en esta línea. Finalmente, presentamos una propuesta de futuras investigaciones divididas en varias sublíneas.

## 1.1

# Interpolación cúbica de Hermite monótona con máximo orden

Uno de los métodos más utilizados en aplicaciones en ingeniería es la interpolación cúbica segmentaria de Hermite que consiste en lo siguiente. Dada una partición  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  y un conjunto de datos entendidos como los valores de una cierta función en estos nodos,  $f_i = f(x_i)$ , supongamos aproximados los valores de la derivada de la función en estos puntos,  $\{\dot{f}_i\}_{i=1}^n$ , podemos construir un interpolador cúbico polinómico a trozos  $P(x)$ , formado por  $n - 1$  polinomios cúbicos  $P_i(x)$  definidos en los subintervalos  $[x_i, x_{i+1}]$ , que satisfagan:

$$P(x_i) = f_i, P(x_{i+1}) = f_{i+1}, P'(x_i) = \dot{f}_i, P'(x_{i+1}) = \dot{f}_{i+1}. \quad (1.1)$$

Utilizando la notación  $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$  y  $m_i = \Delta f_i/h_i$  donde  $h_i = x_{i+1} - x_i$  definimos el polinomio  $P_i(x), x \in [x_i, x_{i+1}]$  (ver [49] para más detalles) como

$$P_i(x) = c_1^i + c_2^i(x - x_i) + c_3^i(x - x_i)^2 + c_4^i(x - x_i)^2(x - x_{i+1}), \quad (1.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} c_1^i &:= f_i, \quad c_2^i := f[x_i, x_i] = \dot{f}_i, \quad c_3^i := f[x_i, x_i, x_{i+1}] = (m_i - \dot{f}_i)/h_i, \\ c_4^i &:= f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}] = (\dot{f}_{i+1} + \dot{f}_i - 2m_i)/h_i^2. \end{aligned}$$

Así pues, la aproximación a los valores  $\{\dot{f}_i\}$  definirá un algoritmo para construir un interpolante cúbico de Hermite, [30].

En ciertas prácticas reales se requiere que estos interpoladores conserven la monotonía de los datos definida como

**Definición 1.1.** Sea  $P_i$  el interpolador cúbico resultando al utilizar como datos  $\{(x_i, f_i, \dot{f}_i), (x_{i+1}, f_{i+1}, \dot{f}_{i+1})\}$ , con  $f_i \leq f_{i+1}$  (análogamente para  $f_i \geq f_{i+1}$ ), es monótono creciente en  $[x_i, x_{i+1}]$  si

$$P_i(x^*) \leq P_i(y^*) \quad (\text{para decreciente: } P_i(x^*) \geq P_i(y^*))$$

para todo  $x^*, y^* \in [x_i, x_{i+1}]$  tal que  $x^* \leq y^*$ .

Para conseguir este tipo de interpoladores hay que imponer ciertas condiciones a la aproximación a los valores de la derivada,  $\{\dot{f}_i\}_{i=1}^n$  que podemos resumir en el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.** Sea  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  y  $P_i$  el interpolante cúbico de Hermite de datos  $\{(x_i, f_i, \dot{f}_i), (x_{i+1}, f_{i+1}, \dot{f}_{i+1})\}$ , y sean  $\alpha_i := \dot{f}_i/m_i$ ,  $\beta_i := \dot{f}_{i+1}/m_i$ . Si una de las siguientes condiciones se satisface:

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_i + \beta_i \leq 3, \\ \alpha_i^2 + \alpha_i(\beta_i - 6) + (\beta_i - 3)^2 < 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\forall i = 1, \dots, n-1$  entonces el polinomio cúbico de Hermite interpolante (1.2) es monótono en  $I_i$ .

Estas condiciones se pueden ver representadas en la figura 1.1, donde el conjunto de puntos  $B$  es el llamado cuadrado de Boor-Swartz [50]. Se puede probar que, si la función es suficientemente

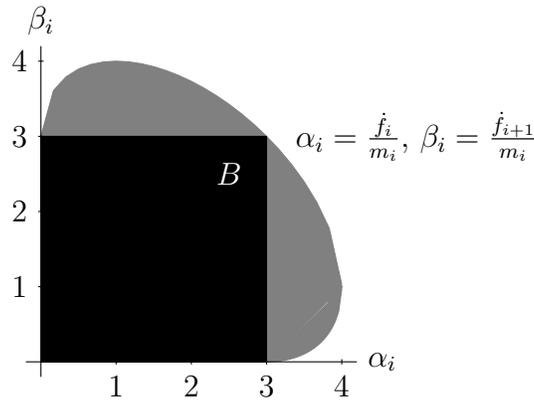


Figura 1.1:  $B$ : Cuadrado de Boor-Swartz. Condiciones suficientes para  $\{f_i\}$  para que el interpolante sea monótono

suave, el interpolador resultante es de orden 4 si las aproximaciones a la derivada son de orden 3.

**Lema 1.3.** ([49]) Sea  $f(x)$  una función suficientemente suave,  $h = \max_{i=1, \dots, n-1} \{h_i\}$ . Si  $\dot{f}_i = f'(x_i) + O(h^{q_i})$  y  $\dot{f}_{i+1} = f'(x_{i+1}) + O(h^{q_{i+1}})$ , entonces el interpolante cúbico de Hermite (1.2) satisface, en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,

$$P_i(x) = f(x) + O(h^q) \quad \text{donde} \quad q = \min(4, q_i + 1, q_{i+1} + 1). \tag{1.4}$$

## 6 INTERPOLACIÓN CÚBICA DE HERMITE MONÓTONA CON MÁXIMO ORDEN

Para aproximar los valores de las derivadas y así construir interpolantes cúbicos de Hermite monótonos que tengan orden máximo se han propuesto principalmente dos líneas:

1. En primer lugar, en [29], se utilizan métodos no lineales de interpolación *essentially non-oscillatory*, ENO (ver, por ejemplo, [60]) y *weighted essentially non-oscillatory*, WENO (ver, por ejemplo, [68]) propuestos por Harten, Osher, Shu et al. en el contexto de la resolución numérica de EDP. La técnica consiste en ir reduciendo el orden de aproximación a la derivada hasta que los valores  $\{\dot{f}_i\}$  caigan dentro del cuadrado de Boor-Swartz. El método WENO lo veremos con más detalle en la siguiente sección 1.3.
2. Por otra parte, Aràndiga en [21] utiliza una media no lineal que funciona correctamente en la mayoría de casos. En [38] se generaliza esta media y se definen los valores aproximados para la derivada como:

$$\dot{f}_i^{AY} := \begin{cases} \text{sign}(m_i) \frac{(h_i + h_{i-1})^{1/p_i} |m_{i-1}| |m_i|}{(h_{i-1} |m_{i-1}|^{p_i} + h_i |m_i|^{p_i})^{1/p_i}} & \text{si } m_i m_{i-1} \geq 0; \\ 0 & \text{si } m_i m_{i-1} < 0, \end{cases}$$

donde  $p_i = \max(1, \frac{\log(w_i)}{\log(3)})$  y  $w_i = 2 \max(h_{i-1}, h_i) / \min(h_{i-1}, h_i)$ . En este caso el método es de orden máximo.

Hasta ahora, tan solo hemos tenido en cuenta que el interpolante sea de orden máximo pero no nos hemos preocupado de la suavidad. En algunas aplicaciones, por ejemplo en el diseño de cubiertas de barcos, se requiere que las aproximaciones sean de clase  $\mathcal{C}^2$ . Una forma de diseñar curvas con esta suavidad es utilizar *splines* que vienen determinados por un sistema de ecuaciones cuyas variables son las aproximaciones a la derivada. Así, en [30] se diseñan dos métodos para obtener la máxima suavidad y el máximo orden cuando los datos presentan gradientes pronunciados. De este estudio se derivó una propiedad de los *splines* que fue publicada en [43].

## 1.2

---

## Splines cúbicos evitando el fenómeno de Gibbs

---

Cuando se interpolan datos provenientes de una función discontinua utilizando métodos lineales surgen, en el entorno de la discontinuidad, ciertos efectos no deseados llamado fenómeno de Gibbs. Con el fin de evitar estos problemas y obtener un interpolante con cierta suavidad, Amat et al. en [14] presentan un cambio en los términos independientes del sistema de ecuaciones que definen los *splines*.

Supongamos (utilizando la notación de [2]) que queremos construir el *spline*  $g(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  y tenemos un mallado de  $m+1$  nodos y sus valores en la función, es decir los pares  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, m$  en cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  un polinomio cúbico

$$g_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad (1.5)$$

con las condiciones para  $1 \leq i \leq m - 1$ :

$$g_{i-1}(x_i) = y_i, \quad g'_{i-1}(x_i) = g'_i(x_i), \quad g_i(x_i) = y_i, \quad g''_{i-1}(x_i) = g''_i(x_i), \quad (1.6)$$

y  $g_0(x_0) = y_0, g_{m-1}(x_m) = y_m$ . Si resolvemos las ecuaciones obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{h_{i+1}D_{i+1} + D_i h_{i+1} + 2y_i - 2y_{i+1}}{h_{i+1}^3}, \\ b_i &= -\frac{h_{i+1}D_{i+1} + 2D_i h_{i+1} + 3y_i - 3y_{i+1}}{h_{i+1}^2}, \\ c_i &= D_i, \quad d_i = y_i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde  $D_i$  es una aproximación de la derivada en cada nodo. Utilizando las condiciones para (1.5) en (1.6) tenemos que:

$$\frac{D_{i-1}}{h_i} + 2 \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) D_i + \frac{D_{i+1}}{h_{i+1}} = 3 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} \right). \quad (1.8)$$

## 8 SPLINES CÚBICOS EVITANDO EL FENÓMENO DE GIBBS

Finalmente, suponiendo que  $g_0''(x_0) = 0$  y  $g_{m-1}''(x_m) = 0$ , por (1.5), obtenemos la siguiente ecuación,

$$2D_0 + D_1 = 3 \left( \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right),$$

y

$$D_{m-1} + 2D_m = 3 \left( \frac{y_m - y_{m-1}}{h_m} \right). \quad (1.9)$$

Si llamamos

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.10)$$

obtenemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 2(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 2(\lambda_2 + \lambda_3) & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(\lambda_m + \lambda_{m-1}) & \lambda_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_{m-1} \\ D_m \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \lambda_2 \delta_2 + \lambda_1 \delta_1 \\ \lambda_3 \delta_3 + \lambda_2 \delta_2 \\ \dots \\ \lambda_m \delta_m + \lambda_{m-1} \delta_{m-1} \\ \delta_m \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

con  $\delta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$  para  $i = 1, \dots, m$ . Denotando

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i + \lambda_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

el sistema anterior se puede escribir  $\mathbf{AD} = 3\mathbf{f}$ , con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_2 & 2 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 2 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \alpha_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_{m-1} \\ D_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ M_{\alpha_2, \beta_2}(\delta_2, \delta_1) \\ M_{\alpha_3, \beta_3}(\delta_3, \delta_2) \\ \dots \\ M_{\alpha_m, \beta_m}(\delta_m, \delta_{m-1}) \\ \delta_m \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

donde  $M_{\alpha, \beta}(x, y)$  es una media ponderada dependiente de las dos constantes  $0 < \alpha, \beta < 1$  tal que  $\alpha + \beta = 1$ .

En [14] se propone un cambio en (1.12) que consiste en introducir una media no lineal. Sin embargo, esta sustitución provoca la pérdida de suavidad en el interpolante. Para solucionarlo, en [2] se diseña un cuasi-interpolante que se acerca a los datos y es de la clase deseada.

## 1.3

---

### Algoritmo WENO- $2r$ con orden de precisión progresivo

---

El método WENO, que ya hemos mencionado en la sección 1.1 (ver, por ejemplo [68]), ha sido ampliamente utilizado en distintas aplicaciones, sobre todo en resolución numérica de EDPs. WENO- $2r$  consiste en calcular el valor de una función en un punto utilizando una combinación convexa de las aproximaciones obtenidas al usar  $r+1$  nodos distintos (*stencils*). La aproximación es de orden máximo,  $2r$ , si no hay discontinuidades que crucen ningún *stencil* y de orden  $r+1$  si existe alguna discontinuidad en un subintervalo suficientemente cercano al punto donde queremos calcular la aproximación sin estar en el mismo intervalo. En [13], se generaliza un algoritmo basado en la propuesta presentada en [12] de una versión de WENO-6 donde se obtiene un orden progresivo creciente cuando el punto que se aproxima se aleja de la discontinuidad. Sin embargo, este algoritmo presenta ciertos problemas cuando  $r$  crece. Para solucionarlos, en [20], se diseña un algoritmo general para cualquier  $r$  donde se introducen los pesos óptimos y los índices de suavidad generales y se prueban teóricamente sus

propiedades. Empezamos explicando brevemente el método WENO clásico.

Sea  $X$  una partición del intervalo  $[a, b]$  en  $J$  subintervalos, es decir

$$X = \{x_i\}_{i=0}^J, \quad x_i = a + i \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{J}.$$

Supongamos conocida la discretización en valores puntuales de una función  $f$  en los nodos  $x_i$ ,

$$f_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, J, \quad f = \{f_i\}_{i=0}^J, \quad (1.13)$$

supongamos que si la función presenta discontinuidades, éstas están suficientemente alejadas. Para interpolar en cada intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$ , el algoritmo WENO- $2r$  utiliza el *stencil*  $\{x_{i-r}, \dots, x_{i+r-1}\}$  formado por  $2r$  nodos. Usando estos puntos, construimos la interpolación en el punto medio del intervalo  $(x_{i-1}, x_i)$ , denotado por  $x_{i-\frac{1}{2}}$ , como la siguiente combinación convexa

$$\mathcal{I}(x_{i-\frac{1}{2}}; f) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k^r p_k^r(x_{i-\frac{1}{2}}). \quad (1.14)$$

siendo  $\omega_k^r$  valores positivos y, que cumplen que, si ninguna discontinuidad cruza el *stencil* entonces el orden de aproximación es  $2r$  en  $x_{i-\frac{1}{2}}$ . El objetivo, por tanto, es obtener una interpolación polinómica que satisfaga:

$$p_0^{2r-1}(x_{i-\frac{1}{2}}) = f(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^{2r}),$$

utilizando el *stencil*  $\{x_{i-r}, \dots, x_{i+r-1}\}$ , a partir de la combinación convexa de los  $r$  polinomios interpoladores consecutivos de orden  $r$ ,

$$p_k^r(x_{i-\frac{1}{2}}) = f(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^{r+1}).$$

Por tanto, la cuestión es hallar los pesos no lineales que satisfagan estas condiciones. En el método clásico WENO- $2r$  (ver por ejemplo [22]) se calculan los llamados pesos óptimos,  $\bar{C}_k^r \geq 0$ , con  $k = 0, \dots, r-1$ ,  $\sum_{k=0}^{r-1} \bar{C}_k^r = 1$ , que cumplen que

$$p_0^{2r-1}(x_{i-\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^{r-1} \bar{C}_k^r p_k^r(x_{i-\frac{1}{2}}). \quad (1.15)$$

y después los pesos no lineales, que denotamos, en este caso por  $\bar{\omega}_k^r$  son diseñados en [65] para satisfacer las condiciones de suavidad anteriormente señaladas y tienen como expresión:

$$\bar{\omega}_k^r = \frac{\bar{\alpha}_k^r}{\sum_{j=0}^{r-1} \bar{\alpha}_j^r}, \quad \text{donde } \bar{\alpha}_k^r = \frac{\bar{C}_k^r}{(\epsilon + \tilde{I}_k^r)^t}, \quad k = 0, \dots, r-1, \quad (1.16)$$

con  $\sum_{k=0}^{r-1} \bar{\omega}_k^r = 1$ , los parámetros  $t$ ,  $\epsilon$  y los valores  $\tilde{I}_k^r$  llamados *índices de suavidad* para  $f$  en cada *substencil* de  $r$  puntos. La expresión que utilizamos es la introducida en [11, 12].

Con el fin de facilitar la lectura de esta memoria, explicamos el caso  $r = 4$  del nuevo método ([20]). Para diseñar el nuevo algoritmo WENO-8 empezamos con un *stencil* de 8 puntos

$$\{x_{i-4}, x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}\}.$$

En este caso existen 4 polinomios de grado 4 (*stencil* 5 puntos), que denotaremos como  $p_0^4(x), p_1^4(x), p_2^4(x), p_3^4(x)$ , hay tres de grado 5 (*stencil* de 6 puntos), que llamamos  $p_0^5(x), p_1^5(x), p_2^5(x)$ , dos de grado seis,  $p_0^6(x), p_1^6(x)$ , y uno de grado 7 (*stencil* de 8 puntos),  $p_0^7(x)$ . El proceso consiste en intentar obtener pesos no lineales que aseguren la precisión óptima en cada subintervalo. Así, podemos escribir:

$$\begin{aligned} p_0^5(x_{i-1/2}) &= C_{0,0}^4 p_0^4(x_{i-1/2}) + C_{0,1}^4 p_1^4(x_{i-1/2}) = \frac{3}{10} p_0^4(x_{i-1/2}) + \frac{7}{10} p_1^4(x_{i-1/2}), \\ p_1^5(x_{i-1/2}) &= C_{1,1}^4 p_1^4(x_{i-1/2}) + C_{1,2}^4 p_2^4(x_{i-1/2}) = \frac{1}{2} p_1^4(x_{i-1/2}) + \frac{1}{2} p_2^4(x_{i-1/2}), \\ p_2^5(x_{i-1/2}) &= C_{2,2}^4 p_2^4(x_{i-1/2}) + C_{2,3}^4 p_3^4(x_{i-1/2}) = \frac{7}{10} p_2^4(x_{i-1/2}) + \frac{3}{10} p_3^4(x_{i-1/2}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} p_0^6(x_{i-1/2}) &= C_{0,0}^5 p_0^5(x_{i-1/2}) + C_{0,1}^5 p_1^5(x_{i-1/2}) = \frac{5}{12} p_0^5(x_{i-1/2}) + \frac{7}{12} p_1^5(x_{i-1/2}), \\ p_1^6(x_{i-1/2}) &= C_{1,1}^5 p_1^5(x_{i-1/2}) + C_{1,2}^5 p_2^5(x_{i-1/2}) = \frac{7}{12} p_1^5(x_{i-1/2}) + \frac{5}{12} p_2^5(x_{i-1/2}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

En el último paso tenemos que:

$$p_0^7(x_{i-1/2}) = C_{0,0}^6 p_0^6(x_{i-1/2}) + C_{0,1}^6 p_1^6(x_{i-1/2}) = \frac{1}{2} p_0^6(x_{i-1/2}) + \frac{1}{2} p_1^6(x_{i-1/2}). \quad (1.19)$$

Construimos los vectores de los pesos óptimos  $C_0^5, C_1^5, C_2^5$ , que serán las coordenadas de (1.17),

$$\begin{aligned} C_0^5 &= (C_{0,0}^4, C_{0,1}^4, 0, 0) = \left( \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, 0, 0 \right), \\ C_1^5 &= (0, C_{1,1}^4, C_{1,2}^4, 0) = \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \\ C_2^5 &= (0, 0, C_{2,2}^4, C_{2,3}^4) = \left( 0, 0, \frac{7}{10}, \frac{3}{10} \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Si multiplicamos los vectores anteriores por las constantes calculadas en (1.18) y (1.19), directamente obtenemos los pesos que aseguran la precisión óptima en las zonas suaves, es decir, los mismos pesos que teníamos para el método WENO-8 clásico ([22])

$$C_{0,0}^6 (C_{0,0}^5 C_0^5 + C_{0,1}^5 C_1^5) + C_{0,1}^6 (C_{1,1}^5 C_1^5 + C_{1,2}^5 C_2^5) = \bar{C}^4 \quad (1.21)$$

Reemplazamos estos pesos por no lineales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{0,0}^5 &= \frac{\tilde{\alpha}_{0,0}^5}{\tilde{\alpha}_{0,0}^5 + \tilde{\alpha}_{0,1}^5}, & \tilde{\omega}_{0,1}^5 &= \frac{\tilde{\alpha}_{0,1}^5}{\tilde{\alpha}_{0,0}^5 + \tilde{\alpha}_{0,1}^5}, & \tilde{\omega}_{1,1}^5 &= \frac{\tilde{\alpha}_{1,1}^5}{\tilde{\alpha}_{1,1}^5 + \tilde{\alpha}_{1,2}^5}, \\ \tilde{\omega}_{1,2}^5 &= \frac{\tilde{\alpha}_{1,2}^5}{\tilde{\alpha}_{1,1}^5 + \tilde{\alpha}_{1,2}^5}, & \tilde{\omega}_{0,0}^6 &= \frac{\tilde{\alpha}_{0,0}^6}{\tilde{\alpha}_{0,0}^6 + \tilde{\alpha}_{0,1}^6}, & \tilde{\omega}_{0,1}^6 &= \frac{\tilde{\alpha}_{0,1}^6}{\tilde{\alpha}_{0,0}^6 + \tilde{\alpha}_{0,1}^6}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{0,0}^5 &= \frac{C_{0,0}^5}{(\epsilon + \tilde{I}_{0,0}^5)^t}, & \tilde{\alpha}_{0,1}^5 &= \frac{C_{0,1}^5}{(\epsilon + \tilde{I}_{0,1}^5)^t}, & \tilde{\alpha}_{1,1}^5 &= \frac{C_{1,1}^5}{(\epsilon + \tilde{I}_{1,1}^5)^t}, \\ \tilde{\alpha}_{1,2}^5 &= \frac{C_{1,2}^5}{(\epsilon + \tilde{I}_{1,2}^5)^t}, & \tilde{\alpha}_{0,0}^6 &= \frac{C_{0,0}^6}{(\epsilon + \tilde{I}_{0,0}^6)^t}, & \tilde{\alpha}_{0,1}^6 &= \frac{C_{0,1}^6}{(\epsilon + \tilde{I}_{0,1}^6)^t}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

Así, adaptamos los pesos óptimos reemplazando los pesos fijos (1.21) por los pesos no lineales (1.22),

$$\tilde{C}^4 = (\tilde{C}_0^4, \tilde{C}_1^4, \tilde{C}_2^4, \tilde{C}_3^4) = \tilde{\omega}_{0,0}^6 (\tilde{\omega}_{0,0}^5 C_0^5 + \tilde{\omega}_{0,1}^5 C_1^5) + \tilde{\omega}_{0,1}^6 (\tilde{\omega}_{1,1}^5 C_1^5 + \tilde{\omega}_{1,2}^5 C_2^5).$$

Sustituimos los pesos óptimos en la expresión del algoritmo WENO clásico por estos nuevos pesos. Por tanto, tenemos:

$$\tilde{\mathcal{I}}(x_{i-\frac{1}{2}}; f) = \sum_{k=0}^3 \tilde{\omega}_k^4 p_k^4(x_{i-\frac{1}{2}}).$$

con

$$\tilde{\omega}_k^4 = \frac{\tilde{\alpha}_k^4}{\sum_{j=0}^3 \tilde{\alpha}_j}, \quad \text{with} \quad \tilde{\alpha}_k^4 = \frac{\tilde{C}_k^4}{(\epsilon + \tilde{I}_k^4)^t}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (1.24)$$

siendo  $\tilde{I}_k^4$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , los indicadores de suavidad definidos en [11, 12]. En la figura 1.2 podemos ver un esquema de la estructura de los pesos óptimos necesarios para obtener orden de precisión óptimo.

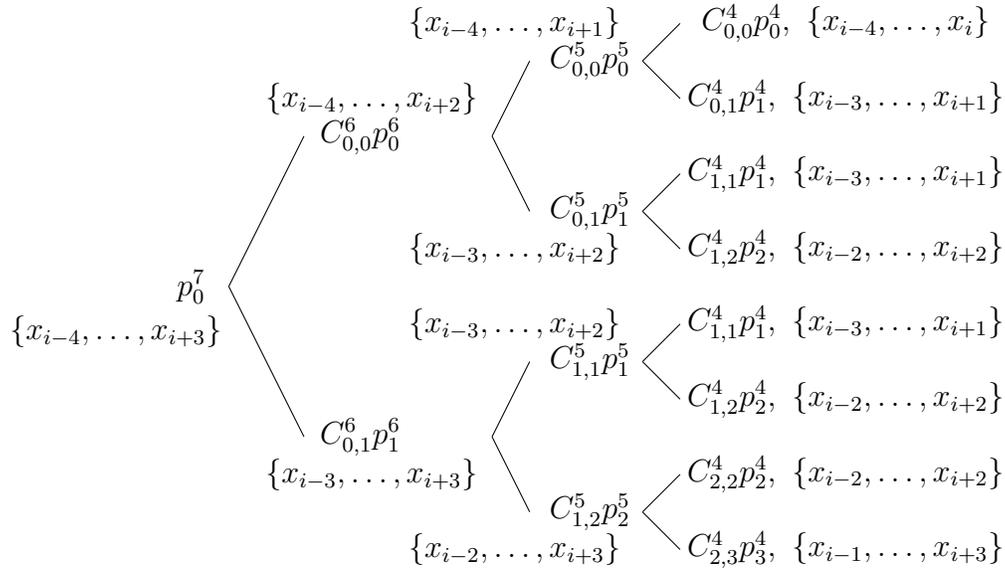


Figura 1.2: Esquema de la estructura de los pesos óptimos necesarios para obtener orden de precisión óptimo para  $r = 4$ .

Finalmente, nos queda definir los indicadores de suavidad en cada nivel, que hacemos de la siguiente forma (en este caso particular):

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{0,0}^6 &= \tilde{I}_0^4, & \tilde{I}_{0,1}^6 &= \tilde{I}_3^4, \\ \tilde{I}_{0,0}^5 &= \tilde{I}_0^4, & \tilde{I}_{0,1}^5 &= \tilde{I}_2^4, \\ \tilde{I}_{1,1}^5 &= \tilde{I}_1^4, & \tilde{I}_{1,2}^5 &= \tilde{I}_3^4. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Los definimos de esta manera para que el indicador de suavidad descarte aquellos *stencils* que contienen una discontinuidad. En

[20] se da una forma general de los indicadores de suavidad para cualquier  $r$  que es:

**Definición 1.4.** Sean  $l = r + 1, \dots, 2r - 2$ , y  $\tilde{I}_k^r$ , con  $k = 0, \dots, r - 1$  los indicadores de suavidad diseñados en [11, 12], entonces definimos los indicadores de suavidad en el nivel  $l$  como:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{k,k}^l &= \tilde{I}_k^r, & k = 0, \dots, (2r - 2) - l, \\ \tilde{I}_{k,k+1}^l &= \tilde{I}_{l-(r-1)+k}^r, & k = 0, \dots, (2r - 2) - l.\end{aligned}\tag{1.26}$$

También se da una expresión explícita para los pesos óptimos en cada nivel. Este trabajo se extiende para calcular una aproximación al valor de la derivada de una función en [19] y en medias en celda aplicándolo a procesamiento de imágenes en [18].

## 1.4

---

# Interpolación racional adaptativa con orden máximo cerca de las discontinuidades

---

Un método de orden 2 tipo WENO fue el diseñado por S. Carrato y G. Ramponi (ver [46, 67]) que consiste en calcular una aproximación al valor  $f_{i-\frac{1}{2}}$  utilizando una media ponderada entre  $f_{i-1}$  y  $f_i$ , i.e.

$$\hat{f}_{i-\frac{1}{2}} = \omega_0 f_{i-1} + \omega_1 f_i, \quad \text{con } \omega_0 + \omega_1 = 1.$$

En [46], se dan dos posibles familias de pesos:

$$\begin{aligned}\omega_{1,0} &= \frac{1 + \alpha(f_{i-1} - f_{i+1})^2}{2 + \alpha((f_{i-2} - f_i)^2 + (f_{i-1} - f_{i+1})^2)}, \\ \omega_{1,1} &= \frac{1 + \alpha(f_{i-2} - f_i)^2}{2 + \alpha((f_{i-2} - f_i)^2 + (f_{i-1} - f_{i+1})^2)},\end{aligned}\tag{1.27}$$

y

$$\begin{aligned}\omega_{2,0} &= \frac{1 + \alpha((f_{i-1} - f_{i+1})^2 + (f_i - f_{i+1})^2)}{2 + \alpha(\sum_{s=0}^1 ((f_{i-1} - f_{i+1-3s})^2 + (f_i - f_{i+1-3s})^2))}, \\ \omega_{2,1} &= \frac{1 + \alpha((f_{i-1} - f_{i-2})^2 + (f_i - f_{i-2})^2)}{2 + \alpha(\sum_{s=0}^1 ((f_{i-1} - f_{i+1-3s})^2 + (f_i - f_{i+1-3s})^2))},\end{aligned}\tag{1.28}$$

donde  $\alpha$  es un parámetro. Aràndiga en [27] presenta un método de orden 4 proponiendo pesos no lineales tipo WENO. En [39] se extiende al entorno de medias en celda. Finalmente, en [40] se generaliza el método para  $2r$  puntos. Explicamos brevemente este nuevo método para  $r = 4$ . Al igual que en el método de WENO, queremos una aproximación con 8 puntos definida como

$$\mathcal{I}(x_{i-\frac{1}{2}}; f) = \sum_{k=0}^3 \omega_k \mathcal{D}_k^r(x_{i-\frac{1}{2}})$$

donde los pesos no lineales vienen dados por

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

siendo

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 7/16 \\ 7/16 \\ 1/16 \end{pmatrix} + h^{-t} \begin{pmatrix} 3/24 & 3/10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14/24 & 7/10 & 0 & 0 & 0 & 7/24 \\ 7/24 & 0 & 0 & 0 & 7/10 & 14/24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/10 & 3/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 \\ J_2 \\ J_1 \\ J_{-1} \\ J_{-2} \\ J_{-3} \end{pmatrix}$$

con:

$$J_\xi = |f_{i+\xi} - f_{i+\xi-1}|^{2t}, \quad \xi = -3, \dots, 3,$$

y  $t$  un parámetro. Es decir, en cada columna situamos los coeficientes óptimos para obtener la aproximación de orden máximo con los polinomios que no están afectados por la discontinuidad. En [40] se definen los pesos generales para cada paso.

## 1.5

### L1. Interpolantes no lineales

En esta sección introducimos los proyectos de investigación relacionados con esta línea. Lo haremos dividiéndolas en distintas sublíneas indicando en cada caso los objetivos que nos planteamos así como los/as colaboradores con los/as que realizaremos esta investigación.

### L1.1. Interpolación cúbica de Hermite monótona

En [26] se trabaja en 2D y se amplían los resultados vistos en [21], lo que nos lleva a plantearnos si los métodos diseñados se pueden extender en esta dirección. Por otra parte, viendo los resultados numéricos obtenidos, sería interesante ver propiedades no estudiadas como la eliminación del fenómeno de Gibbs. Así, planteamos los siguientes objetivos:

- Extender a 2D los resultados obtenidos para interpoladores no lineales.
- Estudiar y analizar propiedades de los interpoladores (por ejemplo *splines*) monótonos como la eliminación del fenómeno de Gibbs.
- Extender los resultados a otro tipo de *splines* como los suavizantes.

En esta sublínea de investigación participarán los investigadores: F. Aràndiga y A. Baeza ambos de la Universitat de València (UV).

### L1.2. *Splines* cúbicos evitando el fenómeno de Gibbs

Al igual que antes, nos planteamos si podemos extender los métodos a varias dimensiones, en particular a dimensión 2 sin necesidad de utilizar producto tensor. También, quedaría pendiente en una dimensión ver propiedades de monotonía ya que los interpoladores no producen fenómeno de Gibbs. Los objetivos serían:

- Extender a 2D los resultados obtenidos para interpoladores no lineales.
- Extender los resultados a otro tipo de *splines* como los suavizantes.
- Estudiar y analizar propiedades de los *splines* que evitan el fenómeno de Gibbs como la monotonía.
- Plantear y estudiar una posible adaptación al entorno de medias en celda.

En esta línea trabajaremos junto a los profesores S. Amat, J. Ruiz-Alvarez, J.C. Trillo de la Universidad Politécnica de Cartagena (UPCT) y D. Levin de Tel-Aviv University (TAU).

### **L1.3. Algoritmos con precisión progresiva**

En esta sublínea, como en las dos anteriores, se plantea ampliar el algoritmo a 2 dimensiones. En [33], se presenta un método WENO no separable en dos dimensiones. A partir de este trabajo, nos preguntamos si podemos hacer un adaptación progresiva del orden dependiendo del número de puntos que utilicemos en la interpolación. Esto lo trabajaríamos también si consideramos los datos como la discretización en medias en celda de una función.

- Extender a 2D los resultados obtenidos.
- Extender el procedimiento para conseguir precisión progresiva a otros tipo de WENO como Hermite WENO o RBF-WENO [32].
- Estudiar su aplicación en resolución numérica de EDPs.

El trabajo se hará junto a S. Amat (UPCT), P. Mulet (UV), J. Ruiz-Alvarez (UPCT) y C.W. Shu de Brown University (BU).

### **L1.4. Interpolación racional adaptativa**

En [39] se extiende el resultado presentado en [67] al entorno de medias en celda. Nos planteamos ampliar este resultado a un algoritmo adaptativo como el presentado en la sección 1.4 a medias en celda y al cálculo de derivadas de una función. Así mismo, si podemos aplicarlo a compresión de imágenes digitales como operador predicción en un esquema de multirresolución. Así, marcamos como objetivos:

- Extender a 2D los resultados obtenidos.
- Extender el método al entorno de medias en celda y aplicarlo a compresión de imágenes digitales y generación de curvas.

Esta línea se trabajará junto a F. Aràndiga (UV).

**L1.5. WENO en mallas no uniformes**

Entre las posibles limitaciones del método WENO encontramos que si la función presenta puntos críticos, el método puede detectarlos como discontinuidades y bajar el orden de la aproximación. Esto ha sido estudiado y resuelto en [41, 42].

Por otra parte, los métodos WENO se definen en datos equiespaciados, haciendo que, en un principio, no sean aplicables en *stencils* donde los nodos no están uniformemente espaciados. Así, junto a los profesores D. Zorío de la Universidad Internacional de Valencia (VIU), M. C. Martí (UV) y P. Mulet (UV) se proponen los siguientes objetivos en esta línea de investigación:

- Diseñar el método WENO para mallados no uniformes.
- Extender el resultado a medias en celda.
- Extender el resultado a 2D.
- Diseñar el método con orden adaptativo en 1D y en 2D.
- Analizar cómo resolver el problema que presenta el método en los puntos críticos en estos nuevos esquemas.

---

# Capítulo 2

---

## Tratamiento de señales e imágenes

Con el fuerte desarrollo de los sistemas informáticos, el tratamiento de señales e imágenes digitales se ha situado como uno de los principales campos de investigación en Matemática Aplicada. Existen gran cantidad de técnicas matemáticas que, desde distintos puntos de vista, como el analítico o el numérico, han abordado los problemas derivados al procesar una imagen digital como compresión, eliminación de ruido en señales, *inpainting* o superresolución.

En los años 90, en el contexto de la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales se desarrollan las técnicas de multirresolución. Harten, en [59], integrando ideas de tres campos diferentes: teoría de bases *wavelet*, EDPs y esquemas de subdivisión, presenta una estructura para la multirresolución de datos. La idea consiste en, suponiendo conocidos una serie de valores en un nivel de resolución  $k$  (la resolución depende del tamaño de  $k$ ), que denotaremos con  $f^k$ , en un espacio vectorial cualquiera  $V^k$ , construimos dos operadores de manera que podamos transitar entre dos resoluciones, es decir el operador decimación

$$\mathcal{D}_k^{k-1} : V^k \rightarrow V^{k-1},$$

que exigiremos que sea suprayectivo y lineal; y el operador predic-

ción,  $\mathcal{P}_{k-1}^k : V^{k-1} \rightarrow V^k$  que nos permite hallar una aproximación a los valores del nivel  $k$  desde los datos del nivel  $k-1$ . Por tanto, podemos definir el error como

$$e^k = f^k - \mathcal{P}_{k-1}^k(\mathcal{D}_k^{k-1} f^k)$$

y bajo ciertas condiciones de los operadores podemos representar  $e^k$  en una base de dimensión menor, obteniendo las coordenadas llamadas detalles  $d^k$ , de manera que tenemos la equivalencia:

$$f^k \equiv \{f^{k-1}, d^k\},$$

si repetimos este paso  $K$  veces, ( $K < k$ ), obtenemos la representación multiescala de los datos  $f^k$ , es decir

$$f^k \equiv \{f^{k-K}, d^{k-K+1}, \dots, d^{k-1}, d^k\}.$$

El tratamiento de los detalles da lugar a diversas aplicaciones como eliminación de ruido o compresión. Si suponemos que nuestros datos  $f^{10}$  son la imagen *peppers* que podemos ver en la figura 2.1 entonces su descomposición multiescala quedaría representada en la figura 2.2 cuando  $K = 1, 2, 3, 4$ .



Figura 2.1: Imagen *peppers*

Hay diferentes formas de definir estos operadores (decimación y predicción). En primer lugar, se analiza cómo entendemos los datos, es decir, si los datos provienen de la discretización de una

función en valores puntuales, o bien son las medias de una función en una determinada celda. Para determinarlo, construimos el operador decimación. Suponiendo que  $\mathcal{F}$  es un espacio de funciones, definimos:

$$\mathcal{D}_k : \mathcal{F} \rightarrow V^k.$$

Una vez que tenemos los datos, para utilizar teoría de aproximación o interpolación, definimos el operador reconstrucción

$$\mathcal{R}_k : V^k \rightarrow \mathcal{F}.$$

La combinación de estos, nos permite definir los operadores anteriores, así tendríamos:

$$\mathcal{D}_k^{k-1} = \mathcal{D}_{k-1} \mathcal{R}_k, \quad \mathcal{P}_{k-1}^k = \mathcal{D}_k \mathcal{R}_{k-1}.$$

Gran cantidad de trabajos han ido destinados a la construcción del operador predicción (o reconstrucción) utilizando técnicas interpolatorias como ENO, WENO (ver por ejemplo [24]) o cambios en un operador lineal introduciendo medias no lineales (ver, por ejemplo, [8, 9, 10]). En este capítulo, comentamos brevemente los trabajos ya publicados y, finalmente, las líneas de investigación futuras.

## 2.1

---

# Multirresolución basada en regresión local polinómica ponderada

---

Típicamente, en multirresolución de Harten, el operador reconstrucción se diseña utilizando interpolación, ya sea lineal o no lineal, técnicas como ENO o WENO vista en el capítulo 1. Sin embargo, en muchas aplicaciones, los datos presentan cierto ruido y no es conveniente utilizar interpolación sino estrategias de aproximación como regresión local polinómica ponderada.

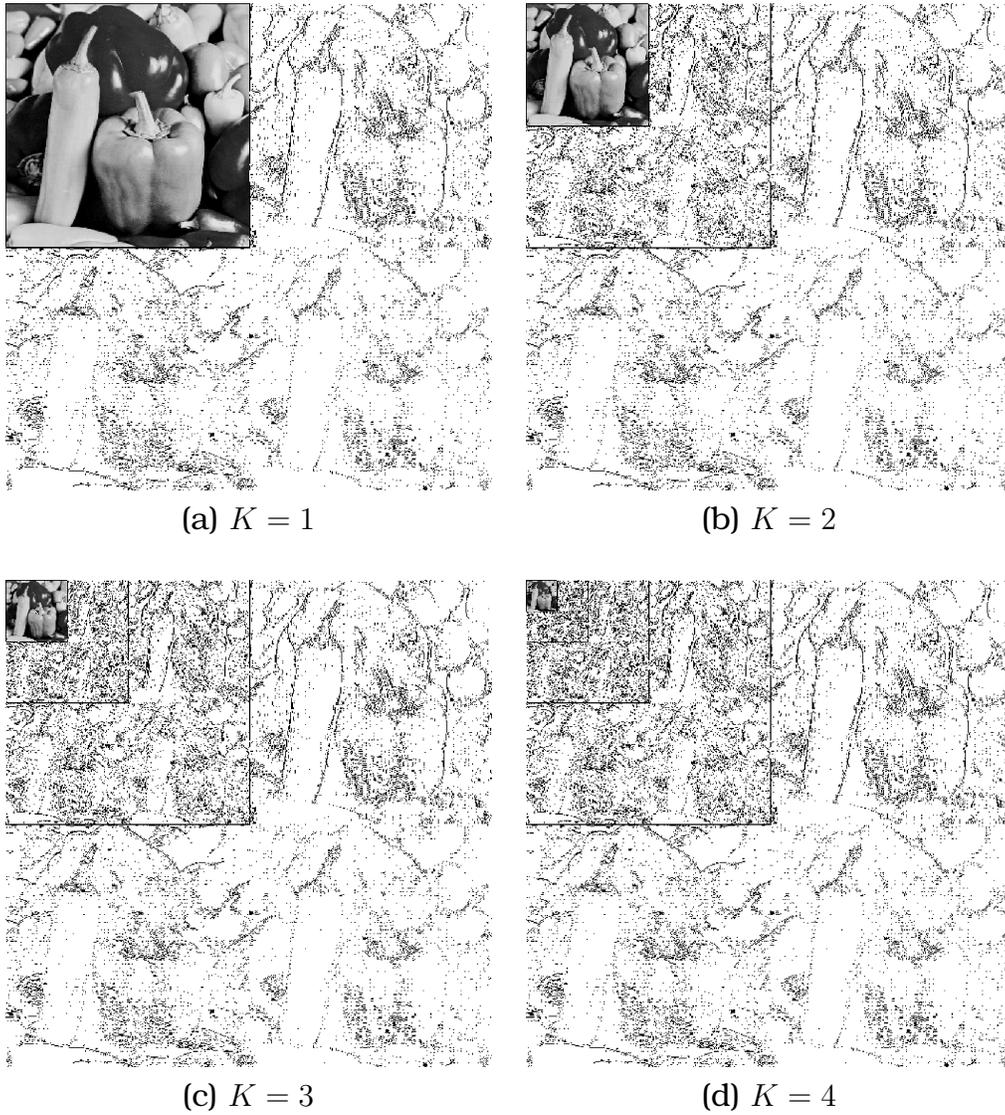


Figura 2.2: *Descomposiciones multiescala de la imagen peppers*

El problema consiste en hallar el polinomio que minimiza la distancia en norma 2 entre los datos conocidos y la evaluación de dicho polinomio en los nodos. Supongamos que trabajamos en valores puntuales, es decir, tenemos un mallado en cada nivel de resolución  $X^k = (x_i^k)_{i=0}^{2^k}$  con  $x_i^k = i/2^k$  y nuestro operador decima-

ción es  $f_i^k = (\mathcal{D}_k f)_i = f(x_i^k)$ ,  $i = 0, \dots, 2^k$ , entonces sabemos que  $x_{2i}^k = x_i^{k-1}$  y  $f_{2i}^k = f_i^{k-1}$ . Por tanto, el operador decimación está definido. El problema para hallar el operador predicción sería el siguiente ([34]):

$$\begin{aligned} \hat{z}(x) &= \arg \min_{z(x) \in \Pi_1^r(\mathbb{R})} \sum_{l=0}^{2^k-1} K_s(x_{2j-1}^k, x_l^{k-1}) L(f_l^{k-1}, z(x_l^{k-1})) \\ \hat{\gamma} &= \arg \min_{\gamma_i \in \mathbb{R}, i=0, \dots, r} \sum_{l=0}^{2^k-1} K_s(x_{2j-1}^k, x_l^{k-1}) L(f_l^{k-1}, \sum_{i=0}^r \gamma_i (x_l^{k-1})^i) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $K_s$  es una función peso con ciertas propiedades y  $L$  una norma, en [34]  $L(x, y) = (x-y)^2$ . Calcularíamos  $\hat{z}(x_{2j-1}^k) = \sum_{i=0}^r \hat{\gamma}_i (x_{2j-1}^k)^i$ ,  $j = 1, \dots, 2^{k-1}$ .

En [34] se analiza el algoritmo desde el punto de vista de la multirresolución, en [35] se extiende a medias en celda y en [37] a dos dimensiones. Uno de los problemas que presenta este tipo de multirresolución es que los operadores no son consistentes, es decir, que al predecir y después decimar no obtienes los mismos datos, esto fue en parte resuelto en [36]. Sin embargo, otros autores, como Liandrat en [64], han planteado otras soluciones que posiblemente sean más convenientes para este tipo de operadores y que estudiaremos en una futura línea de investigación.

Los operadores reconstrucción pueden utilizarse como esquemas de subdivisión (ver capítulo 3). Dyn et al. en [57] introducen una familia de este tipo de esquemas, lo que nos invita a proponer estudios sobre estos esquemas utilizándolos para datos con ruido.

La función  $L$  puede ser la norma 1, lo cual dificulta la solución del problema. En [25], planteamos un esquema de multirresolución para el tratamiento de señales utilizando este operador. Mustafa, en [66], plantea un problema similar para diseñar un esquema de subdivisión.

Estos métodos generalizan las técnicas interpolatorias ampliamente utilizadas, ver por ejemplo [24].

## Multirresolución basadas en técnicas estadísticas de aprendizaje

Como hemos mencionado anteriormente, el tratamiento de imágenes utilizando esquemas de multirresolución consiste en, conociendo unos datos, aplicarles los operadores decimación y predicción (para el cálculo del error) para descomponerlos y eliminar los detalles dependiendo de la aplicación que le queramos dar. Por ejemplo, compresión o eliminación de ruido. Por tanto, es conveniente tener un operador predicción que calcule, de la manera más precisa posible, los valores del nivel  $k$  utilizando los valores de un nivel  $k - 1$ . Esta forma de calcular el operador predicción se trabajó en [31, 23]. Veamos un ejemplo, tomamos de nuevo valores puntuales, el problema es hallar  $G_1$ , que resuelva:

$$G_1 = \arg \min_{G \in \mathcal{K}} \sum_k \sum_{k=2}^{2^{j-1}-1} |f_{2^{j-1}}^k - G(f^{k-1})|^p, \quad (2.2)$$

para algún valor fijo  $1 \leq p < \infty$ , siendo  $\mathcal{K}$  un conjunto de funciones, por ejemplo, polinomios. Si tomamos 4 variables obtenemos el problema lineal de regresión:

$$\min_{a \in \mathbb{R}^4} \sum_k \sum_{j=2}^{2^{j-1}-1} |f(x_{2^{j-1}}^k) - a_1 f(x_{j-2}^{k-1}) - a_2 f(x_{j-1}^{k-1}) - a_3 f(x_j^{k-1}) - a_4 f(x_{j+1}^{k-1})|^p.$$

En los artículos [31, 23] tan solo se trabaja con funciones polinómicas y con minimización de normas  $p = 1, 2, \infty$ . Hay infinidad de nuevas técnicas de aprendizaje (ver [61]) que pueden ser aplicadas.

## 2.3

---

# L2. Esquemas de multirresolución

---

En esta línea de investigación incluimos tres sublíneas: la primera que está relacionada con construir operadores de multirresolución consistentes a partir de predictores basados en regresión local polinómica. La segunda, sería de carácter más práctico, es aplicar los operadores a imágenes con ruido. Y finalmente, en la tercera trataremos de aplicar otros métodos de aprendizaje para hallar nuevos operadores.

### L2.1. Operadores consistentes

En [64], se explica cómo construir operadores decimación a partir de cualquier esquema de subdivisión (ver capítulo 3). Así, los objetivos de esta línea serían:

- Generar operadores de multirresolución consistentes, sabiendo que el operador predicción está hallado como solución de un problema de regresión.
- Estudiar las propiedades y aplicarlo al tratamiento de imágenes.

### L2.2. Aplicación de los métodos a eliminación de ruido

En los ejemplos numéricos presentados en los distintos trabajos sobre multirresolución, tanto utilizando regresión polinómica como técnicas de aprendizaje, hemos podido apreciar que estos operadores pueden funcionar correctamente para eliminar ciertas imperfecciones que aparecen en una imagen como el ruido. Así, nos planteamos:

- Aplicar los operadores mencionados en las secciones 2.1 y 2.2 a la eliminación de ruido.

**L2.3. Nuevas técnicas de multirresolución basada en aprendizaje**

Finalmente, creemos que nuevas técnicas de *learning* o *deep learning* pueden ser aplicadas al tratamiento de señales en el entorno de multirresolución de Harten. Los objetivos, por tanto, serían:

- Aplicar nuevas técnicas estadísticas para hallar un operador predicción.
- Estudiar las propiedades en el contexto de multirresolución como estabilidad.

Esta línea la trabajaremos junto con F. Aràndiga (UV).

---

# Capítulo 3

---

## Diseño de curvas y superficies

Los esquemas de subdivisión surgen a finales del siglo XX en el contexto del diseño asistido por ordenador. Los métodos consisten en generar objetos 3D o curvas bidimensionales a partir de un conjunto de puntos de control. Estas técnicas han sido ampliamente utilizadas en aplicaciones muy variadas como diseño de películas de animación. En la figura 3.1.(a) podemos ver la malla de puntos de control utilizada para generar el personaje de Pixar que vemos en la figura 3.1.(b), [51].

Siguiendo la notación de Dyn y Levin en [58], un esquema estacionario con máscara de soporte compacto  $\mathbf{a} = \{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  se define comenzando por un conjunto de datos finitos,  $f^0 = \{f_i^0\}_{i \in J_0}$  (puntos de control), e iterando, calculamos nuevos valores en el nivel de refinamiento  $k+1$ , que denotamos como  $f^{k+1} = \{f_i^{k+1}\}_{i \in J_{k+1}}$  utilizando la regla:

$$(S_{\mathbf{a}}f^k)_i = f_i^{k+1} := \sum_{j \in J_k} a_{i-2j} f_j^k.$$

Así, un primer ejemplo es el propuesto por Chaikin en [47]:

$$\begin{cases} (S_{\mathbf{a}}f^k)_{2i} = \frac{3}{4}f_i^k + \frac{1}{4}f_{i+1}^k, \\ (S_{\mathbf{a}}f^k)_{2i+1} = \frac{1}{4}f_i^k + \frac{3}{4}f_{i+1}^k. \end{cases} \quad (3.1)$$

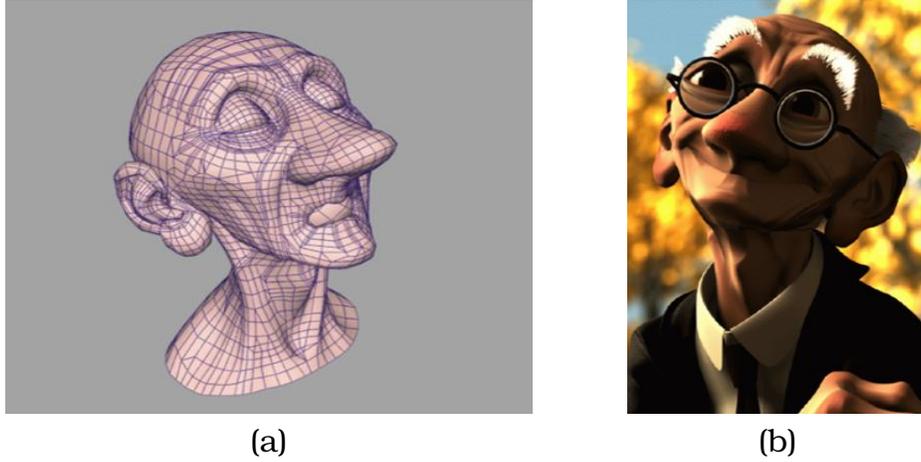


Figura 3.1: (a) Malla de control para la cabeza de un personaje de Pixar, [51]. (b) Personaje de Pixar generado a partir de la malla de control, [51].

donde  $\mathbf{a} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ . Podemos ver la curva generada a partir del esquema de Chaikin en la figura 3.2.

El estudio de distintos esquemas, como los interpolatorios, presentados por Desluariers y Dubuc en [52] y el análisis de las propiedades como convergencia, estabilidad, regularidad, monotonía, reproducción de polinomios ha dado lugar a un amplio número de publicaciones. Entre los distintos resultados, sabemos que si la máscara es positiva entonces el método es convergente. En [15] se prueba, entre otros resultados, que este tipo de esquemas no producen fenómeno de Gibbs cuando en los datos existen discontinuidades.

En ciertas aplicaciones, los datos presentan gradientes pronunciados y utilizando los esquemas lineales obtenemos curvas con ciertos efectos no deseados. Con el fin de evitar este problema, se plantean esquemas no lineales (ver [16, 17]) de la forma

$$S_{NL} = S_L + \mathcal{F} \circ \Delta \quad (3.2)$$

donde  $S_L$  es un operador lineal,  $\Delta$  es el operador diferencia y  $\mathcal{F} : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$  es un operador no lineal. Bajo ciertas condiciones de  $\mathcal{F}$  se puede probar la convergencia. Este operador no lineal puede ser como en [17] una media no lineal. En este sentido, las

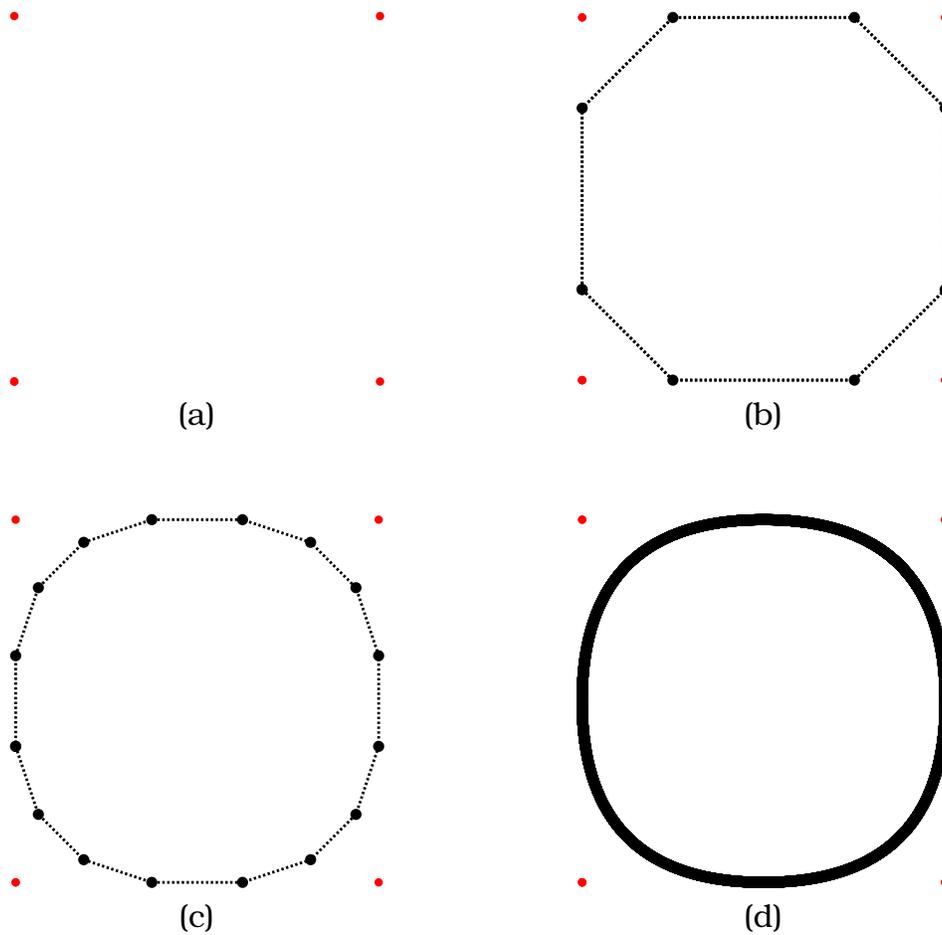


Figura 3.2: (a) Puntos de control. (b) Puntos generados al aplicar el esquema una vez. (c) Puntos generados al aplicar el esquema dos veces. (d) Puntos generados al aplicar el esquema 10 veces

propiedades de la media juegan un papel relevante a la hora de analizar las características del esquema de subdivisión. Por este motivo, se han propuesto nuevas medias (ver [7, 1]) que pueden ser utilizadas como parte de un esquema de subdivisión o en un contexto de multirresolución (ver [6]).

Del mismo modo, se continúan mejorando ciertas propiedades de esquemas de subdivisión conocidos. Así, en [62] se perfecciona la constante de estabilidad para datos convexos hallada en [5]

para el esquema de subdivisión interpolatorio de cuatro puntos utilizando la media armónica (pph). Finalmente, se han propuesto algoritmos de subdivisión no lineales entendiendo los datos como medias en celda como en [55].

En el anterior capítulo, 2, indicamos algunos proyectos de investigación relacionados con los esquemas de subdivisión que surgen a raíz de los operadores de predicción en los esquemas de multirresolución y que ahora explicamos con más detalle.

## 3.1

---

### L3. Esquemas de subdivisión

---

En esta sección planteamos una serie de posibles futuras investigaciones sobre esquemas de subdivisión sobre cuestiones y problemas que han surgido a lo largo de los estudios realizados.

#### L3.1. Esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica

Como hemos visto en la sección 2.1, los operadores reconstrucción pueden ser vistos y estudiados como esquemas de subdivisión. En esta sublínea nos planteamos un análisis sobre esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica ponderada (ver [57]), entendiendo que los puntos de control tienen cierto ruido. En este sentido, ya se ha trabajado, presentando algún resultado previo en el congreso CEDYA de 2021. Nos marcamos los siguientes objetivos en esta sublínea:

- Estudiar la convergencia de los esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica.
- Estudiar propiedades como monotonía, regularidad o reproducción de polinomios, de los esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica.
- Extender los resultados a modelos no lineales tipo WENO.

En esta línea de investigación participarán los profesores F. Arándiga y Sergio López-Ureña (UV).

**L3.2. Esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica en norma 1**

Mustafa et al. en [66] presentan un esquema de subdivisión polinómica en norma 1 pero no estudian ninguna de sus propiedades. Así, los objetivos que nos planteamos son:

- Estudiar propiedades como monotonía, regularidad o reproducción de polinomios, de los esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica en norma 1.
- Extender los resultados a 2D.

**L3.3. Esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica en mallados triangulares**

En [48] diseñan esquemas interpolatorios en mallados triangulares utilizando medias no lineales. Este tipo de esquemas evitan fenómenos no deseados en las discontinuidades. Nos planteamos extender los esquemas basados en regresión local polinómica en 2D, en particular en mallados triangulares, es decir, tendríamos como objetivos:

- Diseñar esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica para mallados triangulares.
- Estudiar las propiedades de estos esquemas.

Esta investigación se hará junto a Sergio López-Ureña (UV) y Costanza Conti Universidad de Florencia (UniFl).



---

# Capítulo 4

---

## Fórmulas explícitas para la aproximación de funciones a partir de su discretización en medias en celda

En ciertas aplicaciones, como en fotogrametría satelital (ver [44]), se necesita aproximar los valores de una función en un malla de puntos conociendo las medias de la función en celdas regulares. En [3] se plantean dos soluciones. En primer lugar, se da una fórmula cerrada dependiendo de la precisión que se desea hallar.

Así, si suponemos una función real  $f \in \mathcal{C}^{2m+2}$  y los valores de las medias de  $f$  en intervalos de longitud  $h$ :

$$\bar{f}(a) = \frac{1}{h} \int_{a-h/2}^{a+h/2} f(x) dx.$$

obtenemos que:

$$f(a) = \bar{f}(a) + \sum_{r=1}^m a_r \Delta^{2r} \bar{f}(a) + O(h^{2m+2}),$$

done  $\Delta^2 g(a) = g(a-h) - 2g(a) + g(a+h)$ , y  $\{a_r\}$  son los coeficientes correspondientes a la solución del sistema:  $\mathbf{M}_m \mathbf{a}_m^T = \mathbf{b}_m^T$ , con

$$b_i = -\frac{1}{(2i+1)!2^{2i}}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

y  $\mathbf{M}_m = (m_{i,j})_{i,j=1}^m$  definidos como:

$$m_{i,j} = \sum_{t=0}^{i-j} \frac{1}{2^{2t-1}(2t+1)!(2(i-t))!} \sum_{s=j+1}^{2j} (-1)^s \binom{2j}{s} (s-j)^{2(i-t)}.$$

Esta solución se puede ampliar a varias dimensiones utilizando producto tensor.

Como segunda solución, utilizamos la base *B-spline*. Sabemos (ver [69]) que una función,  $f$ , de clase  $\mathcal{C}^{p+1}$  se puede aproximar utilizando el operador cuasi-interpolador  $Q_p$  definido como

$$Q_p(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_p(f_{n,p}) B_p\left(\frac{x}{h} - n\right), \quad (4.1)$$

donde  $B_p$  es el *B-spline* de grado  $p$  con soporte en  $I_p = \left[-\frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2}\right]$ , utilizando los nodos equidistantes  $S_p = \left\{-\frac{p+1}{2}, \dots, \frac{p+1}{2}\right\}$ ;

$$f_{n,p} = (f_{n-\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}, \dots, f_{n+\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}),$$

con  $f_n = f(nh)$  y  $L_p$  es una función  $L_p : \mathbb{R}^{2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por (ver [69]):

$$L_p(f_{n,p}) = \sum_{j=-\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} c_{p,j} f_{n+j}, \quad (4.2)$$

donde los coeficientes  $c_{p,j}$ ,  $j = -\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$  son:

$$c_{p,j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1} \frac{t(2l+p+1, p+1)}{\binom{2l+p+1}{p+1}} \sum_{i=0}^{2l} \frac{(-1)^i}{i!(2l-i)!} \delta_{l-i, \lceil \frac{p+1}{2} \rceil, j+1+\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}, \quad (4.3)$$

$\delta_{i,j}$  la delta de Kronecker y  $t(i,j)$  se pueden calcular recursivamente como:

$$t(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j > i, \\ 1, & \text{si } j = i, \\ t(i-2, j-2) - \left(\frac{i-2}{2}\right)^2 t(i-2, j), & \text{si } 2 \leq j < i, \end{cases}$$

con

$$t(i, 0) = 0, \quad t(i, 1) = \prod_{l=1}^{m-1} \left( \frac{m}{2} - l \right), \quad i \geq 2,$$

y  $t(0, 0) = t(1, 1) = 1, t(0, 1) = t(1, 0) = 0$ . Entonces probamos en [3] que:

$$L_{p+1}(\bar{f}_{n,p+1}) = L_p(f_{n,p}). \quad (4.4)$$

y tenemos la relación buscada. Este resultado lo ampliamos a cualquier media  $q$  (ver [56]) y a varias dimensiones utilizando producto tensor. Esta técnica se utiliza para aproximar funciones continuas a trozos desde valores en medias en celda en [4]. En estos trabajos hemos supuesto los datos en un mallado igualmente espaciado pero la intención es ampliarlo a cualquier tipo de datos dispersos.

## 4.1

---

# L4. Aproximaciones globales explícitas

---

En esta sección planteamos una única línea de investigación que es la siguiente.

### L4.1. Fórmulas explícitas de aproximación de funciones desde sus valores en medias en celda en mallados no uniformes

Nos marcamos un único objetivo:

- Estudiar un método de aproximación de funciones y funciones continuas a trozos utilizando como datos sus valores en medias en celda en mallados no uniformes.

En esta línea de investigación participarán los profesores S. Amat y J. Ruiz (UPCT) y D. Levin (TAU).



---

# Capítulo 5

---

## Resumen y conclusiones

En esta memoria hemos hecho un recorrido por el historial investigador del autor dividiendo sus publicaciones por bloques temáticos e indicando posibles líneas de investigación futuras. Así mismo, hemos indicado los colaboradores que previsiblemente participarán en cada línea. Esto, por tanto, es un documento que contempla el proyecto investigador del autor o, mejor dicho, las intenciones de investigación del candidato en el momento en el que se presenta a la plaza. Es difícil, en el contexto de la investigación, marcar un plan que no sea alterado o modificado porque, de cada resultado obtenido, pueden surgir distintas ideas que pospongan ciertas líneas; que, directamente, las anulen; o que sugieran otras más interesantes.

En esta memoria se han establecido, principalmente, cuatro grandes líneas en las que, actualmente, se está trabajando y dentro de estas líneas, diferentes sublíneas:

**L1.** Interpolantes no lineales.

**L1.1.** Interpolación cúbica de Hermite monótona.

**L1.2.** *Splines* cúbicos evitando el fenómeno de Gibbs.

**L1.3.** Algoritmos con precisión progresiva.

**L1.4.** Interpolación racional adaptativa.

**L1.5.** WENO en mallas no uniformes.

**L2.** Tratamiento de señales e imágenes.

**L2.1.** Operadores consistentes.

**L2.2.** Aplicación de los métodos a eliminación de ruido.

**L2.3.** Nuevas técnicas de multirresolución basada en aprendizaje.

**L3.** Diseños de curvas y superficies.

**L3.1.** Esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica.

**L3.2.** Esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica en norma 1.

**L3.3.** Esquemas de subdivisión basados en regresión local polinómica en mallados triangulares.

**L4.** Aproximaciones globales explícitas.

**L4.1.** Fórmulas explícitas de aproximación de funciones desde sus valores en medias en celda en mallados no uniformes.

Además, participamos en otras líneas de investigación que continúan abiertas y resumimos muy brevemente:

**L5. Modelos epidemiológicos** Los modelos más utilizados para la transmisión de enfermedades son los modelos compartimentales [63], donde a cada individuo se le asigna un compartimento, según su situación con respecto a la enfermedad, y se establecen ecuaciones para los flujos entre compartimentos. Los modelos difieren en el número y tipo de compartimentos considerados y en la forma en que se definen las transiciones entre ellos. Si se supone una mezcla perfecta de individuos en cada compartimento, el modelo se puede plantear como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). En [28] basándose en [45] se propone un modelo para la simulación de la propagación del virus SARS-CoV-2 que

incorpora tasas de contacto variables (permitiendo la simulación de medidas locales de confinamiento social) y flujos de movilidad entre regiones que tienen en cuenta las restricciones de movilidad impuestas a la población durante el estado de alarma o cierres perimetrales locales.

**L6. Didáctica de las matemáticas:** En esta línea se trabaja, fundamentalmente en dos aspectos. Por una parte, en Educación Infantil, se estudiaron la relación entre distintas variables en los elementos de una serie y la dificultad que presenta al solucionarla ([54]). Por otra parte, se han estudiado las repercusiones que supone trabajar por medio de robots en el desarrollo de la rotación mental y pensamiento computacional ([53]).

En la tabla 5.1 podemos ver un resumen de las líneas y sublíneas propuestas, así como los colaboradores y los artículos o capítulos publicados de cada línea.

	Colaboradores	Artículos publicados
	L11 Aràndiga y Baeza	
	L12 Amat, Levin, Ruiz y Trillo	
L1	L13 Amat, Mulet, Ruiz y Shu	[2],[18],[19],[20][29],
	L14 Aràndiga	[30],[38],[39],[40],[43]
	L15 Martí, Mulet y Zorío	
	L21	
L2	L22	[6],[8],[9],[10],[23],[25],
	L23 Aràndiga	[31],[34],[35],[36],[37]
	L31 Aràndiga y López-Ureña	
L3	L32	[1],[7],[15],[16],
	L33 Conti y López-Ureña	[17],[55],[62]
L4	L41 Amat, Levin y Ruiz	[3],[4]
L5	L5 Aràndiga, Baeza, Donat, López-Ureña, Martí, Mulet	[28]
L6	L6 Arnau y Diago	[53],[54]

Tabla 5.1: Líneas y sublíneas de investigación



---

# Bibliografía

- [1] S. Amat, I. Jiménez, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. A new family of means: the generalized weighted power means and applications. *International Journal of Computer Mathematics*, 2022.
- [2] S. Amat, D. Levin, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. A class of  $C^2$  quasi-interpolating splines free of gibbs phenomenon. *Numerical Algorithms*, 91:51–79, 2022.
- [3] S. Amat, D. Levin, J. Ruiz, and D. F. Yáñez. Explicit multivariate approximations from cell-average data. *submitted*.
- [4] S. Amat, D. Levin, J. Ruiz-Alvárez, and D. F. Yáñez. Global and explicit approximation of piecewise-smooth two-dimensional functions from cell-average data. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 08 2022. drac042.
- [5] S. Amat and J. Liandrat. On the stability of the pph non-linear multiresolution. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 18(2):198–206, 2005.
- [6] S. Amat, A. Magreñan, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. On the application of the generalized means to construct multiresolution schemes satisfying certain inequalities proving stability. *Mathematics*, 9(5), 2021.
- [7] S. Amat, A. Magreñan, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. On new means with interesting practical applications: Generalized power means. *Mathematics*, 9(9), 2021.

- [8] S. Amat, A. A. Magreñán, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. On the use of generalized harmonic means in image processing using multiresolution algorithms. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(1-2):455–466, 2020.
- [9] S. Amat, Á. A. Magreñán, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. On the application of lehmer means in signal and image processing. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(7):1503–1528, 2020.
- [10] S. Amat, P. Ortiz, J. Ruiz, J.C. Trillo, and D.F. Yáñez. The translation operator. applications to nonlinear reconstruction operators on nonuniform grids. *Mathematics and Computers in Simulation*, 203:408–424, 2023.
- [11] S. Amat and J. Ruiz. New weno smoothness indicators computationally efficient in the presence of corner discontinuities. *J Sci Comput*, 71:1265–1302, 2017.
- [12] S. Amat, J. Ruiz, and C.-W. Shu. On new strategies to control the accuracy of WENO algorithms close to discontinuities. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 57(3):1205 – 1237, 2019.
- [13] S. Amat, J. Ruiz, and C-W. Shu. On a new weno algorithm of order  $2r$  with improved accuracy close to discontinuities. *Applied Mathematics Letters*, 105:106–298, 2020.
- [14] S. Amat, J. Ruiz, C.-W. Shu, and J. C. Trillo. On a class of splines free of gibbs phenomenon. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 55:S29–S64, 2021.
- [15] S. Amat, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. Analysis of the gibbs phenomenon in stationary subdivision schemes. *Applied Mathematics Letters*, 76:157–163, 2018.
- [16] S. Amat, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. On a stable family of four-point nonlinear subdivision schemes eliminating the gibbs phenomenon. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 354:310–325, 2019.

- [17] S. Amat, J. Ruiz, J. C. Trillo, and D. F. Yáñez. On a family of non-oscillatory subdivision schemes having regularity  $C^r$  with  $r > 1$ . *Numerical Algorithms*, 85:543–569, 2020.
- [18] S. Amat, J. Ruiz-Álvarez, C.-W. Shu, and D. F. Yáñez. Cell-average weno with progressive order of accuracy close to discontinuities with applications to signal processing. *Applied Mathematics and Computation*, 403:126131, 2021.
- [19] S. Amat, J. Ruiz-Álvarez, C.-W. Shu, and D. F. Yáñez. On the approximation of derivative values using a weno algorithm with progressive order of accuracy close to discontinuities. *Computational and Applied Mathematics*, 41,297:126131, 2022.
- [20] S. P. Amat, J. Ruiz, C.-W. Shu, and D. F. Yáñez. A new weno- $2r$  algorithm with progressive order of accuracy close to discontinuities. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 58(6):3448–3474, 2020.
- [21] F. Aràndiga. On the order of nonuniform monotone cubic hermite interpolants. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(5):2613–2633, 2013.
- [22] F. Aràndiga, A.M. Belda, and P. Mulet. Point-value WENO multiresolution applications to stable image compression. *J. Sci. Comput.*, 43(2):158–182, 2010.
- [23] F. Aràndiga, A. Cohen, and D. F. Yáñez. Design of multiresolution operators using statistical learning tools: Application to compression of signals. In Jean-Daniel Boissonnat, Patrick Chenin, A. Cohen, Christian Gout, Tom Lyche, Marie-Laurence Mazure, and Larry Schumaker, editors, *Curves and Surfaces*, pages 94–108, Berlin, Heidelberg, 2012. Springer Berlin Heidelberg.
- [24] F. Aràndiga and R. Donat. Nonlinear multiscale decompositions: The approach of A. Harten. *Numer. Algorithms*, 23(2-3):175–216, 2000.

- [25] F. Aràndiga, P. Mulet, and D. F. Yáñez. Non-linear local polynomial regression multiresolution methods using  $l^1$ -norm minimization with application to signal processing. In Jean-Daniel Boissonnat, A. Cohen, Olivier Gibaru, Christian Gout, Tom Lyche, Marie-Laurence Mazure, and Larry L. Schumaker, editors, *Curves and Surfaces*, pages 16–31, Cham, 2015. Springer International Publishing.
- [26] F. Aràndiga. A nonlinear algorithm for monotone piecewise bicubic interpolation. *Applied Mathematics and Computation*, 272:100–113, 2016. Subdivision, Geometric and Algebraic Methods, Isogeometric Analysis and Refinability.
- [27] F. Aràndiga. Adaptive rational interpolation for point values. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 349:212–224, 2019.
- [28] F. Aràndiga, A. Baeza, I. Cordero-Carrión, R. Donat, M. C. Martí, P. Mulet, and D. F. Yáñez. A spatial-temporal model for the evolution of the covid-19 pandemic in spain including mobility. *Mathematics*, 8(10), 2020.
- [29] F. Aràndiga, A. Baeza, and D. F. Yáñez. A new class of non-linear monotone hermite interpolants. *Advances in Computational Mathematics*, 39(2):289–309, 2013.
- [30] F. Aràndiga, A. Baeza, and D. F. Yáñez. Monotone cubic spline interpolation for functions with a strong gradient. *Applied Numerical Mathematics*, 172:591–607, 2022.
- [31] F. Aràndiga, A. Cohen, and D. F. Yáñez. Learning-based multiresolution transforms with application to image compression. *Signal Processing*, 93(9):2474–2484, 2013.
- [32] F. Aràndiga, R. Donat, L. Romani, and M. Rossini. On the reconstruction of discontinuous functions using multiquadric rbf-weno local interpolation techniques. *Mathematics and Computers in Simulation*, 176:4–24, 2020. Applied Scientific Computing XV: Innovative Modelling and Simulation in Sciences.

- [33] F. Aràndiga, P. Mulet, and V. Renau. Non-separable two-dimensional weighted eno interpolation. *Applied Numerical Mathematics*, 62(8):975–987, 2012.
- [34] F. Aràndiga and D. F. Yáñez. Generalized wavelets design using kernel methods. application to signal processing. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 250:1–15, 2013.
- [35] F. Aràndiga and D. F. Yáñez. Cell-average multiresolution based on local polynomial regression. application to image processing. *Applied Mathematics and Computation*, 245:1–16, 2014.
- [36] F. Aràndiga and D. F. Yáñez. Non-consistent cell-average multiresolution operators with application to image processing. *Applied Mathematics and Computation*, 272:208–222, 2016. Subdivision, Geometric and Algebraic Methods, Isogeometric Analysis and Refinability.
- [37] F. Aràndiga and D. F. Yáñez. Non-separable local polynomial regression cell-average multiresolution operators. application to compression of images. *Journal of the Franklin Institute*, 353(3):670–687, 2016.
- [38] F. Aràndiga and D. F. Yáñez. Third-order accurate monotone cubic hermite interpolants. *Applied Mathematics Letters*, 94:73–79, 2019.
- [39] F. Aràndiga and D. F. Yáñez. Adaptive rational interpolation for cell-average. *Applied Mathematics Letters*, 107:106393, 2020.
- [40] F. Aràndiga and D. F. Yáñez. Adaptive interpolation with maximum order close to discontinuities. *Applied Mathematics and Computation*, 418:126795, 2022.
- [41] A. Baeza, R. Bürger, P. Mulet, and D. Zorío. Weno reconstructions of unconditionally optimal high order. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 57(6):2760–2784, 2019.

- [42] A. Baeza, R. Bürger, P. Mulet, and D. Zorío. An efficient third-order weno scheme with unconditionally optimal accuracy. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(2):A1028–A1051, 2020.
- [43] A. Baeza and D. F. Yáñez. A note on some bounds between cubic spline interpolants depending on the boundary conditions: Application to a monotonicity property. *Applied Numerical Mathematics*, 181:320–325, 2022.
- [44] E.C. Barrett. *Introduction to environmental remote sensing*. Routledge, 2013.
- [45] R. Bürger, G. Chowell, P. Mulet, and L. M. Villada. Modelling the spatial-temporal progression of the 2009 a/h1n1 influenza pandemic in chile. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 13(1):43–65, 2016.
- [46] S. Carrato and G. Ramponi. Image processing using rational functions. *Proc. Fourth IEEE Intern. Conf. on Image Processing*, 97:26–29, 1997.
- [47] G. Chaikin. An algorithm for high speed curve generation. *Computer graphics and Image Processing*, 3:346–349, 1974.
- [48] C. Conti and S. López-Ureña. Non-oscillatory butterfly-type interpolation on triangular meshes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, page 114788, 2022.
- [49] C. de Boor. *A practical guide to splines*. Springer-Verlag, 2001.
- [50] C. de Boor and B. Swartz. Piecewise monotone interpolation. *Journal of Approximation Theory*, (21), 1977.
- [51] T. DeRose, M. Kass, and T. Truong. Subdivision surfaces in character animation. In *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '98, page 85–94, New York, NY, USA, 1998. Association for Computing Machinery.

- [52] G. Deslauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. constructive approximation. *Constructive Approximation*, 5:49–68, 1989.
- [53] P. D. Diago, J. A. González-Calero, and D. F. Yáñez. Exploring the development of mental rotation and computational skills in elementary students through educational robotics. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 32:100388, 2022.
- [54] P. D. Diago, D. F. Yáñez, and D. Arnau. Relations between complexity and difficulty on repeating-pattern tasks in early childhood (relaciones entre complejidad y dificultad en tareas con patrones reiterativos en la primera infancia). *Journal for the Study of Education and Development*, 45(2):311–350, 2022.
- [55] R. Donat and D. F. Yáñez. A nonlinear chaikin-based binary subdivision scheme. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 349:379–389, 2019.
- [56] D. L. Donoho, N. Dyn, D. Levin, and T. P.Y Yu. Smooth multiwavelet duals of alpert bases by moment-interpolating refinement. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 9(2):166–203, 2000.
- [57] N. Dyn, A. Heard, K. Hormann, and N. Sharon. Univariate subdivision schemes for noisy data with geometric applications. *Computer Aided Geometric Design*, 37:85–104, 2015.
- [58] N. Dyn and D. Levin. Subdivision schemes in geometric modelling. *Acta Numerica*, pages 73–144, 2002.
- [59] A. Harten. Multiresolution representation of data: A general framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(3):1205–1256, 1996.
- [60] A. Harten and S. Osher. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. i. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(2):279–309, 1987.

- [61] T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman. *The Elements of Statistical Learning*. Springer Series, 2009.
- [62] I. Jiménez, P. Ortiz, J. Ruiz, J.C. Trillo, and D.F. Yáñez. Improving the stability bound for the pph nonlinear subdivision scheme for data coming from strictly convex functions. *Applied Mathematics and Computation*, 399:126042, 2021.
- [63] W.O. Kermack and A.G. McKendrick. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. A*, 115:700–721, 1927.
- [64] Z. Kui, J. Baccou, and J. Liandrat. On the construction of multiresolution analyses associated to general subdivision schemes. *Mathematics of Computation*, 90:2185–22087, 2021.
- [65] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, 115(1):200 – 212, 1994.
- [66] G. Mustafa, H. Li, J. Zhang, and J. Deng.  $l^1$ -regression based subdivision schemes for noisy data. *Computer-Aided Design*, 58:189–199, 2015. Solid and Physical Modeling 2014.
- [67] G. Ramponi. Image processing using rational functions. *Proc. Second IEEE Intern. Conf. on Image Processing*, 95:22–25, 1995.
- [68] C.-W. Shu. *High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics*, pages 439–582. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [69] H. Speleers. Hierarchical spline spaces: quasi-interpolants and local approximation estimates. *Advances in Computational Mathematics*, 43:235–255, 2017.