INTRODUCCIÓN A LAS COÁLGEBRAS: STREAMS

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá, 2014

Enric Cosme Llópez

Departament d'Àlgebra
Universitat de València

COÁLGEBRA UNIVERSAL

COÁLGEBRA

Dada una categoría $\mathbf{X}$, llamada la categoría base y un endofuntor $F : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$.

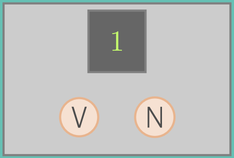
Definición

Una F-coálgebra es un par (X, α), donde X es un objeto de $\mathbf{X}$ y $\alpha : X \to FX$ es una flecha en $\mathbf{X}$.

Llamamos a X la base y a α la función estructural de la coálgebra.

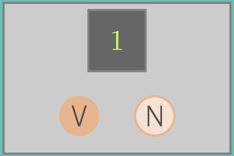
COÁLGEBRA

Máquina de dos botones



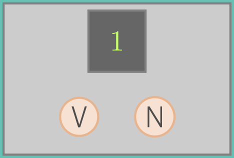
COÁLGEBRA

Máquina de dos botones



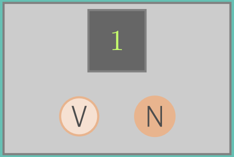
COÁLGEBRA

Máquina de dos botones



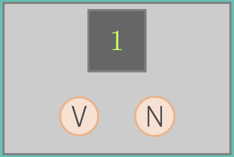
COÁLGEBRA

Máquina de dos botones



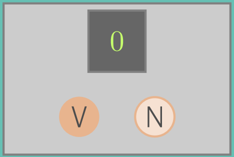
COÁLGEBRA

Máquina de dos botones



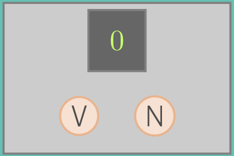
COÁLGEBRA

Máquina de dos botones



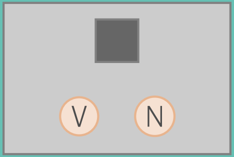
COÁLGEBRA

Máquina de dos botones



COÁLGEBRA

Máquina de dos botones



Esta máquina puede ser descrita como coálgebra:

$$(v, n) : X \longrightarrow A \times X$$

HOMOMORFISMOS DE COÁLGEBRAS

Definición

Sean (X, α) y (Y, β) dos F-coálgebras. Un homomorfismo de F-coálgebras, es una función $f\colon X \to Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ FX \arrow[r, "Ff"'] & FY \end{tikzcd}$$

SUBCOÁLGEBRAS

Definición

Sea (X, α) una F-coálgebra. Sea $W \subseteq X$ un subconjunto cualquiera de X. Diremos que W es una subcoálgebra de X si existe una función estructural α_W en W de forma que la función inclusión $i : W \to X$ es un homomorfismo de F-coálgebras.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "\exists" ', "\alpha_W"] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ FW \arrow[r, "Fi" '] & FX \end{tikzcd}$$

BISIMULACIÓN

Definición

Sean (X, α) y (Y, β) dos F-coálgebras. Un subconjunto Z del producto cartesiano de X y Y es una F-bisimulación si existe una función estructural $\gamma : Z \to FZ$ de forma que las proyecciones de Z a X y Y son homomorfismos de F-coálgebras.

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[ld, "\pi_1"'] \arrow[rd, "\pi_2"] \arrow[dd, dashed, "\exists\ \gamma"] & \\
X \arrow[dd, "\alpha"'] & & Y \arrow[dd, "\beta"] \\
& FZ \arrow[ld, "F\pi_1"] \arrow[rd, "F\pi_2"'] & \\
FX & & FY
\end{tikzcd}
$$

BISIMULACIÓN

Definición

Si $(X, \alpha) = (Y, \beta)$, entonces Z se llama bisimulación en (X, α). Una equivalencia bisimulacional es una bisimulación que además es una relación de equivalencia.

Dos estados $x \in X$, $y \in Y$ se llaman bisimilares si existe una bisimulación Z con $\langle x, y \rangle \in Z$.

BISIMULACIÓN

Definición

Si $(X, \alpha) = (Y, \beta)$, entonces Z se llama bisimulación en (X, α). Una equivalencia bisimulacional es una bisimulación que además es una relación de equivalencia.

Dos estados $x \in X$, $y \in Y$ se llaman bisimilares si existe una bisimulación Z con $\langle x, y \rangle \in Z$.

Ejemplo

El conjunto vacío, $\emptyset \subseteq X \times Y$, siempre es una bisimulación entre (X, α) y (Y, β).

BISIMULACIÓN

Ejemplo

La diagonal, $\Delta_X \subseteq X \times X$, siempre es una equivalencia bisimulacional en X.

BISIMULACIÓN

Ejemplo

La diagonal, $\Delta_X \subseteq X \times X$, siempre es una equivalencia bisimulacional en X.

Máquina de dos botones

Sean $(X, (v, n))$ y $(Y, (v, n))$ dos máquinas. Los elementos $x \in X$ y $y \in Y$ son bisimilares si y sólo si:

$v(x) = v(y)$

$n(x)$ y $n(y)$ son bisimilares.

COCIENTES

Teorema

Sea (X, α) una F-coálgebra. Sea Z una equivalencia bisimulacional en X. Entonces existe una única función estructural $\gamma_Z : X/Z \to F(X/Z)$ que convierte la función cociente $\pi_Z : X \to X/Z$ en un homomorfismo de F-coálgebras.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_Z"] \arrow[d, "\alpha"'] & X/Z \arrow[d, dashed, "\exists! \ \gamma_Z"] \\
FX \arrow[r, "F\pi_Z"'] & F(X/Z)
\end{tikzcd}$$

COÁLGEBRA FINAL

COÁLGEBRA FINAL

Definición

Diremos que una F-coálgebra, (X, α), es una F-coálgebra final si para cualquier otra F-coalgebra (Y, β) existe un único homomorfismo de F-coálgebras $! : Y \to X$.

COÁLGEBRA FINAL

Definición

Diremos que una F-coálgebra, (X, α), es una F-coálgebra final si para cualquier otra F-coalgebra (Y, β) existe un único homomorfismo de F-coálgebras $! : Y \to X$.

Teorema

Sea (X, α) una F-coálgebra final, entonces α es un isomorfismo de F-coálgebras. La coálgebra final, si existe, es única salvo isomorfismo.

COÁLGEBRA FINAL

Definición

Diremos que una F-coálgebra, (X, α), es una F-coálgebra final si para cualquier otra F-coalgebra (Y, β) existe un único homomorfismo de F-coálgebras $! : Y \to X$.

Teorema

Sea (X, α) una F-coálgebra final, entonces α es un isomorfismo de F-coálgebras. La coálgebra final, si existe, es única salvo isomorfismo.

Son puntos fijos para el funtor, esto es $F(X) \cong X$.

COÁLGEBRA FINAL

Máquina de dos botones

Consideremos la siguiente máquina de dos botones basada en streams $(A^{\mathbb{N}}, (h,t))$ con función estructural:

$$\begin{array}{rccc} (h,t): & A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & A \times A^{\mathbb{N}} \\ & (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (a_0, (a_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}) \end{array}$$

COÁLGEBRA FINAL

Máquina de dos botones

Consideremos la siguiente máquina de dos botones basada en streams $(A^{\mathbb{N}}, (h, t))$ con función estructural:

$$\begin{array}{rccc} (h,t): & A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & A \times A^{\mathbb{N}} \\ & (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (a_0, (a_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}) \end{array}$$

Proposición

$(A^{\mathbb{N}}, (h, t))$ es la máquina de dos botones final:

$$\begin{array}{rccc} !: & (X,(v,n)) & \longrightarrow & (A^{\mathbb{N}}, (h,t)) \\ & x & \longmapsto & (v(n^i(x)))_{i\in\mathbb{N}} \end{array}$$

FINAL COALGEBRAS

La existencia de la coálgebra final nos ayuda a definir nuevos elementos y operadores.

FINAL COALGEBRAS

La existencia de la coálgebra final nos ayuda a definir nuevos elementos y operadores.

Sean (X, α) y (Y, β) dos F-coálgebras. Sea $x \in X$ y $y \in Y$.

Teorema

x y y son bisimilares $\Leftrightarrow$ $!(x) = !(y)$

Este teorema nos ayuda a probar proposiciones mediante coinducción.

BIBLIOGRAFÍA

- J. Rutten,
  Universal coalgebra: a theory of systems,
  Elsevier, Theoretical Computer Science, Amsterdam, 2000.
- J. Rutten,
  Behavioural differential equations: a coinductive calculus of streams, automata and power series,
  Elsevier, Theoretical Computer Science, Amsterdam, 2002.
- D. Sangiorgi, J. Rutten,
  Advanced Topics in Bisimulation and Coinduction,
  Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 2012.