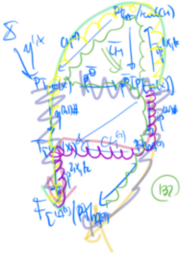
PALABRAS PARA EL CAMINO

XXIII ENEM
València, 2022



Enric Cosme Llópez
Juan Climent Vidal

Departament de Matemàtiques
Departament de Lògica i Filosofia de la Ciència
Universitat de València

Las matemáticas se **escriben**.
Calcular es **reescribir**.

ESPECIFICACIÓN

Una **especificación** es una tupla $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\Sigma, X, \mathcal{A})$ donde

- Σ es una signatura;
- X es un conjunto de variables;
- $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathrm{T}_\Sigma(X)^2$.

Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman **reglas de reescritura**.

CAMINOS

Un **camino en $\mathcal{A}$** de longitud $n \in \mathbb{N}$ es

$$\mathfrak{P} = ((P_i)_{i \in n+1}, (\alpha_i)_{i \in n}, (\mathfrak{p}_i)_{i \in n}) \in \mathrm{T}_\Sigma(X)^{n+1} \times \mathbb{N}^n \times \mathcal{A}^n$$

donde para cada $i \in n$, si $\mathfrak{p}_i = (M_i, N_i)$, entonces

(1) M_i es un subtérmino de P_i;
(2) P_i tiene al menos α_i ocurrencias de M_i como subtérmino;
(3) P_{i+1} se obtiene sustituyendo la α_i-ésima ocurrencia de M_i en P_i por N_i.

$$\mathfrak{P}\colon\ P_0 \xrightarrow{(\alpha_0,\mathfrak{p}_0)} P_1 \xrightarrow{(\alpha_1,\mathfrak{p}_1)} \cdots \xrightarrow{(\alpha_{n-2},\mathfrak{p}_{n-2})} P_{n-1} \xrightarrow{(\alpha_{n-1},\mathfrak{p}_{n-1})} P_n$$

CAMINOS

Ejemplo

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{P}: \ \oplus(x, \oplus(x, y)) & \to & \oplus(x, \oplus(x, z)) \\
& \to & \oplus(x, z) \\
& \to & \odot(\boxdot(z, x), z, \boxdot(x, x)) \\
& \to & \odot(\boxdot(z, x), x, \boxdot(x, x)) \\
& \to & \odot(y, x, \boxdot(x, x)) \\
& \to & \odot(y, x, z) \\
& \to & \top
\end{array}
$$

CAMINOS

Problema de la Palabra

En $G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$

$$\begin{aligned} babb^{-1}ab^{-1} &= baab^{-1} \\ &= abab^{-1} \\ &= a^2bb^{-1} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

CAMINOS

Operaciones Elementales

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 18 \\ 2 & 3 & 23 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 = \frac{1}{2} f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 23 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 = f_2 - 2 f_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 = f_3 - 2 f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

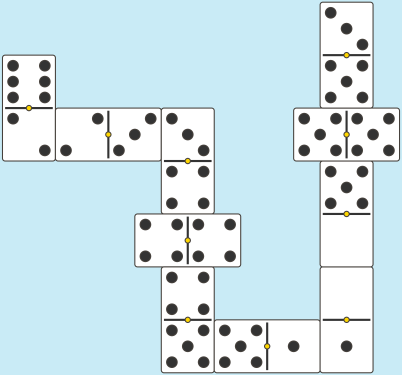
CAMINOS

Cálculo de Derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(x^2+x)\right] &= (-\sin(x^2+x))\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+x\right] \\
&= -\sin(x^2+x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[x\right]\right) \\
&= -\sin(x^2+x)(2x+1).
\end{aligned}$$

CAMINOS

Dominó



PREGUNTA

¿Cuando dos sistemas de reescritura se pueden considerar **equivalentes**?

COMPOSICIÓN

Los caminos se pueden componer.

Si $\mathfrak{P}\colon P \longrightarrow Q$ y $\mathfrak{Q}\colon Q \longrightarrow R$, entonces $\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}\colon P \longrightarrow R$.

La composición es una operación binaria parcial.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \arrow[r, shift left=4, "\mathrm{sc}"] \arrow[r, shift right=4, "\mathrm{tg}"'] & \mathrm{T}_{\Sigma}(X) \arrow[l, "\mathrm{ip}" description] \end{tikzcd}$$

Denotamos por $\mathbf{Pth}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ a la categoría que tiene a los términos como objetos y a los caminos como morfismos.

DESCOMPOSICIÓN

Los caminos se pueden descomponer.

Si $\mathfrak{p} = (M, N)$ es una regla de reescritura en $\mathcal{A}$, su **escalón** asociado es el camino de longitud 1

$$\mathrm{Ech}(\mathfrak{p}) : M \xrightarrow{(0,\mathfrak{p})} N$$

Diremos que un camino tiene escalones si alguno de sus subcaminos de longitud 1 es un escalón.

DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{P}:\ \oplus(x, \oplus(x, y)) & \to & \oplus(x, \oplus(x, z)) \\
 & \to & \oplus(x, z) \\
\text{escalón} & \to & \odot(\boxdot(z, x), z, \boxdot(x, x)) \\
 & \to & \odot(\boxdot(z, x), x, \boxdot(x, x)) \\
 & \to & \odot(y, x, \boxdot(x, x)) \\
 & \to & \odot(y, x, z) \\
\text{escalón} & \to & \top
\end{array}
$$

Proposición. Los caminos sin escalones son entre términos complejos y homogéneos.

DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo

$$
\begin{array}{ccccccc}
\odot(& \boxdot(z,x) & , & z & , & \boxdot(x,x) &) \\
 & \| & & \downarrow & & \| & \\
\odot(& \boxdot(z,x) & , & x & , & \boxdot(x,x) &) \\
 & \downarrow & & \| & & \| & \\
\odot(& y & , & x & , & \boxdot(x,x) &) \\
 & \| & & \| & & \downarrow & \\
\odot(& y & , & x & , & z &)
\end{array}
$$

Proposición. En un camino sin escalones se pueden extraer tantos subcaminos como la aridad de la operación.

DESCOMPOSICIÓN

Sea $\prec$ la relación binaria en $\mathrm{Pth}_{\mathcal{A}}$ dada por $\mathfrak{Q} \prec \mathfrak{P}$ si y sólo si

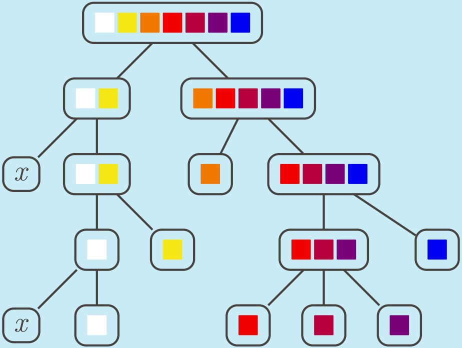
i. $\mathfrak{P}$ tiene longitud mayor estricta que 1, contiene su primer escalón en la posición i y $\mathfrak{Q}$ es el subcamino estrictamente precedente o el subcamino consecuente que incluye al escalón; o
ii. $\mathfrak{P}$ es un camino no identidad sin escalones y $\mathfrak{Q}$ es uno de los caminos extraídos en $\mathfrak{P}$.

Denotamos por $\leq$ a la clausura reflexivo transitiva de $\prec$.

Proposición. $\leq$ es un orden Artiniano en $\mathrm{Pth}_{\mathcal{A}}$ cuyos elementos minimales son los caminos identidad y los escalones.

DESCOMPOSICIÓN

Ejemplo



—**What do you read, my lord?**
—**Words, words, words.**

—Hamlet, W. Shakespeare.

SIGNATURA CATEGORIAL

Definimos la **signatura categorial** determinada por la especificación $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ a la signatura que amplía a Σ con

i. las producciones en $\mathcal{A}$ como constantes;
ii. dos operaciones unarias sc y tg;
iii. una operación binaria $\circ$.

Denotaremos esta signatura por $\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}$.

LA APLICACIÓN DE CURRY-HOWARD

Definimos la aplicación de Curry-Howard por **recursión Artiniana** sobre los caminos

$$\mathrm{CH}\colon \mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \longrightarrow \mathrm{T}_{\Sigma^{\mathrm{c}},\mathcal{A}}(X)$$

Para caminos minimales

$$\mathrm{CH}(\mathrm{ip}(P)) = P; \qquad\qquad \mathrm{CH}(\mathrm{Ech}(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}.$$

Para caminos no minimales

$$\mathrm{CH}(\mathfrak{P}) = \begin{cases} \mathrm{CH}(\mathfrak{P}^{i,|\mathfrak{P}|-1}) \circ \mathrm{CH}(\mathfrak{P}^{0,i-1}); \\ \sigma((\mathrm{CH}(\mathfrak{Q}_j))_{j\in n}). \end{cases}$$

LA APLICACIÓN DE CURRY-HOWARD

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}: \ \oplus(x, \oplus(x, y)) &\to \oplus(x, \oplus(x, z)) \\
&\to \oplus(x, z) \\
&\to \odot(\boxdot(z, x), z, \boxdot(x, x)) \\
&\to \odot(\boxdot(z, x), x, \boxdot(x, x)) \\
&\to \odot(y, x, \boxdot(x, x)) \\
&\to \odot(y, x, z) \\
&\to \top
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{CH}(\mathfrak{P}) = ((\blacksquare \circ (\odot(\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare))) \circ \blacksquare) \circ (\oplus(x, \blacksquare \circ \oplus(x, \blacksquare)))
$$

EL ÁLGEBRA DE CAMINOS

Proposición. El conjunto $\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ tiene estructura de $\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}$-álgebra parcial sobre $\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, que denotaremos por $\mathbf{Pth}^{\mathrm{c},\mathcal{A}}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, donde las operaciones vienen definidas por

$$\mathbf{sc}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ip}(\mathrm{sc}(\mathfrak{P})); \qquad \mathbf{tg}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ip}(\mathrm{tg}(\mathfrak{P}));$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ech}(\mathfrak{p}); \qquad \mathfrak{Q} \mathbin{\boldsymbol{\circ}} \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}.$$

EL ÁLGEBRA DE CAMINOS

Si $\sigma \in \Sigma_n$ y $(\mathfrak{P}_j)_{j\in n} \in \mathrm{Pth}^n_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, entonces

$$
\boldsymbol{\sigma}((\mathfrak{P}_j)_{j\in n}) : \quad
\begin{array}{lccccccc}
\sigma(& \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_0) & , & \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_1) & , & \cdots & , & \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_{n-1})\,) \\
 & \downarrow\mathfrak{P}_0 & & \| & & & & \| \\
\sigma(& \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_0) & , & \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_1) & , & \cdots & , & \vdots \quad) \\
 & \| & & \downarrow\mathfrak{P}_1 & & & & \| \\
\sigma(& \vdots & , & \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_1) & , & \ddots & , & \mathrm{sc}(\mathfrak{P}_{n-1})\,) \\
 & \| & & \| & & & & \downarrow\mathfrak{P}_{n-1} \\
\sigma(& \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_0) & , & \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_1) & , & \cdots & , & \mathrm{tg}(\mathfrak{P}_{n-1})\,)
\end{array}
$$

Proposición. $\sigma((\mathfrak{P}_j)_{j\in n})$ nunca tiene escalones.

EL NÚCLEO DE LA APLICACIÓN DE CURRY-HOWARD

Proposición. CH es un Σ-homomorfismo pero no necesariamente un $\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}$-homomorfismo.

$$\mathrm{CH}(\mathrm{ip}(P)) = \mathrm{CH}(\mathrm{ip}(P) \circ \mathrm{ip}(P)) \neq \mathrm{CH}(\mathrm{ip}(P)) \circ \mathrm{CH}(\mathrm{ip}(P)).$$

Proposición. $\mathrm{Ker}(\mathrm{CH})$ es una $\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}$-congruencia.

Denotamos al cociente $\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}/\mathrm{Ker}(\mathrm{CH})$ por $[\mathrm{Pth}^{\mathrm{c},\mathcal{A}}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$ y a la clase de un camino $\mathfrak{P}$ por $[\mathfrak{P}]$.

EL COCIENTE DE CAMINOS

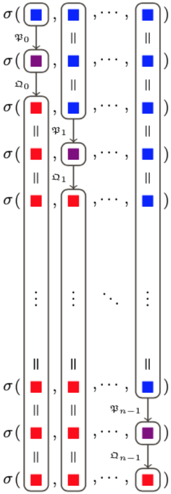
El cociente $[\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$ tiene estructura de $\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}$-**álgebra parcial, conjunto parcialmente ordenado y categoría**.

Además, las operaciones $\sigma \in \Sigma$ de aridad n son **funtores** de $[\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]^n$ en $[\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$, ya que

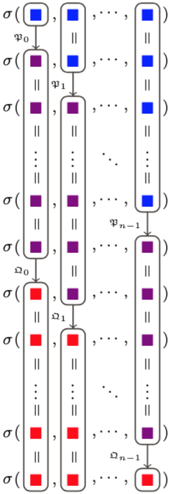
$$
\begin{aligned}
\mathbf{sc}\left(\sigma\left(([\mathfrak{P}_j])_{j\in n}\right)\right) &= \sigma\left((\mathbf{sc}\left([\mathfrak{P}_j]\right))_{j\in n}\right)\\
\mathbf{tg}\left(\sigma\left(([\mathfrak{P}_j])_{j\in n}\right)\right) &= \sigma\left((\mathbf{tg}\left([\mathfrak{P}_j]\right))_{j\in n}\right)\\
\sigma\left(([\mathfrak{Q}_j]\circ[\mathfrak{P}_j])_{j\in n}\right) &= \sigma\left(([\mathfrak{Q}_j])_{j\in n}\right)\circ\sigma\left(([\mathfrak{P}_j])_{j\in n}\right)
\end{aligned}
$$

Llamamos a esta estructura Σ-**álgebra categorial** y la denotamos por $[\mathbf{Pth}^{\mathrm{c},\mathcal{A}}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$.

EL COCIENTE DE CAMINOS



$\sigma((\mathfrak{Q}_j \circ \mathfrak{P}_j)_{j \in n})$



$\sigma((\mathfrak{Q}_j)_{j \in n}) \circ \sigma((\mathfrak{P}_j)_{j \in n})$

EL COCIENTE DE CAMINOS

Teorema. El cociente $[\mathbf{Pth}^{\mathrm{c},\mathcal{A}}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$ es la $\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}$-álgebra libre parcial generada por $\mathbf{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ para una variedad de $\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}$-álgebras parciales $\mathbf{PAlg}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\mathrm{c},\mathcal{A}})$.

Ecuaciones relativas a la estructura de categoría.

Existencia de producciones.

Relación entre las operaciones y la composición.

$$\left[\bigwedge_{j\in n}(x_j \circ y_j \stackrel{\mathrm{e}}{=} x_j \circ y_j)\right] \to \sigma((x_j \circ y_j)_{j\in n}) \stackrel{\mathrm{e}}{=} \sigma((x_j)_{j\in n}) \circ \sigma((y_j)_{j\in n}).$$

UN RESULTADO DE TIPO CURRY-HOWARD

Teorema. Existen un par de aplicaciones inversas

$$[\mathbf{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{\mathrm{c},\mathcal{A}}] \underset{\mathrm{ip}^{\mathrm{fc}}}{\overset{\mathrm{CH}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\cong}}}} [\mathbf{PT}_{\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}}^{\mathrm{c},\mathcal{A}}(X)]_{[\Theta]}$$

- isomorfismos de $\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}$-álgebras;
- isomorfismos de órdenes;
- isomorfismos categoriales.

LA SUSTITUCIÓN EN TÉRMINOS CAMINO

Proposición. Si M, N, P son términos camino en $\mathrm{PT}_{\Sigma^{\mathrm{c}},\mathcal{A}}(X)$ y

$$\mathrm{sc}\left(\mathrm{ip}^{\mathrm{fc}}(M)\right) = \mathrm{sc}\left(\mathrm{ip}^{\mathrm{fc}}(N)\right); \quad \mathrm{tg}\left(\mathrm{ip}^{\mathrm{fc}}(M)\right) = \mathrm{tg}\left(\mathrm{ip}^{\mathrm{fc}}(N)\right).$$

Entonces la sustitución de M por N en P vuelve a ser un término camino.

Esto es, **la sustitución está bien definida en** $\mathrm{PT}_{\Sigma^{\mathrm{c}},\mathcal{A}}(X)$.

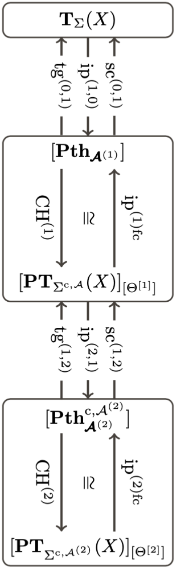
Podemos plantearnos caminos de segundo orden, esto es,

homotopías

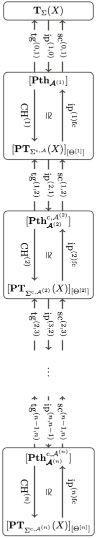
Para una especificación de segundo orden $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(2)}$ un camino de segundo orden $\mathfrak{P}^{(2)}$ tiene la forma

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, bend left, "\mathfrak{P}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathfrak{Q}"'{name=D}] & Q \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mathfrak{P}^{(2)}"] \end{tikzcd}$$

Para $\boldsymbol{\mathcal{A}^{(2)}} = (\mathcal{A}^{(k)})_{k\in 2}$ **especificación de segundo orden**,



Para $\boldsymbol{\mathcal{A}^{(n)}} = (\mathcal{A}^{(k)})_{k\in n}$ **especificación de orden n**,



$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
\mathbf{T}_{\Sigma}(X) \arrow[rr, "\varphi_0"] \arrow[d, "\mathrm{ip}^{(1,0)}"] & & \mathbf{T}_{\Gamma}(Y) \arrow[d, "\mathrm{ip}^{(1,0)}"] \\
{[\mathbf{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(1)}}]} \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{tg}^{(0,1)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{sc}^{(0,1)}"'] \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{(1)}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & & {[\mathbf{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}^{(1)}}]} \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{tg}^{(0,1)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{sc}^{(0,1)}"'] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{(1)}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
{[\mathbf{PT}^{\mathrm{c},\mathcal{A}}_{\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}}}(X)]_{[\Theta^{[1]}]}} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{(1)\mathrm{fc}}"'] \arrow[d, "\mathrm{ip}^{(2,1)}"] & & {[\mathbf{PT}^{\mathrm{c},\mathcal{B}}_{\Gamma^{\mathrm{c},\mathcal{B}}}(Y)]_{[\Theta^{[1]}]}} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{(1)\mathrm{fc}}"'] \arrow[d, "\mathrm{ip}^{(2,1)}"] \\
{[\mathbf{Pth}^{\mathrm{c},\mathcal{A}^{(2)}}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(2)}}]} \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{tg}^{(1,2)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{sc}^{(1,2)}"'] \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{(2)}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & & {[\mathbf{Pth}^{\mathrm{c},\mathcal{B}^{(2)}}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}^{(2)}}]} \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{tg}^{(1,2)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{sc}^{(1,2)}"'] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{(2)}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
{[\mathbf{PT}_{\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}^{(2)}}}(X)]_{[\Theta^{[2]}]}} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{(2)\mathrm{fc}}"'] \arrow[d, "\mathrm{ip}^{(3,2)}"] & & {[\mathbf{PT}_{\Gamma^{\mathrm{c},\mathcal{B}^{(2)}}}(Y)]_{[\Theta^{[2]}]}} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{(2)\mathrm{fc}}"'] \arrow[d, "\mathrm{ip}^{(3,2)}"] \\
\vdots \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{tg}^{(2,3)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{sc}^{(2,3)}"'] \arrow[d, "\mathrm{ip}^{(n,n-1)}"] & \vdots & \vdots \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{tg}^{(2,3)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{sc}^{(2,3)}"'] \arrow[d, "\mathrm{ip}^{(n,n-1)}"] \\
{[\mathbf{Pth}^{\mathrm{c},\mathcal{A}^{(n)}}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(n)}}]} \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{tg}^{(n-1,n)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{sc}^{(n-1,n)}"'] \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{(n)}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] & & {[\mathbf{Pth}^{\mathrm{c},\mathcal{B}^{(n)}}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}^{(n)}}]} \arrow[u, shift left=2, "\mathrm{tg}^{(n-1,n)}"] \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{sc}^{(n-1,n)}"'] \arrow[d, shift right=2, "\mathrm{CH}^{(n)}"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
{[\mathbf{PT}_{\Sigma^{\mathrm{c},\mathcal{A}^{(n)}}}(X)]_{[\Theta^{[n]}]}} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{(n)\mathrm{fc}}"'] & & {[\mathbf{PT}_{\Gamma^{\mathrm{c},\mathcal{B}^{(n)}}}(Y)]_{[\Theta^{[n]}]}} \arrow[u, shift right=2, "\mathrm{ip}^{(n)\mathrm{fc}}"']
\end{tikzcd}
$$

SIMULACIONES

Para determinar una **simulación** de $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(n)} = (\mathcal{A}^{(k)})_{k\in n}$ a $\boldsymbol{\mathcal{B}}^{(n)} = (\mathcal{B}^{(k)})_{k\in n}$ necesitaremos

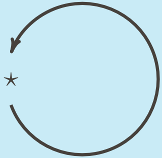
- Asignar a cada variable en X un término en $\mathrm{T}_{\Gamma}(Y)$;
- Asignar a cada símbolo de operación n-ário en Σ un término en $\mathrm{T}_{\Gamma}(Y)$ y una asignación de variables, esto es, un **derivor**
$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q;$$
- Asignar a cada k-producción en $\mathcal{A}^{(k)}$ un camino de orden k en $\mathrm{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}^{(k)}}$ que respete los dominios y codominios correspondientes.

La aplicación final, $\varphi_k \colon \mathbf{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{(k)}} \longrightarrow \mathbf{Pth}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}^{(k)}}$, se obtiene por **recursión Artiniana** y, por **Propiedad Universal**, inducir una aplicación en los cocientes.

> **In these days the angel of topology and the devil of abstract algebra fight for the soul of every individual discipline of mathematics.**
>
> —H. Weyl.

Una especificación para la $\mathbb{S}^1$

$$\mathbb{S}^1 = \begin{cases} X & = & \{\star\} \\ \Sigma & = & \varnothing \\ \mathcal{A} & = & \{(\star,\star)\} \end{cases}$$

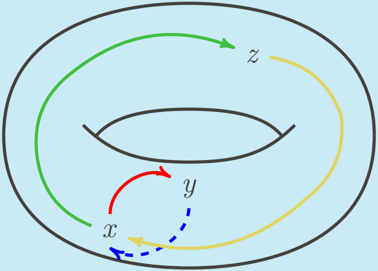


Una simulación de la $\mathbb{S}^1$

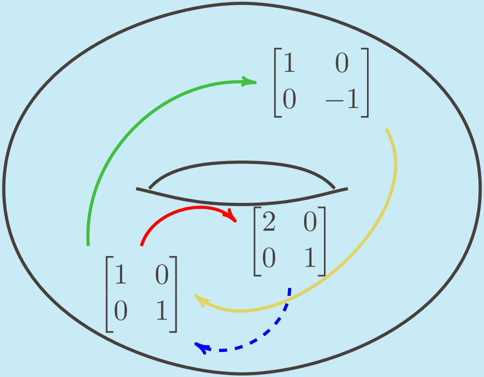
$$
\begin{tikzcd}
 & \sin(x) \arrow[dr, bend left, "\frac{\partial}{\partial x}"] & \\
-\cos(x) \arrow[ur, bend left, "\frac{\partial}{\partial x}"] & & \cos(x) \arrow[dl, bend left, "\frac{\partial}{\partial x}"] \\
 & -\sin(x) \arrow[ul, bend left, "\frac{\partial}{\partial x}"] &
\end{tikzcd}
$$

Una especificación para el $\mathbb{T}^2$

$$\mathbb{T}^2 = \begin{cases} X & = & \{x, y, z\} \\ \Sigma & = & \varnothing \\ \mathcal{A} & = & \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}\} \\ \mathcal{A}^{(2)} & = & \{((\mathfrak{s} \circ \mathfrak{r}) \circ (\mathfrak{q} \circ \mathfrak{p}), (\mathfrak{q} \circ \mathfrak{p}) \circ (\mathfrak{s} \circ \mathfrak{r}))\} \end{cases}$$



Una simulación del $\mathbb{T}^2$



$$(-f_2 \circ -f_2) \circ \left(\tfrac{1}{2} f_1 \circ 2 f_1\right) = \left(\tfrac{1}{2} f_1 \circ 2 f_1\right) \circ (-f_2 \circ -f_2)$$

¿Y si con estas especificaciones pudiésemos demostrar **propiedades topológicas**?

- $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
- $\pi_1\left(\mathbb{T}^2\right) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{T}^2$ es orientable.

$\ldots$

nLab

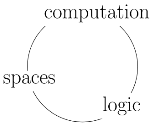
computational trilogy

1. Idea

A profound cross-disciplinary insight has emerged – starting in the late 1970s, with core refinements in recent years – observing that three superficially different-looking fields of mathematics,

- computation/programming languages
- formal logic/type theory
- ∞-category theory/∞-topos theory (algebraic topology)

are but three different perspectives on a single underlying phenomenon at the foundations of mathematics:



> **La possibilité de la traduction implique l'existence d'un invariant. Traduire, c'est précisément dégager cet invariant.**
>
> —H. Poincaré.

¡Gracias!