LES MÀQUINES DEL LLENGUATGE

Setmana Cultural
Facultat de Matemàtiques
Burjassot, 2021

Enric Cosme Llópez

Departament de Matemàtiques
Universitat de València

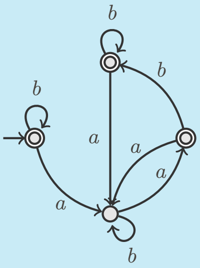
Els límits del meu **llenguatge** són els límits del meu món.

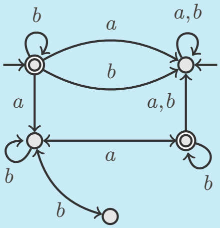
L. Wittgenstein, 1922

L’àlgebra és l’oferta que fa el dimoni al matemàtic. El dimoni diu: “Et donaré esta poderosa **màquina** que respondrà a qualsevol pregunta que tingues. Només has d’entregar-me la teua ànima: Renuncia a la geometria i obtindràs esta meravella”.

M. Atiyah, 2004

Autòmats





Un **autòmat** és un parell (X, α), on X és un conjunt d'estats i, per a un alfabet A, α és una aplicació de transició

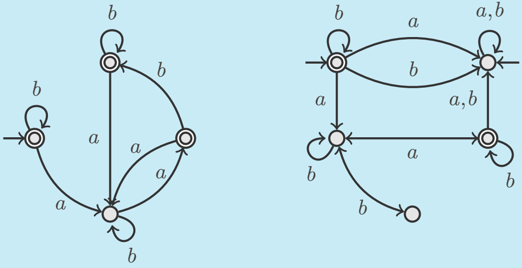
$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & X \times A & \longrightarrow & X \\ & (x, a) & \longmapsto & x_a \end{array}$$

que es pot extendre a $A^\star$, on

$$A^\star = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(n, A)$$

és el conjunt de totes les **paraules** sobre l'alfabet A.

Reconeixença



Reconeixen $aabbababbb$ i bbb però no abb ni $bbaabbaabba$.

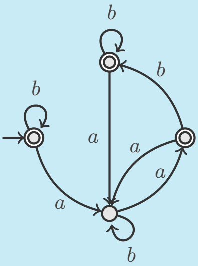
El **llenguatge reconegut** per (X, α) és el conjunt

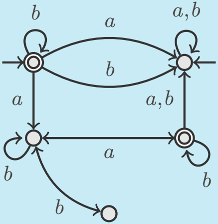
$$\mathcal{L}(X, \alpha) = \{w \in A^\star \mid w \text{ és reconeguda per } (X, \alpha)\}$$

En general, per a un llenguatge $L \subseteq A^\star$, direm que L és **reconeixible** si existeix un autòmat finit (X, α) tal que

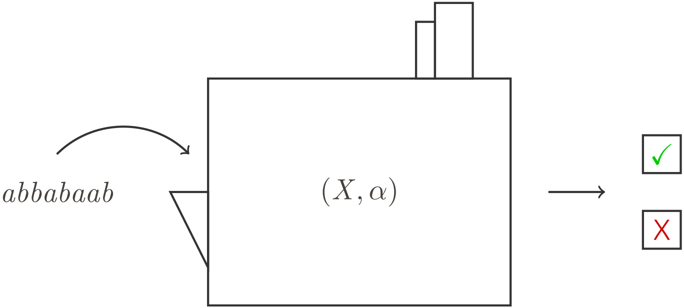
$$L = \mathcal{L}(X, \alpha)$$

Reconeixibilitat de llenguatges





$$\mathcal{L}(X, \alpha) = \{w \in A^\star \mid |w|_a \equiv 0 \,(\text{mòd } 2)\}$$

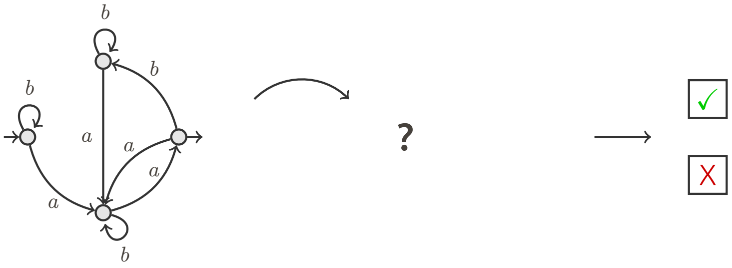


Paraules Autòmat Propietat

Els autòmats són objectes matemàtics molt útils per a l'estudi de **propietats** sobre llenguatges.

Així, per exemple, si L i K són llenguatges reconeixibles, a partir dels autòmats que reconeixen estos llenguatges som capaços de construir autòmats que reconeixen $L \cap K$, $L \cup K$ o $A^\star - L$.

El problema sorgeix quan volem reconèixer un altre tipus d'objectes matemàtics. Per exemple grafs.



Grafs ? Propietat

No està gens clar com un autòmat deuria atravessar un graf. Un graf “general” **no té estructura evident**, mentre que una paraula o un arbre és, a grans trets, la seua pròpia estructura algebraica.

B. Courcelle, 1991

La **minimització** és el proces de transformar un autòmat donat en un d'equivalent que reconega el mateix llenguage i que tinga el menor nombre d'estats possibles.

Donat $L \subseteq A^\star$ podem definir una relació d'equivalència $\sim_L$ en $A^\star$ com segueix:

Donades w, v en $A^\star$

$$w \sim_L v \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in \ A^\star \, (xwy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$$

Notem que $\mathbf{A}^\star = (A^\star, \curlywedge, \lambda)$ és un **monoide**.

De fet $\mathbf{A}^\star$ és el monoide **lliure** generat per A.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{in}"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \mathbf{A}^\star \arrow[d, dashed, "\exists!\, f^\sharp"] \\ & \mathbf{M} \end{tikzcd}$$

A més $\sim_L$ és una **congruència** en $\mathbf{A}^\star$.

Si $w_1 \sim_L w_2$ i $v_1 \sim_L v_2$, aleshores

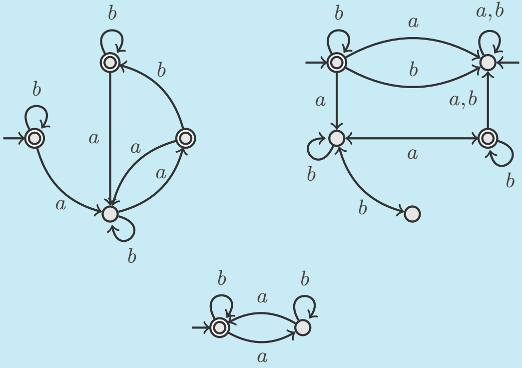
$$w_1 v_1 \sim_L w_2 v_2.$$

La relació $\sim_L$ s'anomena **congruència sintàctica** associada a L. És la major congruència en $\mathbf{A}^\star$ que satura a L.

El quocient $A^\star/{\sim_L}$ té estructura de monoide i d'autòmat. Com a autòmat, $A^\star/{\sim_L}$ és el mínim autòmat que reconeix a L.

$$L = \mathcal{L}(A^\star/{\sim_L}).$$

Minimització



Per a un llenguatge $L \subseteq A^\star$ són equivalents:

1. L és reconeixible.
2. $\sim_L$ té índex finit en $\mathbf{A}^\star$.
3. L està saturat per una congruència d'índex finit en $\mathbf{A}^\star$.
4. Existeix un monoide finit $\mathbf{M}$, un homomorfisme de monoides $f\colon \mathbf{A}^\star \longrightarrow \mathbf{M}$ i un subconjunt $C \subseteq M$ tal que

$$L = f^{-1}[C].$$

Esta caracterització no depén de cap tipus d'autòmat i, per tant, **pot generalitzar-se a qualsevol àlgebra.**

ÀLGEBRA UNIVERSAL

ÀLGEBRA UNIVERSAL

Donada una signatura $\Sigma = (\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una Σ**-àlgebra** és un parell $\mathbf{A} = (A, F)$, on A és un conjunt i F una estructura de Σ-àlgebra en A. És a dir

$$\begin{array}{rccl} F\colon & \Sigma_n & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A^n, A) \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma^{\mathbf{A}} \end{array}$$

ÀLGEBRA UNIVERSAL

Donades dues Σ-àlgebres $\mathbf{A} = (A, F)$ i $\mathbf{B} = (B, G)$, un Σ**-homomorfisme** $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ és una aplicació d'A en B tal que, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$ i $(a_i)_{i \in n} \in A^n$ es té que

$$f\left(\sigma^{\mathbf{A}}\left((a_i)_{i \in n}\right)\right) = \sigma^{\mathbf{B}}\left(\left(f\left(a_i\right)\right)_{i \in n}\right)$$

ÀLGEBRA UNIVERSAL

Donada una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$, una **congruència** en $\mathbf{A}$ és una relació d'equivalència Φ en A tal que per a tot $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$, $(a_i)_{i\in n} \in A^n$ i $(b_i)_{i\in n} \in A^n$, si $(a_i, b_i) \in \Phi$ per a tot $i \in n$, aleshores

$$\left(\sigma^{\mathbf{A}}\left((a_i)_{i\in n}\right), \sigma^{\mathbf{A}}\left((b_i)_{i\in n}\right)\right) \in \Phi$$

ÀLGEBRA UNIVERSAL

Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra.

Diem que una aplicació $T \in \mathrm{Hom}(A, A)$ és una **translació elemental**, $T \in \mathrm{Etl}(\mathbf{A})$, si existeix un símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_n$, $i \in n$, una família $(a_j)_{j \in i} \in A^i$ i una família $(a_k)_{k \in n-(i+1)} \in A^{n-(i+1)}$ tal que, per a cada $x \in A$,

$$T(x) = \sigma^{\mathbf{A}}\left(a_0, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_{n-1}\right)$$

ÀLGEBRA UNIVERSAL

Denotem per Tl($\mathbf{A}$) el subconjunt d'aplicacions d'Hom(A, A) per a les què existeix un $m \in \mathbb{N} - 1$ i una família de translaciones elementals $(T_j)_{j \in m} \in$ Etl$(\mathbf{A})^m$ tals que

$$T = T_{m-1} \circ \cdots \circ T_0$$

Anomenarem als elements de Tl($\mathbf{A}$) **translacions** d'$\mathbf{A}$. A més id$_{\mathbf{A}}$ també serà considerada una aplicació en Tl($\mathbf{A}$).

ÀLGEBRA UNIVERSAL

Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra i Φ una relació d'equivalència en A.

Són equivalents:

1. Φ és una congruència en $\mathbf{A}$.
2. Φ està tancada per translacions elementals en $\mathbf{A}$.
3. Φ està tancada per translacions en $\mathbf{A}$.

És a dir, si $T \in$ Etl($\mathbf{A}$) (Tl($\mathbf{A}$)) i $(a, b) \in \Phi$, aleshores

$$(T(a), T(b)) \in \Phi$$

ÀLGEBRA UNIVERSAL

Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra i $L \subseteq A$.

Definim la relació $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ en A com segueix.

Donats $a, b \in A$

$$(a, b) \in \Omega^{\mathbf{A}}(L) \quad \Leftrightarrow \quad \forall T \in \mathsf{Tl}(\mathbf{A})\, (T(a) \in L \Leftrightarrow T(b) \in L)$$

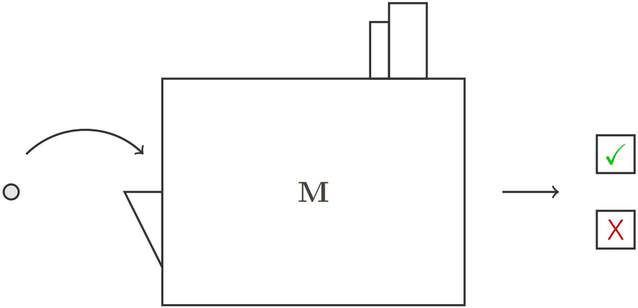
Es té que $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ és la major congruència en $\mathbf{A}$ que satura L.
Esta congruència s'anomena la **congruència sintàctica** d'L.

ÀLGEBRA UNIVERSAL

Donada una Σ-àlgebra $\mathbf{A} = (A, F)$ i un llenguatge $L \subseteq A$. Diem que L és **reconeixible** si satisfà qualsevol de las següents propietats equivalents

1. $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ té índex finit en $\mathbf{A}$.
2. L està saturat per una congruència d'índex finit en $\mathbf{A}$.
3. Existeix una Σ-àlgebra finita $\mathbf{M}$, un homomorfisme de Σ-àlgebres $f \colon \mathbf{A} \to \mathbf{M}$ i un subconjunt $C \subseteq M$ tal que
$$L = f^{-1}[C].$$

Aquesta caracterització la debem a **Mezei i Wright**.

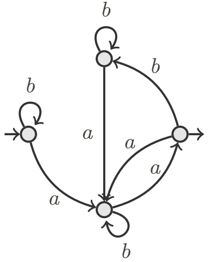


Elements d'una Σ-àlgebra

Σ-àlgebras finites

Propietat

GRAFS



Són els grafs elements

d'una Σ-àlgebra?

AL·LEGORIES

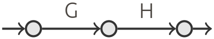
Les **al·legories** són àlgebres per a la signatura

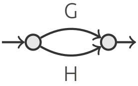
$$\Sigma = \{\cdot, \cap, \cdot^{\circ}, 1, \top\}$$

Foren introduïdes per **Freyd i Scedrov** en 1990.

Han estat estudiades principalment per **Andréka i Bredikhin**.

El conjunt $\mathsf{G}(A)$ de tots els **grafs 2-puntejats** sobre un alfabet A té estructura d'al·legoria.

$\mathsf{G} \cdot \mathsf{H} =$ 

$\mathsf{G} \cap \mathsf{H} =$ 

$\mathsf{G}^{\circ} =$ 

$1 =$ 

$\top =$ 

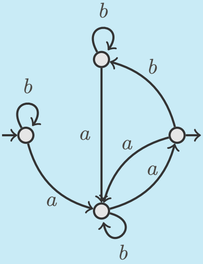
Si, a més, interpretem cada lletra $a \in A$ com el graf

$$\mathsf{G}(a) = \;\to\circ \xrightarrow{\;a\;} \circ\to$$

Aleshores, tot terme ben format sobre les al·legories admet una **representació** única com a graf 2-puntejat.

Interpretació de termes

El graf associat a $(1 \cap b)a(1 \cap b)((a^\circ(1 \cap b)b^\circ) \cap a^\circ \cap a)$ és



No tot graf en G(A) és el graf d'un terme.

Exemple

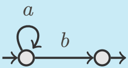
El graf complet de 4 vèrtexs, K$_4$, independentment de l'orientació dels eixos i l'etiquetatge, així com l'elecció d'entrada i eixida no és el graf de cap terme.

Un G $\in$ G(A) és el graf d'un terme si, i només si, G $\in$ TW$_2(A)$, és a dir, si G té **amplada d'arbre** 2.

Diferents termes poden representar el mateix graf.

Exemple

Els termes $(1 \cap a)b$ i $((1 \cap a)\top) \cap b$ designen el mateix graf.



2P-ÀLGEBRES

Una **2p-àlgebra** és una al·legoria que satisfà:

A1. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

A2. $a \cap b = b \cap a$

A3. $a \cap \top = a$

A4. $a(bc) = (ab)c$

A5. $a1 = a$

A6. $a^{\circ\circ} = a$

A7. $(a \cap b)^{\circ} = b^{\circ} \cap a^{\circ}$

A8. $(ab)^{\circ} = b^{\circ} a^{\circ}$

A9. $1 \cap 1 = 1$

A10. $1 \cap (ab) = 1 \cap ((a \cap b^{\circ})\top)$

A11. $a \cap \top = (1 \cap (a\top))\top$

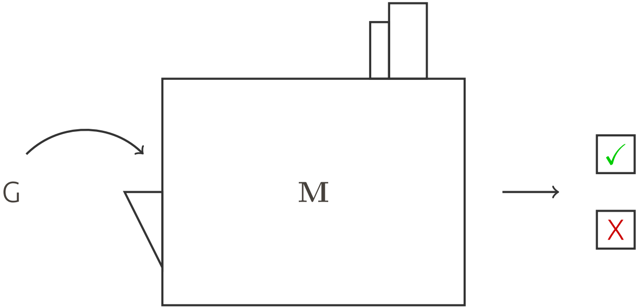
A12. $(1 \cap a)b = ((1 \cap a)\top) \cap b$

Teorema

$\mathbf{TW}_2(A)$ és la 2p-àlgebra lliure generada per A.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathsf{G}"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & \mathbf{TW}_2(A) \arrow[d, dashed, "\exists!\, f^\sharp"] \\ & \mathbf{M} \end{tikzcd}$$

En particular, del conjunt d'axiomes es dedueix una equació $e = f$ entre termes si, i només si, G(e) i G(f) són isomorfs.



Graf en $\mathrm{TW}_2(A)$ 2p-àlgebra finita Propietat

BIBLIOGRAFIA

- A. Ballester Bolinches, E. Cosme Llópez, J.J.M.M. Rutten
  The dual equivalence of equations and coequations for automata,
  Information and Computation, 244:49–75, 2015.
- J. Climent Vidal , E. Cosme Llópez
  Eilenberg theorems for many-sorted formations
  Houston Journal of Mathematics, 54(2): 321 - 369, 2019.
- E. Cosme Llópez, D. Pous
  K4-free graphs as a free algebra.
  In Proc. MFCS of LIPIcs, 83:76:1 - 76:14, 2017.