VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

EQUIVALENCIA DUAL ENTRE ECUACIONES Y COECUACIONES PARA AUTÓMATAS

Nafarroako Unibertsitate Publikoa, Universidad Pública de Navarra

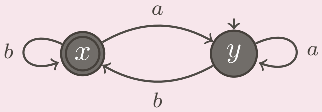
Iruña, Pamplona, 2014

Enric Cosme Llópez

Departament d'Àlgebra
Universitat de València

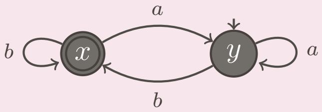
AUTÓMATAS

Ejemplo



AUTÓMATAS

Ejemplo



$X = \{x, y\}$, conjunto de estados;

$A = \{a, b\}$, alfabeto;

$\alpha\colon X \to X^A$, función de transición.

Notación: $\alpha(x)(a) = x_a$.

LA ESCENA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
& X \arrow[ur, bend left, "c"] \arrow[d, "\alpha"'] & \\
& X^A &
\end{tikzcd}
$$

LA ESCENA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
A^* \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ur, bend left, "c"] & \\
(A^*)^A & X^A &
\end{tikzcd}
$$

LA ESCENA

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
w \arrow[d, mapsto, "a"'] & A^* \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ur, bend left, "c"] & \\
wa & (A^*)^A & X^A &
\end{tikzcd}
$$

LA ESCENA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
A^* \arrow[r, dashed, "r_x"'] \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[ur, bend left, "c"] \arrow[d, "\alpha"'] & \\
(A^*)^A \arrow[r, dashed, "r_x^A"'] & X^A &
\end{tikzcd}
$$

LA ESCENA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
A^* \arrow[r, dashed, "r_x"'] \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[ur, bend left, "c"] \arrow[d, "\alpha"'] & \\
(A^*)^A \arrow[r, dashed, "r_x^A"'] & X^A &
\end{tikzcd}
$$

LA ESCENA

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[r, bend left, "x"] & X \arrow[r, bend left, "c"] \arrow[d, "\alpha"'] & 2 \\
A^* \arrow[r, dashed, "r_x"'] \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[d] & 2^{A^*} \arrow[u, "\varepsilon?"'] \arrow[d, "\tau"] \\
(A^*)^A \arrow[r, dashed, "r_x^A"'] & X^A & (2^{A^*})^A
\end{tikzcd}$$

LA ESCENA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 & \\
A^* \arrow[r, dashed, "r_x"'] \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[ur, bend left, "c"] \arrow[d, "\alpha"'] & 2^{A^*} \arrow[u, "\varepsilon?"'] \arrow[d, "\tau"] & L \arrow[d, mapsto, "a"] \\
(A^*)^A \arrow[r, dashed, "r_x^A"'] & X^A & (2^{A^*})^A & L_a
\end{tikzcd}
$$

LA ESCENA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & & X \arrow[r, bend left, "c"] \arrow[r, phantom] & 2 \\
A^* \arrow[rr, dashed, "r_x"'] \arrow[d, "\sigma"'] & & X \arrow[r, dashed, "o_c"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 2^{A^*} \arrow[u, "\varepsilon ?"'] \arrow[d, "\tau"] \\
(A^*)^A \arrow[rr, dashed, "r_x^A"'] & & X^A \arrow[r, dashed, "o_c^A"'] & (2^{A^*})^A
\end{tikzcd}
$$

LA ESCENA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
A^* \arrow[r, dashed, "r_x"'] \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[r, dashed, "o_c"'] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ur, bend left, "c"] & 2^{A^*} \arrow[u, "\varepsilon?"'] \arrow[d, "\tau"] \\
(A^*)^A \arrow[r, dashed, "r_x^A"'] & X^A \arrow[r, dashed, "o_c^A"'] & (2^{A^*})^A
\end{tikzcd}
$$

LA ESCENA EXTENDIDA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, bend left, "{[\varepsilon]}"'] \arrow[drr, bend left, "x"] & & & & 2 \\
A^* \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "r_x"'] & \mathsf{free}(X,\alpha) \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "c"] \arrow[rr, bend right, "o_c"'] & \mathsf{cofree}(X,\alpha) \arrow[r] \arrow[ur, bend left, "\hat{c}"] & 2^{A^*} \arrow[u, "\varepsilon?"']
\end{tikzcd}
$$

ECUACIONES

Definición

Un conjunto de ecuaciones es una equivalencia bisimulacional $E \subseteq A^* \times A^*$ en el autómata inicial (A^*, σ).

ECUACIONES

Definición

Un conjunto de ecuaciones es una equivalencia bisimulacional $E \subseteq A^* \times A^*$ en el autómata inicial (A^*, σ).

Definición

Diremos que el autómata punteado (X, α, x) satisface E

$$(X, \alpha, x) \models E \quad \Leftrightarrow \quad \forall (v, w) \in E, \; x_v = x_w$$

ECUACIONES

Definición

Un conjunto de ecuaciones es una equivalencia bisimulacional $E \subseteq A^* \times A^*$ en el autómata inicial (A^*, σ).

Definición

Diremos que el autómata punteado (X, α, x) satisface E

$$(X, \alpha, x) \models E \quad \Leftrightarrow \quad \forall (v, w) \in E,\ \ x_v = x_w$$

Definimos:

$$(X, \alpha) \models E \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : 1 \to X,\ \ (X, \alpha, x) \models E$$

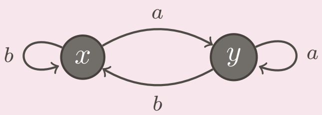
ECUACIONES

Sean $v, w \in A^*$, consideramos la abreviación $v = w$ para denotar la equivalencia bisimulacional más pequeña en A^* que contenga (v, w).

ECUACIONES

Sean $v, w \in A^*$, consideramos la abreviación $v = w$ para denotar la equivalencia bisimulacional más pequeña en A^* que contenga (v, w).

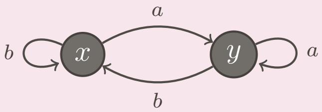
Ejemplo



ECUACIONES

Sean $v, w \in A^*$, consideramos la abreviación $v = w$ para denotar la equivalencia bisimulacional más pequeña en A^* que contenga (v, w).

Ejemplo

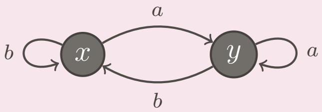


$$(X, \alpha, x) \models \{b = \varepsilon,\ ab = \varepsilon,\ aa = a\}$$

ECUACIONES

Sean $v, w \in A^*$, consideramos la abreviación $v = w$ para denotar la equivalencia bisimulacional más pequeña en A^* que contenga (v, w).

Ejemplo



$$(X, \alpha, x) \models \{b = \varepsilon,\ ab = \varepsilon,\ aa = a\}$$

$$(X, \alpha, y) \models \{a = \varepsilon,\ ba = \varepsilon,\ bb = b\}$$

COECUACIONES

Definición

Un conjunto de coecuaciones es un subautómata $D \leq 2^{A^*}$ del autómata final $(2^{A^*}, \tau)$.

COECUACIONES

Definición

Un conjunto de coecuaciones es un subautómata $D \leq 2^{A^*}$ del autómata final $(2^{A^*}, \tau)$.

Definición

Diremos que el autómata coloreado (X, α, c) satisface D

$$(X, \alpha, c) \models D \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X, \;\; o_c(x) \in D$$

COECUACIONES

Definición

Un conjunto de coecuaciones es un subautómata $D \leq 2^{A^*}$ del autómata final $(2^{A^*}, \tau)$.

Definición

Diremos que el autómata coloreado (X, α, c) satisface D

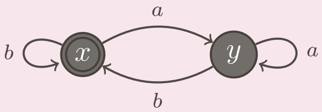
$$(X, \alpha, c) \models D \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X, \;\; o_c(x) \in D$$

Definimos:

$$(X, \alpha) \models D \quad \Leftrightarrow \quad \forall c : X \to 2, \;\; (X, \alpha, c) \models D$$

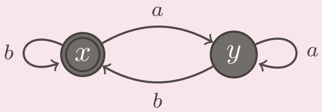
COECUACIONES

Ejemplo



COECUACIONES

Ejemplo

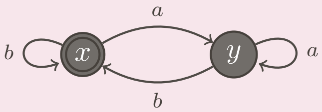


Bajo la función de observación tenemos:

$$o_c(x) = (a^*b)^* \qquad o_c(y) = (a^*b)^+$$

COECUACIONES

Ejemplo



Bajo la función de observación tenemos:

$$o_c(x) = (a^*b)^* \qquad o_c(y) = (a^*b)^+$$

por tanto,

$$(X, \alpha, c) \models \{(a^*b)^*, (a^*b)^+\}$$

LA ESCENA EXTENDIDA

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[r, bend left, "{[\varepsilon]}"'] & & & & 2 \\
A^* \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "r_x"'] & \mathsf{free}(X,\alpha) \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[rru, bend left, "c"] \arrow[rr, bend right, "o_c"'] & \mathsf{cofree}(X,\alpha) \arrow[r] \arrow[ru, bend left, "\hat{c}"'] & 2^{A^*} \arrow[u, "\varepsilon?"']
\end{tikzcd}
$$

LIBRE

Sea (X, α) un autómata arbitrario. Explicaremos cómo construir un autómata que se corresponda con el mayor conjunto de ecuaciones satisfechas por (X, α). Dualmente, construiremos un autómata que se corresponda con el menor conjunto de coecuaciones satisfechas por (X, α).

LIBRE

Sea (X, α) un autómata arbitrario. Explicaremos cómo construir un autómata que se corresponda con el mayor conjunto de ecuaciones satisfechas por (X, α). Dualmente, construiremos un autómata que se corresponda con el menor conjunto de coecuaciones satisfechas por (X, α).

Por conveniencia en la notación asumiremos que X es finito, aunque la construcción se puede generalizar fácilmente al caso infinito.

LIBRE

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto de estados del autómata finito (X, α). Definimos el autómata punteado free(X, α) en dos pasos, como se sigue:

LIBRE

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto de estados del autómata finito (X, α). Definimos el autómata punteado free(X, α) en dos pasos, como se sigue:

(i) Consideramos, en primer lugar, el producto de los n autómatas punteados (X, x_i, α) que obtenemos al variar el elemento inicial x_i sobre X. Esto nos lleva al autómata punteado $(\Pi X, \bar{x}, \bar{\alpha})$ con

$$\Pi X = \prod_{x:1 \to X} X_x \quad \cong \quad X^n$$

(donde $X_x = X$), con $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, y con $\bar{\alpha} : \Pi X \to (\Pi X)^A$ definida como

$$\bar{\alpha}(y_1, \ldots, y_n)(a) = ((y_1)_a, \ldots, (y_n)_a)$$

LIBRE

(ii) Consideremos ahora la función de alcance $r_{\bar{x}} : A^* \to \Pi X$ y definimos:

$$\mathsf{Eq}(X,\alpha) = \ker(r_{\bar{x}}) \qquad \mathsf{free}(X,\alpha) = A^*/\mathsf{Eq}(X,\alpha)$$

LIBRE

(ii) Consideremos ahora la función de alcance $r_{\bar{x}} : A^* \to \Pi X$ y definimos:

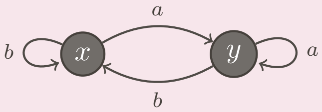
$$\mathsf{Eq}(X,\alpha) = \ker(r_{\bar{x}}) \qquad \mathsf{free}(X,\alpha) = A^*/\mathsf{Eq}(X,\alpha)$$

Esto nos lleva al autómata punteado $(\mathsf{free}(X,\alpha), [\varepsilon], [\sigma])$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, bend left, "{[\varepsilon]}"'] \arrow[drr, bend left, "\overline{x}"] & & \\
A^* \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "r_x"'] & \mathsf{free}(X,\alpha) \arrow[r] & \Pi X
\end{tikzcd}$$

TODO JUNTO

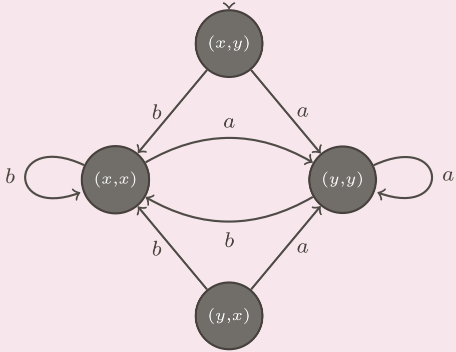
Ejemplo



TODO JUNTO

1er Paso. Construir el autómata producto

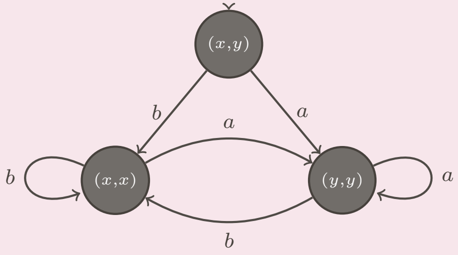
Ejemplo



TODO JUNTO

2do Paso. Tomar la imagen bajo la función de alcance $r_{\overline{x}}$

Ejemplo



TODO JUNTO

Definimos $\mathrm{Eq}(X, \alpha)$ como $\ker(r_{\overline{x}})$.

Ejemplo

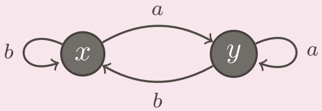
$$\mathrm{Eq}(X, \alpha) = \{aa = a, bb = b, ab = b, ba = a\}$$

TODO JUNTO

Definimos $\mathrm{Eq}(X, \alpha)$ como $\ker(r_{\overline{x}})$.

Ejemplo

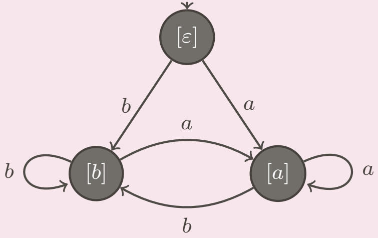
$$\mathrm{Eq}(X, \alpha) = \{aa = a, bb = b, ab = b, ba = a\}$$



TODO JUNTO

$\mathsf{free}(X, \alpha)$ es el cociente de A^* con $\mathsf{Eq}(X, \alpha)$.

Ejemplo



$$\mathsf{free}(X, \alpha) = A^*/\mathsf{Eq}(X, \alpha)$$

COLIBRE

Dualmente, sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto de estados del autómata finito (X, α). Definimos el autómata coloreado cofree(X, α) en dos pasos, como sigue:

COLIBRE

Dualmente, sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de estados del autómata finito (X, α). Definimos el autómata coloreado cofree(X, α) en dos pasos, como sigue:

(i) Tomamos, en primer lugar, el coproducto de los 2^n autómatas coloreados (X, c, α) que obtenemos al variar c sobre el conjunto $X \to 2$ de todas las posibles funciones de coloración. Esto nos lleva al autómata coloreado $(\Sigma X, \hat{c}, \hat{\alpha})$ con

$$\Sigma X = \sum_{c:X\to 2} X_c$$

(donde $X_c = X$), y con $\hat{c}$ y $\hat{\alpha}$ definida componente a componente.

COLIBRE

(ii) Consideremos ahora la función de observación $o_{\hat{c}} : \Sigma X \to 2^{A^*}$ y definimos:

$$\text{coEq}(X, \alpha) = \text{im}(o_{\hat{c}}) \qquad \text{cofree}(X, \alpha) = \text{coEq}(X, \alpha)$$

COLIBRE

(ii) Consideremos ahora la función de observación $o_{\hat{c}} : \Sigma X \to 2^{A^*}$ y definimos:

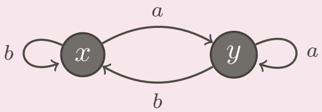
$$\mathsf{coEq}(X,\alpha) = \mathsf{im}(o_{\hat{c}}) \qquad \mathsf{cofree}(X,\alpha) = \mathsf{coEq}(X,\alpha)$$

Esto nos lleva al autómata coloreado $(\mathsf{cofree}(X,\alpha), \varepsilon?, \tau)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 2 \\
\Sigma X \arrow[r] \arrow[urr, bend left, "\hat{c}"] \arrow[rr, bend right, "o_{\hat{c}}"'] & \mathsf{cofree}(X,\alpha) \arrow[r] \arrow[ur, bend left, "\varepsilon?"] & 2^{A^*} \arrow[u, "\varepsilon?"']
\end{tikzcd}$$

TODO JUNTO

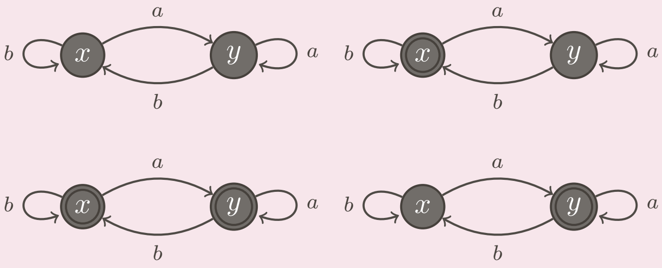
Ejemplo



TODO JUNTO

1er Paso. Construimos el autómata coproducto.

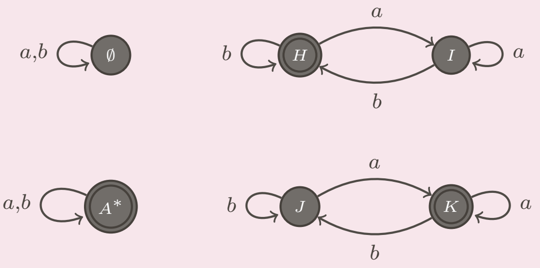
Ejemplo



TODO JUNTO

2do Paso. Tomamos la imagen bajo la función de observación $o_{\hat{c}}$.

Ejemplo



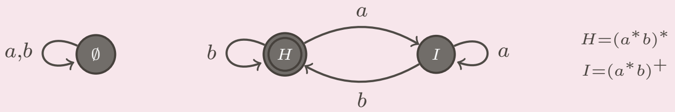
$H=(a^*b)^*$
$I=(a^*b)^+$

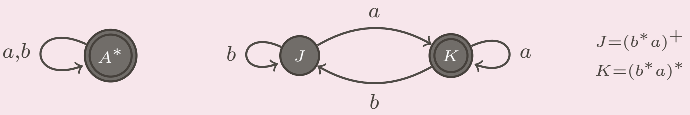
$J=(b^*a)^+$
$K=(b^*a)^*$

TODO JUNTO

Definimos coEq(X, α) como im$(o_{\hat{c}})$ y cofree$(X, \alpha) =$ coEq(X, α).

Ejemplo





cofree$(X, \alpha) =$ coEq(X, α)

EQUIVALENCIA DUAL

En esta sección veremos que, adecuadamente restringidos, las construcciones free y cofree son funtoriales, esto es, no sólo actúan en autómatas sino también en homomorfismos.

EQUIVALENCIA DUAL

En esta sección veremos que, adecuadamente restringidos, las construcciones free y cofree son funtoriales, esto es, no sólo actúan en autómatas sino también en homomorfismos.

Usaremos las siguientes categorías:

- $\mathcal{A}$: la categoría de los autómatas (X, α) y los homomorfismos de autómatas
- $\mathcal{A}_m$: la categoría de los autómatas (X, α) y los monomorfismos de autómatas
- $\mathcal{A}_e$: la categoría de los autómatas (X, α) y los epimorfismos de autómatas

FREE FUNTORIAL

Podemos extender la definición de free a monomorfismos, para obtener un funtor del siguiente tipo:

$$\text{free} : \mathcal{A}_m \to (\mathcal{A}_e)^{\text{op}}$$

Donde el superíndice op denota inversión de flechas.

FREE FUNTORIAL

Podemos extender la definición de free a monomorfismos, para obtener un funtor del siguiente tipo:

$$\mathsf{free} : \mathcal{A}_m \to (\mathcal{A}_e)^{\mathsf{op}}$$

Donde el superíndice op denota inversión de flechas.

Para monomorfismos,

$$\begin{array}{ccc} (X,\alpha) & & \mathsf{free}(X,\alpha) \\ {\scriptstyle m}\big\downarrow & \overset{\mathsf{free}}{\longmapsto} & \big\uparrow \mathsf{free}(m) \\ (Y,\beta) & & \mathsf{free}(Y,\beta) \end{array}$$

donde free(m) se define simplemente por cociente. Notemos que la existencia del monomorfismo m implica Eq$(Y,\beta) \subseteq$ Eq(X,α).

COFREE FUNTORIAL

Dualmente, podemos extender la definición de cofree a epimorfismos, de forma que obtenemos un funtor del siguiente tipo:

$$\text{cofree} : \mathcal{A}_e \to (\mathcal{A}_m)^{\text{op}}$$

COFREE FUNTORIAL

Dualmente, podemos extender la definición de cofree a epimorfismos, de forma que obtenemos un funtor del siguiente tipo:

$$\text{cofree} : \mathcal{A}_e \to (\mathcal{A}_m)^{\text{op}}$$

Para epimorfimos,

$$\begin{array}{ccc} (X,\alpha) & & \text{cofree}(X,\alpha) \\ {\scriptstyle e}\downarrow & \overset{\text{cofree}}{\longmapsto} & \uparrow \text{cofree}(e) \\ (Y,\beta) & & \text{cofree}(Y,\beta) \end{array}$$

donde cofree(e) es simplemente inclusión de conjuntos. Notemos que la existencia del epimorfismo e implica que coEq$(Y,\beta) \subseteq$ coEq(X,α).

COCIENTES DE CONGRUENCIA

Definición

Definimos la categoría $\mathcal{C}$ de cocientes de congruencia, definida como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \text{objects}(\mathcal{C}) & = & \{\, (A^*/C, [\sigma]) \mid C \text{ es una congruencia } \} \\ \text{arrows}(\mathcal{C}) & = & \{\, e : A^*/C \to A^*/D \mid e \text{ es un epimorfismo} \,\} \end{array}$$

COCIENTES DE CONGRUENCIA

Definición

Definimos la categoría $\mathcal{C}$ de cocientes de congruencia, definida como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \text{objects}(\mathcal{C}) & = & \{\, (A^*/C, [\sigma]) \mid \ C \text{ es una congruencia } \} \\ \text{arrows}(\mathcal{C}) & = & \{\, e : A^*/C \to A^*/D \mid \ e \text{ es un epimorfismo} \,\} \end{array}$$

Teorema

$\text{free}(\mathcal{A}_m) = \mathcal{C}^{\text{op}}$

VARIEDAD DE LENGUAJES

Definición

Una variedad de lenguajes, es un conjunto $V \subseteq 2^{A^*}$ tal que:

(i) V es una subálgebra Booleana atómica y completa de 2^{A^*}.

(ii) si $L \in V$ entonces para todo $a \in A$, ambas L_a y ${}_aL \in V$

VARIEDAD DE LENGUAJES

Definición

Introducimos la categoría $\mathcal{V}$ de variedades de lenguajes, definida como sigue:

$$\begin{aligned} \text{objects}(\mathcal{V}) &= \{\, (V,\tau) \mid V \text{ es una variedad de lenguajes } \} \\ \text{arrows}(\mathcal{V}) &= \{\, m : V \to W \mid m \text{ es un monomorfismo} \,\} \end{aligned}$$

VARIEDAD DE LENGUAJES

Definición

Introducimos la categoría $\mathcal{V}$ de variedades de lenguajes, definida como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \text{objects}(\mathcal{V}) & = & \{\,(V,\tau) \mid V \text{ es una variedad de lenguajes }\} \\ \text{arrows}(\mathcal{V}) & = & \{\,m : V \to W \mid m \text{ es un monomorfismo}\,\} \end{array}$$

Teorema

$\text{cofree}(\mathcal{C}) = \mathcal{V}^{\text{op}}$

TEOREMA PRINCIPAL

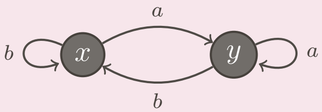
Obtenemos la siguiente equivalencia dual.

Teorema

$\mathrm{cofree}\colon \mathcal{C} \cong \mathcal{V}^{\mathrm{op}} \colon \mathrm{free}$

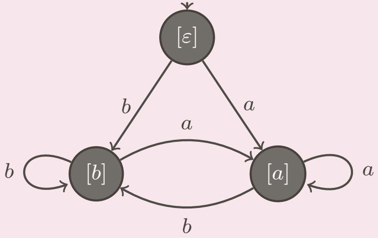
ILUSTRANDO LA DUALIDAD

Ejemplo



ILUSTRANDO LA DUALIDAD

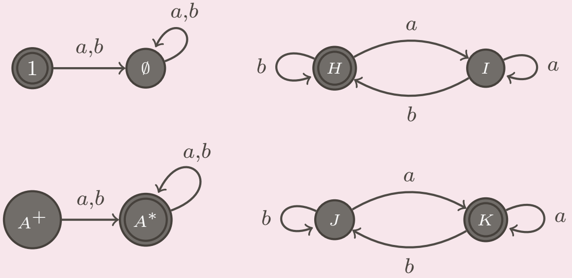
Ejemplo



free(X, α)

IUSTRANDO LA DUALIDAD

Ejemplo



$H = (a^* b)^*$

$I = (a^* b)^+$

$J = (b^* a)^+$

$K = (b^* a)^*$

$$\text{cofree} \circ \text{free}(X, \alpha)$$

ILUSTRANDO LA DUALIDAD

Para entender mejor la dualidad, consideremos el autómata cociente $(A^*/C, [\sigma])$. Para la palabra $w \in A^*$, consideremos la coloración:

$$\begin{array}{rccc} \delta_{[w]}: & A^*/C & \longrightarrow & 2 \\ & [v] & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } [v] = [w] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{array}$$

ILUSTRANDO LA DUALIDAD

Para entender mejor la dualidad, consideremos el autómata cociente $(A^*/C, [\sigma])$. Para la palabra $w \in A^*$, consideremos la coloración:

$$\begin{array}{rccl} \delta_{[w]}: & A^*/C & \longrightarrow & 2 \\ & [v] & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } [v] = [w] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{array}$$

Bajo esta coloración, se cumple:

$$o_{\delta_{[w]}}([\varepsilon]) = [w]$$

ILUSTRANDO LA DUALIDAD

Para entender mejor la dualidad, consideremos el autómata cociente $(A^*/C, [\sigma])$. Para la palabra $w \in A^*$, consideremos la coloración:

$$\begin{array}{rccl} \delta_{[w]} : & A^*/C & \longrightarrow & 2 \\ & [v] & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } [v] = [w] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{array}$$

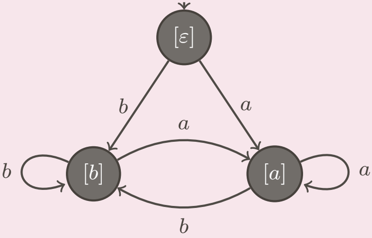
Bajo esta coloración, se cumple:

$$o_{\delta_{[w]}}([\varepsilon]) = [w]$$

Es decir, todo estado $[w] \in A^*/C$ también pertenece a cofree$(A^*/C, [\sigma])$.

ILUSTRANDO LA DUALIDAD

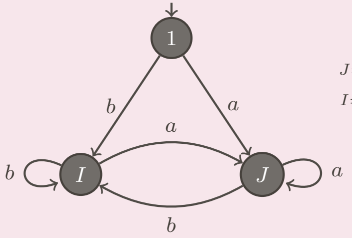
Ejemplo



free(X, α)

ILUSTRANDO LA DUALIDAD

Ejemplo



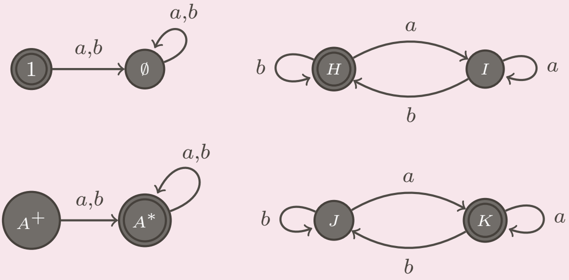
$J = (b^* a)^+$

$I = (a^* b)^+$

$\mathrm{free}(X, \alpha)$

ILUSTRANDO LA DUALIDAD

Ejemplo



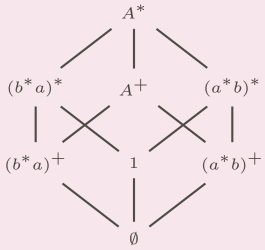
$H=(a^*b)^*$
$I=(a^*b)^+$

$J=(b^*a)^+$
$K=(b^*a)^*$

$$\text{cofree} \circ \text{free}(X, \alpha)$$

ILUSTRANDO LA DUALIDAD

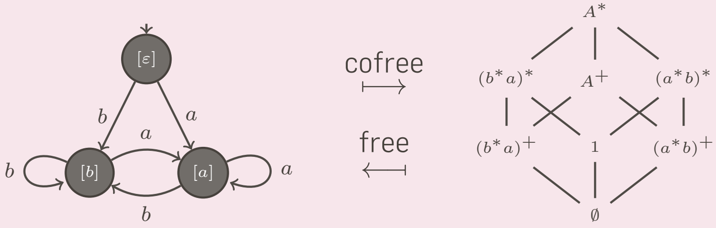
Ejemplo



$$\text{cofree} \circ \text{free}(X, \alpha)$$

ILUSTRANDO LA DUALIDAD

Ejemplo

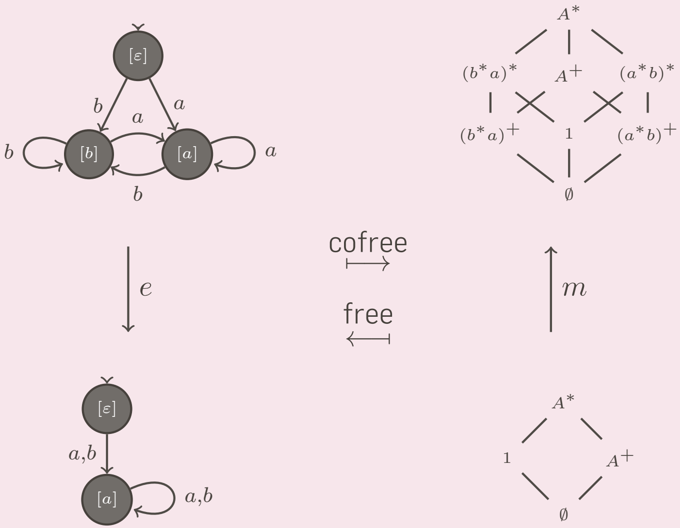


ILUSTRANDO LA DUALIDAD

Esto es, olvidándonos toda la estructura de autómata recuperamos la dualidad clásica:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Set} \arrow[r, bend left, "\text{powerset}"] & \mathsf{CABA}^{\mathsf{op}} \arrow[l, bend left, "\text{atoms}"]
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo



BIBLIOGRAPHY

M. Gehrke,
Duality and recognition,
MFCS, volume 6907 of LNCS, pages 3-18, 2011.

M. Gehrke, S. Grigorieff, J.-E. Pin,
Duality and equational theory of regular languages,
In Proceedings of ICALP, pages 246-257, 2008.

J.J.M.M. Rutten, A. Ballester-Bolinches, E. Cosme-Llópez,
Varieties and covarieties of languages (preliminary version),
In Proceedings of MFPS XXIX, pages 7-28, 2013.

F. Roumen,
Canonical automata via duality,
Master's thesis, Radboud Universiteit Nijmegen, 2011.

HSRM Beamer Theme, by Benjamin Weiss.