

Coàlgebra Universal Aplicada a la Teoria d'Autòmats



VNIVERSITAT
ID VALÈNCIA

Enric Cosme Llópez

Burjassot, Maig 2012

0. Introducció

La Coàlgebra Universal és una teoria per al tractament matemàtic dels sistemes.

0. Introducció

La Coàlgebra Universal és una teoria per al tractament matemàtic dels sistemes.

Ens permet:

- Modelitzar sistemes.
- Tindre una definició natural de morfisme entre sistemes.
- Detectar equivalències en els comportament dels estats.
- Simplificar sistemes.

1. Teoria d'Autòmats

Definició

Un *autòmata finit no determinista*, o *AFND*, és una quintupla

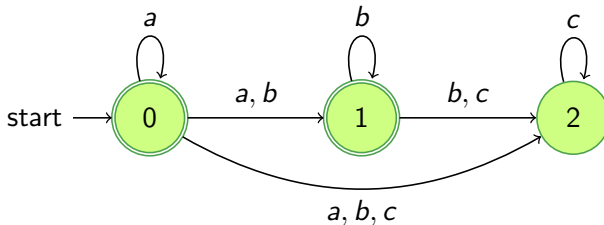
$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, on:

- Q és un conjunt finit d'*estats*.
- Σ és un conjunt finit que rep el nom d'*alfabet*. Els elements de Σ s'anomenen *lletres*.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ és una funció parcial anomenada *funció de transició*.
- $q_0 \in Q$ és l'estat *inicial*.
- $F \subseteq Q$ és el conjunt d'estats *finals*.

1. Teoria d'Autòmats

Exemple

Siga $\mathcal{A} = (\{0, 1, 2\}, \{a, b, c\}, \delta, 0, \{0, 1\})$ el AFND amb el corresponent diagrama de transició donat per:



1. Teoria d'Autòmats

Definició

Siga $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFND. La funció $N : Q \rightarrow \mathcal{P}(2)$ definida per a cada $p \in Q$ com a:

- $0 \in N(p)$ si i només si $p = q_0$.
- $1 \in N(p)$ si i només si $p \in F$.

rep el nom de *natura de l'estat p* .

1. Teoria d'Autòmats

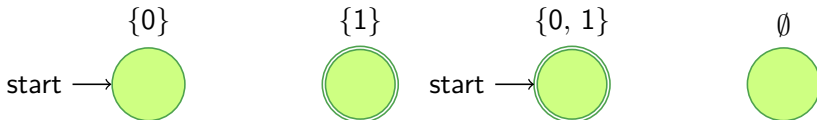
Definició

Siga $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFND. La funció $N : Q \rightarrow \mathcal{P}(2)$ definida per a cada $p \in Q$ com a:

- $0 \in N(p)$ si i només si $p = q_0$.
- $1 \in N(p)$ si i només si $p \in F$.

rep el nom de *natura de l'estat* p .

Exemple



1. Teoria d'Autòmats

Definició

Siga $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFND, i siga $w \in \Sigma^*$ una paraula. Direm que w és *acceptada* per un estat $q \in Q$ quan $q \xrightarrow{w} p$ amb $p \in F$. Es defineix el llenguatge acceptat per q com a:

$$L_q = \{w \in \Sigma^* : w \text{ és una paraulada acceptada per } q\}$$

1. Teoria d'Autòmats

Definició

Siga $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFND, i siga $w \in \Sigma^*$ una paraula. Direm que w és *acceptada* per un estat $q \in Q$ quan $q \xrightarrow{w} p$ amb $p \in F$. Es defineix el llenguatge acceptat per q com a:

$$L_q = \{w \in \Sigma^* : w \text{ és una paraulada acceptada per } q\}$$

Definim així, *llenguatge acceptat* de l'AFND $\mathcal{A}$ com a:

$$L(\mathcal{A}) = L_{q_0}$$

2. Autòmats com a Coàlgebres

Definició

Siga **Set** la categoria dels conjunts. Donat un endofunctor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, una *F-coàlgebra* (o *F-sistema*) consisteix en un parell (X, α) , on X és un conjunt i $\alpha : X \rightarrow FX$ és una funció qualsevol. Direm que X és la *base* i α serà la *funció estructural* de la coàlgebra.

3. Homomorfismes entre Coàlgebres

Definició

Siguen (X, α) i (Y, β) dues F -coàlgebres. Un *homomorfisme entre F -coàlgebres*, $f : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$ és una funció $f : X \rightarrow Y$ que fa commutar el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ FX & \xrightarrow{Ff} & FY \end{array}$$

3. Homomorfismes entre Coàlgebres

Proposició

Siguen $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ i $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Una funció $f : Q \rightarrow Q'$ és un homomorfisme d'autòmats sii:

3. Homomorfismes entre Coàlgebres

Proposició

Siguen $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ i $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Una funció $f : Q \rightarrow Q'$ és un homomorfisme d'autòmats sii:

1. $N(q) = N(f(q))$

3. Homomorfismes entre Coàlgebres

Proposició

Siguen $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ i $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Una funció $f : Q \rightarrow Q'$ és un homomorfisme d'autòmats sii:

1. $N(q) = N(f(q))$
2. $q \xrightarrow{a} p \Rightarrow f(q) \xrightarrow{a} f(p)$

3. Homomorfismes entre Coàlgebres

Proposició

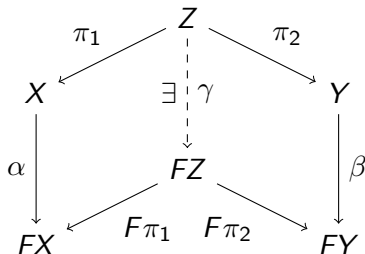
Siguen $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ i $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Una funció $f : Q \rightarrow Q'$ és un homomorfisme d'autòmats sii:

1. $N(q) = N(f(q))$
2. $q \xrightarrow{a} p \Rightarrow f(q) \xrightarrow{a} f(p)$
3. $f(q) \xrightarrow{a} p' \Rightarrow \exists p \in Q (q \xrightarrow{a} p \text{ i } f(p) = p')$

4. Bisimulacions

Definició

Donades (X, α) i (Y, β) dues F -coàlgebres. Un subconjunt $Z \subseteq X \times Y$ del producte cartesià s'anomena una *F -bisimulació* si existeix una funció estructural $\gamma : Z \rightarrow FZ$ de forma que les projeccions de Z a X i a Y respectivament són homomorfismes entre F -coàlgebres.



4. Bisimulacions

Definició

- Dos elements $x \in X$, $y \in Y$ són *bisimilars*, i ho escriurem $x \Leftrightarrow y$, si existeix una bisimulació Z tal que $\langle x, y \rangle \in Z$.
- Per al cas en que $(X, \alpha) = (Y, \beta)$, definim *equivalència bisimulacional* com aquella bisimulació que és, a més, relació binària d'equivalència.

4. Bisimulacions

Proposició

Siguen $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ i $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Considerem $q \in Q$ i $q' \in Q'$. Llavors $q \Leftrightarrow q'$ sii:

4. Bisimulacions

Proposició

Siguen $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ i $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Considerem $q \in Q$ i $q' \in Q'$. Llavors $q \Leftrightarrow q'$ sii:

1. $N(q) = N(q')$

4. Bisimulacions

Proposició

Siguen $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ i $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Considerem $q \in Q$ i $q' \in Q'$. Llavors $q \Leftrightarrow q'$ sii:

1. $N(q) = N(q')$
2. $q \xrightarrow{a} p \Rightarrow q' \xrightarrow{a} p'$ tal que $p \Leftrightarrow p'$

4. Bisimulacions

Proposició

Siguen $\mathcal{A} = (Q, \alpha)$ i $\mathcal{A}' = (Q', \alpha')$ dos AFND. Considerem $q \in Q$ i $q' \in Q'$. Llavors $q \Leftrightarrow q'$ sii:

1. $N(q) = N(q')$
2. $q \xrightarrow{a} p \Rightarrow q' \xrightarrow{a} p'$ tal que $p \Leftrightarrow p'$
3. $q' \xrightarrow{a} p' \Rightarrow q \xrightarrow{a} p$ tal que $p \Leftrightarrow p'$

5. Quocients

Teorema

Siga (X, α) una F -coàlgebra i siga Z un equivalència bisimulacional en X . Llavors existeix una funció estructural $\gamma_Z : X/Z \rightarrow F(X/Z)$ que transforma l'aplicació quotient $\pi_Z : X \rightarrow X/Z$ en un homomorfisme entre coàlgebres.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_Z} & X/Z \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \exists! \gamma_Z \\ FX & \xrightarrow{F\pi_Z} & F(X/Z) \end{array}$$

Bibliography



B. Jacobs,

Introduction to Coalgebra,

Draft Copy, Version 1.00, 22nd April 2005.



A. Kurz,

Coalgebras and Modal Logic,

Lecture Notes, Amsterdam, 2001.



J. Rutten,

Universal coalgebra: a theory of systems,

Elsevier, Theoretical Computer Science, Amsterdam, 2000.



D. Sangiorgi, J. Rutten,

Advanced Topics in Bisimulation and Coinduction,

Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 2012.