VARIEDADES Y COVARIEDADES DE LENGUAJES

Congreso de Jóvenes Investigadores, RSME

Sevilla, 2013

Enric Cosme-Llópez

Departament d'Àlgebra
Universitat de València

PRELIMINARES

AUTÓMATA

Definición

Sea A un alfabeto finito. Un autómata es un par (X, α) consistente en un conjunto X de estados (posiblemente infinito) y una función de transición

$$\alpha : X \to X^A$$

AUTÓMATA

Definición

Sea A un alfabeto finito. Un autómata es un par (X, α) consistente en un conjunto X de estados (posiblemente infinito) y una función de transición

$$\alpha : X \to X^A$$

Utilizaremos la siguiente notación:

$$x \xrightarrow{a} y \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x)(a) = y$$

AUTÓMATA

Definición

Sea A un alfabeto finito. Un autómata es un par (X, α) consistente en un conjunto X de estados (posiblemente infinito) y una función de transición

$$\alpha : X \to X^A$$

Utilizaremos la siguiente notación:

$$x \xrightarrow{a} y \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x)(a) = y$$

También escribiremos $x_a = \alpha(x)(a)$ y, de forma más general,

$$x_\varepsilon = x \qquad x_{wa} = \alpha(x_w)(a)$$

AUTÓMATAS PUNTEADOS Y COLOREADOS

Definición

Un autómata puede tener estado inicial $x \in X$. Representado por una función

$$x : 1 \to X$$

Llamaremos a la tupla (X, α, x) autómata punteado

AUTÓMATAS PUNTEADOS Y COLOREADOS

Definición

Un autómata puede tener estado inicial $x \in X$. Representado por una función

$$x : 1 \to X$$

Llamaremos a la tupla (X, α, x) autómata punteado

Definición

Un estado también puede ser final o no. Representado por una función

$$c : X \to 2$$

Diremos que el estado x es final si $c(x) = 1$ y llamaremos a la tupla (X, α, c) autómata coloreado.

DIAGRAMA

Todos estos objetos pueden representarse mediante el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
& X \arrow[ur, bend left, "c"] \arrow[d, "\alpha"'] & \\
& X^A &
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA

Todos estos objetos pueden representarse mediante el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
& X \arrow[ur, bend left, "c"] \arrow[d, "\alpha"'] & \\
& X^A &
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA

Todos estos objetos pueden representarse mediante el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, bend left, "x"] & & 2 \\
& X \arrow[ur, bend left, "c"] \arrow[d, "\alpha"'] & \\
& X^A &
\end{tikzcd}$$

AUTÓMATAS DISTINGUIDOS

ÁLGEBRA INICIAL

El conjunto A^* forma un autómata punteado $(A^*, \sigma, \varepsilon)$ con estado inicial ε y función de transición definida por

$$\sigma : A^* \to (A^*)^A \quad \sigma(w)(a) = wa$$

ÁLGEBRA INICIAL

El conjunto A^* forma un autómata punteado $(A^*, \sigma, \varepsilon)$ con estado inicial ε y función de transición definida por

$$\sigma : A^* \to (A^*)^A \quad \sigma(w)(a) = wa$$

Proposición

$(A^*, \sigma, \varepsilon)$ es un álgebra inicial.

ÁLGEBRA INICIAL

El conjunto A^* forma un autómata punteado $(A^*, \sigma, \varepsilon)$ con estado inicial ε y función de transición definida por

$$\sigma : A^* \to (A^*)^A \quad \sigma(w)(a) = wa$$

Proposición

$(A^*, \sigma, \varepsilon)$ es un álgebra inicial.

Para todo autómata (X, α) y cualquier elección de estado inicial $x : 1 \to X$, induce un único homomorfismo $r_x : A^* \to X$, dado por

$$r_x(w) = x_w$$

COÁLGEBRA FINAL

El conjunto 2^{A^*} de lenguajes forma un autómata coloreado $(2^{A^*}, \tau, \varepsilon?)$ con función de coloración $\varepsilon?$ definida por

$$\varepsilon? : 2^{A^*} \to 2 \qquad \varepsilon?(L) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon \in L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

COÁLGEBRA FINAL

El conjunto 2^{A^*} de lenguajes forma un autómata coloreado $(2^{A^*}, \tau, \varepsilon?)$ con función de coloración $\varepsilon?$ definida por

$$\varepsilon? : 2^{A^*} \to 2 \qquad \varepsilon?(L) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon \in L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y función de transición dada por

$$\tau : 2^{A^*} \to (2^{A^*})^A \quad \tau(L)(a) = L_a = \{v \in A^* \mid av \in L\}$$

COÁLGEBRA FINAL

El conjunto 2^{A^*} de lenguajes forma un autómata coloreado $(2^{A^*}, \tau, \varepsilon?)$ con función de coloración $\varepsilon?$ definida por

$$\varepsilon? : 2^{A^*} \to 2 \qquad \varepsilon?(L) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon \in L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y función de transición dada por

$$\tau : 2^{A^*} \to (2^{A^*})^A \quad \tau(L)(a) = L_a = \{v \in A^* \mid av \in L\}$$

Proposición

$(2^{A^*}, \tau, \varepsilon?)$ es una coálgebra final.

COÁLGEBRA FINAL

El conjunto 2^{A^*} de lenguajes forma un autómata coloreado $(2^{A^*}, \tau, \varepsilon?)$ con función de coloración $\varepsilon?$ definida por

$$\varepsilon? : 2^{A^*} \to 2 \qquad \varepsilon?(L) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon \in L \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y función de transición dada por

$$\tau : 2^{A^*} \to (2^{A^*})^A \quad \tau(L)(a) = L_a = \{v \in A^* \mid av \in L\}$$

Proposición

$(2^{A^*}, \tau, \varepsilon?)$ es una coálgebra final.

Para todo autómata (X, α) y cualquier elección de función de coloración $c : X \to 2$, induce un único homomorfismo $o_c : X \to 2^{A^*}$, dado por

$$o_c(x) = \{w \in A^* \mid c(x_w) = 1\}$$

DIAGRAMA

En suma,

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[r, bend left, "x"] & X \arrow[r, bend left, "c"] & 2 \\
A^* \arrow[r, dashed, "r_x"'] \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[r, dashed, "o_c"'] \arrow[d, "\alpha"'] & 2^{A^*} \arrow[u, "\varepsilon?"'] \arrow[d, "\tau"'] \\
(A^*)^A \arrow[r, dashed, "r_x^A"'] & X^A \arrow[r, dashed, "(o_c)^A"'] & (2^{A^*})^A
\end{tikzcd}
$$

ECUACIONES Y COECUACIONES

ECUACIÓN

Definición

Un conjunto de ecuaciones es una congruencia a derecha $E \subseteq A^* \times A^*$ en el autómata inicial (A^*, σ).

ECUACIÓN

Definición

Un conjunto de ecuaciones es una congruencia a derecha $E \subseteq A^* \times A^*$ en el autómata inicial (A^*, σ).

Definición

Diremos que el autómata punteado (X, α, x) satisface E

$$(X, \alpha, x) \models E \quad \Leftrightarrow \quad \forall (v, w) \in E,\ \ x_v = x_w$$

ECUACIÓN

Definición

Un conjunto de ecuaciones es una congruencia a derecha $E \subseteq A^* \times A^*$ en el autómata inicial (A^*, σ).

Definición

Diremos que el autómata punteado (X, α, x) satisface E

$$(X, \alpha, x) \models E \quad \Leftrightarrow \quad \forall (v, w) \in E,\ \ x_v = x_w$$

Definimos:

$$(X, \alpha) \models E \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : 1 \to X,\ \ (X, \alpha, x) \models E$$

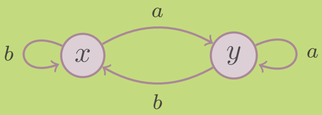
ECUACIONES

Sean $v, w \in A^*$, consideramos la abreviatura $v = w$ para denotar la menor congruencia a derecha en A^* que contiene (v, w).

ECUACIONES

Sean $v, w \in A^*$, consideramos la abreviatura $v = w$ para denotar la menor congruencia a derecha en A^* que contiene (v, w).

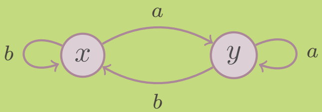
Ejemplo



ECUACIONES

Sean $v, w \in A^*$, consideramos la abreviatura $v = w$ para denotar la menor congruencia a derecha en A^* que contiene (v, w).

Ejemplo

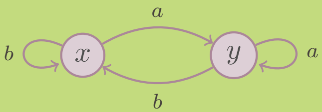


$$(X, \alpha, x) \models \{b = \varepsilon,\ ab = \varepsilon,\ aa = a\}$$

ECUACIONES

Sean $v, w \in A^*$, consideramos la abreviatura $v = w$ para denotar la menor congruencia a derecha en A^* que contiene (v, w).

Ejemplo



$$(X, \alpha, x) \models \{b = \varepsilon,\ ab = \varepsilon,\ aa = a\}$$

$$(X, \alpha, y) \models \{a = \varepsilon,\ ba = \varepsilon,\ bb = b\}$$

COECUACIONES

Definición

Un conjunto de coecuaciones es un subautómata $D \leq 2^{A^*}$ del autómata final $(2^{A^*}, \tau)$.

COECUACIONES

Definición

Un conjunto de coecuaciones es un subautómata $D \leq 2^{A^*}$ del autómata final $(2^{A^*}, \tau)$.

Definición

Diremos que el autómata (X, α, c) satisface D

$$(X, \alpha, c) \models D \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X, \;\; o_c(x) \in D$$

COECUACIONES

Definición

Un conjunto de coecuaciones es un subautómata $D \leq 2^{A^*}$ del autómata final $(2^{A^*}, \tau)$.

Definición

Diremos que el autómata (X, α, c) satisface D

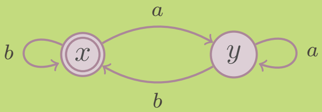
$$(X, \alpha, c) \models D \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X,\ \ o_c(x) \in D$$

Definimos:

$$(X, \alpha) \models D \quad \Leftrightarrow \quad \forall c : X \to 2,\ \ (X, \alpha, c) \models D$$

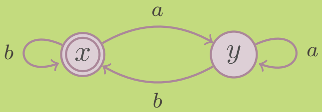
COECUACIONES

Ejemplo



COECUACIONES

Ejemplo

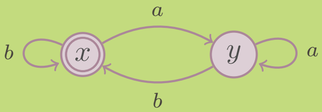


Bajo la función de observabilidad tenemos:

$$o_c(x) = (a^*b)^* \qquad o_c(y) = (a^*b)^+$$

COECUACIONES

Ejemplo



Bajo la función de observabilidad tenemos:

$$o_c(x) = (a^*b)^* \qquad o_c(y) = (a^*b)^+$$

por lo que,

$$(X, \alpha, c) \models \{(a^*b)^*, (a^*b)^+\}$$

EQ(X, α), COEQ(X, α)

Definición

Definimos Eq(X, α) como el mayor conjunto de ecuaciones que el autómata (X, α) satisface.

EQ(X, α), COEQ(X, α)

Definición

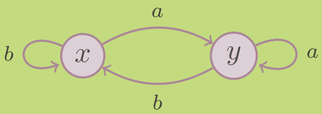
Definimos Eq(X, α) como el mayor conjunto de ecuaciones que el autómata (X, α) satisface.

Definición

Definimos coEq(X, α) como el menor conjunto de coecuaciones que el autómata (X, α) satisface.

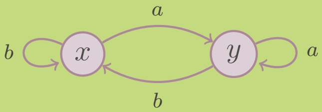
EN UN EJEMPLO CONCRETO

Ejemplo



EN UN EJEMPLO CONCRETO

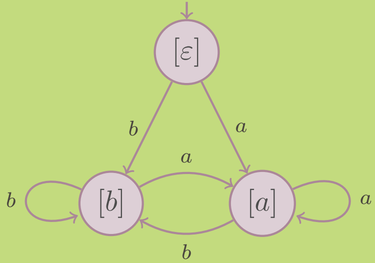
Ejemplo



$$\mathsf{Eq}(X, \alpha) = \{aa = a, bb = b, ab = b, ba = a\}$$

EN UN EJEMPLO CONCRETO

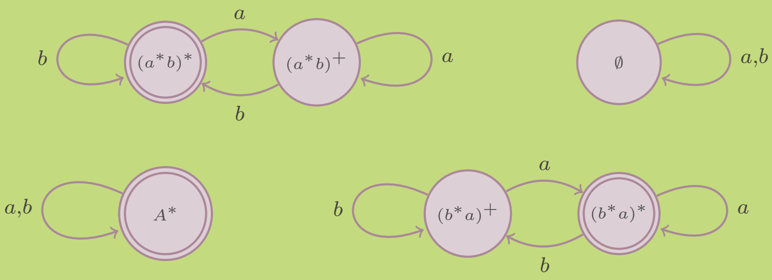
Ejemplo



$$A^*/\mathsf{Eq}(X, \alpha)$$

EN UN EJEMPLO CONCRETO

Ejemplo



coEq(X, α)

VARIEDADES Y COVARIEDADES

VARIEDADES

Definición

Para cada conjunto E de ecuaciones definimos la variedad V_E como

$$V_E = \{(X, \alpha) \mid (X, \alpha) \models E\}$$

VARIEDADES

Definición

Para cada conjunto E de ecuaciones definimos la variedad V_E como

$$V_E = \{(X, \alpha) \mid (X, \alpha) \models E\}$$

Proposición

Toda variedad V_E está cerrada bajo la formación de subautómatas, imágenes homomorfas y productos.

COVARIEDADES

Definición

Para cada conjunto D de coecuaciones definimos la covariedad C_D como

$$C_D = \{(X, \alpha) \mid (X, \alpha) \models D\}$$

COVARIEDADES

Definición

Para cada conjunto D de coecuaciones definimos la covariedad C_D como

$$C_D = \{(X, \alpha) \mid (X, \alpha) \models D\}$$

Proposición

Toda covariedad C_D está cerrada bajo la formación de subautómatas, imágenes homomorfas y coproductos.

LENGUAJES

Definición

Sea V_E una variedad. Definimos la variedad de lenguajes $L(V_E)$ como

$$L(V_E) = \{L \in 2^{A^*} \mid \langle L \rangle \in V_E\}$$

LENGUAJES

Definición

Sea V_E una variedad. Definimos la variedad de lenguajes $L(V_E)$ como

$$L(V_E) = \{L \in 2^{A^*} \mid \langle L \rangle \in V_E\}$$

Definición

Sea C_D una covariedad. Definimos la covariedad de lenguajes $L(C_D)$ como

$$L(C_D) = \{L \in 2^{A^*} \mid \langle L \rangle \in C_D\}$$

DE ECUACIONES Y VARIEDADES

Teorema

Sea E un conjunto de ecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

DE ECUACIONES Y VARIEDADES

Teorema

Sea E un conjunto de ecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. E es una congruencia.

DE ECUACIONES Y VARIEDADES

Teorema

Sea E un conjunto de ecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. E es una congruencia.
ii. $E = \mathrm{Eq}(X, \alpha)$ para algún autómata (X, α).

DE ECUACIONES Y VARIEDADES

Teorema

Sea E un conjunto de ecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. E es una congruencia.
ii. $E = \mathrm{Eq}(X, \alpha)$ para algún autómata (X, α).
iii. $(A^*/E, [\sigma]) \models E$.

DE ECUACIONES Y VARIEDADES

Teorema

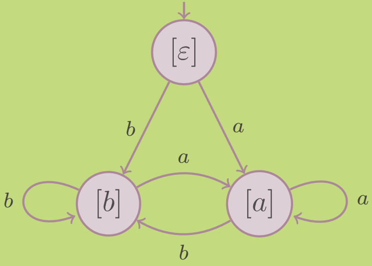
Sea E un conjunto de ecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. E es una congruencia.
ii. $E = \mathrm{Eq}(X, \alpha)$ para algún autómata (X, α).
iii. $(A^*/E, [\sigma]) \models E$.
iv. $\mathrm{Eq}(A^*/E, [\sigma]) = E$.

EN UN EJEMPLO CONCRETO

Ejemplo



$A^*/\mathsf{Eq}(X, \alpha)$

DE COECUACIONES Y COVARIEDADES

Teorema

Sea D un conjunto de coecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

DE COECUACIONES Y COVARIEDADES

Teorema

Sea D un conjunto de coecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. $D = \mathrm{coEq}(X, \alpha)$ para algún autómata (X, α).

DE COECUACIONES Y COVARIEDADES

Teorema

Sea D un conjunto de coecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. $D = \mathrm{coEq}(X, \alpha)$ para algún autómata (X, α).
ii. $(D, \tau) \models D$.

DE COECUACIONES Y COVARIEDADES

Teorema

Sea D un conjunto de coecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. $D = \mathrm{coEq}(X, \alpha)$ para algún autómata (X, α).
ii. $(D, \tau) \models D$.
iii. $\mathrm{coEq}(D, \tau) = D$.

DE COECUACIONES Y COVARIEDADES

Teorema

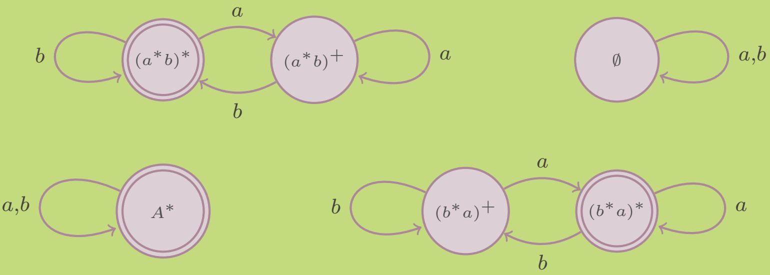
Sea D un conjunto de coecuaciones.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. $D = \text{coEq}(X, \alpha)$ para algún autómata (X, α).
ii. $(D, \tau) \models D$.
iii. $\text{coEq}(D, \tau) = D$.
iv. $L(C_D) = D$.

EN UN EJEMPLO CONCRETO

Ejemplo



coEq(X, α)

BIBLIOGRAFÍA

S. Eilenberg,
Automata, languages and machines (Vol. A and B),
Pure and applied mathematics. Academic Press, 1974.

J. Rutten,
Universal coalgebra: a theory of systems,
Elsevier, Theoretical Computer Science, Amsterdam, 2000.

J. Rutten, A. Ballester-Bolinches, E. Cosme-Llópez
Varieties and covarieties of languages (preliminary version),
MFPS XXIX Proceedings, 2013.

D. Sangiorgi, J. Rutten,
Advanced Topics in Bisimulation and Coinduction,
Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 2012.