Una visión coalgebraica de la teoría de autómatas

Enric Cosme

La Laguna, Septiembre 2012

0. Introducción

La Coálgebra Universal es una teoría para el tratamiento matemático de los sistemas.

0. Introducción

La Coálgebra Universal es una teoría para el tratamiento matemático de los sistemas.

Nos permite:

- Modelizar sistemas.
- Tener una definición natural de morfismo entre sistemas.
- Detectar equivalencias en los comportamientos de los estados.
- Simplificar sistemas.

1. Teoría de Autómatas

Definición

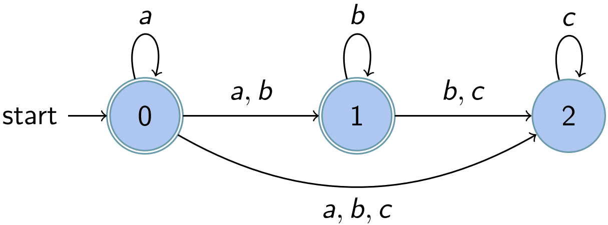
Un *autómata finito no determinista*, o *AFND*, es una quíntupla $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde:

- Q es un conjunto finito de *estados*.
- Σ es un conjunto finito que recibe el nombre de *alfabeto*. Los elementos de Σ se llaman *letras*.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ es una función parcial llamada *función de transición*.
- $q_0 \in Q$ es el estado *inicial*.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados *finales*.

1. Teoría de Autómatas

Ejemplo

Sea $\mathcal{A} = (\{0,1,2\},\{a,b,c\},\delta,0,\{0,1\})$ el AFND con el correspondiente diagrama de transición dado por:



1. Teoría de Autómatas

Definición

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFND. La función $N : Q \to \mathcal{P}(2)$ definida para cada $p \in Q$ como:

- $0 \in N(p)$ si y sólo si $p = q_0$.
- $1 \in N(p)$ si y sólo si $p \in F$.

recibe el nombre de *naturaleza del estado p*.

1. Teoría de Autómatas

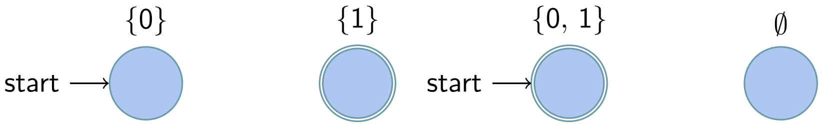
Definición

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFND. La función $N : Q \to \mathcal{P}(2)$ definida para cada $p \in Q$ como:

- $0 \in N(p)$ si y sólo si $p = q_0$.
- $1 \in N(p)$ si y sólo si $p \in F$.

recibe el nombre de *naturaleza del estado p*.

Ejemplo



1. Teoría de Autómatas

Definición

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFND y sea $w \in \Sigma^\star$ una palabra. Diremos que w es *aceptada* por un estado $q \in Q$ cuando $q \xrightarrow{w} p$ con $p \in F$. Se define el lenguaje aceptado por q como:

$$L_q = \{w \in \Sigma^\star : \; w \text{ es una palabra aceptada por } q\}$$

1. Teoría de Autómatas

Definición

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFND y sea $w \in \Sigma^\star$ una palabra. Diremos que w es *aceptada* por un estado $q \in Q$ cuando $q \xrightarrow{w} p$ con $p \in F$. Se define el lenguaje aceptado por q como:

$$L_q = \{w \in \Sigma^\star : \ w \text{ es una palabra aceptada por } q\}$$

Definimos así el *lenguaje aceptado* del AFND $\mathcal{A}$ como:

$$L(\mathcal{A}) = L_{q_0}$$

2. Autómatas como Coálgebras

Definición

Sea **Set** la categoría de los conjuntos. Dado un endofunctor F : **Set** $\to$ **Set**, una *F-coálgebra* (o *F-sistema*) consiste en un par (X, α), donde X es un conjunto y $\alpha : X \to FX$ es una función cualquiera. Diremos que X es la *base* y α será la *función estructural* de la coálgebra.

3. Homomorfismos entre Coálgebras

Definición

Sean (X, α) y (Y, β) dos F-coálgebras. Un *homomorfismo entre F-coálgebras*, $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$, es una función $f : X \to Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\
FX \arrow[r, "Ff"'] & FY
\end{tikzcd}
$$

3. Homomorfismos entre Coálgebras

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Una función $f : Q \to Q'$ es un homomorfismo de autómatas si y sólo si:

3. Homomorfismos entre Coálgebras

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Una función $f : Q \to Q'$ es un homomorfismo de autómatas si y sólo si:

1. $N(q) = N(f(q))$

3. Homomorfismos entre Coálgebras

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Una función $f : Q \to Q'$ es un homomorfismo de autómatas si y sólo si:

1. $N(q) = N(f(q))$
2. $q \xrightarrow{a} p \;\Rightarrow\; f(q) \xrightarrow{a} f(p)$

3. Homomorfismos entre Coálgebras

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Una función $f : Q \to Q'$ es un homomorfismo de autómatas si y sólo si:

1. $N(q) = N(f(q))$
2. $q \xrightarrow{a} p \;\Rightarrow\; f(q) \xrightarrow{a} f(p)$
3. $f(q) \xrightarrow{a} p' \;\Rightarrow\; \exists p \in Q \; (q \xrightarrow{a} p \text{ i } f(p) = p')$

4. Bisimulaciones

Definición

Dadas (X, α) y (Y, β) dos F-coálgebras. Un subconjunto $Z \subseteq X \times Y$ del producto cartesiano se llama una *F-bisimulación* si existe una función estructural $\gamma : Z \to FZ$ de forma que las proyecciones de Z a X y a Y respectivamente son homomorfismos entre F-coálgebras.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, dashed, "\exists\ \gamma"] & \\
X \arrow[dd, "\alpha"'] & & Y \arrow[dd, "\beta"] \\
 & FZ \arrow[dl, "F\pi_1"] \arrow[dr, "F\pi_2"'] & \\
FX & & FY
\end{tikzcd}$$

4. Bisimulaciones

Definición

- Dos elementos $x \in X$, $y \in Y$ son *bisimilares*, y lo denotaremos $x \,\underline{\leftrightarrow}\, y$, si existe una bisimulación Z tal que $\langle x, y \rangle \in Z$.
- Para el caso en que $(X, \alpha) = (Y, \beta)$, definimos *equivalencia bisimulacional* como aquella bisimulación que, además, es relación binaria de equivalencia.

4. Bisimulaciones

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Consideramos $q \in Q$ y $q' \in Q'$. Entonces $q \underline{\leftrightarrow} q'$ si y sólo si:

4. Bisimulaciones

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Consideramos $q \in Q$ y $q' \in Q'$. Entonces $q \underline{\leftrightarrow} q'$ si y sólo si:

1. $N(q) = N(q')$

4. Bisimulaciones

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Consideramos $q \in Q$ y $q' \in Q'$. Entonces $q \underline{\leftrightarrow} q'$ si y sólo si:

1. $N(q) = N(q')$
2. $q \xrightarrow{a} p \;\Rightarrow\; q' \xrightarrow{a} p'$ tal que $p \underline{\leftrightarrow} p'$

4. Bisimulaciones

Proposición

Sean $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ y $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Consideramos $q \in Q$ y $q' \in Q'$. Entonces $q \underline{\leftrightarrow} q'$ si y sólo si:

1. $N(q) = N(q')$
2. $q \xrightarrow{a} p \;\Rightarrow\; q' \xrightarrow{a} p'$ tal que $p \underline{\leftrightarrow} p'$
3. $q' \xrightarrow{a} p' \;\Rightarrow\; q \xrightarrow{a} p$ tal que $p \underline{\leftrightarrow} p'$

5. Cocientes

Teorema

Sea (X, α) una F-coálgebra y sea Z un equivalencia bisimulacional en X, entonces existe una función estructural $\gamma_Z : X/Z \to F(X/Z)$ que transforma la aplicación cociente $\pi_Z : X \to X/Z$ en un homomorfismo entre coálgebras.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_Z"] \arrow[d, "\alpha"'] & X/Z \arrow[d, dashed, "\exists! \ \gamma_Z"] \\
FX \arrow[r, "F\pi_Z"'] & F(X/Z)
\end{tikzcd}$$

Bibliografía

B. Jacobs
Introduction to Coalgebra,
Draft Copy, Version 1.00, 22nd April 2005.

A. Kurz
Coalgebras and Modal Logic,
Lecture Notes, Amsterdam, 2001.

J. Rutten
Universal coalgebra: a theory of systems,
Elsevier, Theoretical Computer Science, Amsterdam, 2000.

D. Sangiorgi, J. Rutten
Advanced Topics in Bisimulation and Coinduction,
Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 2012.