



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

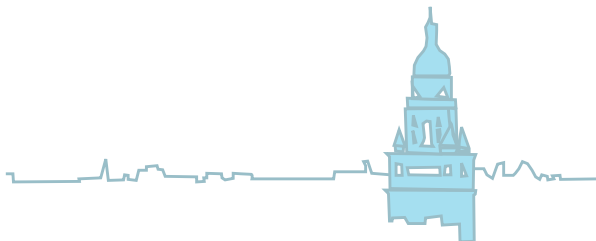
ACCIONES DE MONOIDES FIELES Y TRANSITIVAS

3er Congreso de Jóvenes Investigadores

Múrcia, 2015

Enric Cosme-Llópez

Departament d'Àlgebra
Universitat de València



ACCIÓN

Dado un monoide M y un conjunto no vacío Ω , diremos que M actúa sobre Ω si existe un homomorfismo de monoides

$$\varphi: M \longrightarrow \mathsf{T}_\Omega = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \Omega\}$$

ACCIÓN

Dado un monoide M y un conjunto no vacío Ω , diremos que M actúa sobre Ω si existe un homomorfismo de monoides

$$\varphi: M \longrightarrow \mathsf{T}_\Omega = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \Omega\}$$

Usaremos la notación usual $(\omega)(m)\varphi = \omega m$.

Diremos que Ω es un M -conjunto.

ACCIÓN

Dado un monoïde M y un conjunto no vacío Ω , diremos que M actúa sobre Ω si existe un homomorfismo de monoïdes

$$\varphi: M \longrightarrow \mathsf{T}_\Omega = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \Omega\}$$

Usaremos la notación usual $(\omega)(m)\varphi = \omega m$.

Diremos que Ω es un M -conjunto.

Ejemplo

Dado un monoïde M , éste actúa sobre él mismo por multiplicación a derecha. Esta acción se llama regular.

ACCIÓN FIEL

La acción se llamará fiel si el correspondiente morfismo φ es inyectivo. Equivalentemente, para todo $m, n \in M$,

para todo $\omega \in \Omega$ ($\omega m = \omega n$), entonces $m = n$.

ACCIÓN FIEL

La acción se llamará fiel si el correspondiente morfismo φ es inyectivo. Equivalentemente, para todo $m, n \in M$,

para todo $\omega \in \Omega$ ($\omega m = \omega n$), entonces $m = n$.

Ejemplo

Para todo monoide M , su acción regular es fiel.

MORFISMOS

Un morfismo $f: \Omega \rightarrow \Delta$ de M -conjuntos es una función que preserva la acción, esto es

$$\text{para todo } \omega \in \Omega \text{ y } m \in M, \quad f(\omega m) = f(\omega)m .$$

Si es una biyección, diremos que las acciones son equivalentes

$$\Omega \cong \Delta$$

MORFISMOS

Un subconjunto no vacío $\Delta \subseteq \Omega$ se llama M -invariante si

$$\Delta M \subseteq \Delta$$

MORFISMOS

Un subconjunto no vacío $\Delta \subseteq \Omega$ se llama M -invariante si

$$\Delta M \subseteq \Delta$$

Una congruencia a derecha $\equiv$ es una relación binaria de equivalencia en Ω tal que, para todo $m \in M$,

$$\text{si } (\alpha, \beta) \in \equiv, \text{ entonces } (\alpha m, \beta m) \in \equiv$$

PRIMER TEOREMA DE ISOMORFÍA

Ejemplo

Dado un morfismo $f: \Omega \rightarrow \Delta$ de M -conjuntos

El núcleo de f es una congruencia en Ω

$$\ker f = \{(\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega \mid f(\alpha) = f(\beta)\}$$

La imagen de f es un subconjunto M -invariante de Δ

$$\operatorname{im} f = \{\delta \in \Delta \mid \exists \omega \in \Omega (f(\omega) = \delta)\}$$

PRIMER TEOREMA DE ISOMORFÍA

Ejemplo

Dado un morfismo $f: \Omega \rightarrow \Delta$ de M -conjuntos

El núcleo de f es una congruencia en Ω

$$\ker f = \{(\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega \mid f(\alpha) = f(\beta)\}$$

La imagen de f es un subconjunto M -invariante de Δ

$$\operatorname{im} f = \{\delta \in \Delta \mid \exists \omega \in \Omega (f(\omega) = \delta)\}$$

Además

$$\Omega / \ker f \cong \operatorname{im} f$$

CÍCLICOS

Un subconjunto M -invariante de la forma αM se llama cíclico.

CÍCLICOS

Un subconjunto M -invariante de la forma αM se llama cíclico.

Definimos una relación de equivalencia en Ω dada por

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha M = \beta M$$

CÍCLICOS

Un subconjunto M -invariante de la forma αM se llama cíclico.

Definimos una relación de equivalencia en Ω dada por

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha M = \beta M$$

Las clases de equivalencia de $\sim$ se llaman órbitas. La acción de M se llama transitiva si solo tiene una única órbita. Esto es,

para cada $\alpha, \beta \in \Omega$, existen $m, n \in M$ con $\alpha m = \beta$ y $\beta n = \alpha$

CÍCLICOS

Un subconjunto M -invariante de la forma αM se llama cíclico.

Definimos una relación de equivalencia en Ω dada por

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha M = \beta M$$

Las clases de equivalencia de $\sim$ se llaman órbitas. La acción de M se llama transitiva si solo tiene una única órbita. Esto es,

para cada $\alpha, \beta \in \Omega$, existen $m, n \in M$ con $\alpha m = \beta$ y $\beta n = \alpha$

Ejemplo

La acción regular de un grupo siempre es transitiva, mientras que la de un monoide no necesariamente lo es.

OBJETIVO

El objetivo de nuestro trabajo ha sido el de caracterizar todas las acciones fieles y transitivas de un monoide finito M .

GRUPOS: TRANSITIVIDAD

Sea H un subgrupo de un grupo G .

Un subconjunto de la forma Hg con $g \in G$ se llama coclase.

El conjunto $\{Hg \mid g \in G\}$ forma una partición de G y tiene estructura de G -conjunto con la multiplicación a derecha.

Esta acción siempre es transitiva.

GRUPOS: TRANSITIVIDAD

Sea H un subgrupo de un grupo G .

Un subconjunto de la forma Hg con $g \in G$ se llama coclase.

El conjunto $\{Hg \mid g \in G\}$ forma una partición de G y tiene estructura de G -conjunto con la multiplicación a derecha.

Esta acción siempre es transitiva.

Teorema

Toda acción transitiva de un grupo es equivalente a la acción sobre las coclases de un subgrupo.

GRUPOS: TRANSITIVIDAD

Sea H un subgrupo de un grupo G .

Un subconjunto de la forma Hg con $g \in G$ se llama coclase.

El conjunto $\{Hg \mid g \in G\}$ forma una partición de G y tiene estructura de G -conjunto con la multiplicación a derecha.

Esta acción siempre es transitiva.

Teorema

Toda acción transitiva de un grupo es equivalente a la acción sobre las coclases de un subgrupo.

En la demostración usamos $\text{Stab}_G(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha g = \alpha\}$.

GRUPOS: TRANSITIVIDAD Y FIDELIDAD

El core de H en G , dado por

$$\text{Core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

es el mayor subgrupo normal de G que está contenido en H .

Además, el núcleo de la acción de G sobre el conjunto de las coclases de H coincide con $\text{Core}_G(H)$.

GRUPOS: TRANSITIVIDAD Y FIDELIDAD

El core de H en G , dado por

$$\text{Core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

es el mayor subgrupo normal de G que está contenido en H .

Además, el núcleo de la acción de G sobre el conjunto de las coclases de H coincide con $\text{Core}_G(H)$.

Teorema

Toda acción fiel y transitiva de un grupo es equivalente a la acción sobre las coclases de un subgrupo de core trivial.

MONOIDES: TRANSITIVIDAD

Proposición

Dado un monoide M y un elemento $m \in M$, la acción por multiplicación a derecha en el conjunto mM es transitiva si y solo si mM es minimal.

MONOIDES: TRANSITIVIDAD

Proposición

Dado un monoide M y un elemento $m \in M$, la acción por multiplicación a derecha en el conjunto mM es transitiva si y solo si mM es minimal.

Todo monoide finito M tiene un ideal minimal, $I(M)$.

Proposición

$$I(M) = \{m \in M \mid mM \text{ minimal}\}$$

MONOIDES: TRANSITIVIDAD

Proposición

Dado un monoide M y un elemento $m \in M$, la acción por multiplicación a derecha en el conjunto mM es transitiva si y solo si mM es minimal.

Todo monoide finito M tiene un ideal minimal, $I(M)$.

Proposición

$$I(M) = \{m \in M \mid mM \text{ minimal}\}$$

Como $I(M)$ contiene idempotentes, trabajamos con ellos directamente.

MONOIDES: TRANSITIVIDAD Y FIDELIDAD

Teorema

Toda acción fiel y transitiva de un monoide M es equivalente a la acción de M en algún $eM/\equiv$, donde e es un idempotente en $I(M)$ y $\equiv$ es una congruencia en eM .

SOBRE EL CÍCLICO MINIMAL

Proposición

Si e y f son dos idempotentes en $I(M)$, entonces:

- i) Los M -conjuntos eM y fM son equivalentes.

SOBRE EL CÍCLICO MINIMAL

Proposición

Si e y f son dos idempotentes en $I(M)$, entonces:

- i) Los M -conjuntos eM y fM son equivalentes.
- ii) $G_e = eMe$.

Donde G_e es el mayor grupo en M que tiene a e como elemento neutro. Este grupo se llama grupo maximal en e .

SOBRE EL CÍCLICO MINIMAL

Teorema

Si e es un idempotente en $I(M)$, entonces:

- i) Las clases $\{G_e m \mid m \in M\}$ forman una partición de eM .

SOBRE EL CÍCLICO MINIMAL

Teorema

Si e es un idempotente en $I(M)$, entonces:

- i) Las clases $\{G_e m \mid m \in M\}$ forman una partición de eM .
- ii) $G_e m$ contiene exactamente $|G_e|$ elementos.

SOBRE EL CÍCLICO MINIMAL

Teorema

Si e es un idempotente en $I(M)$, entonces:

- i) Las clases $\{G_e m \mid m \in M\}$ forman una partición de eM .
- ii) $G_e m$ contiene exactamente $|G_e|$ elementos.
- iii) Si f es un idempotente en eM , entonces $fe = e$ y $ef = f$.

SOBRE EL CÍCLICO MINIMAL

Teorema

Si e es un idempotente en $I(M)$, entonces:

- i) Las clases $\{G_e m \mid m \in M\}$ forman una partición de eM .
- ii) $G_e m$ contiene exactamente $|G_e|$ elementos.
- iii) Si f es un idempotente en eM , entonces $fe = e$ y $ef = f$.
- iv) $G_e m$ contiene exactamente un idempotente.

SOBRE EL CÍCLICO MINIMAL

Teorema

Si e es un idempotente en $I(M)$, entonces:

- i) Las clases $\{G_e m \mid m \in M\}$ forman una partición de eM .
- ii) $G_e m$ contiene exactamente $|G_e|$ elementos.
- iii) Si f es un idempotente en eM , entonces $fe = e$ y $ef = f$.
- iv) $G_e m$ contiene exactamente un idempotente.
- v) Si f es un idempotente en eM , entonces $G_e f = fMf = G_f$.

SOBRE EL CÍCLICO MINIMAL

Teorema

Si e es un idempotente en $I(M)$, entonces:

- i) Las clases $\{G_e m \mid m \in M\}$ forman una partición de eM .
- ii) $G_e m$ contiene exactamente $|G_e|$ elementos.
- iii) Si f es un idempotente en eM , entonces $fe = e$ y $ef = f$.
- iv) $G_e m$ contiene exactamente un idempotente.
- v) Si f es un idempotente en eM , entonces $G_e f = fMf = G_f$.
- vi) Si f es un idempotente en eM , entonces G_e y G_f son isomorfos.

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

En definitiva, el conjunto eM , con e idempotente minimal es unión disjunta de grupos maximales isomorfos:

$$eM = \bigsqcup_{f \in eM} G_f$$

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

En definitiva, el conjunto eM , con e idempotente minimal es unión disjunta de grupos maximales isomorfos:

$$eM = \bigsqcup_{f \in eM} G_f$$

Lema

Si M actúa fiel y transitivamente sobre un conjunto Ω y e es un idempotente en M , entonces el monoide eMe actúa fiel y transitivamente sobre el conjunto Ωe .

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

En definitiva, el conjunto eM , con e idempotente minimal es unión disjunta de grupos maximales isomorfos:

$$eM = \bigsqcup_{f \in eM} G_f$$

Lema

Si M actúa fiel y transitivamente sobre un conjunto Ω y e es un idempotente en M , entonces el monoide eMe actúa fiel y transitivamente sobre el conjunto Ωe .

Para e idempotente minimal, tenemos que G_e actúa fiel y transitivamente sobre Ωe . Por tanto, recuperamos la descripción hecha antes de las acciones fieles y transitivas para grupos.

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Teorema

Sea e un idempotente minimal de M . Si M actúa fiel y transitivamente en un conjunto Ω , entonces existe un subgrupo $H \leq G_e$ con $\text{Core}_{G_e}(H) = \{e\}$ que satisface:

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Teorema

Sea e un idempotente minimal de M . Si M actúa fiel y transitivamente en un conjunto Ω , entonces existe un subgrupo $H \leq G_e$ con $\text{Core}_{G_e}(H) = \{e\}$ que satisface:

- i) Las clases $\{Hm \mid m \in M\}$ forman una partición de eM ;

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Teorema

Sea e un idempotente minimal de M . Si M actúa fiel y transitivamente en un conjunto Ω , entonces existe un subgrupo $H \leq G_e$ con $\text{Core}_{G_e}(H) = \{e\}$ que satisface:

- i) Las clases $\{Hm \mid m \in M\}$ forman una partición de eM ;
- ii) Si $\{x_1, \dots, x_r\}$ es un transversal de H en G_e y $\{f_1, \dots, f_s\}$ es el conjunto de idempotentes en eM , la anterior partición coincide con $\{Hx_if_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$;

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Teorema

Sea e un idempotente minimal de M . Si M actúa fiel y transitivamente en un conjunto Ω , entonces existe un subgrupo $H \leq G_e$ con $\text{Core}_{G_e}(H) = \{e\}$ que satisface:

- i) Las clases $\{Hm \mid m \in M\}$ forman una partición de eM ;
- ii) Si $\{x_1, \dots, x_r\}$ es un transversal de H en G_e y $\{f_1, \dots, f_s\}$ es el conjunto de idempotentes en eM , la anterior partición coincide con $\{Hx_if_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$;
- iii) La acción de M en Ω es equivalente a la acción de M en $eM/\equiv$ por multiplicación a derecha, donde $\equiv$ es una congruencia en eM . La partición $\{Hx_if_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ colapsa $\equiv$.

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Teorema

iii) La acción de M en Ω es equivalente a la acción de M en $eM/\equiv$ por multiplicación a derecha, donde $\equiv$ es una congruencia en eM . La partición $\{Hx_if_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ colapsa $\equiv$ y, además, satisface:

- Si $Hx_if_j \equiv Hx_{i'}f_{j'}$, entonces $i = i'$;

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Teorema

iii) La acción de M en Ω es equivalente a la acción de M en $eM/\equiv$ por multiplicación a derecha, donde $\equiv$ es una congruencia en eM . La partición $\{Hx_if_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ colapsa $\equiv$ y, además, satisface:

- Si $Hx_if_j \equiv Hx_{i'}f_{j'}$, entonces $i = i'$;
- Si $Hx_if_j \equiv Hx_{i'}f_{j'}$ y $m \in M$, entonces $Hx_if_jm \equiv Hx_{i'}f_{j'}m$;

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Teorema

iii) La acción de M en Ω es equivalente a la acción de M en $eM/\equiv$ por multiplicación a derecha, donde $\equiv$ es una congruencia en eM . La partición $\{Hx_if_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ colapsa $\equiv$ y, además, satisface:

- Si $Hx_if_j \equiv Hx_{i'}f_{j'}$, entonces $i = i'$;
- Si $Hx_if_j \equiv Hx_{i'}f_{j'}$ y $m \in M$, entonces $Hx_if_jm \equiv Hx_{i'}f_{j'}m$;
- Para cada par de idempotentes $f_j, f_{j'}$ existe un transversal x_i tal que Hx_if_j y $Hx_{i'}f_{j'}$ no están $\equiv$ -relacionados.

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

Sea $\Omega = \{1, \dots, 5\}$ un conjunto con 5 elementos. Consideramos el siguiente submonoide de T_5

$$\begin{aligned} M = & \{f \in T_5 \mid f|_{\{1,2,3\}} \in S_{\{1,2,3\}}, f(4) = f(2), f(5) = f(3)\} \\ & \cup \{g \in T_5 \mid g|_{\{1,4,5\}} \in S_{\{1,4,5\}}, g(4) = g(2), g(5) = g(3)\} \\ & \cup \{id_5\}. \end{aligned}$$

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

Sea $\Omega = \{1, \dots, 5\}$ un conjunto con 5 elementos. Consideramos el siguiente submonoïde de T_5

$$\begin{aligned} M = & \{f \in T_5 \mid f|_{\{1,2,3\}} \in S_{\{1,2,3\}}, f(4) = f(2), f(5) = f(3)\} \\ & \cup \{g \in T_5 \mid g|_{\{1,4,5\}} \in S_{\{1,4,5\}}, g(4) = g(2), g(5) = g(3)\} \\ & \cup \{id_5\}. \end{aligned}$$

Notamos que todo elemento $f \in M$ se puede escribir como f_σ con $\sigma \in S_{\{1,2,3\}}$ y todo elemento $g \in M$ se puede escribir como g_τ con $\tau \in S_{\{1,4,5\}}$.

El monoïde M actúa fiel y transitivamente sobre Ω .

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

El ideal $I(M)$ viene dado por todas las funciones f y g antes descritas, y contiene dos idempotentes f_1 y g_1 .

Además, $f_1 M f_1 \cong g_1 M g_1 \cong S_3$.

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

El ideal $I(M)$ viene dado por todas las funciones f y g antes descritas, y contiene dos idempotentes f_1 y g_1 .

Además, $f_1 M f_1 \cong g_1 M g_1 \cong S_3$.

Fijando $1 \in \Omega f_1$, tenemos que la acción de M en Ω es equivalente a la acción sobre $f_1 M / \equiv$ donde $\equiv$ viene descrita por $\{(m, n) \in M \mid (1)m = (1)n\}$.

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

El ideal $I(M)$ viene dado por todas las funciones f y g antes descritas, y contiene dos idempotentes f_1 y g_1 .

Además, $f_1 M f_1 \cong g_1 M g_1 \cong S_3$.

Fijando $1 \in \Omega f_1$, tenemos que la acción de M en Ω es equivalente a la acción sobre $f_1 M / \equiv$ donde $\equiv$ viene descrita por $\{(m, n) \in M \mid (1)m = (1)n\}$.

Además, $H = \text{Stab}_{G_{f_1}}(1) = \{f_1, f_{(2,3)}\}$ es el subgrupo que buscamos con $\text{Core}_{G_{f_1}}(H) = \{f_1\}$.

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

El ideal $I(M)$ viene dado por todas las funciones f y g antes descritas, y contiene dos idempotentes f_1 y g_1 .

Además, $f_1 M f_1 \cong g_1 M g_1 \cong S_3$.

Fijando $1 \in \Omega f_1$, tenemos que la acción de M en Ω es equivalente a la acción sobre $f_1 M / \equiv$ donde $\equiv$ viene descrita por $\{(m, n) \in M \mid (1)m = (1)n\}$.

Además, $H = \text{Stab}_{G_{f_1}}(1) = \{f_1, f_{(2,3)}\}$ es el subgrupo que buscamos con $\text{Core}_{G_{f_1}}(H) = \{f_1\}$.

Fijamos el siguiente conjunto de transversales de H en G_{f_1} ; $\{f_1, f_{(1,2)}, f_{(1,3)}\}$.

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

Así, el conjunto $f_1 M$ se puede partir de la siguiente forma:

$$f_1 M = \begin{array}{ccc} H & Hf_{(1,2)} & Hf_{(1,3)} \\ Hg_1 & Hf_{(1,2)}g_1 & Hf_{(1,3)}g_1 \end{array}$$

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

Así, el conjunto $f_1 M$ se puede partir de la siguiente forma:

$$f_1 M = \begin{array}{ccc} H & Hf_{(1,2)} & Hf_{(1,3)} \\ Hg_1 & Hf_{(1,2)}g_1 & Hf_{(1,3)}g_1 \end{array}$$

$$f_1 M / \equiv = \begin{array}{|c|c|c|} \hline H & Hf_{(1,2)} & Hf_{(1,3)} \\ \hline Hg_1 & Hf_{(1,2)}g_1 & Hf_{(1,3)}g_1 \\ \hline \end{array}$$

ACCIONES FIELES Y TRANSITIVAS

Ejemplo

Así, el conjunto $f_1 M$ se puede partir de la siguiente forma:

$$f_1 M = \begin{array}{ccc} H & Hf_{(1,2)} & Hf_{(1,3)} \\ Hg_1 & Hf_{(1,2)}g_1 & Hf_{(1,3)}g_1 \end{array}$$

$$f_1 M / \equiv = \begin{array}{|c|c|c|} \hline H & Hf_{(1,2)} & Hf_{(1,3)} \\ \hline Hg_1 & Hf_{(1,2)}g_1 & Hf_{(1,3)}g_1 \\ \hline \end{array}$$

$$f_1 M / \equiv \cong \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & 4 & 5 \\ \hline \end{array} = \Omega$$

BIBLIOGRAFÍA

-  A. Kerber,
Applied Finite Group Actions,
Algorithms and Combinatorics. Springer, 1991.
-  V. Pérez-Calabuig,
Sobre els semigrups finits $\mathfrak{H}$ -resolubles,
Master's thesis, Universitat de València, Burjassot, 2013.
-  J. Rhodes and B. Steinberg,
The q -theory of finite semigroups,
Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2009.
-  B. Steinberg,
A theory of transformation monoids: Combinatorics and
representation theory,
The Electronic Journal of Combinatorics, 17:1–56, 2010.

HSRM Beamer Theme, by Benjamin Weiss.