



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

ACCIONS DE MONOIDES

Universitat de València

Burjassot, 2014

Enric Cosme

Departament d'Àlgebra
Universitat de València



ACCI3

Definici3

Siga M un monoide i siga X un conjunt qualsevol. Direm que M **actua a l'esquerra** d' X si existeix una funci3:

$$\begin{array}{rcl} : & M \times X & \longrightarrow X \\ & (m, x) & \longmapsto mx \end{array}$$

que compleix les següents propietats:

- a1. Per a tot $m_1, m_2 \in M$ i $x \in X$, $m_2(m_1x) = (m_2m_1)x$
- a2. Per a tot $x \in X$, $1x = x$

Direm que X és un M -conjunt a esquerra.

ACCI3

L'acci3 natural

Siga M un monoide. Podem definir una acci3 en M emprant la seua pr3pia llei de multiplicaci3 interna:

$$\begin{array}{rcl} : & M \times M & \longrightarrow M \\ & (m_1, m_2) & \longmapsto m_1 m_2 \end{array}$$

ACCI3

L'acci3 natural

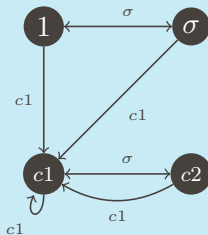
Siga M un monoide. Podem definir una acci3 en M emprant la seua pr3pia llei de multiplicaci3 interna:

$$\begin{array}{rcl} : & M \times M & \longrightarrow M \\ & (m_1, m_2) & \longmapsto m_1 m_2 \end{array}$$

Vegem un parell d'accions del monoide de transformacions d'un conjunt de dos elements, $\mathcal{T}_2$.

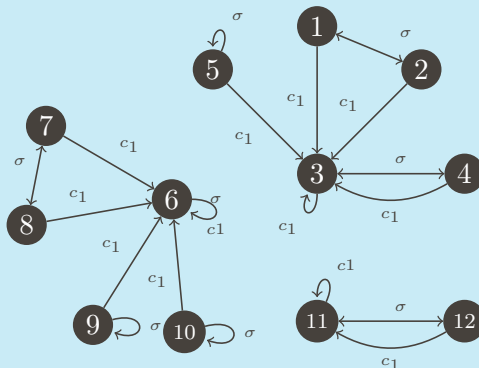
ACCIONS

L'acci3 natural de $\mathcal{T}_2$



ACCIONS

Una acci33 arbitr3ria de $\mathcal{T}_2$ en un conjunt de 12 elements



M -MORFISME

Definici3

Siguen X i Y dos M -conjunts, es defineix **M -morfisme** d' X a Y com aquella funci3 $f : X \rightarrow Y$ que compleix que

$$f(m \cdot x) = m \cdot f(x)$$

per a tota m d' M i tota $x \in X$.

Si f 3s bijectiva, direm que les accions s3n **equivalents**.

CONGRUÈNCIES

Definició

Siga X un M -conjunt. Una relació $\Theta \subseteq X \times X$ s'anomena **estable a l'esquerra** si per a cada $x, y \in X$ i $m \in M$, la condició

$$x\Theta y \text{ implica } mx\Theta my$$

Una **congruència a esquerra** és una relació d'equivalència estable a l'esquerra.

CONGRUÈNCIES

Definició

Siga X un M -conjunt. Una relació $\Theta \subseteq X \times X$ s'anomena **estable a l'esquerra** si per a cada $x, y \in X$ i $m \in M$, la condició

$$x\Theta y \text{ implica } mx\Theta my$$

Una **congruència a esquerra** és una relació d'equivalència estable a l'esquerra.

Hom pot definir una acció natural al quocient X/Θ en termes de l'acció definida a X de tal forma que l'epimorfisme canònic $\pi_\Theta : X \rightarrow X/\Theta$ esdevinga un M -epimorfisme. Notem que amb tots els ingredients presentats fins ara podem provar un 1r Teorema d'Isomorfia.

TIPUS D'ACCIONS

Definici3

Siga X un M -conjunt. Direm que l'acci3 3s:

Transitiva; Si per a cada $x, y \in X$, hi ha un element $m \in M$ tal que $mx = y$.

TIPUS D'ACCIONS

Definici3

Siga X un M -conjunt. Direm que l'acci3 3s:

Transitiva; Si per a cada $x, y \in X$, hi ha un element $m \in M$ tal que $mx = y$.

C3clica; Si hi ha un element $x \in X$ tal que $Mx = X$.

TIPUS D'ACCIONS

Definici3

Siga X un M -conjunt. Direm que l'acci3 3s:

Transitiva; Si per a cada $x, y \in X$, hi ha un element $m \in M$ tal que $mx = y$.

C3clica; Si hi ha un element $x \in X$ tal que $Mx = X$.

Quasi-transitiva; Si X no pot escriure's com el coproducte de dos subconjunts invariants propis.

TIPUS D'ACCIONS

Definici3

Siga X un M -conjunt. Direm que l'acci3 3s:

Transitiva; Si per a cada $x, y \in X$, hi ha un element $m \in M$ tal que $mx = y$.

C3clica; Si hi ha un element $x \in X$ tal que $Mx = X$.

Quasi-transitiva; Si X no pot escriure's com el coproducte de dos subconjunts invariants propis.

Tenim les següents implicacions:

Transitiva $\Rightarrow$ C3clica $\Rightarrow$ Quasi-transitiva

TIPUS D'ACCIONS

Definici3

Siga X un M -conjunt. Direm que l'acci3 3s:

Transitiva; Si per a cada $x, y \in X$, hi ha un element $m \in M$ tal que $mx = y$.

C3clica; Si hi ha un element $x \in X$ tal que $Mx = X$.

Quasi-transitiva; Si X no pot escriure's com el coproducte de dos subconjunts invariants propis.

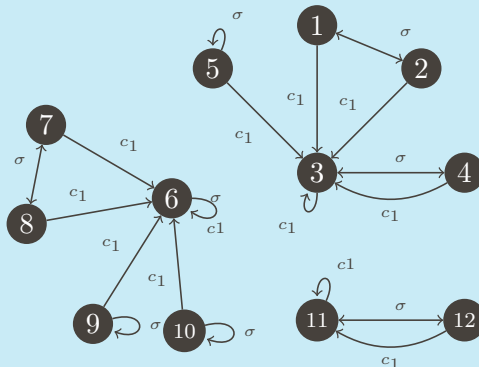
Tenim les següents implicacions:

Transitiva $\Rightarrow$ C3clica $\Rightarrow$ Quasi-transitiva

Totes aquestes noci3ns coincideixen quan treballem amb grups.

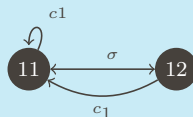
TIPUS D'ACCIONS

Una acci33 arbitr3ria de $\mathcal{T}_2$ en un conjunt de 12 elements



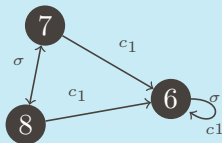
TIPUS D'ACCIONS

Una acci3 transitiva



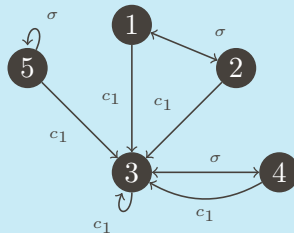
TIPUS D'ACCIONS

Una acci3 c3clica



TIPUS D'ACCIONS

Una acci3 quasi-transitiva



BLOCS CONSTITUTIUS

Teorema

Siguen X i Y dos M -conjunts. Llavors les següents afirmacions són equivalents:

- i. $X \cong Y$
- ii. Existeix una bijecci3 $h : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ entre el conjunt de subaccions quasi-transitives d' X i el conjunt de subaccions quasi-transitives d' Y que relaciona accions equivalents.

BLOCS CONSTITUTIVS

Hem vist fins ara que les definicions de transitivitat usals de les accions de grup esdevenen imprecises per a les accions de monoides.

Les accions quasi-transitives passen a ser els blocs constituents de les accions de monoides, tanmateix s3n objectes complexos. En canvi, entenem i treballem millor les accions c3cliques.

BLOCS CONSTITUTIVS

Hem vist fins ara que les definicions de transitivitat usuls de les accions de grup esdevenen imprecises per a les accions de monoides.

Les accions quasi-transitives passen a ser els blocs constituents de les accions de monoides, tanmateix s3n objectes complexos. En canvi, entenem i treballem millor les accions c3cliques.

La pregunta 3s

Podem emprar les accions c3cliques com blocs constitutius?

TEOREMA DE DESCOMPOSICI3

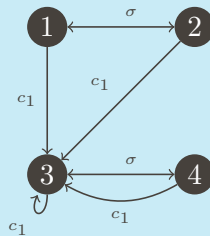
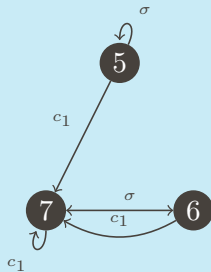
Definici3

Siguen X i Y dos M -conjunts. Assumim que tots dos comparteixen subconjunts invariants equivalents a un tercer M -conjunt W . Llavors, hom pot considerar la **suma amalgamada d' X i Y relativa a W** . Aquesta estructura torna a ser un M -conjunt que denotarem per:

$$X \amalg_W Y$$

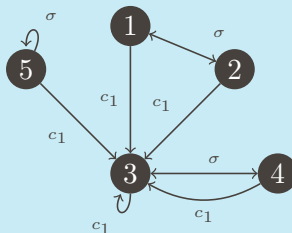
TEOREMA DE DESCOMPOSICI3

Suma amalgamada



TEOREMA DE DESCOMPOSICI3

Suma amalgamada



TEOREMA DE DESCOMPOSICI3

Teorema

Siga X un M -conjunt finit. Si l'acci3 d' M en X 3s quasi-transitiva, llavors podem trobar subconjunts invariants W, Y i Z d' X tals que:

- i. W 3s una subacci3 tant d' Y com de Z .
- ii. Y 3s un M -conjunt c3clic.
- iii. Z 3s un M -conjunt quasi-transitiu.
- iv. $X \cong Y \amalg_W Z$

TEOREMA DE DESCOMPOSICI3

Teorema

Siga X un M -conjunt finit. Si l'acci3 d' M en X 3s quasi-transitiva, llavors podem trobar subconjunts invariants W, Y i Z d' X tals que:

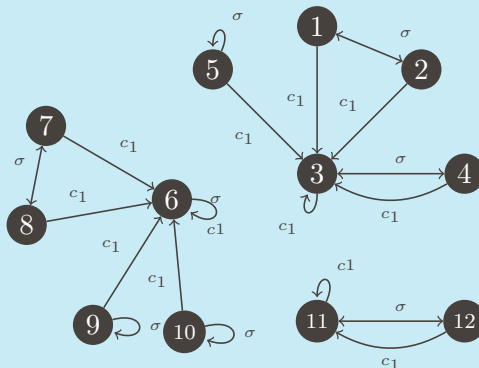
- i. W 3s una subacci3 tant d' Y com de Z .
- ii. Y 3s un M -conjunt c3clic.
- iii. Z 3s un M -conjunt quasi-transitiu.
- iv. $X \cong Y \amalg_W Z$

Corol·lari

Tot M -conjunt quasi-transitiu finit pot ser escrit com la suma amalgamada d' M -conjunts c3clics.

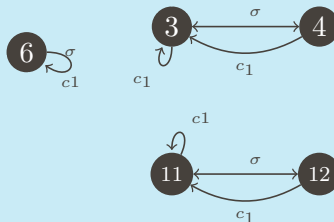
TEOREMA DE DESCOMPOSICI3

Una acci3 arbitr3ria de $\mathcal{T}_2$ en un conjunt de 12 elements



TEOREMA DE DESCOMPOSICI3

W conjunts invariants



TEOREMA DE DESCOMPOSICI3

Corol·lari

Siga X un M -conjunt finit quasi-transitiu no c3clic. Llavors W , el subconjunt invariant que apareix en el teorema de descomposici3, 3s isomorf a un quocient del major ideal propi a esquerra d' M .

BIBLIOGRAFIA



J. Climent Vidal,
Teor3a de Conjuntos,
Lecture Notes, Universitat de Val3ncia, 2010.



R. Jansana,
Orders, Lattices and Boolean Algebras,
Lecture Notes, Universitat de Barcelona, 2010-11.



M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev,
Monoids, Acts and Categories,
Walter de Gruyter, Berlin, 2000.



B. Steinberg,
A Theory of Transformation Monoids: Combinatorics and
Representation Theory,
eprint arXiv:1004.2982, 2010.