Real Academia de Ciencias
Exactas • Físicas • Naturales

ESTALMAT
COMUNITAT VALENCIANA

XI SEMINARIO SOBRE ACTIVIDADES PARA ESTIMULAR EL TALENTO PRECOZ EN MATEMÁTICAS.

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE ECONOMÍA, INDUSTRIA Y COMPETITIVIDAD
FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

Valencia 2-4 de marzo de 2018

PROPORCIONES Y ROSETONES

EsTalMat
Castilla y León

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática
Valladolid

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

OBJETIVOS/ ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

- Ampliar la formación matemática con temas extracurriculares.
- Observar la presencia de las matemáticas en el entorno.
- Identificar los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en diseños cotidianos y en obras de arte.
- Fomentar la creatividad del alumnado.
- Favorecer el trabajo cooperativo.
- Identificar centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, en el arte y en construcciones humanas.
- Saber valorar el Patrimonio artístico y arquitectónico.
- .....

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

PROPORCIÓN $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \in \mathbb{R},\ b,d \neq 0$

Proporción racional, conmensurable o estática si: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Proporción irracional, inconmensurable o dinámica si: $\frac{a}{b} \in I$

ESTÁTICAS		DINÁMICAS	
Cuadrada	$\frac{a}{b}=1$	Raíz de dos	$\frac{a}{b}=\sqrt{2}$
Dupla	$\frac{a}{b}=2$	Raíz de tres	$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$
Sesquiáltera	$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$	Áurea	$\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Sesquitercia	$\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$	Plata	$\frac{a}{b}=1+\sqrt{2}$
Pentatercia	$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$	Bronce	$\frac{a}{b}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$
Etc.		Etc.	

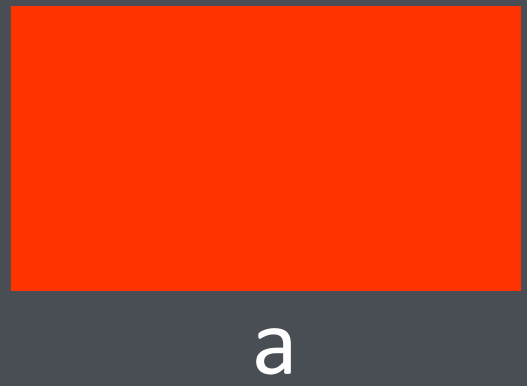
Otras: Cordobesa, Plástica, Platino...

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

PROPORCIÓN EN UN RECTÁNGULO

Definición: Dado un rectángulo de lados a y b, se define la proporción del rectángulo como

$$p(a,b) = \frac{max(a,b)}{min(a,b)}$$



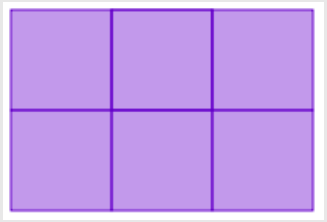
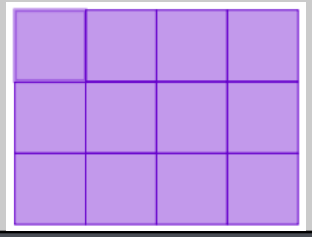
Propiedades de la proporción de un rectángulo

(1) $p(a,b) \geq 1$ y $p(a,b) = 1$ corresponde al cuadrado.

(2) $p(\lambda a, \lambda b) = p(a,b)$, $\lambda > 0$, es decir, la proporción en un rectángulo es invariante por homotecias y semejanzas.

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

RECTÁNGULOS ESTÁTICOS $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

CUADRADO	$\frac{a}{b} = 1$	
DUPLO	$\frac{a}{b} = 2$	
SESQUIÁLTERO	$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$	
SESQUITERCIO	$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

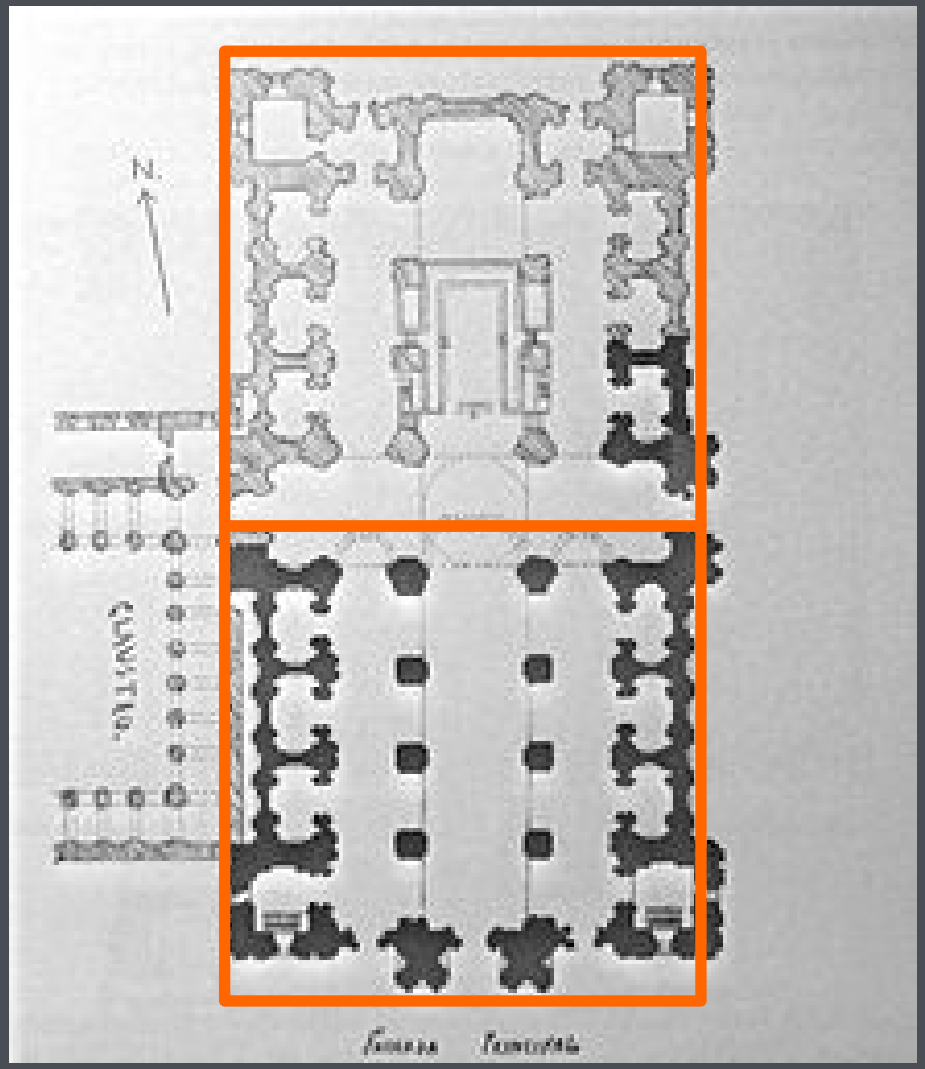
PROPORCIONES EN LA CATEDRAL DE VALLADOLID

Catedral de Valladolid. S. XVI. Juan de Herrera

Los alumnos deben traer imágenes de su entorno
para analizar sus proporciones mediante Geogebra

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

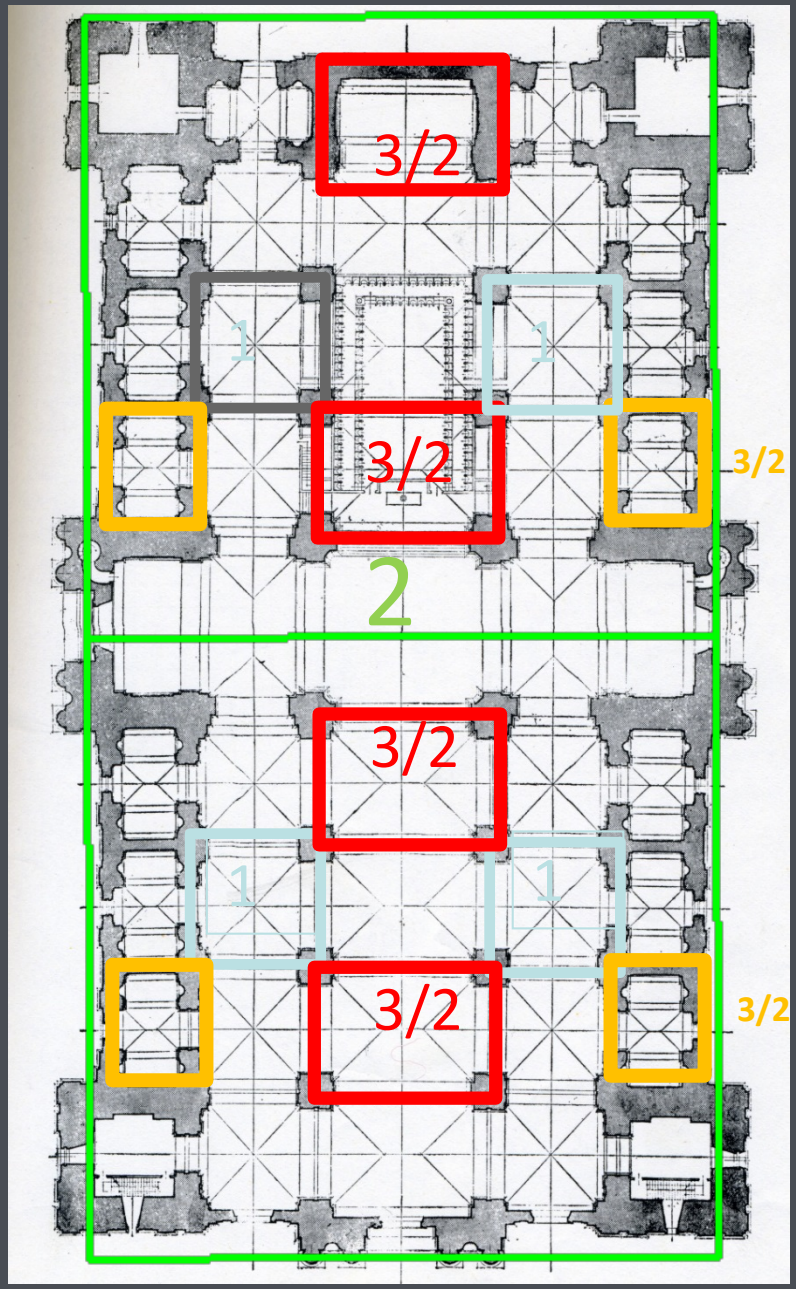
Plantas original y actual de la Catedral de Valladolid



Plano de Juan de Herrera

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

PROPORCIONES Y ROSETONES



PLANTA DE LA CATEDRAL DE VALLADOLID, SEGÚN PLANOS DE JUAN DE HERRERA

Proporción dupla en la planta.

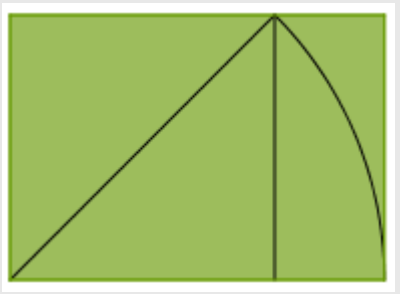
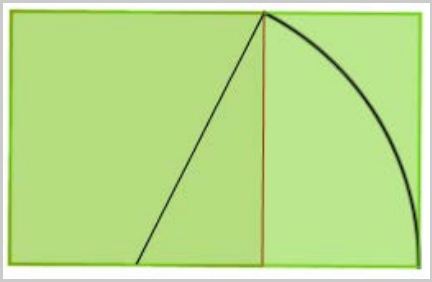
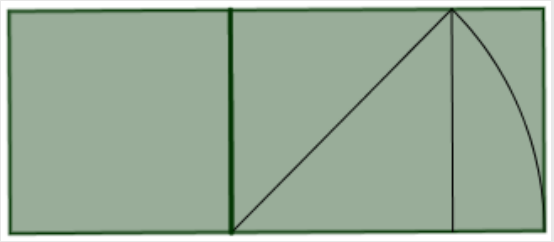
Proporción sesquiáltera en los tramos de la nave central.

Proporción cuadrada en los tramos de las naves laterales.

Proporción sesquiáltera en las capillas hornacinas.

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

RECTÁNGULOS DINÁMICOS $\frac{a}{b} \in I$

RAÍZ DE DOS	$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$	
ÁUREO	$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
PLATA	$\frac{a}{b} = 1+\sqrt{2}$	

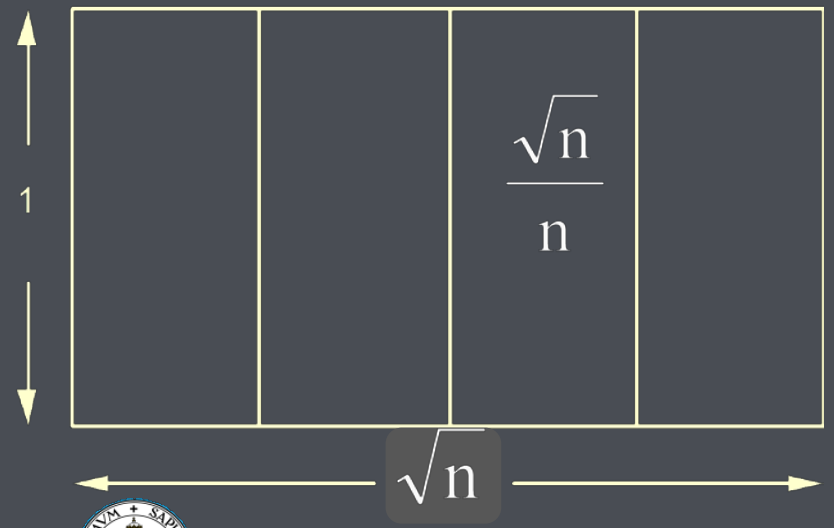
Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

RECTÁNGULOS DINÁMICOS $\sqrt{n}$

Los rectángulos en proporción $\sqrt{n}$ pueden descomponerse en n rectángulos con la misma proporción $\sqrt{n}$.

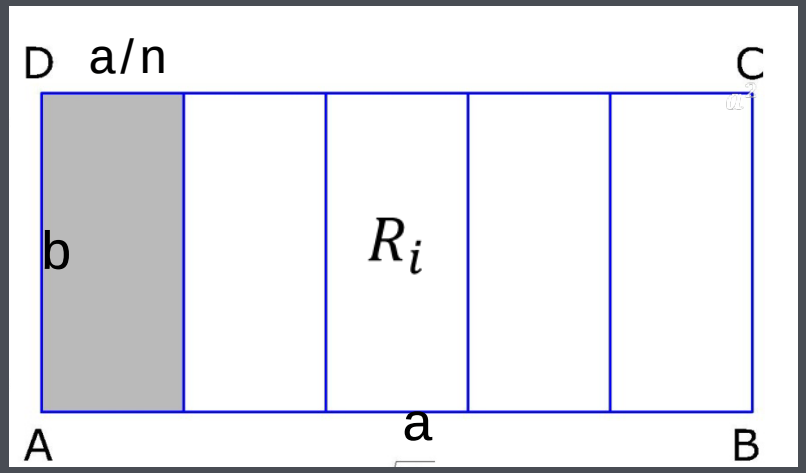
Al dividir el lado mayor del rectángulo en proporción $\sqrt{n}$ en partes iguales resultan n rectángulos de lados 1 y $\frac{\sqrt{n}}{n}$

$$p\left(1,\frac{\sqrt{n}}{n}\right)=\frac{\max\left(1,\frac{\sqrt{n}}{n}\right)}{\min\left(1,\frac{\sqrt{n}}{n}\right)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{n}}=\sqrt{n}$$



Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

Si un rectángulo R de dimensiones a y b (a>b) se puede subdividir en n rectángulos congruentes y con la misma proporción del rectángulo inicial, entonces la proporción de R debe ser $\sqrt{n}$.



$$p(R)=\frac{a}{b}$$

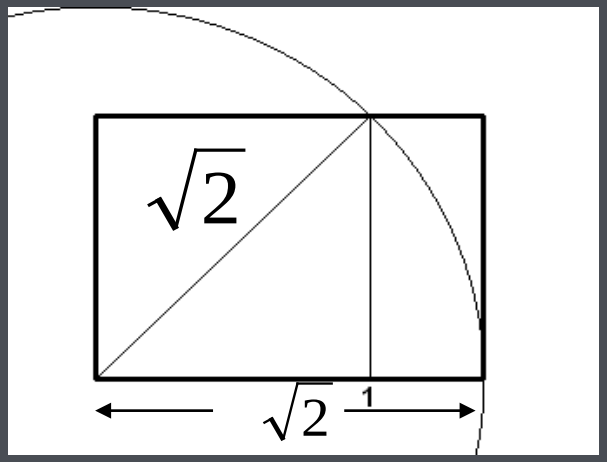
$$p(R_i)=\frac{\frac{b}{a}}{n}=\frac{nb}{a}=p(R)=\frac{a}{b}$$

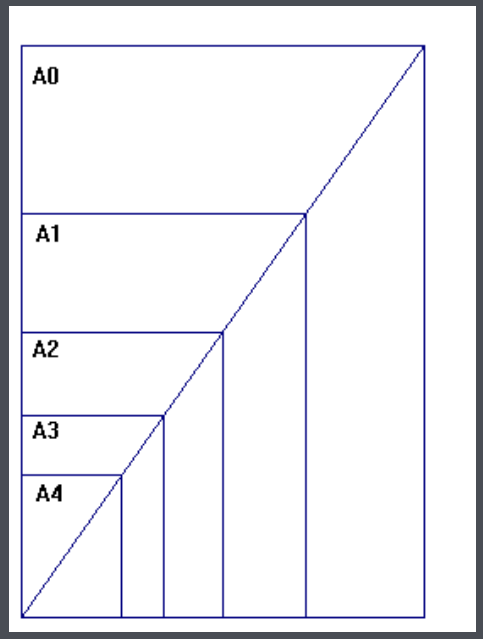
$$a^2=nb^2$$

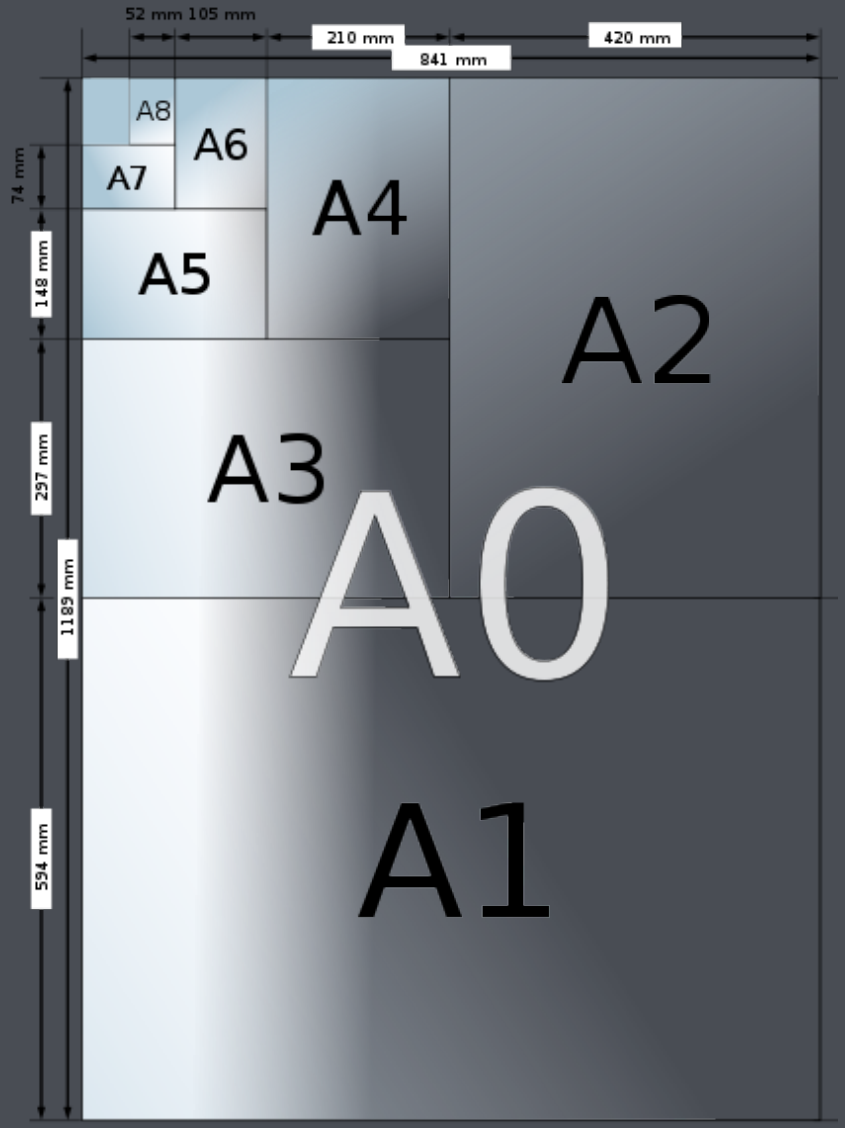
$$\frac{a}{b}=\sqrt{n}$$

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

PROPORCIÓN √2 Y FORMATOS DIN







Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

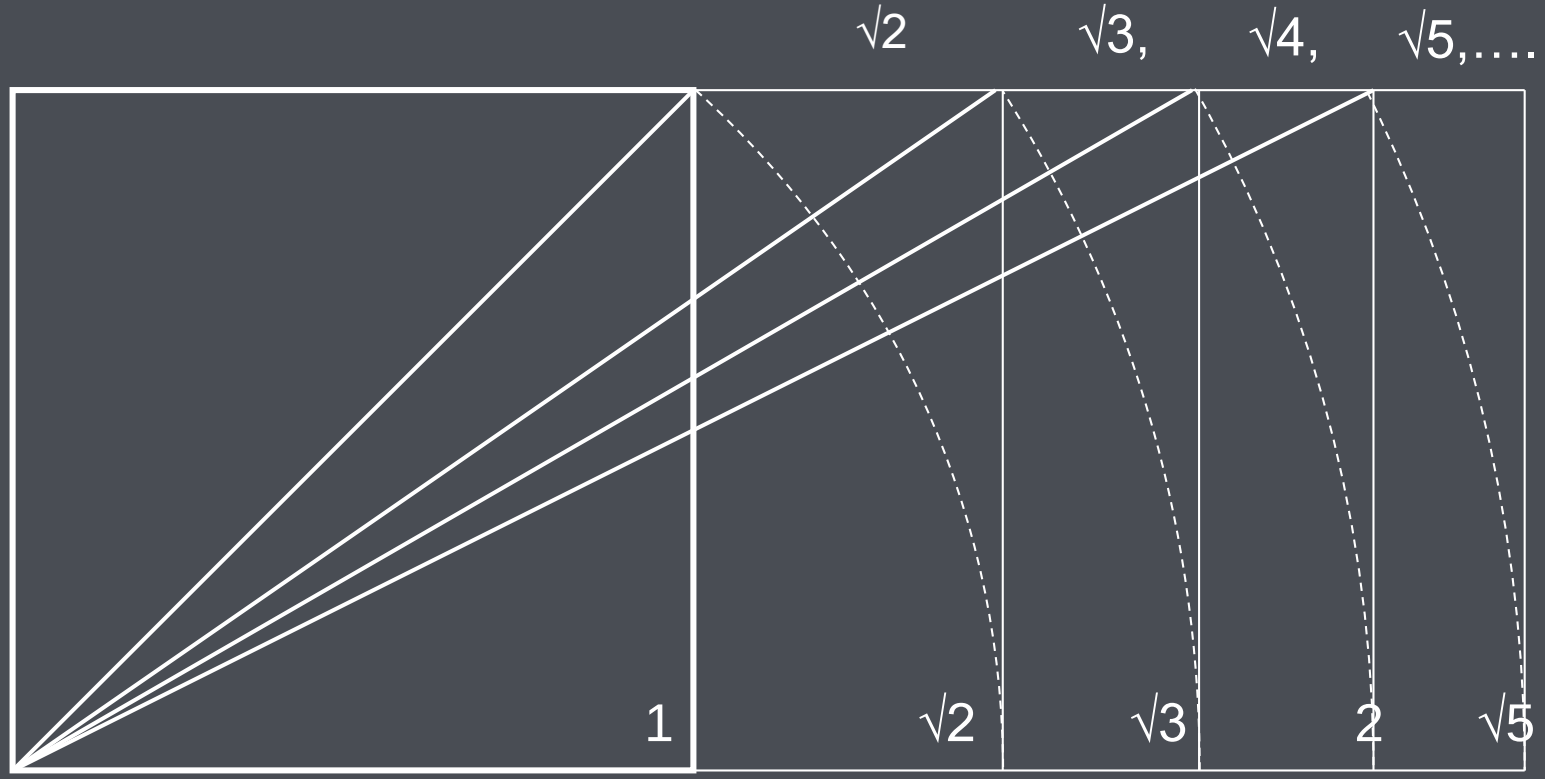
PROPORCIÓN $\sqrt{2}$ Y FORMATOS DIN

FORMATO	DIMENSIONES APROX. (mm)	PROPORCIÓN
A0	1189×841	$\sqrt{2}:1=\sqrt{2}$
A1	841×594	$1:\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$
A2	594×420	$\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{2}$
A3	420×297	$\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$
A4	**297×210**	$\frac{\sqrt{2}}{4}:\frac{1}{4}=\sqrt{2}$
A5	210×148	$\frac{1}{4}:\frac{\sqrt{2}}{8}=\sqrt{2}$

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

RECTÁNGULOS DINÁMICOS EN PROPORCIÓN √n

Partiendo del cuadrado y de su diagonal se origina un rectángulo de lado √2. Después el raíz de tres, etc.



Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

RECTÁNGULO ÁUREO

Un rectángulo R es áureo si:

$$p(R) = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Medidas del DNI 8,5 x 5,3

Proporción aprox. 1,6037

El rectángulo áureo es el único en el cual la prolongación de una diagonal contiene el vértice del mismo rectángulo adyacente colocado verticalmente al lado.

Triángulos semejantes

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

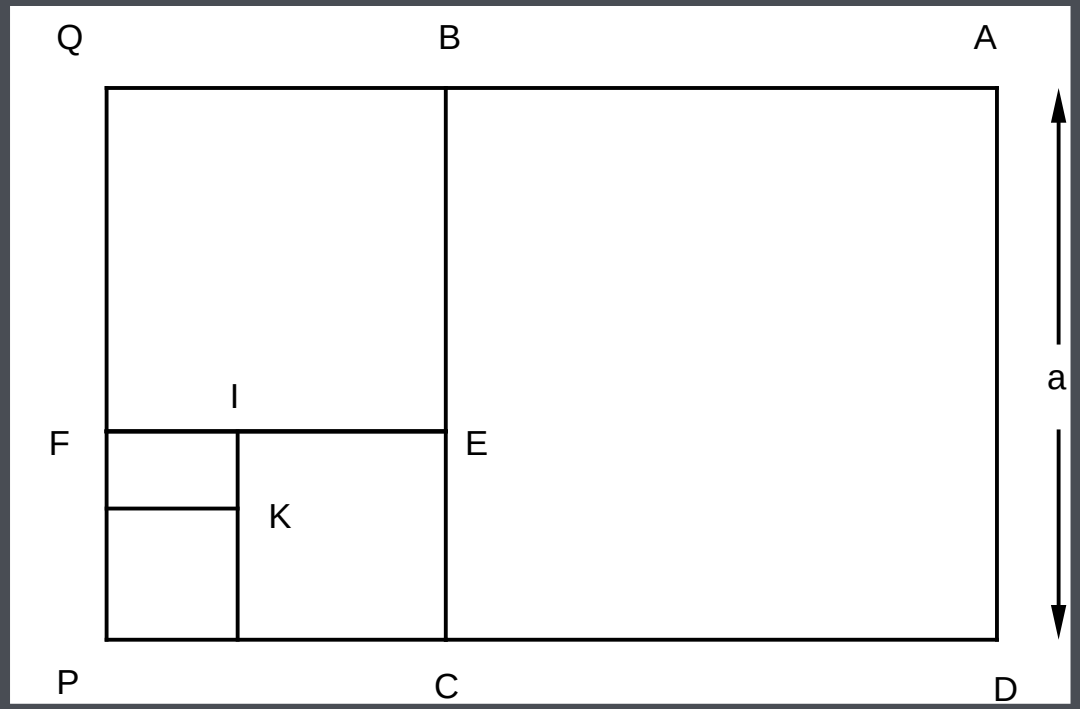
Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

DESCOMPOSICIÓN DE UN RECTÁNGULO ÁUREO

A partir de un rectángulo áureo se puede obtener una sucesión decreciente de rectángulos en proporción áurea:
El rectángulo BQPC también es áureo. Basta observar que:

$$\frac{QP}{CP} = \frac{a}{a\phi - a} = \frac{1}{\phi - 1} = \phi$$

$$\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \phi(\phi - 1) = 1$$



Taza gigante volante con anexo inexplicable de cinco metros de longitud.

(1944-1945)

Salvador Dalí

(1904-1989)

Con Geogebra

50 x 31 cm

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

Las dimensiones del óleo son $\mathbf{a_1 = 50\ cm}$ y $\mathbf{a_2 = 31\ cm}$,

Por tanto, la proporción del rectángulo es $50/31 \approx 1.613$

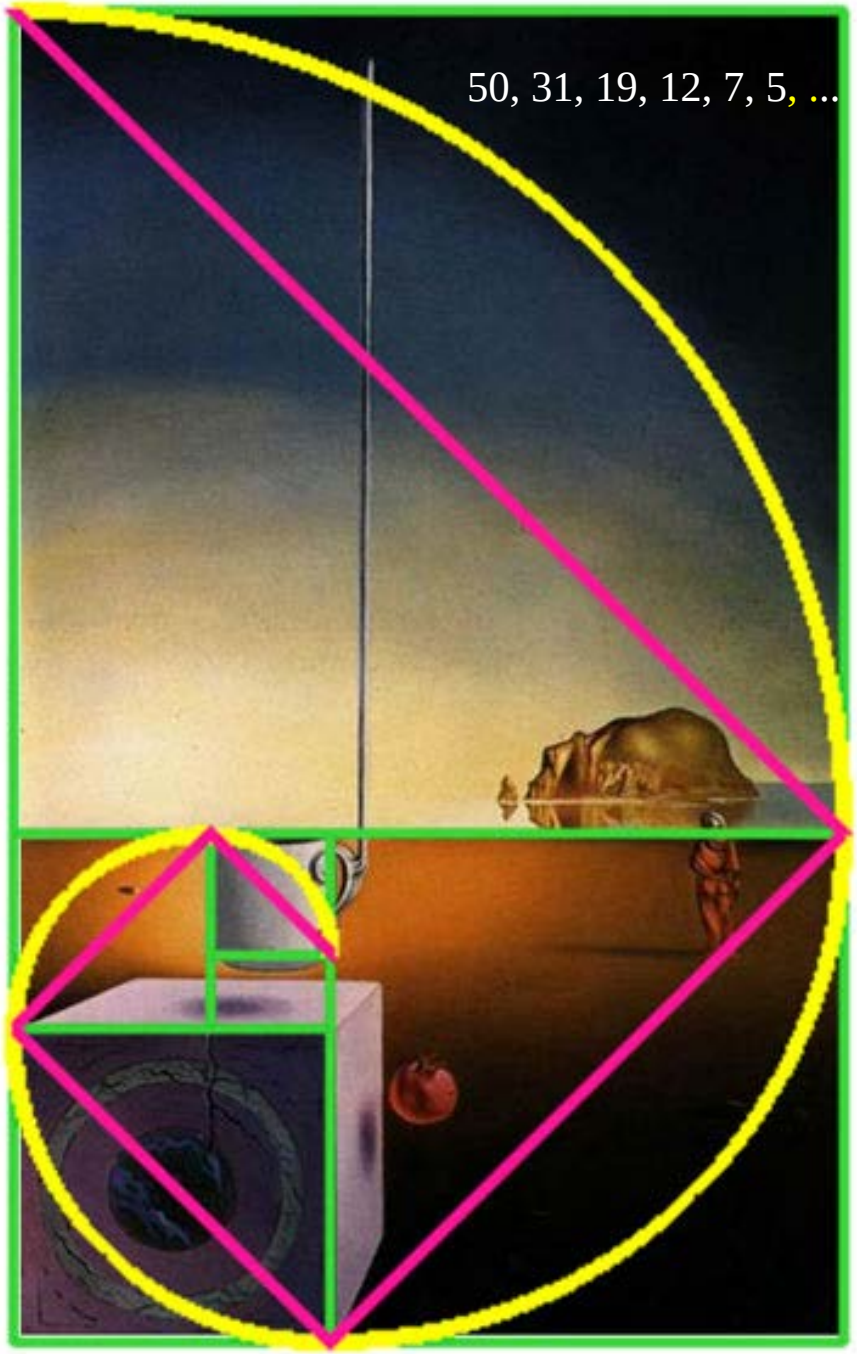
que es aproximadamente el **número de oro.**

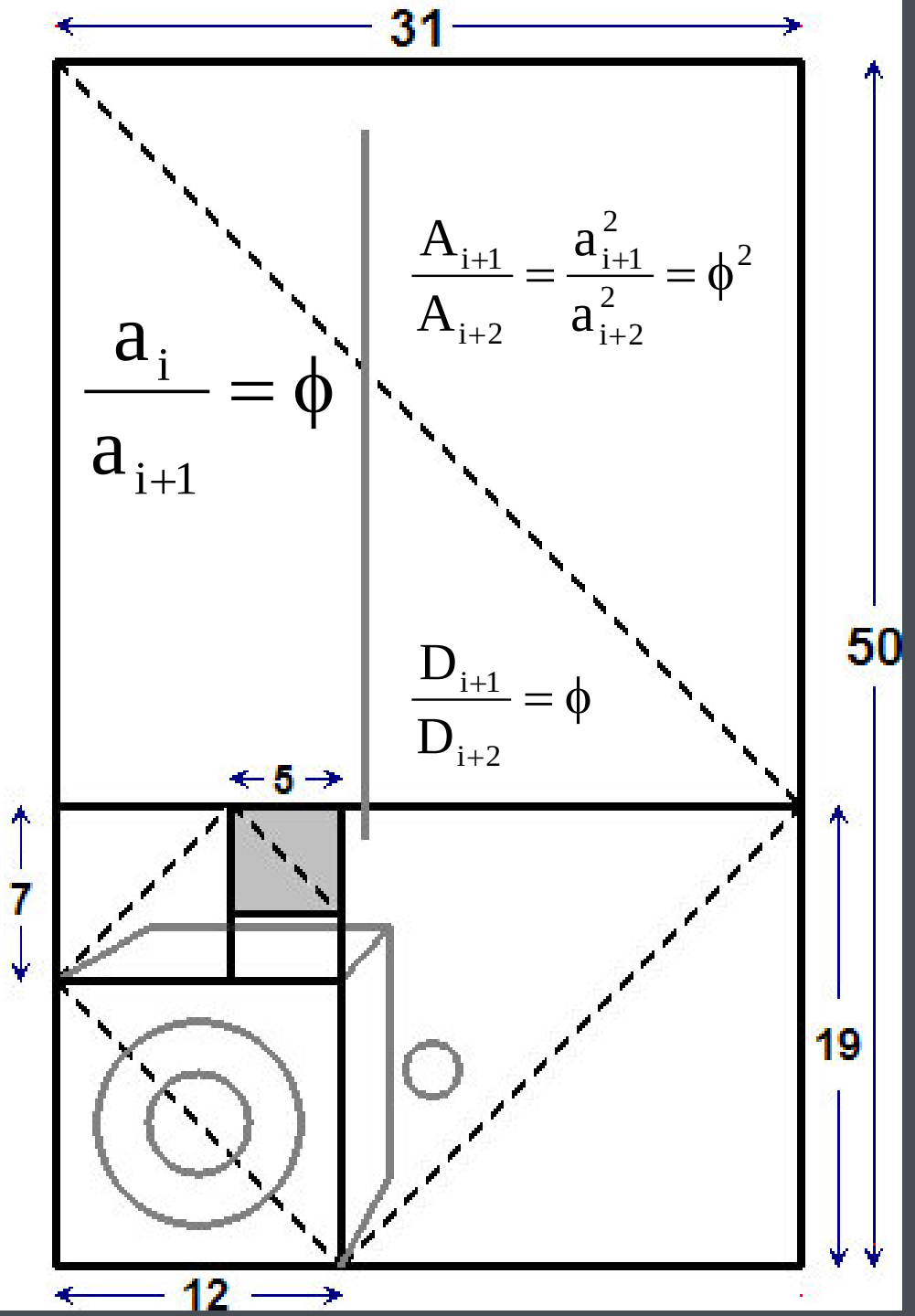
La línea del horizonte divide al óleo en un cuadrado de lado $l_2 = \mathbf{31\ cm}$ y un rectángulo de dimensiones $\mathbf{a_2}$ y $\mathbf{a_3 = a_1 - a_2 = 50 - 31 = 19\ cm}$. Su proporción es:

$$31/19 \approx 1.63 \approx \phi$$

El lado del cubo divide al anterior rectángulo áureo en otro cuadrado de lado $\mathbf{a_3 = 19\ cm}$ y un rectángulo áureo de dimensiones $\mathbf{a_3 = 19\ cm}$ y $\mathbf{a_4 = a_2 - a_3 = 31 - 19 = 12\ cm.}$

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

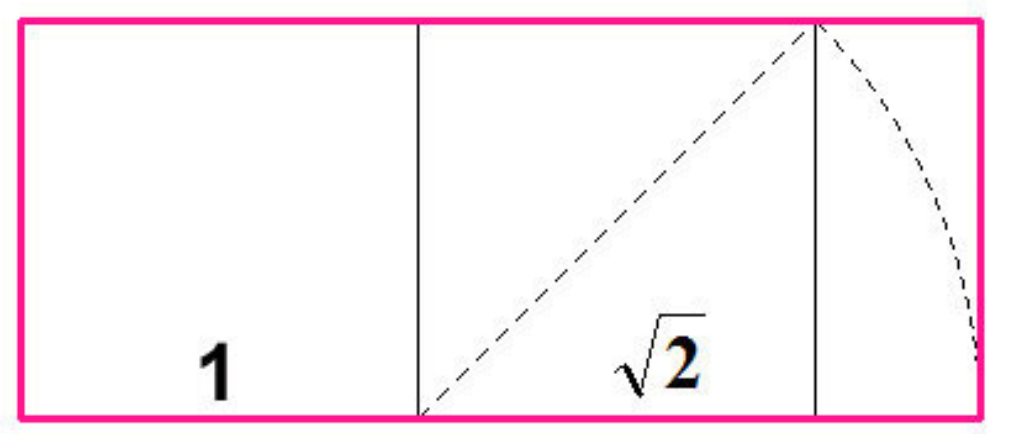

50, 31, 19, 12, 7, 5, ...


31
50
19
12
7
5
$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \phi$
$\frac{A_{i+1}}{A_{i+2}} = \frac{a_{i+1}^2}{a_{i+2}^2} = \phi^2$
$\frac{D_{i+1}}{D_{i+2}} = \phi$

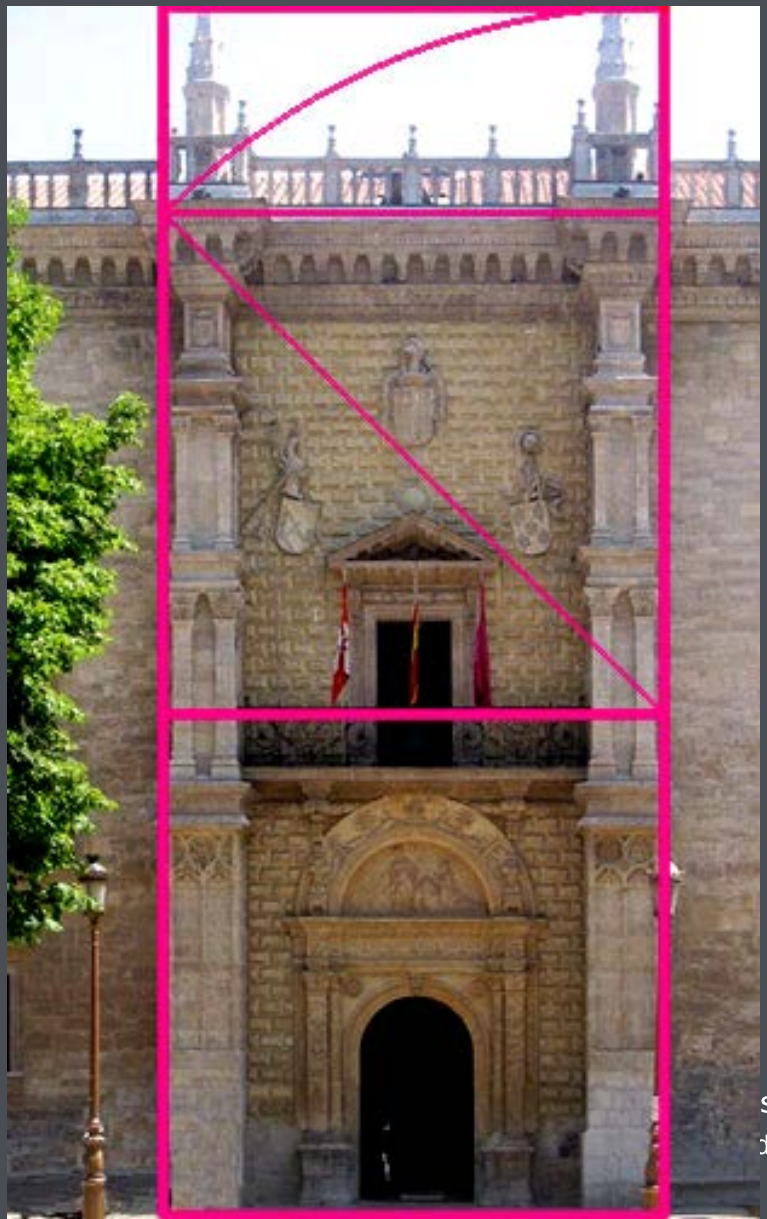
PROPORCIÓN DE PLATA

PALACIO DE SANTA CRUZ. VALLADOLID

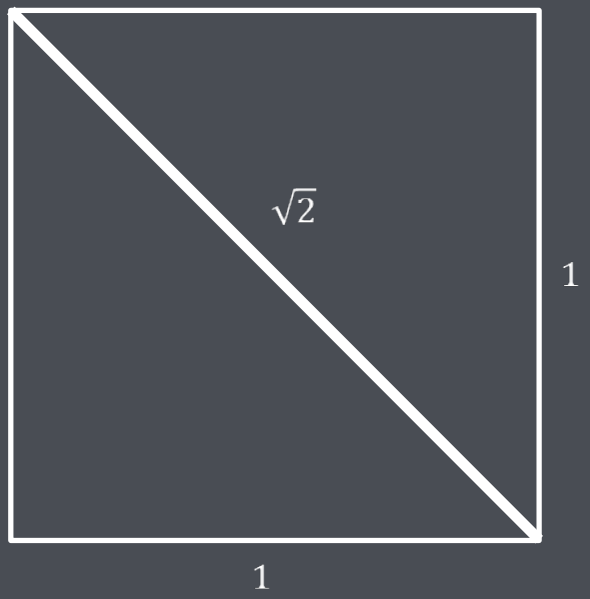
Los dos cuadrados contenidos en el rectángulo de plata determinan la colocación del balcón y de la balaustrada superior que remata la cornisa.

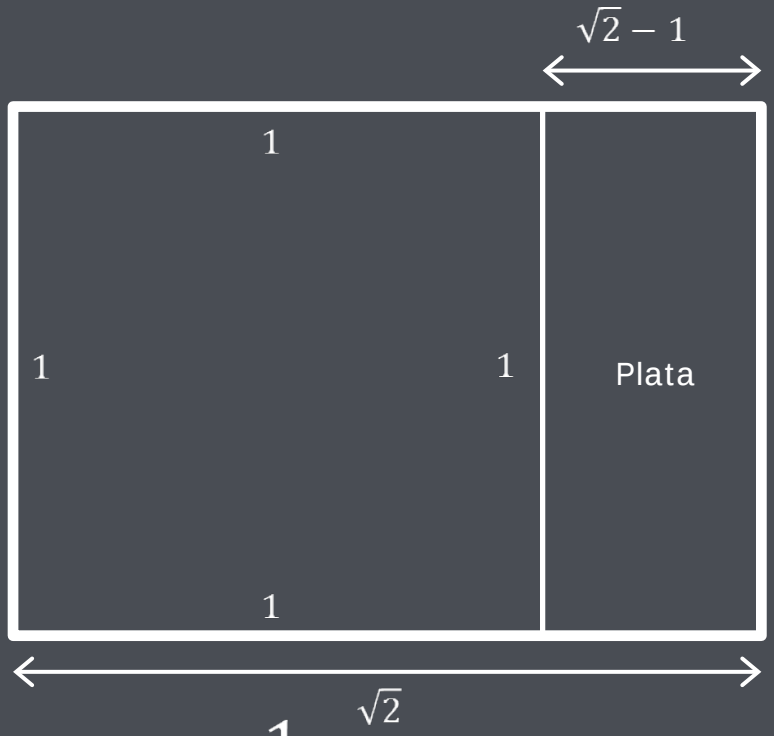


$$\theta = 1 + \sqrt{2}$$



PROPORCIÓN $\sqrt{2}$ Y RECTÁNGULO DE PLATA

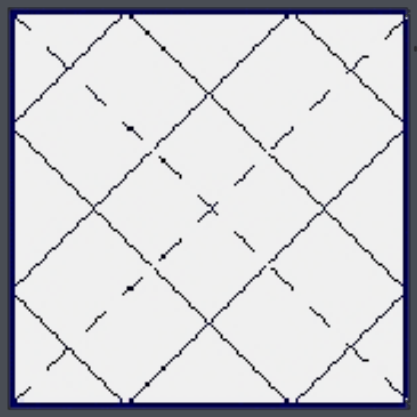


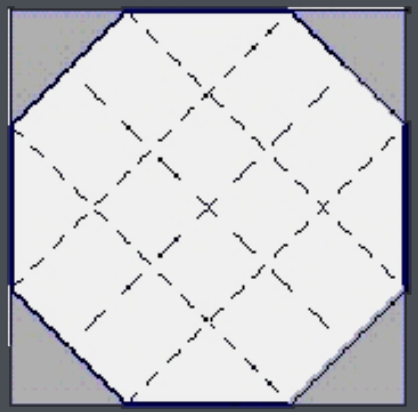


$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2} = \theta$$

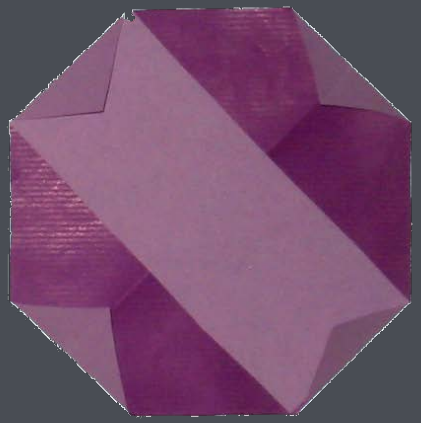
Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

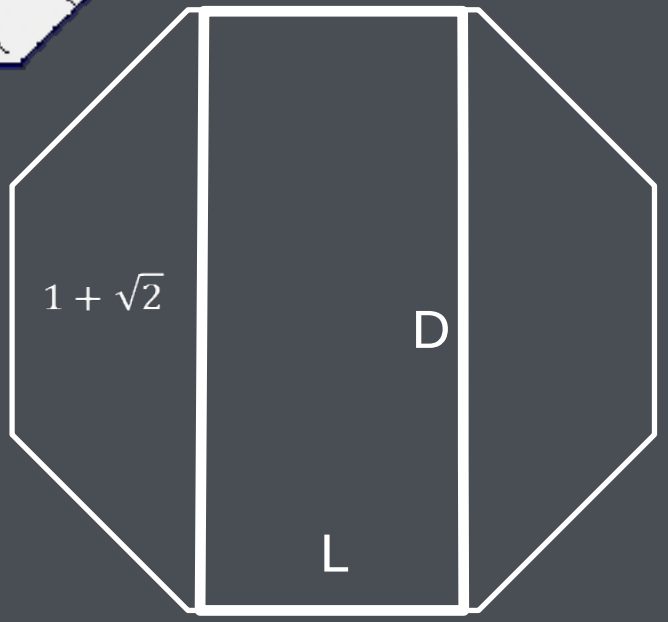
CONSTRUCCIÓN DE UN OCTÓGONO A PARTIR DE UN DIN A





$$\theta = 1 + \sqrt{2}$$



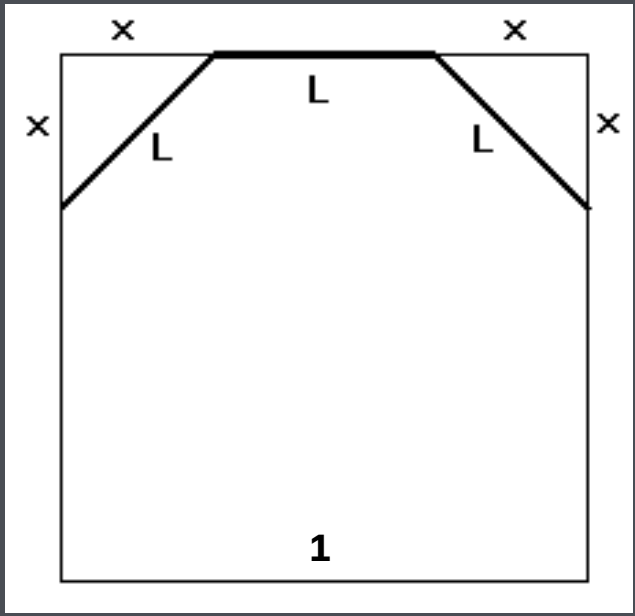


Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

COMPROBACIÓN DE LA REGULARIDAD DEL OCTÓGONO

Consideramos un cuadrado de lado uno.

$L = \sqrt{2} - 1$ es la medida del lado del octógono regular inscrito en un cuadrado de lado una unidad.



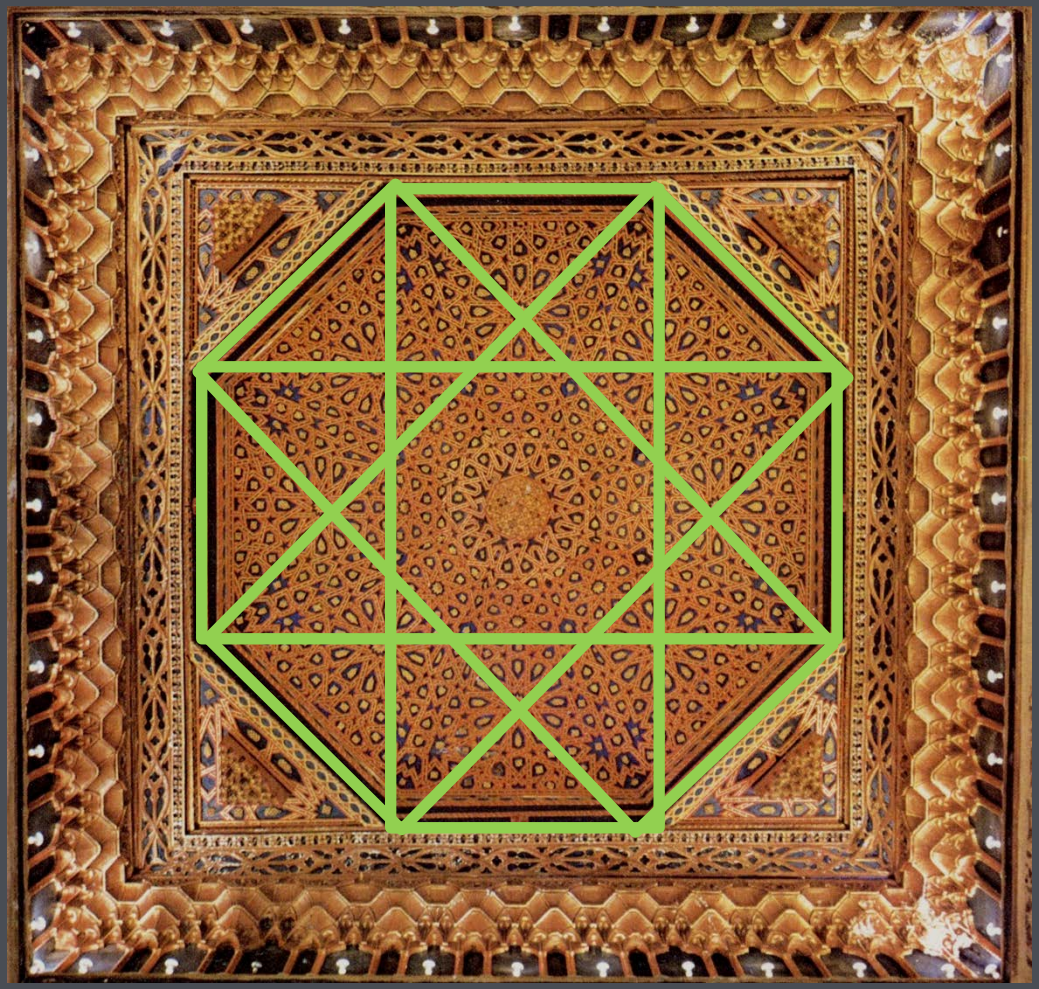
$$\left.\begin{array}{l} 2x + L = 1 \\ L^2 = 2x^2 \end{array}\right\} \quad x = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{2} + 1)L = 1$$

$$L = \sqrt{2} - 1$$

El octógono es equiángulo por ser rectángulos e isóceles los triángulos en los vértices del cuadrado

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid



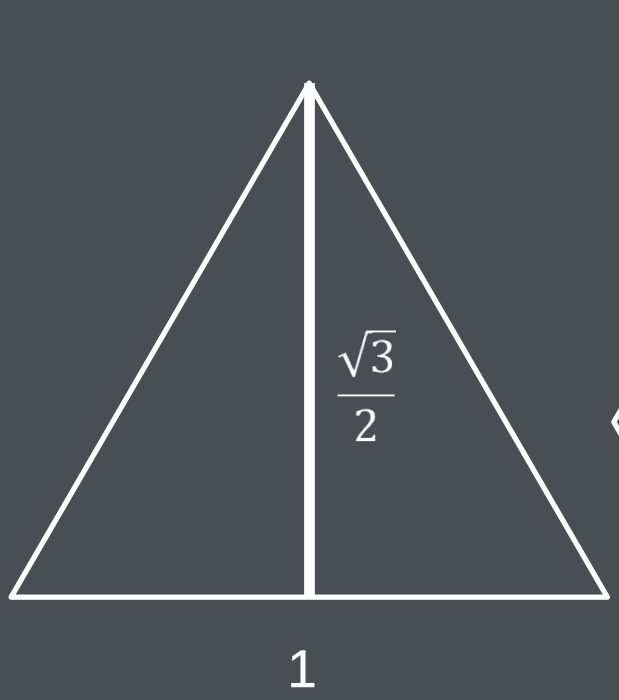
Cúpula de la Sala del Trono del Alcázar de Segovia

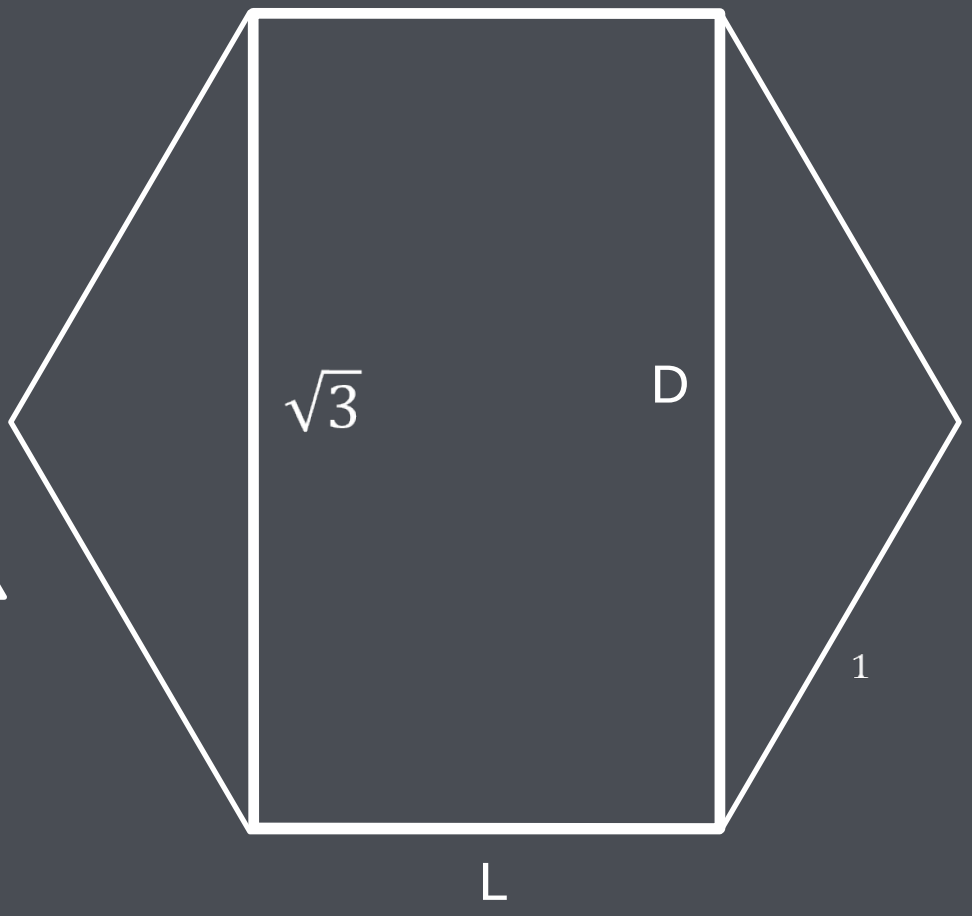
Octógono y cuadrado

Museo del Palacio de Santa Cruz Valladolid

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

PROPORCIÓN $\sqrt{3}$ y RECTÁNGULO $\sqrt{3}$

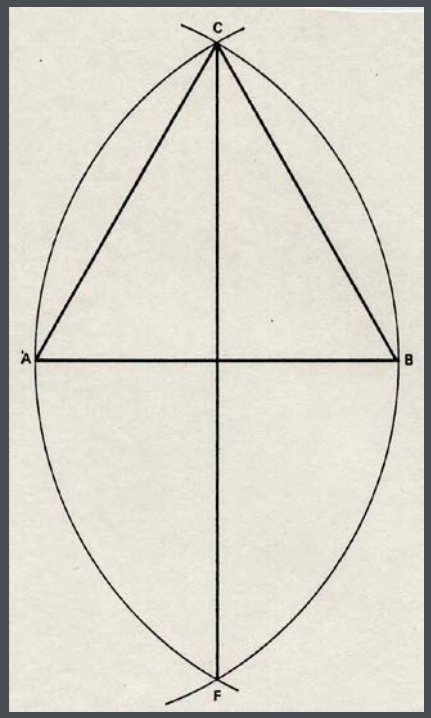




Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

VESICA PISCIS: PROPORCIÓN $\sqrt{3}$

Pantocrátor en Cripta San Isidoro de León



Pantocrátor en la Iglesia románica de Santo Domingo de Soria

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

Catedral Vieja de Salamanca

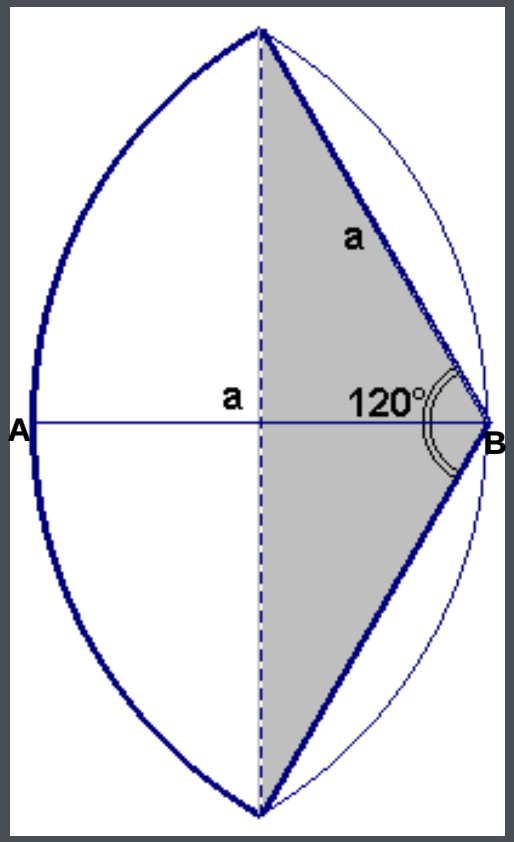
Iglesia San Justo Segovia

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

ÁREA Y LONGITUD DE UNA VESICA PISCIS

El **área de la *vesica piscis*** es el doble del área que se obtiene al restar el área del triángulo del área del sector circular de radio **a** (longitud del segmento AB) y ángulo 120°.

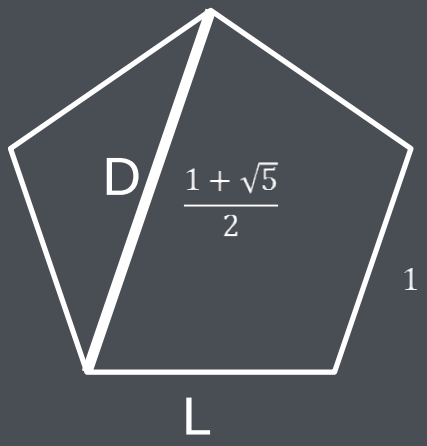
Área *vesica piscis* = 2 (Área sector - Área del triángulo)

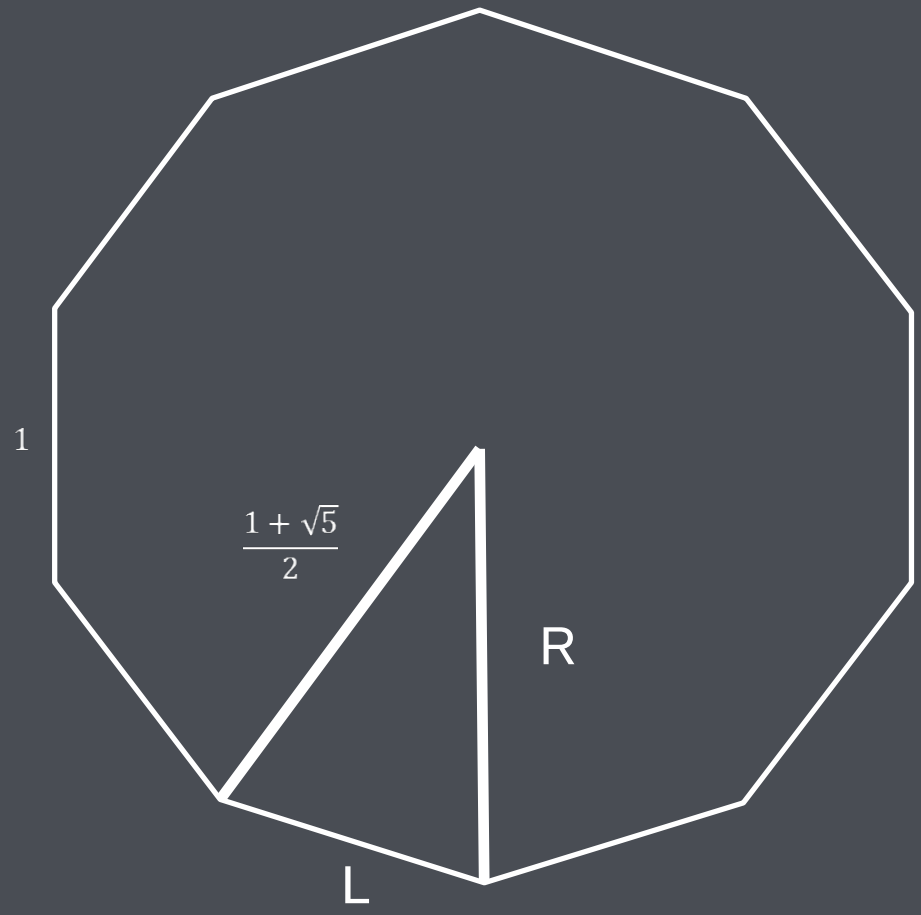


La **longitud de la *vesica piscis*** es el doble de la longitud del arco circular de radio **a** y ángulo 120°.

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

PROPORCIÓN ÁUREA

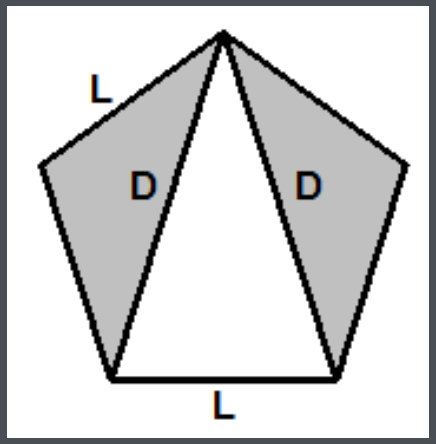




$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

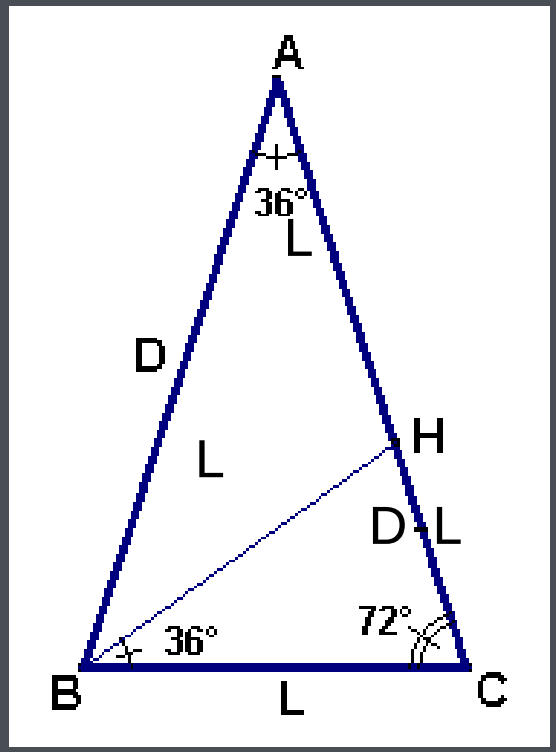
Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

TRIÁNGULO SUBLIME: isósceles de ángulo desigual 36º



Sea ABC un triángulo sublime, la bisectriz del ángulo en el vértice B corta al lado AC en un punto H.

El triángulo HBC semejante al inicial, ya que sus ángulos miden 36º, 72º y 72º.



El triángulo BHA es isósceles por tener dos ángulos iguales de 36 grados. Por tanto, se verifica:

$$\overline{AB} = D \quad y \quad \overline{BC} = L \qquad \overline{HC} = D - L$$

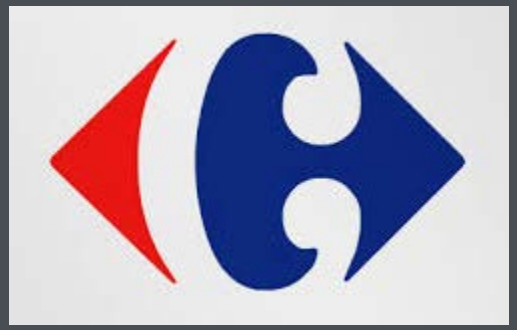
$$\frac{D}{L} = \frac{L}{D-L} \Rightarrow D^2 - DL - L^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{D}{L}\right)^2 - \frac{D}{L} - 1 = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{D}{L} = \Phi$$

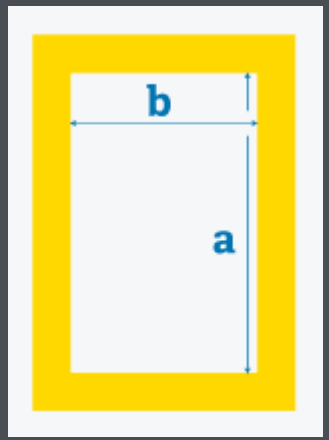
Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

LOGOTIPOS-LOGOS-MARCAS-IMÁGENES CORPORATIVAS-SÍMBOLOS- DISEÑO GRÁFICO

Buscar logotipos en la calle, en la prensa, en la tele, en los anuncios, en internet, etc. para analizar sus elementos geométricos y su proporción.

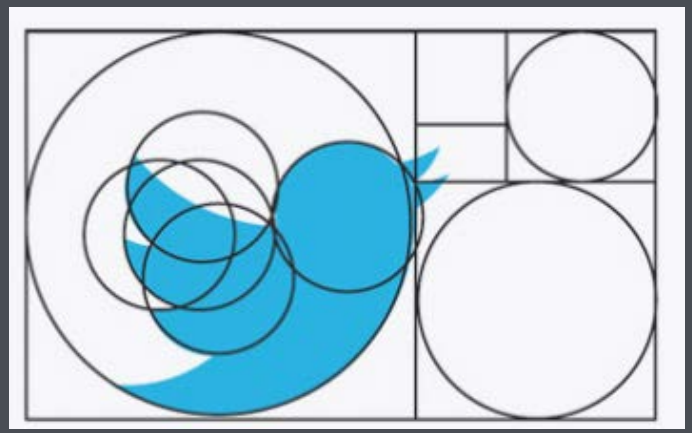
Crea tu propio logo

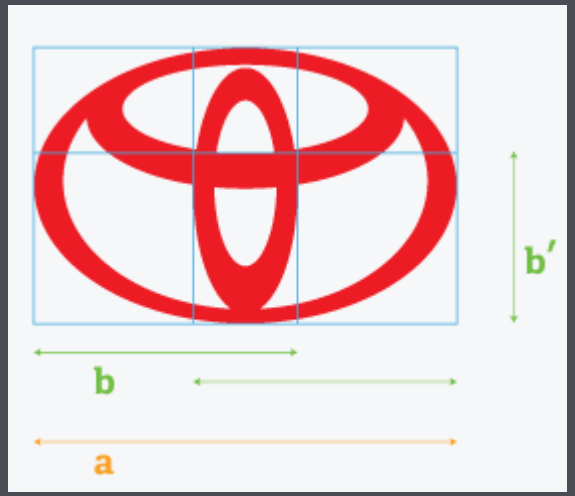




Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

PROPORCIONES Y ROSETONES

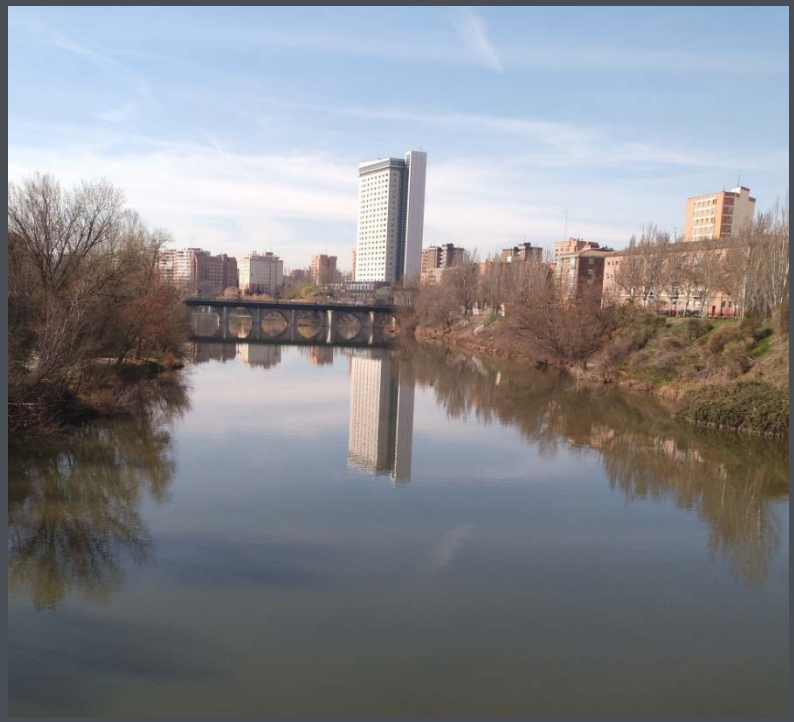




Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

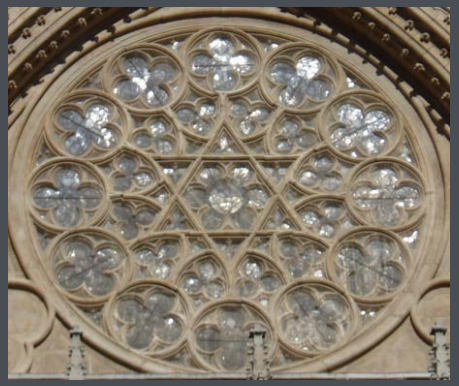
SIMETRÍAS

Puente de Piedra, s.XIII. Zamora



Puente sobre el Pisuerga. Valladolid

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid



Griego: συμμετρία

“ La simetría es una idea por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección”.

“La belleza está estrechamente relacionada con la simetría”

Hermann WEYL (1885-1955)

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

El arquitecto y teórico del arte francés Viollet-Le-Duc (1824-1879) recoge, en su *Diccionario de Arquitectura*, una nueva conceptualización de la simetría :

"… simetría significa hoy, en lenguaje de los arquitectos, no un equilibrio ni una relación armoniosa de las partes con el todo, sino una similitud de partes opuestas, la reproducción exacta, a la izquierda de un eje, de lo que hay a la derecha."

Actualmente se manejan, además de la simetría bilateral, otros conceptos como: simetría rotacional, cilíndrica, espacial, especular, por similitud (fractales), espiral o helicoidal, de traslación, etc.

(I. Hargittai y M. Hargittai).

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

GRUPO DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA PLANA

Una figura plana **F** puede ser estudiada estáticamente, por ejemplo: perímetro, área, curvatura …. o, como sugirió el matemático Félix Klein (1849-1925), desde un punto de vista dinámico, es decir, estableciendo el conjunto de movimientos que la dejan invariante.

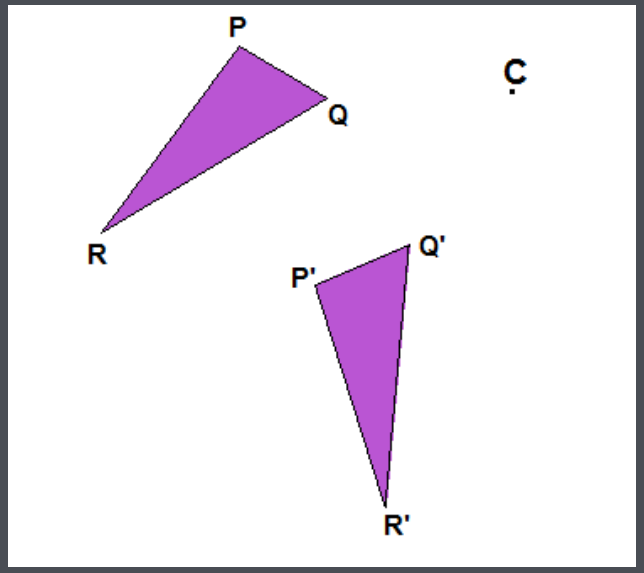
Se llama **Grupo de Simetría de una figura plana F al conjunto de movimientos del plano que la dejan invariante.**

Se denota por **S(F)**.

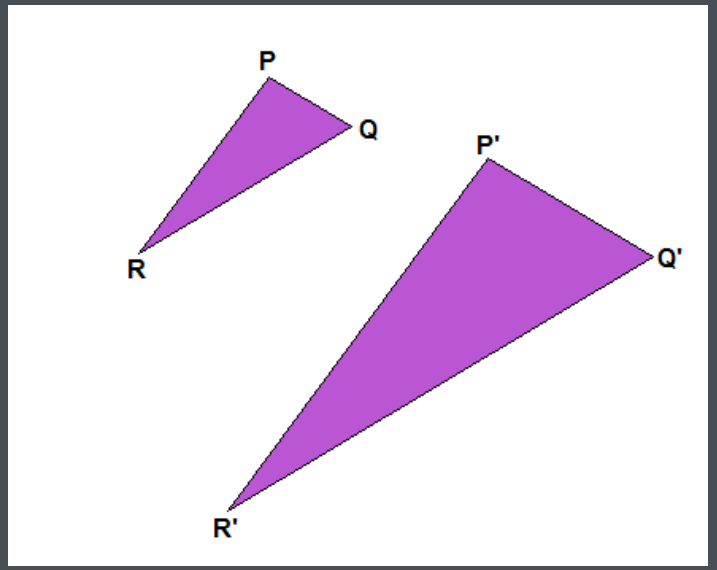
Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

Un movimiento del plano euclídeo es una transformación T del plano en si mismo que conserva las distancias, es decir dados dos puntos P y Q,la distancia de $T(P)$ a $T(Q)$ coincide con la distancia de P a Q.

Un movimiento conserva forma y tamaño de las figuras



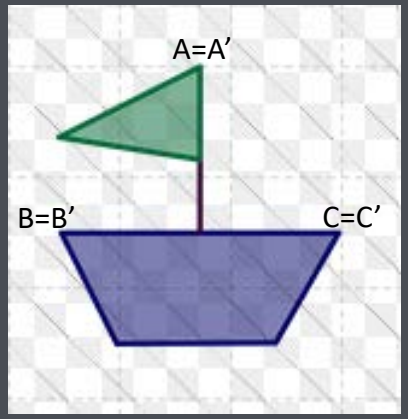
Movimiento



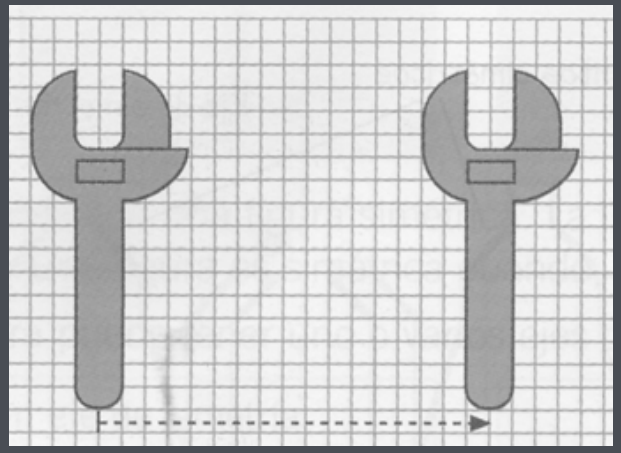
No Movimiento

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

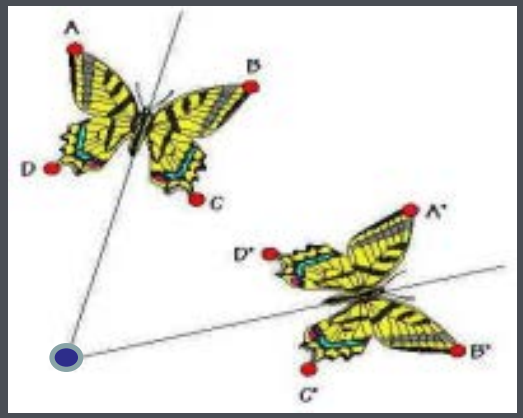
LOS CINCO MOVIMIENTOS DEL PLANO



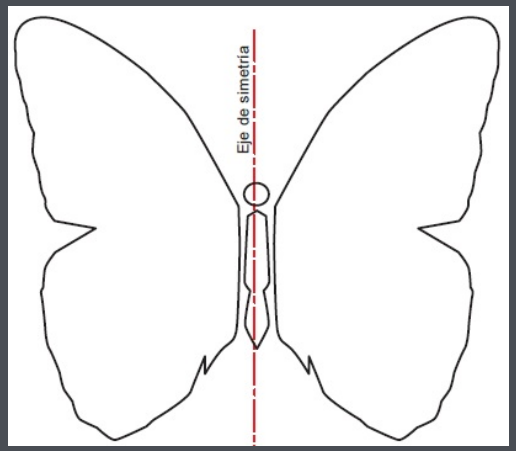
Identidad



Traslación



Giro



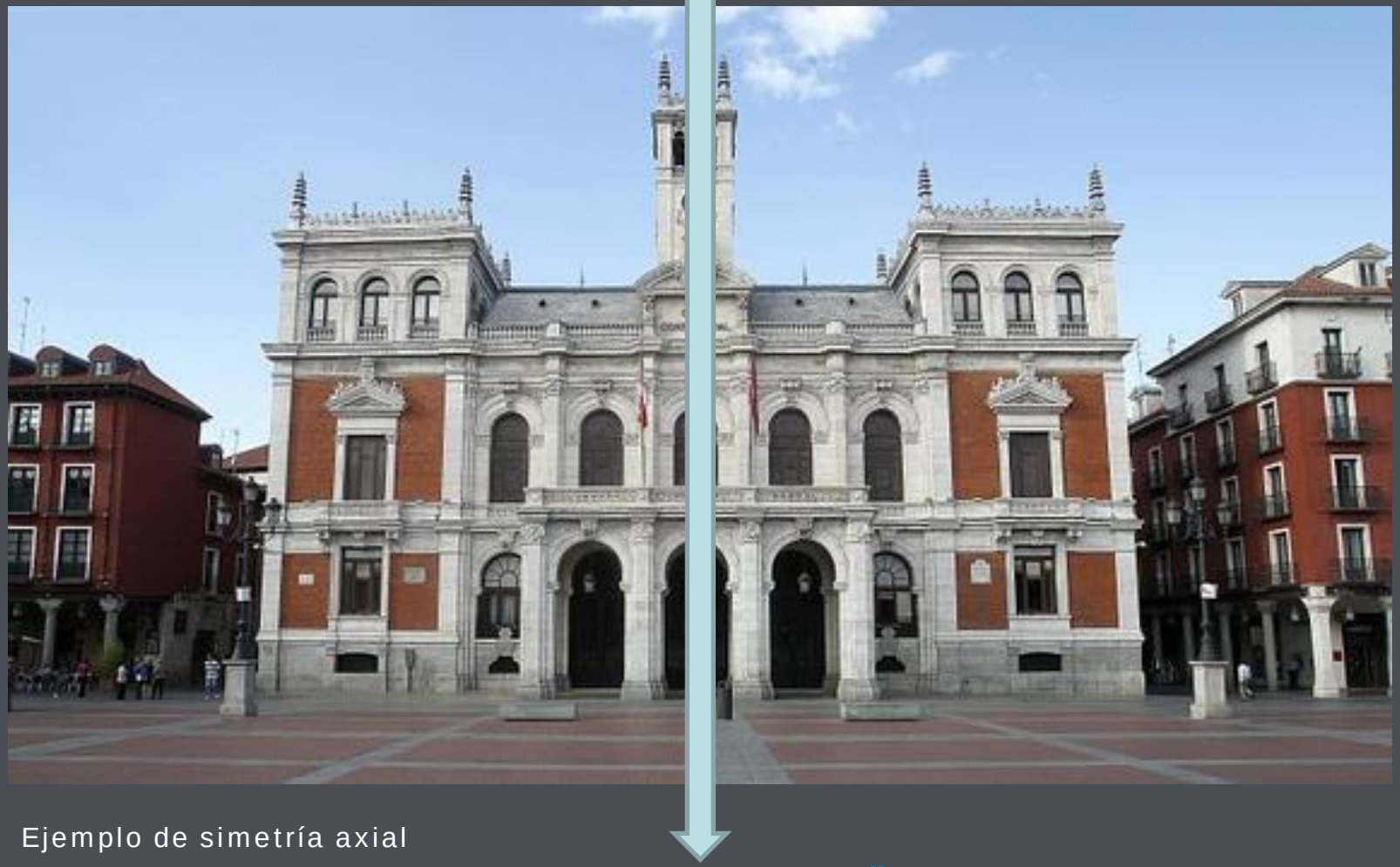
Simetría axial

Simetría Deslizante

Conjunto de puntos fijos de cada movimiento

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

AYUNTAMIENTO DE VALLADOLID



Ejemplo de simetría axial

Alumnos

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

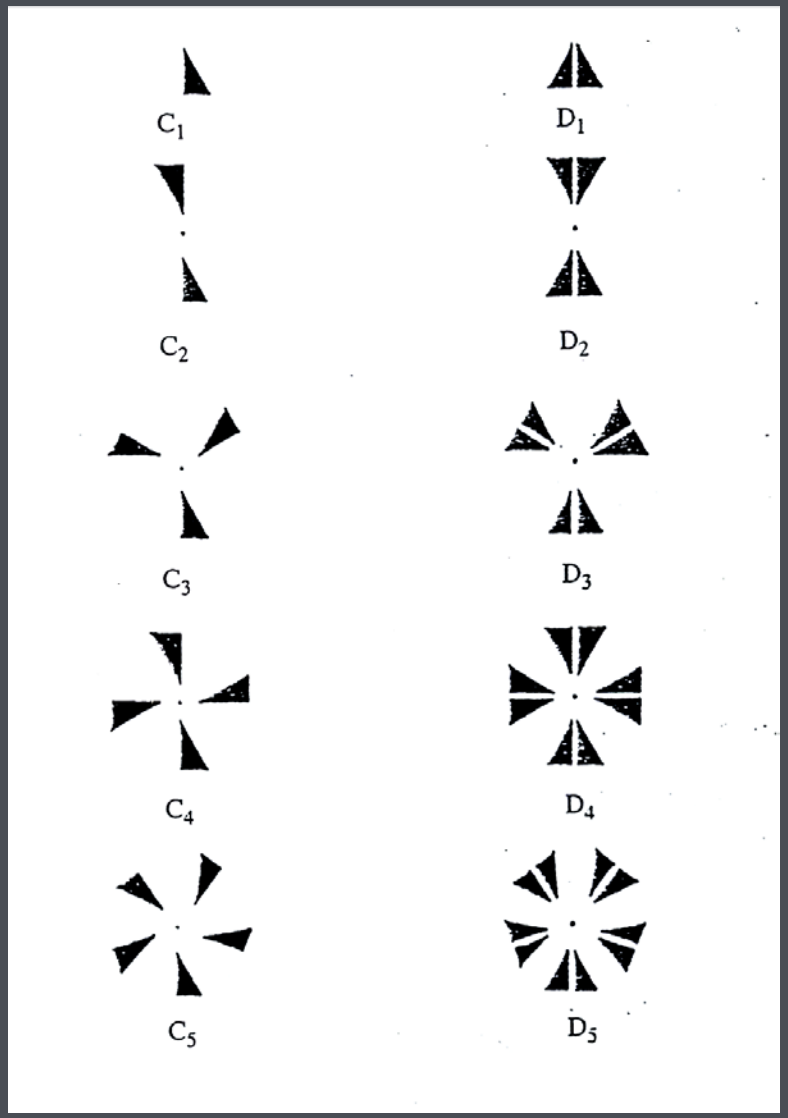
GRUPOS DE SIMETRÍA PUNTUALES O DE LEONARDO

Los grupos de simetría del plano que tienen un punto fijo se llaman Grupos de Simetría Puntuales o de Leonardo y pueden ser de dos tipos: Cíclicos y Diedrales.

Los grupos cíclicos (C_n) sólo contienen giros y los diedrales (D_n), además de giros, contienen simetrías.

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

LOS GRUPOS DE SIMETRÍA DE LOS ROSETONES



Grupos de simetría puntuales o de Leonardo

Son sólo de dos tipos Cn y Dn

Existen infinitos

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

GRUPOS DE SIMETRÍA DE LOS ROSETONES EN EL ARTE

Grupo cíclico de orden 2
Palacio de Santa Cruz, Valladolid

Grupo cíclico de orden 4
Iglesia de la Asunción
Laguna de Duero (Valladolid)

Grupo diedral de orden 4
Catedral de Burgos

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

GRUPOS DE SIMETRÍA DE LOS ROSETONES EN EL ARTE

Ciudad Rodrigo
Salamanca

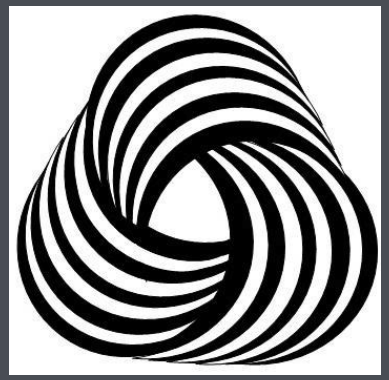
La Antigua
Valladolid

Fachada lateral de San Pablo
Valladolid

Rosetones Diedrales de orden 4 en rejería.

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

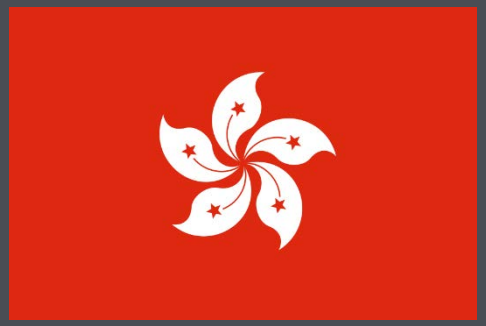
GRUPOS DE SIMETRÍA DE LOS ROSETONES EN SÍMBOLOS O LOGOTIPOS.



Emblema de *Woolmark* o pura lana virgen. C_3

C_3

C_4



Bandera de Hong Kong

C_5

C_6

D_3

D_5

Dibujar con *GeoGebra*.

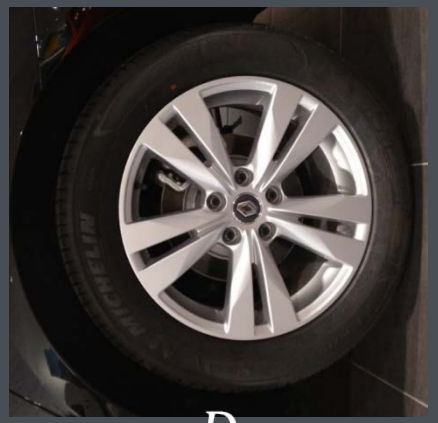
Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

GRUPOS DE SIMETRÍA DE LOS ROSETONES EN NUESTRO ENTORNO. GRUPOS CICLICOS Y DIEDRALES

C_4

D_4

C_5



D_5

C_6

D_6

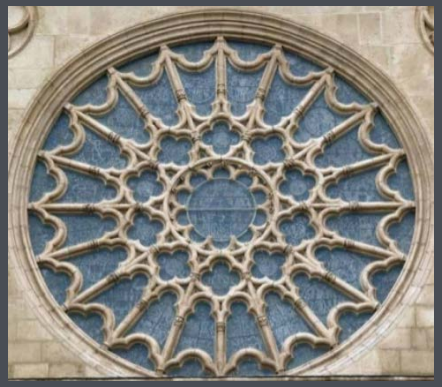
C_8

D_8

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

PROPORCIONES Y ROSETONES

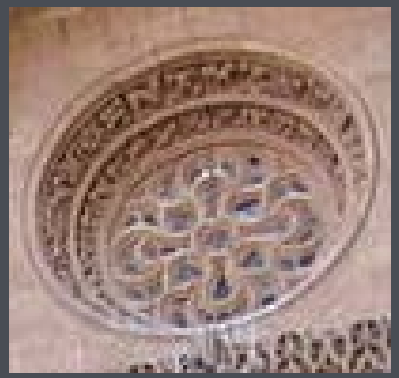
Ávila



Burgos

León

Palencia



Salamanca

Segovia

Soria

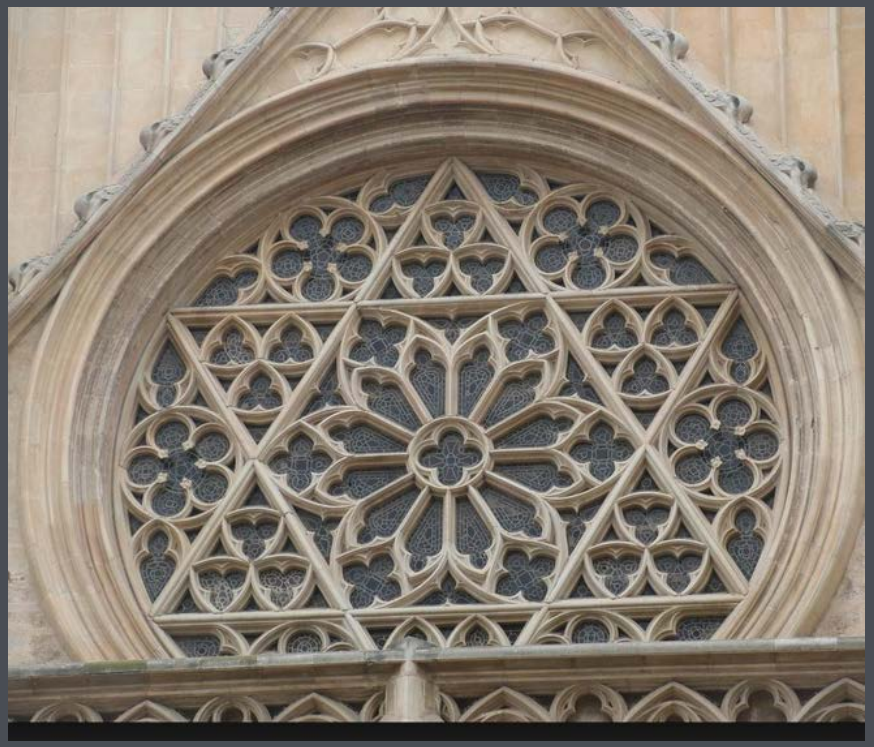
Valladolid

Zamora

ROSETONES EN CASTILLA Y LEÓN

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid

ROSETONES EN VALENCIA



¡MUCHAS GRACIAS!

ereyes@maf.uva.es

Mª Encarnación Reyes Iglesias
E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid