AUTÓMATA

Vida útil y métodos de reciclaje

XIX **ENEM**
València, 2018

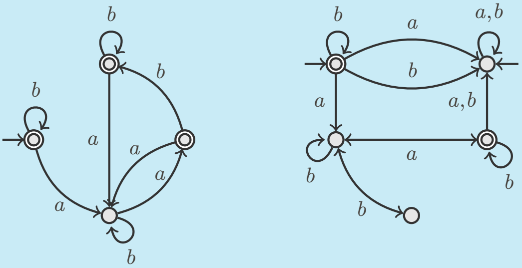
Enric Cosme Llópez

Departament de Matemàtiques
Universitat de València

AUTÓMATAS

Ejemplos

$A=\{a,b\}$



AUTÓMATAS

Un autómata es un par (X, α), donde X es un conjunto de estados y, para un alfabeto A, α una aplicación de transición

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & X \times A & \longrightarrow & X \\ & (x, a) & \longmapsto & x_a \end{array}$$

que se puede extender a $A^\star$, donde

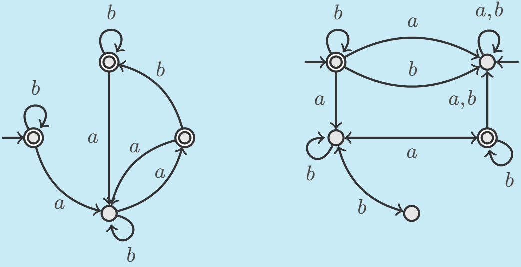
$$A^\star = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(n, A)$$

es el conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto A.

AUTÓMATAS

Ejemplos

$A = \{a, b\}$



Aceptan $aabbababbb$ y bbb pero no abb ni $bbaabbaabba$.

RECONOCIBILIDAD DE LENGUAJES

El lenguaje reconocido por (X, α) es el conjunto

$$\mathcal{L}(X, \alpha) = \{w \in A^\star \mid w \text{ es reconocida por } (X, \alpha)\}$$

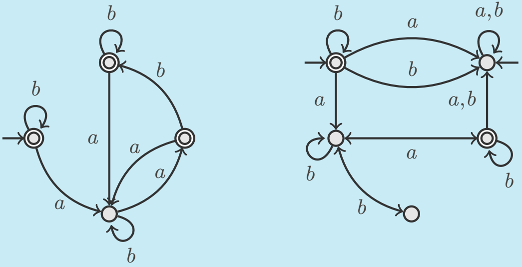
En general, para un lenguaje $L \subseteq A^\star$, diremos que L es reconocible si existe un autómata finito (X, α) tal que

$$L = \mathcal{L}(X, \alpha)$$

RECONOCIBILIDAD DE LENGUAJES

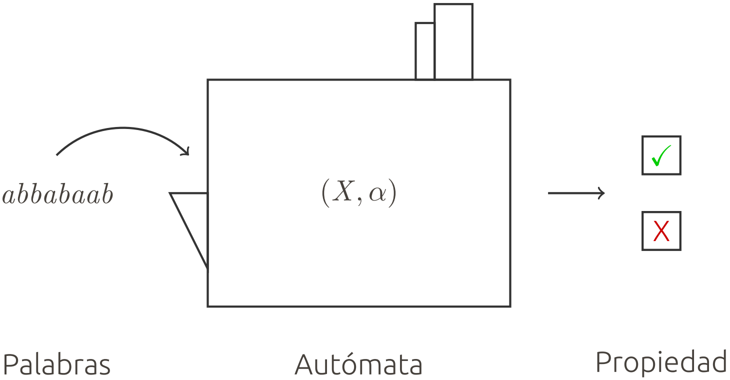
Ejemplos

$A=\{a,b\}$



$$\mathcal{L}(X,\alpha) = \{w \in A^\star \mid |w|_a \equiv 0 \,(\text{mod } 2)\}$$

RECONOCIBILIDAD DE LENGUAJES



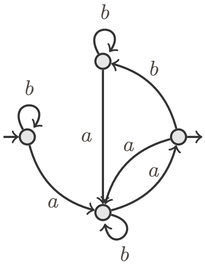
RECONOCIBILIDAD DE LENGUAJES

Los autómatas son objetos matemáticos muy útiles para el estudio de propiedades sobre lenguajes.

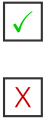
Así, por ejemplo, si L y K son lenguajes reconocibles, a partir de los autómatas que reconocen estos lenguajes, somos capaces de construir autómatas que reconocen $L \cap K$, $L \cup K$ o $A^{\star} - L$.

El problema surge cuando queremos reconocer otro tipo de objetos matemáticos. Por ejemplo grafos.

RECONOCIBILIDAD



¿?



Grafos

¿?

Propiedad

RECONOCIBILIDAD

> It is not clear at all how an automaton should traverse a graph. A “general” graph has no evident structure, whereas a word or a tree is (roughly speaking) its own algebraic structure.
>
> B. Courcelle, 1991

MINIMIZACIÓN

La minimización es el proceso de transformar un autómata dado en uno equivalente que reconozca el mismo lenguaje y que tenga el menor número de estados posibles.

Dado $L \subseteq A^\star$ podemos definir una relación de equivalencia $\sim_L$ en $A^\star$ como sigue:

Dados w, v en $A^\star$

$$w \sim_L v \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in \ A^\star \, (xwy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$$

MINIMIZACIÓN

Notamos que $\mathbf{A}^\star = (A^\star, \curlywedge, \lambda)$ es un monoide.

Se comprueba que $\sim_L$ es una congruencia en $\mathbf{A}^\star$.

Si $w_1 \sim_L w_2$ y $v_1 \sim_L v_2$, entonces

$$w_1 v_1 \sim_L w_2 v_2.$$

La relación $\sim_L$ se le llama la congruencia sintáctica asociada a L. Es la mayor congruencia en $\mathbf{A}^\star$ que satura a L.

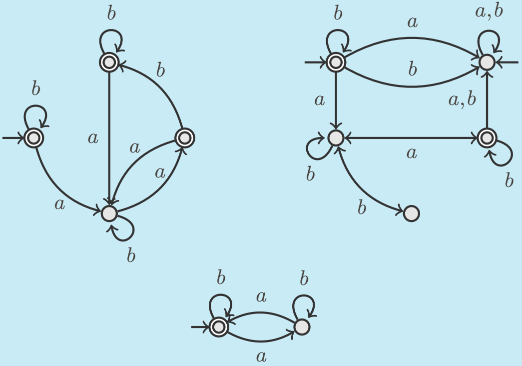
El cociente $A^\star/{\sim_L}$ tiene estructura de monoide y autómata. Como autómata, $A^\star/{\sim_L}$ es el mínimo autómata que reconoce L. En particular,

$$L = \mathcal{L}(A^\star/{\sim_L}).$$

MINIMIZACIÓN

Ejemplos

$A=\{a,b\}$



LENGUAJES RECONOCIBLES

Para un lenguaje $L \subseteq A^\star$ son equivalentes:

1. L es reconocible.
2. $\sim_L$ tiene índice finito en $\mathbf{A}^\star$.
3. L está saturado por una congruencia de índice finito en $\mathbf{A}^\star$.
4. Existe un monoide finito $\mathbf{M}$, un homomorfismo de monoides $f\colon \mathbf{A}^\star \longrightarrow \mathbf{M}$ y un subconjunto $C \subseteq M$ tal que
$$L = f^{-1}[C].$$

Esta caracterización no depende de ningún tipo de autómata y, por tanto, puede generalizarse a cualquier álgebra.

ÁLGEBRA UNIVERSAL

Dada una signatura $\Sigma = (\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una Σ-álgebra es un par $\mathbf{A} = (A, F)$, donde A es un conjunto y F una estructura de Σ-álgebra en A. Esto es

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \Sigma_n & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A^n, A) \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma^{\mathbf{A}} \end{array}$$

ÁLGEBRA UNIVERSAL

Dadas dos Σ-álgebras $\mathbf{A} = (A, F)$ y $\mathbf{B} = (B, G)$, un Σ-homomorfismo $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es una aplicación de A a B tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$ y $(a_i)_{i\in n} \in A^n$ se tiene que

$$f(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})) = \sigma^{\mathbf{B}}((f(a_i))_{i\in n})$$

ÁLGEBRA UNIVERSAL

Dada una Σ-álgebra $\mathbf{A} = (A, F)$, una congruencia en $\mathbf{A}$ es una relación de equivalencia Φ en A tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$, $(a_i)_{i\in n} \in A^n$ y $(b_i)_{i\in n} \in A^n$, si $(a_i, b_i) \in \Phi$ para todo $i \in n$, entonces

$$(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}), \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n})) \in \Phi$$

ÁLGEBRA UNIVERSAL

Sea $\mathbf{A}$ una Σ-álgebra.

Decimos que una aplicación $T \in \mathrm{Hom}(A, A)$ es una traslación elemental, $T \in \mathrm{Etl}(\mathbf{A})$, si y sólo si existe un símbolo de operación $\sigma \in \Sigma_n$, $i \in n$, una família $(a_j)_{j \in i} \in A^i$ y una família $(a_k)_{k \in n-(i+1)} \in A^{n-(i+1)}$ tal que, para cada $x \in A$,

$$T(x) = \sigma^{\mathbf{A}}(a_0, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_{n-1})$$

ÁLGEBRA UNIVERSAL

Denotamos por $\mathrm{Tl}(\mathbf{A})$ el subconjunto de aplicaciones de $\mathrm{Hom}(A, A)$ para las que existe un $m \in \mathbb{N} - 1$ y una família de traslaciones elementales $(T_j)_{j \in m} \in \mathrm{Etl}(\mathbf{A})^m$ tales que

$$T = T_{m-1} \circ \cdots \circ T_0$$

Llamaremos a los elementos de $\mathrm{Tl}(\mathbf{A})$ traslaciones de $\mathbf{A}$. Además $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ también será considerada un aplicación en $\mathrm{Tl}(\mathbf{A})$.

ÁLGEBRA UNIVERSAL

Sea $\mathbf{A}$ una Σ-álgebra y Φ una relación de equivalencia en A.

Son equivalentes:

1. Φ es una congruencia en $\mathbf{A}$.
2. Φ está cerrada por traslaciones elementales en $\mathbf{A}$.
3. Φ está cerrada por traslaciones en $\mathbf{A}$.

Esto es, si $T \in$ Etl$(\mathbf{A})$ (Tl$(\mathbf{A})$) y $(a, b) \in \Phi$, entonces

$$(T(a), T(b)) \in \Phi$$

ÁLGEBRA UNIVERSAL

Sea $\mathbf{A}$ una Σ-álgebra y $L \subseteq A$.

Definimos la relación $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ en A como sigue.

Dados $a, b \in A$

$$(a, b) \in \Omega^{\mathbf{A}}(L) \quad \Leftrightarrow \quad \forall T \in \mathsf{Tl}(\mathbf{A})\,(T(a) \in L \Leftrightarrow T(b) \in L)$$

Se tiene que $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ es la mayor congruencia en $\mathbf{A}$ que satura L.
Esta congruencia se llama la congruencia sintáctica de L.

ÁLGEBRA UNIVERSAL

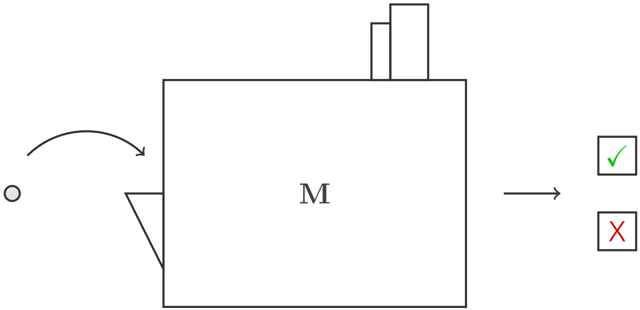
La definición de reconocibilidad se debe a Mezei y Wright.

Dada una Σ-álgebra $\mathbf{A} = (A, F)$ y un lenguaje $L \subseteq A$. Decimos que L es reconocible si cumple cualquiera de las siguientes propiedades.

1. $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ tiene índice finito en $\mathbf{A}$.
2. L está saturado por una congruencia de índice finito en $\mathbf{A}$.
3. Existe una Σ-álgebra finita $\mathbf{M}$, un homomorfismo de Σ-álgebras $f\colon \mathbf{A} \to M$ y un subconjunto $C \subseteq M$ tal que

$$L = f^{-1}[C].$$

RECONOCIBILIDAD DE LENGUAJES



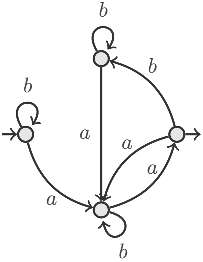
Elementos de una Σ-álgebra

Σ-álgebras finitas

Propiedad

GRAFOS

¿Son los grafos elementos de una Σ-álgebra?



ALEGORÍAS

Las alegorías son álgebras para la signatura

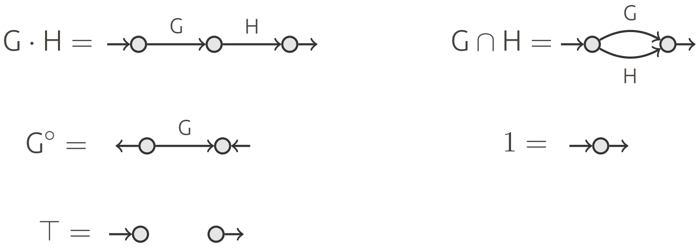
$$\Sigma = \{\cdot, \cap, \cdot^\circ, 1, \top\}$$

Fueron introducidas por Freyd y Scedrov en 1990.

Han sido intensivamente estudiadas por Andréka y Bredikhin.

GRAFOS 2-PUNTEADOS SOBRE A

El conjunto G(A) de todos los grafos 2-punteados sobre un alfabeto A tiene estructura de alegoría.



TÉRMINOS

Si además interpretamos cada letra $a \in A$ como el grafo

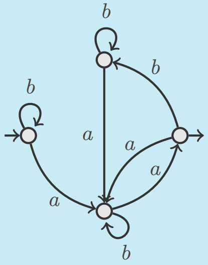
$$\mathsf{G}(a) = \;\to\!\circ \xrightarrow{\quad a \quad} \circ\!\to$$

Entonces, todo término bien formado sobre las alegorías admite una representación única como grafo.

TÉRMINOS

Ejemplo

El grafo asociado a $(1 \cap b)a(1 \cap b)((a^\circ(1 \cap b)b^\circ) \cap a^\circ \cap a)$ es



TÉRMINOS

No todo grafo en G(A) es el grafo de un término.

Ejemplo

El grafo completo de 4 vértices, K$_4$, independientemente de la orientación de los ejes y su etiquetado, así como la elección de la entrada o salida no es el grafo de ningún término.

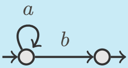
Un G $\in$ G(A) es el grafo de un término si y sólo si G $\in$ TW$_2(A)$, esto es, si G tiene amplitud de árbol 2.

TÉRMINOS

Diferentes términos pueden representar el mismo grafo.

Ejemplo

Los términos $(1 \cap a)b$ y $((1 \cap a)\top) \cap b$ designan el mismo grafo.



2P-ÁLGEBRAS

Una 2p-álgebra es una alegoría que cumple:

A1. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

A2. $a \cap b = b \cap a$

A3. $a \cap \top = a$

A4. $a(bc) = (ab)c$

A5. $a1 = a$

A6. $a^{\circ\circ} = a$

A7. $(a \cap b)^\circ = b^\circ \cap a^\circ$

A8. $(ab)^\circ = b^\circ a^\circ$

A9. $1 \cap 1 = 1$

A10. $1 \cap (ab) = 1 \cap ((a \cap b^\circ)\top)$

A11. $a \cap \top = (1 \cap (a\top))\top$

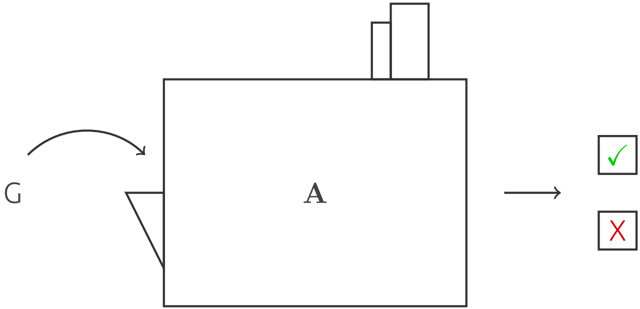
A12. $(1 \cap a)b = ((1 \cap a)\top) \cap b$

2P-ÁLGEBRAS

$\mathsf{TW}_2(A)$ es la 2p-álgebra libre.

En particular, del conjunto de axiomas se deduce una ecuación $e = f$ entre términos si y sólo si $\mathsf{G}(e)$ y $\mathsf{G}(f)$ son isomorfos.

2P-ÁLGEBRAS



Grafo en $\mathrm{TW}_2(A)$ 2p-álgebra finita Propiedad

BIBLIOGRAFÍA

- A. Ballester Bolinches, E. Cosme Llópez, J.J.M.M. Rutten
  The dual equivalence of equations and coequations for automata,
  Information and Computation, 244:49–75, 2015.
- J. Climent Vidal , E. Cosme-Llópez
  Eilenberg theorems for many-sorted formations
  To appear in Houston Journal of Mathematics, 2017.
- E. Cosme-Llópez, D. Pous
  K4-free graphs as a free algebra.
  In Proc. MFCS of LIPIcs, 83:76:1 - 76:14, 2017.

BIBLIOGRAFÍA

- B. Courcelle, J. Engelfriet
  Graph Structure and Monadic Second-Order Logic, a Language Theoretic Approach, 2011.
- J.-É. Pin
  Mathematical Foundations of Automata Theory, 2018.