

Recull de qüestions

Àlgebra Lineal i Geometria I

2015 – 2024

Sobre el recull de qüestions

Les qüestions recopilades en aquest recull han estat proposades pels professors i professores responsables de l'assignatura d'Àlgebra Lineal i Geometria I del Grau en Matemàtiques i del Doble Grau en Física i Matemàtiques de la Universitat de València i han aparegut com a preguntes d'examen d'aquesta assignatura o com a qüestions proposades al Programa d'Estudiants Correctors de la Facultat de Ciències Matemàtiques de la Universitat de València.

Podeu trobar les solucions de les qüestions en el solucionari.

Podeu proposar les vostres solucions enviant per correu el corresponent codi L^AT_EX.

1 Sistemes d'equacions lineals

Qüestió 1.1: Siga $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu de rang n i $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. És cert que el sistema d'equacions $AX = B$ és compatible?

Qüestió 1.2: Siga $AX = B$ l'expressió matricial d'un sistema d' n equacions amb m incògnites. És cert que si $n \leq m$ aleshores el sistema no és compatible determinat? Justifica la resposta.

Qüestió 1.3: Dóna dos sistemes d'equacions sobre un cos $\mathbb{K}$ amb la mateixa matriu de coeficients de forma que un dels sistemes siga compatible i l'altre incompatible.

Qüestió 1.4: Defineix matriu esglaonada reduïda per files.

Qüestió 1.5: Siga $\mathcal{S}$ un sistema d' m equacions lineals amb n incògnites sobre $\mathbb{R}$ que admet dues solucions diferents. Demuestra que $\mathcal{S}$ té infinites solucions i construeix-les explícitament a partir de les dues solucions donades.

Qüestió 1.6: Siga $\mathcal{S}$ un sistema lineal d' m equacions amb n incògnites sobre un cos $\mathbb{K}$. Demuestra que si $\mathcal{S}$ és un sistema compatible determinat aleshores $m \geq n$.

2 Espais vectorials

Qüestió 2.1: Defineix espai vectorial.

Qüestió 2.2: Defineix conjunt de vectors linealment independent. Dóna un exemple d'un conjunt de vectors linealment independent d' $\mathbb{R}^3$ format per dos vectors. Emprant la definició, demostra que aquest conjunt és linealment independent.

Qüestió 2.3: Dóna un exemple de sistema generador que no siga base.

Qüestió 2.4: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i es consideren paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que el subconjunt d' $\mathbb{R}^2$ següent és un subespai vectorial d' $\mathbb{R}^2$ per a tota elecció dels paràmetres a i b . Determina en funció dels paràmetres a i b la corresponent dimensió.

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}.$$

Qüestió 2.5: Siga $AX = 0$ un sistema d'equacions lineals homogeni, amb $A \in M_n(\mathbb{K})$. Demuestra que el conjunt de solucions del sistema és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Qüestió 2.6: Dóna un sistema generador d' $\mathbb{R}^3$ que no siga base.

Qüestió 2.7: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $\mathcal{B}$ una base de V i $W \leq V$ un subespai vectorial. És cert que existeix un subconjunt $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ de forma que $\mathcal{B}'$ és base de W ?

Qüestió 2.8: Dóna un conjunt de vectors linealment independent d' $\mathbb{R}^3$ que no siga base.

Qüestió 2.9: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i els següents subconjunts

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}; \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 100, y > 100\}.$$

És cert que S i T són subespais vectorials de $\mathbb{R}^2$? Dóna bases per a $\langle S \rangle$ i $\langle T \rangle$.

Qüestió 2.10: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin $U, W \leq V$. Demostra que les següents afirmacions són equivalents.

1. La suma és directa, és a dir, $U \oplus W$;
2. Per a tot $u \in U$ i per a tot $w \in W$, si $u + w = 0$, aleshores $u = w = 0$;
3. Tot vector $v \in U + W$ s'escriu de forma única.

Qüestió 2.11: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin $S, T \subseteq V$ subconjunts de V . Raona sobre la veritat o falsedat de les següents afirmacions.

- Si S i T són linealment independents, aleshores $S \cup T$ és linealment independent.
- Si S i T són linealment independents, aleshores $S \cap T$ és linealment independent.

Qüestió 2.12: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin $S, T \subseteq V$ subconjunts de V . Raona sobre la veritat o falsedat de les següents afirmacions.

- Si S i T són sistemes generadors, aleshores $S \cup T$ és sistema generador.
- Si S i T són sistemes generadors, aleshores $S \cap T$ és sistema generador.

Qüestió 2.13: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin $U, W \leq V$ subespais vectorials. Siguin $\mathcal{B}_U$ i $\mathcal{B}_W$ bases d' U i W , respectivament, tals que $\mathcal{B}_U \cap \mathcal{B}_W = \emptyset$. Demostra que si $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ és base de V , aleshores $V = U \oplus W$.

Qüestió 2.14: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió n i siga $W \leq V$ un subespai vectorial de V de dimensió $n - 1$. Raona sobre la veritat o falsedat de les següents afirmacions

- Si $S \subseteq V$ és un subconjunt de V que conté a W estrictament, és a dir $W \subset S \subseteq V$, aleshores $S = V$.
- Si $U \leq V$ és un subespai vectorial de V que conté a W estrictament, és a dir $W \subset U \subseteq V$, aleshores $U = V$.

Qüestió 2.15: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Demostra que si $\{v, w\} \subseteq V$ és un conjunt de vectors linealment independent, aleshores $\dim_{\mathbb{K}}(V) \geq 2$.

Qüestió 2.16: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$. Determina si el següent subconjunt de vectors és un subespai vectorial

$$W = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Qüestió 2.17: Siga $\mathbb{K}$ un cos i siguin natural $m, n \in \mathbb{N}$. Determina bases per als $\mathbb{K}$ -espais vectorials

$$\text{i. } \mathbb{K}^n, \quad \text{ii. } M_{mn}(\mathbb{K}), \quad \text{iii. } \mathbb{K}_{\leq n}[x].$$

Qüestió 2.18: Demostra que si V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $U \leq V$ és un subespai vectorial, aleshores $0 \in U$.

Qüestió 2.19: Defineix conjunt de vectors linealment independent maximal.

Qüestió 2.20: Sobre l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ es considera el subespai vectorial $U = \langle (1, 1, 1), (1, 2, 3) \rangle \leq \mathbb{R}^3$. Troba, si és possible, un subespai vectorial $W \leq \mathbb{R}^3$ de dimensió 1 tal que $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Qüestió 2.21: Troba tots els subespais vectorials d' $\mathbb{R}^2$ que continguen els vectors $(1, 1)$ i $(0, 1)$.

Qüestió 2.22: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió 3. Demostra que, per a tot $1 \leq i \leq 3$, existeixen subconjunts $S_i \subseteq V$ tals que $|S_i| = i$, $\dim_{\mathbb{K}} \langle S_i \rangle = i$ de forma que $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3$.

Qüestió 2.23: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguen subconjunts $S \subseteq T \subseteq V$. Demostra que si S és sistema generador, aleshores T és sistema generador.

Qüestió 2.24: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Demostra que $\mathcal{B}$ és un conjunt de vectors linealment independent maximal.

Qüestió 2.25: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $U \leq V$ un subespai vectorial. Demostra que existeix un subespai vectorial $W \leq V$ tal que $V = U \oplus W$.

Qüestió 2.26: Dóna un exemple de sistema generador d' $\mathbb{R}^3$ que no siga base. Demostra que és sistema generador i que no és base.

Qüestió 2.27: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $G \subseteq V$ un sistema generador. És cert que qualsevol vector de V pot escriure's de forma única com a combinació lineal dels vectors en G ? Justifica la resposta.

Qüestió 2.28: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $S, T \subseteq_f V$ subconjunts finits de V tals que $S \cup T$ és linealment independent i $S \cap T = \emptyset$. És cert que $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \{0\}$?

Qüestió 2.29: Sobre l' $\mathbb{R}$ -espai $\mathbb{R}^2$ es consideren els subconjunts següents

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}; \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}.$$

Determina bases per a $\langle S \rangle$ i $\langle T \rangle$.

Qüestió 2.30: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió $n \in \mathbb{N}$. Siga $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V i siga $\{e_1, \bar{e}_1\}$ un conjunt de vectors linealment independent en V . És cert que el conjunt $\{\bar{e}_1, e_2, \dots, e_n\}$ és una base de V ?

Qüestió 2.31: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió $n \in \mathbb{N}$. Demostra que, si $v \in V - \{0\}$, aleshores existeix un subespai vectorial $W \leq V$ de dimensió $n - 1$ tal que $V = \langle v \rangle \oplus W$.

Qüestió 2.32: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguen $W, U \leq V$ subespais vectorials de V . Demostra que

$$\langle W \cup U \rangle = W + U.$$

Qüestió 2.33: És cert que tot sistema generador d' $\mathbb{R}^3$ és base? Justifica la resposta.

Qüestió 2.34: Troba subespais $W, U \leq \mathbb{R}^2$ tals que $\mathbb{R}^2 = W \oplus U$.

Qüestió 2.35: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ d' $\mathbb{R}^2$. Es considera la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Determina

- i. Una base $\overline{\mathcal{B}}$ d' $\mathbb{R}^2$ per a la qual A és la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.
- ii. Una base $\overline{\mathcal{B}}$ d' $\mathbb{R}^2$ per a la qual A és la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$.

Qüestió 2.36: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Defineix dimensió de V . Què garantitza que aquesta definició tinga sentit?

Qüestió 2.37: Demostra que els següents conjunts són base d' $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B} = \{(-1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}; \quad \overline{\mathcal{B}} = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Determina la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.

Qüestió 2.38: És cert que si U i W són subespais vectorials d' $\mathbb{R}^2$ no nuls i distints entre sí, aleshores $\mathbb{R}^2 = U + W$? Justifica la resposta.

Qüestió 2.39: Siga $p \in \mathbb{P}$ un nombre primer i $n \in \mathbb{N}$. Siga V un $\mathbb{Z}_p$ -espai vectorial de dimensió n . Determina $|V|$. (Ajuda: $\mathbb{Z}_p$ és un cos amb p elements.)

Qüestió 2.40: Per a l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ es consideren les bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(2, 1), (1, 2)\}$. Calcula les coordenades en la base $\mathcal{B}_2$ del vector que té coordenades X_1 en la base $\mathcal{B}_1$, on

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$$

Qüestió 2.41: Siga $W \leq \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in W$ i tal que $W \neq \mathbb{R}^2$. És cert que $(0, 1) \in W$? Justifica la resposta.

Qüestió 2.42: Troba tots els subespais W d' $\mathbb{R}^2$ tals que $(1, 1)$ i $(1, 0)$ pertanyen a W .

Qüestió 2.43: Per a l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ es consideren les bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}; \quad \mathcal{B}_2 = \{(2, 1), (1, 2)\}.$$

Pots trobar un vector que tinga les mateixes coordenades respecte a $\mathcal{B}_1$ i a $\mathcal{B}_2$?

Qüestió 2.44: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n$ vectors en V i $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ escalars en $\mathbb{K}$. És cert que si

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

aleshores $\lambda_i = \mu_i$, per a tot $1 \leq i \leq n$?

Qüestió 2.45: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguen $U, W \leq V$. Siguen $S, T \subseteq V$ sistemes generadors d' U i de W , respectivament. És cert que $S \cup T$ és sistema generador per a $U + W$?

Qüestió 2.46: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $U \leq V$. Demostra que existeix un subespai $W \leq V$ tal que $V = U \oplus W$.

Qüestió 2.47: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^4$ i el subespai $U \leq \mathbb{R}^4$ donat per

$$U = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4) \rangle.$$

Troba raonadament un subespai vectorial $W \leq \mathbb{R}^4$ de forma que $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Qüestió 2.48: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Siga $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ tal que tot vector de V pot escriure's de forma única com a combinació lineal dels vectors d' S . És cert que S és una base de V ?

Qüestió 2.49: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $U, W \leq V$ tals que $V = U + W$. Siga $v \in V - U$. És cert que $v \in W$?

Qüestió 2.50: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $W \leq V$ un subespai vectorial. Siga $\mathcal{B}_W$ una base de W i v un vector en $V - W$. Demostra que $\mathcal{B}_W \cup \{v\}$ és linealment independent.

Qüestió 2.51: Es considera $\mathbb{R}[x]$, l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial de polinomis amb indeterminada x i coeficients en $\mathbb{R}$. Es considera $p(x)$ un polinomi en $\mathbb{R}[x]$ de grau $k \in \mathbb{N}$ amb $k \geq 1$. Es consideren els següents subconjunts

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) \mid q(x)\}; \quad W = \mathbb{R}_{\leq k-1}[x].$$

Demostra que

- i. U i W són subespais vectorials d' $\mathbb{R}[x]$;
- ii. $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

Ajuda: Pots emprar la Divisió Euclidiana per als polinomis en $\mathbb{R}[x]$.

Qüestió 2.52: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^4$ i els següents subespais vectorials

$$W_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + 2z - t = 0 \\ -y + t = 0 \end{array} \right\};$$

$$W_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} -2x - y + t = 0 \\ 2z - t = 0 \\ -y + t = 0 \end{array} \right\};$$

$$W_3 = \langle (1, 2, -1, 0), (0, 1, 3, 2), (-1, -1, 4, 2) \rangle.$$

- i. Determina una base per a cada subespai.
- ii. Determina una base per a $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.
- iii. Determina una base per a $W_1 + W_2 + W_3$.

Qüestió 2.53: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ i els subespais vectorials U i W , on

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}.$$

$$W = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle$$

Determina $\dim_{\mathbb{R}}(U)$, $\dim_{\mathbb{R}}(W)$ i $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)$.

Qüestió 2.54: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $\{W_i \leq V \mid i \in I\}$ una família de subespais vectorials en V . Demostra que les següents afirmacions són equivalents

- i. $\bigoplus_{i \in I} W_i$ (la suma és directa);
- ii. $\forall F \subseteq_f I, \forall (w_i)_{i \in F} \in \prod_{i \in F} W_i$, si $\sum_{i \in F} w_i = 0$, aleshores, $\forall i \in F, w_i = 0$;
- iii. Tot element no nul de $\sum_{i \in I} W_i$ s'escriu de forma única.

Qüestió 2.55: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Demostra que

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle.$$

Qüestió 2.56: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$. Troba una base del subespai vectorial W , on

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{rcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Qüestió 2.57: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin $S, T \subseteq V$ subconjunts de vectors en V . Demostra que els següents conjunts són iguals.

- i. $\langle S \cup T \rangle$
- ii. $\langle S \rangle + \langle T \rangle$
- iii. $\langle \langle S \rangle \cup \langle T \rangle \rangle$.

Qüestió 2.58: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ de polinomis d'indeterminada x amb coeficients reals i grau fitat per 3. Demostra que el conjunt de polinomis $\{x^3 + 2x, x^3 + x^2, x^3 + 2\}$ és linealment independent. Amplia aquest conjunt fins a obtindre una base de $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Qüestió 2.59: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial estàndard $\mathbb{R}^3$. Determina tres subespais vectorials $W_1, W_2, W_3 \leq \mathbb{R}^3$ amb $W_2 \neq W_3$ per als quals

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_3.$$

Existeix algun subespai vectorial $W \leq \mathbb{R}^3$ que tinga un espai complementari unívocament determinat?

3 Aplicacions lineals

Qüestió 3.1: Dóna la definició d'aplicació lineal.

Qüestió 3.2: Es considera l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, y, 2x) \end{aligned}$$

Es consideren $\mathcal{B}_2 = \{e_1, e_2\}$ i $\mathcal{B}_3 = \{(0, 1, 0), (0, 0, -1), (2, 0, 0)\}$, la base canònica d' $\mathbb{R}^2$ i una base d' $\mathbb{R}^3$, respectivament. Determina la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_3$.

Qüestió 3.3: Troba l'expressió analítica d'una aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaci

- i. $\text{Ker}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

Qüestió 3.4: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats. Demuestra que V_1 és isomorf a V_2 si, i només si, $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = \dim_{\mathbb{K}}(V_2)$.

Qüestió 3.5: Es consideren els $\mathbb{R}$ -espais vectorials $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$. Determina en cadascun dels cassos, si és possible, l'existència d'una aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

- i. $f(1, 0, 1) = (2, 1)$; $f(1, 0, 0) = (2, 2)$; $f(0, 0, 2) = (1, 0)$;
- ii. $f(1, 0, 1) = (2, 1)$; $f(1, 0, 0) = (2, 2)$; $f(2, 0, 1) = (1, 0)$.

Qüestió 3.6: Defineix matriu coordenada d'una aplicació lineal.

Qüestió 3.7: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $f: V \rightarrow V$ una aplicació lineal tal que $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(f)$. És cert que $f = 0$?

Qüestió 3.8: Dóna un isomorfisme explícit entre els $\mathbb{R}$ -espais vectorials $M_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

Qüestió 3.9: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^2$ i la seua base canònica $\mathcal{B}_c$. Siga $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal que té com a matriu coordenada de la base $\mathcal{B}_c$ a la base $\mathcal{B}_c$ la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina una base $\overline{\mathcal{B}}$ d' $\mathbb{R}^2$ per a la qual la matriu coordenada d' f de la base $\overline{\mathcal{B}}$ a la base $\mathcal{B}_c$ és la matriu identitat de tamany 2, és a dir I_2 .

Qüestió 3.10: Es consideren els $\mathbb{K}$ -espais vectorials V_1 i V_2 amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = 2$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = 3$. Es consideren les bases $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{d_1, d_2, d_3\}$ de V_1 i V_2 , respectivament. Es considera l'aplicació lineal

$$f: V_1 \rightarrow V_2$$

que té a A com a matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$, on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determina

- i. Una base per a $\text{Ker}(f)$;
- ii. Una base per a $\text{Im}(f)$.

Qüestió 3.11: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siga $U_1 \leq V_1$ un subespai vectorial. Demuestra que $f[U_1] \leq V_2$.

Qüestió 3.12: Es considera l'aplicació transposada

$$\begin{aligned} (\cdot)^t: M_{mn}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{nm}(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto A^t. \end{aligned}$$

Demostra que l'aplicació transposada és un isomorfisme de $\mathbb{K}$ -espais vectorials.

Qüestió 3.13: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base de V . Siga $f: V \rightarrow V$ una aplicació lineal bijectiva. Troba raonadament una base $\overline{\mathcal{B}}$ de V de manera que la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ siga la matriu identitat I_2 .

Qüestió 3.14: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siga $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunt de vectors en V_1 linealment independent. És cert que si f és injectiva, aleshores $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ és linealment independent?

Qüestió 3.15: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siguen $v_1, \dots, v_n$ vectors en V_1 . És cert que si $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ és linealment independent, aleshores $\{v_1, \dots, v_n\}$ és linealment independent?

Qüestió 3.16: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siguen $v_1, \dots, v_n$ vectors en V_1 . És cert que si $\{v_1, \dots, v_n\}$ és linealment independent, aleshores $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ és linealment independent?

Qüestió 3.17: Es considera l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y, -z) \end{aligned}$$

Per als subespais vectorials

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^3; \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\} \leq \mathbb{R}^2.$$

Determina una base per a $f[W]$ i una base per a $f^{-1}[U]$.

Qüestió 3.18: Siga $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base d' $\mathbb{R}^3$ i siga $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$f(e_1) = -e_1; \quad f(e_2) = e_2 + e_1; \quad f(e_3) = e_2 - e_3.$$

Suposem que la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a la base canònica és

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina

- i. La matriu coordenada d' f de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}$;
- ii. La matriu coordenada d' f de la base $\mathcal{B}$ a la base canònica;
- iii. Una base de $\text{Ker}(f)$;
- iiii. La dimensió d' $\text{Im}(f)$.

Qüestió 3.19: Determina un endomorfisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

- i. $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0; x + z = 0\}$;
- ii. $\text{Im}(f) = \langle (1, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle$.

Qüestió 3.20: Es consideren els $\mathbb{R}$ -espais vectorials $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ amb les bases respectives

$$\mathcal{B}_3 = \{(1, 0, -1), (0, 2, 1), (1, 0, 0)\}; \quad \mathcal{B}_2 = \{(0, 1), (1, 1)\}.$$

Es considera l'aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que té com a matriu coordenada de $\mathcal{B}_3$ a $\mathcal{B}_2$ a la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Determina la matriu coordenada d' f en les respectives bases canòniques.

Qüestió 3.21: Es consideren els $\mathbb{R}$ -espais vectorials $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}$ amb les bases respectives

$$\mathcal{B}_3 = \{(0, 0, -1), (0, 2, 1), (1, 0, 0)\}; \quad \mathcal{B}_1 = \{2\}.$$

Es considera l'aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que té com a matriu coordenada de $\mathcal{B}_3$ a $\mathcal{B}_1$ a la matriu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina l'expressió analítica d' f .

Qüestió 3.22: Raona l'existència d'un endomorfisme f d' $\mathbb{R}^4$ tal que

- i. $\text{Im}(f) \leq \text{Ker}(f)$; $f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$; $f(1, 0, 1, 0) = (1, 0, 1, 1)$;
- ii. $\text{Ker}(f) \leq \text{Im}(f)$; $f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$; $f(1, 0, 1, 0) = (1, 0, 1, 1)$;

En cas d'existir, raona si aquest endomorfisme és únic.

Qüestió 3.23: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siga $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$ vectors tals que $f(v_1) = v_2$. Demostra

- i. $\langle f^{-1}[\{v_2\}] \rangle = \langle v_1 \rangle + \text{Ker}(f) = f^{-1}[\langle v_2 \rangle]$;
- ii. $\langle v_2 \rangle = f[\langle v_1 \rangle]$.

Qüestió 3.24: Siga $\mathbb{K}$ un cos i siguen natural $m, n \in \mathbb{N}$. Determina una base per al $\mathbb{K}$ -espai vectorial

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m).$$

Qüestió 3.25: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió finita $n \geq 1$. Demostra que V és isomorf a $\mathbb{K}^n$. Enuncia (sense demostrar-los) els resultats que utilitzes.

Qüestió 3.26: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió n . Construeix explícitament un isomorfisme de V en $\mathbb{K}^n$.

Qüestió 3.27: Troba l'error en el següent raonament.

“Sabem que $\mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$ -espai vectorial. Considerem l'aplicació $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mitjançant $f(x) = x^2$. Es té que

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0\} = \{0\}.$$

Així, f és una aplicació injectiva.”

Qüestió 3.28: Siga $\mathbb{K}$ un cos i $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. És cert que existeix una aplicació lineal $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ que tinga a A com a matriu coordinada en les respectives bases canòniques? Justifica la resposta.

Qüestió 3.29: Dóna un exemple d'aplicació lineal que no siga injectiva.

Qüestió 3.30: Dóna un exemple d'aplicació lineal sobrejectiva.

Qüestió 3.31: Troba l'expressió analítica d'una aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga

- i. $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)) = 2$;
- ii. $f(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

Qüestió 3.32: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siguen $\{v_1, \dots, v_r\}$ i $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ bases per a $\text{Ker}(f)$ i V_1 , respectivament. Demuestra que $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ és linealment independent.

Qüestió 3.33: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió n i siga $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Siguen $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}$ dues bases de V . És cert que si la matriu coordinada d' f de $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ és la matriu identitat I_n , aleshores $f = \text{id}_V$?

Qüestió 3.34: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f: V \rightarrow V$ una aplicació lineal tal que $f(f(v)) = f(v)$ per a tot $v \in V$. Demuestra que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

Qüestió 3.35: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f: V \rightarrow V$ una aplicació lineal. És cert que $V = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$?

Qüestió 3.36: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $f: V \rightarrow V$ una aplicació lineal tal que que, per a tota aplicació lineal $g: V \rightarrow V$, es té que $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$. Determina l'aplicació lineal f .

Qüestió 3.37: Es considera $\mathbb{C}$, el $\mathbb{C}$ -espai vectorial estàndard de dimensió 1. Considera l'aplicació que associa a cada nombre complex el seu conjugat, és a dir, l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

És cert que f és un automorfisme?

Qüestió 3.38: Considera $\mathbb{K}^3$, el $\mathbb{K}$ -espai vectorial estàndard de dimensió 3. Demuestra que existeix una aplicació lineal $f: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ tal que la següent cadena d'inclusions és estricta

$$\text{Ker}(\text{id}_{\mathbb{K}^3}) \subsetneq \text{Ker}(f) \subsetneq \text{Ker}(f^2) \subsetneq \text{Ker}(f^3).$$

Qüestió 3.39: En l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ es considera el subespai vectorial

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0 \right\}.$$

- i. Troba una base $\mathcal{B}_W$ de W .

- ii. Troba una base $\mathcal{B}_3$ d' $\mathbb{R}^3$ que continga a la base $\mathcal{B}_W$ de l'apartat i.
- iii. Dóna un isomorfisme $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow W$. Demuestra que és isomorfisme.
- iv. Troba la matriu coordinada d' f de $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_3$ de l'apartat ii., on

$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 2), (1, -1)\}.$$

Qüestió 3.40: Sigui V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i sigui $f: V \longrightarrow V$ una aplicació lineal. Es defineixen les potències d' f de manera recursiva com segueix

$$\begin{aligned} f^0 &= \text{id}_V; \\ f^{n+1} &= f^n \circ f; \end{aligned}$$

Notem que, per a cada $n \in \mathbb{N}$, f^n és una aplicació lineal.

- i. Demuestra que si m i n són naturals en $\mathbb{N}$ amb $m \leq n$, aleshores $\text{Ker}(f^m) \subseteq \text{Ker}(f^n)$.
- ii. Demuestra que, per a cada $n \in \mathbb{N}$, existeix una aplicació lineal $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ tal que la següent cadena d'inclusions és estricta

$$\text{Ker}(f^0) \subsetneq \text{Ker}(f) \subsetneq \text{Ker}(f^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(f^n).$$

Qüestió 3.41: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Demuestra que el conjunt $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ d'aplicacions lineals entre V_1 i V_2 amb

- i. Vector zero l'aplicació lineal nul·la, és a dir

$$\begin{aligned} 0: V_1 &\longrightarrow V_2 \\ v &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

- ii. Suma d'aplicacions lineals $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ com segueix

$$\begin{aligned} f + g: V_1 &\longrightarrow V_2 \\ v &\longmapsto f(v) + g(v) \end{aligned}$$

- iii. Producte d'una aplicació lineal $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ com segueix

$$\begin{aligned} \lambda f: V_1 &\longrightarrow V_2 \\ v &\longmapsto \lambda f(v) \end{aligned}$$

és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

Qüestió 3.42: Es consideren els $\mathbb{R}$ -espais vectorials $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, de polinomis sobre $\mathbb{R}$ amb grau fitat per 2, i $\mathbb{R}$, l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial estàndard de dimensió 1. Es considera l'aplicació φ , que a cada polinomi en $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ li assigna la seua integral definida en l'interval $[0, 1]$, és a dir

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &\longmapsto \int_0^1 p(x) dx \end{aligned}$$

- i. Demuestra que φ és una aplicació lineal.

- ii. Demuestra que φ és sobrejectiva però no injectiva.
- iii. Dóna bases per a $\text{Ker}(\varphi)$ i per a $\text{Im}(\varphi)$.
- iv. Es consideren les bases $\mathcal{B}_p = \{1, x, x^2\}$ i $\mathcal{B}_c = \{1\}$, per a $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ i $\mathbb{R}$, respectivament. Dóna la matriu coordenada de φ de $\mathcal{B}_p$ a $\mathcal{B}_c$. Empra aquesta matriu per a determinar el valor de la integral

$$\int_0^1 -\frac{x^2}{4} + 1 \, dx$$

4 Rang i equivalència de matrius

Qüestió 4.1: Dóna la definició de matrius equivalents.

Qüestió 4.2: Siga $A \in M_n(\mathbb{K})$. Demuestra que A és invertible si i només si $\text{rang}(A) = n$.

Qüestió 4.3: Siga $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ un cos i A, B matrius invertibles en $\text{GL}_n(\mathbb{K})$. Justifica que AB és invertible i troba la relació entre $(AB)^{-1}$, A^{-1} i B^{-1} .

Qüestió 4.4: Siga A una matriu en $M_n(\mathbb{K})$. Es considera el sistema d'equacions homogeni $AX = 0$. Anomenem V al $\mathbb{K}$ -espai vectorial de solucions del sistema d'equacions anterior. Demuestra que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n - \text{rang}(A)$. (Ajuda: Considera l'endomorfisme de $\mathbb{K}^n$ que té a A com a matriu coordenada de la base canònica a la base canònica.)

Qüestió 4.5: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió n i $f: V \rightarrow V$ un endomorfisme. Siga $\mathcal{B}$ una base de V i siga $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$. Demuestra que A és invertible si i només si f és un isomorfisme.

Qüestió 4.6: Es consideren els $\mathbb{R}$ -espais vectorials $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ i les bases $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2), (1, 0)\}$ i $\mathcal{B}_3 = \{(0, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ d' $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, respectivament. Es considera l'aplicació lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que té com a matriu coordenada de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_3$ la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

Determina dues bases $\overline{\mathcal{B}}_2$ i $\overline{\mathcal{B}}_3$ d' $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, respectivament, per a les quals la matriu coordenada d' f de $\overline{\mathcal{B}}_2$ a $\overline{\mathcal{B}}_3$ és una matriu del tipus

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Qüestió 4.7: Siguen A i $\overline{A}$ dues matrius en $M_{mn}(\mathbb{K})$ equivalents. Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Demuestra que existeix una aplicació lineal

$$f: V_1 \rightarrow V_2$$

i existeixen

$$\mathcal{B}_1, \overline{\mathcal{B}}_1 \text{ bases de } V_1;$$

$$\mathcal{B}_2, \overline{\mathcal{B}}_2 \text{ bases de } V_2,$$

per a les quals

A és la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$;

$\overline{A}$ és la matriu coordenada d' f de $\overline{\mathcal{B}}_1$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$.

Enuncia els resultats que utilitzes.

Qüestió 4.8: Siga $A \in GL_n(\mathbb{K})$ una matriu invertible. Demostra que A pot escriure's com a producte de matrius elementals.

Qüestió 4.9: Es considera una aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ tal que per a A , la matriu coordenada d' f respecte les bases $\mathcal{B}_3$ d' $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{B}_5$ d' $\mathbb{R}^5$ satisfà que $\text{rang}(A) = 1$. Calcula la dimensió de $\text{Ker}(f)$.

Qüestió 4.10: Demostra que existeixen tres endomorfismes d' $\mathbb{R}^2$ tals que qualsevol matriu d' $M_2(\mathbb{R})$ és la matriu coordenada d'algun d'aquests endomorfismes en algunes bases adequades. Justifica la resposta.

Qüestió 4.11: Siga $A \in GL_n(\mathbb{K})$ una matriu invertible. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base d'un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió n . Demostra que existeix una base $\overline{\mathcal{B}}$ per a la qual A^t és una matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.

Qüestió 4.12: Troba un subconjunt $S \subseteq M_3(\mathbb{R})$ tal que

- Si A i B pertanyen a S , aleshores A i B no són equivalents.
- Si $T \subseteq M_3(\mathbb{R})$ és un subconjunt que satisfà l'ítem i., aleshores $|T| \leq |S|$.

Qüestió 4.13: Siga $A \in GL_n(\mathbb{R})$ una matriu invertible. Demostra que podem passar d' A a A^{-1} mitjançant una seqüència finita d'operacions elementals per fila.

Qüestió 4.14: Siguen A, C matrius en $M_n(\mathbb{K})$. Demostra que $\text{rang}(AC) \leq \text{rang}(C)$.

Qüestió 4.15: Siguen A, C matrius en $M_n(\mathbb{K})$. Demostra que $\text{rang}(A + C) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(C)$.

Qüestió 4.16: Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats i siga $f: V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Siguen $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ bases de V_1 i V_2 , respectivament. Es considera A la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Demuestra que existeix una base $\overline{\mathcal{B}}_2$ de V_2 de forma que la matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}_1$ a $\overline{\mathcal{B}}_2$ és la forma esglaonada reduïda per files d' A .

Qüestió 4.17: Siga A una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$. Demostra que són equivalents les següents proposicions. Enuncia els resultats que utilitzes.

- A i A^t són matrius equivalents;
- $m = n$, és a dir, A és una matriu quadrada.

Es considera la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Determina dues matrius invertibles $P, Q \in GL_2(\mathbb{R})$ tals que

$$PAQ = A^t.$$

5 Determinants

Qüestió 5.1: Determina els paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ per als quals la següent matriu és invertible

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & a & a \\ 1 & a & b & a \\ 1 & a & a & b \end{bmatrix}$$

Qüestió 5.2: Determina els paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ per als quals la següent matriu és invertible

$$\begin{bmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{bmatrix}$$

Qüestió 5.3: Siga $C \in GL_n(\mathbb{K})$ una matriu invertible. Demosta que $\text{Det}(C^{-1}) = (\text{Det}(C))^{-1}$.

Qüestió 5.4: Siga $C \in M_3(\mathbb{R})$ una matriu tal que $\text{Det}(C) = 10$. Es considera la matriu $D = 5C$. Obtén raonadament $\text{Det}(D)$ i la relació que existeix entre C^{-1} i D^{-1} .

Qüestió 5.5: Calcula el determinant de la següent matriu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Qüestió 5.6: Determina els paràmetres $a, b, c \in \mathbb{R}$ per als quals la següent matriu és invertible

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix}$$

Qüestió 5.7: Siguen A, B dues matrius equivalents en $M_n(\mathbb{R})$. És cert que $\text{Det}(A) = \text{Det}(B)$?

6 Semblança i valors propis

Qüestió 6.1: Siga f un endomorfisme en $\mathbb{R}^3$ que té a A com a matriu coordinada en la base canònica. Suposem que $\text{polcar}(A) = x(x-1)(x+1)$.

Demosta la veritat o falsedat de les següents afirmacions.

- A és diagonalitzable.
- Existeix $V \leq \mathbb{R}^3$ amb $\dim(V) = 1$ tal que $f(v) = v$, per a tot $v \in V$.

Qüestió 6.2: Determina si la matriu $A \in M_2(\mathbb{R})$ és diagonalitzable, on $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Qüestió 6.3: Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió n i siga $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Siga λ un valor propi d' f . Demostra que $1 \leq d_{\lambda} \leq \alpha_{\lambda}$, on d_{λ} i α_{λ} denoten, respectivament, la multiplicitat geomètrica i la multiplicitat algebraica del valor propi λ .

Qüestió 6.4: Siguen A i B dues matrius en $M_n(\mathbb{K})$. Demostra o dóna un contraexemple de l'enunciat “Si A és diagonalitzable, aleshores B és diagonalitzable”, per als següents casos:

- i. A i B són equivalents.
- ii. A i B són semblants.

Qüestió 6.5: Siga f un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V . Demostra que les següents proposicions són equivalents

- i. $\text{polcar } f$ no té arrels en $\mathbb{K}$.
- ii. No existeix cap subespai vectorial $U \leq V$ de dimensió 1 amb $f[U] \leq U$.

Qüestió 6.6: Siga f un endomorfisme diagonalitzable d'un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V . Demostra que si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ són tots els valors propis d' f , aleshores $V = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}$.

Qüestió 6.7: Dóna un exemple d'endomorfisme diagonalitzable f en $\mathbb{R}^3$ tal que 0 siga valor propi d' f , $(1, 1, 1)$ siga un vector propi associat a 1 i la multiplicitat algebraica d'1 siga 2.

Qüestió 6.8: Siga f un endomorfisme d'un $\mathbb{Q}$ -espai vectorial V . És cert que f és diagonalitzable si i només si per a tot valor propi d' f la seua multiplicitat algebraica coincideix amb la seua multiplicitat geomètrica?

Qüestió 6.9: Siga f un endomorfisme d'un $\mathbb{C}$ -espai vectorial V . És cert que f és diagonalitzable si i només si per a tot valor propi d' f la seua multiplicitat algebraica coincideix amb la seua multiplicitat geomètrica?

Qüestió 6.10: Siga f un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V . Siguen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tots els valors propis diferents d' f amb multiplicitats geomètriques associades $d_1, \dots, d_r$, respectivament. És cert que f és diagonalitzable si i només si $\sum_{i=1}^r d_i = \dim V$?

Qüestió 6.11: Siguen A i B dues matrius en $M_n(\mathbb{K})$. És cert que si A i B són semblants i A és diagonalitzable, aleshores B és diagonalitzable?

Qüestió 6.12: Siguen A i B dues matrius en $M_n(\mathbb{K})$. És cert que si A i B són diagonalitzables, aleshores $A + B$ també és diagonalitzable?

Qüestió 6.13: Siguen A i B dues matrius semblants en $M_n(\mathbb{K})$. Demostra que A té un vector propi associat a un valor propi $\lambda \in \mathbb{K}$ si i només si B té un vector propi associat al mateix valor propi $\lambda \in \mathbb{K}$.

Qüestió 6.14: Siga $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal diagonalitzable. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ una base formada per vectors propis. Demostra que $e_1 + e_2$ és vector propi si, i només si, $f = \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ per a algun $\lambda \in \mathbb{R}$.

Qüestió 6.15: Dóna un exemple d'endomorfisme f en $\mathbb{R}^3$ tal que 3 siga valor propi d' f amb multiplicitat algebraica 2 i $(1, 1, -1)$ siga un vector propi associat a -1 . És f diagonalitzable?

Qüestió 6.16: Es considera l'endomorfisme f d' $\mathbb{R}^3$ que té a A com a matriu coordinada en la base $\overline{\mathcal{B}} = \{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$, on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Determina l'expressió analítica de l'endomorfisme f .
- Determina si l'endomorfisme f és diagonalitzable.
- Dóna una relació de semblança entre la matriu A i la matriu coordinada d' f en la base canònica.

Qüestió 6.17: Siga f un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V . Demuestra que si $v_1, v_2 \in V - \{0\}$ són vectors propis associats a valors propis diferents, aleshores el conjunt $\{v_1, v_2\}$ és linealment independent.

Qüestió 6.18: Demuestra que tots els endomorfismes sobre l'espai vectorial $\mathbb{R}$ són diagonalitzables. Es cert el mateix enunciat per a l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$, amb $n \geq 2$?

Qüestió 6.19: Suposem que A és la matriu coordinada de l'endomorfisme $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, on

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Troba, si és possible, una base $\overline{\mathcal{B}}$ d' $\mathbb{R}^2$ formada per vectors propis.
- Calcula B , la matriu coordinada d' f en la base $\overline{\mathcal{B}}$.
- Quina és la relació entre B i A ?

Qüestió 6.20: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$. Determina un endomorfisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaci les següents característiques.

- $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(f)) = 2$
- $(1, 2, 1)$ és vector propi associat al valor propi 1.
- $(0, 1, -1)$ és vector propi associat al valor propi 0.
- f no és diagonalitzable.

Una vegada determinat,

- Dóna la matriu coordinada d' f en la base canònica d' $\mathbb{R}^3$.
- Les propietats descrites en l'enunciat garantitzen la unicitat de l'endomorfisme f ?
- Determina totes les possibilitats per al polinomi característic d'un endomorfisme que satisfaci les propietats descrites en l'enunciat.

Qüestió 6.21: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial $\mathbb{R}^3$ i l'endomorfisme

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - 3z, x + y - 4z, -2z) \end{aligned}$$

Determina si f és diagonalitzable.

Qüestió 6.22: Siga $\mathbb{K}$ un cos amb característica diferent a 2. Es considera un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 3$ i la base de V , $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Siga $f: V \rightarrow V$ una aplicació lineal i $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar.

- Demostra que si e_1 i $e_1 + e_2$ són vectors propis per a λ , aleshores e_2 també és propi per a λ .
- És cert que si $\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda}) = 2$, aleshores f és diagonalitzable?
- Siga A la matriu coordinada d' f en la base $\mathcal{B}$. Suposem que A és diagonalitzable. És cert que A és semblant a una única matriu diagonal?

7 Formes bilineals

Qüestió 7.1: Troba raonadament la signatura de la matriu $A \in M_2(\mathbb{R})$, on $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Qüestió 7.2: Siguen A i B dues matrius simètriques reals. És cert que si $\det(A) > 0$ i $\det(B) > 0$, aleshores A i B són congruents?

Qüestió 7.3: Siga f una forma bilineal d'un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V i siga $\mathcal{B}$ una base de V . Demostra que f és antisimètrica si i només si la matriu coordinada d' f en $\mathcal{B}$ és antisimètrica.

Qüestió 7.4: Siga A una matriu de tamany n sobre $\mathbb{C}$ simètrica. Demostra que A és congruent a una matriu del tipus $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Qüestió 7.5: Siga $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ una matriu simètrica de tamany n sobre $\mathbb{R}$ amb signatura menor estricta que el seu rang. És cert que existeix un índex i per al qual $a_{ii} < 0$?

Qüestió 7.6: Digues, de forma raonada, si les següents matrius sobre $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Són semblants.
- Són congruents.

Qüestió 7.7: És necessàriament cert que tota matriu real és congruent a una matriu diagonal?

Qüestió 7.8: Siga f una forma bilineal simètrica d'un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V diferent a l'aplicació nula. Demostra que existeix un $v \in V$ tal que $f(v, v) \neq 0$.

Qüestió 7.9: Siguen A i B matrius en $M_n(\mathbb{Q})$. És cert que si A i B són congruents i $\det(A) > 0$, aleshores $\det(B) > 0$?

Qüestió 7.10: Defineix rang d'una forma bilineal. Justifica que la definició té sentit.

Qüestió 7.11: És cert que dues matrius simètriques en $M_n(\mathbb{R})$ són congruents si, i només si, tenen el mateix rang?

Qüestió 7.12: Dóna un exemple d'una forma bilineal simètrica f definida en un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V que satisfaci que $f(v, v) \geq 0$, $f(w, w) \geq 0$ i $f(v + w, v + w) \leq 0$ per a dos vectors v i $w \in V$. Demuestra que el conjunt $W = \{v \in V \mid f(v, v) \geq 0\}$ no és, en general, subespai vectorial.

Qüestió 7.13: És cert que dues matrius en $M_n(\mathbb{C})$ són congruents si, i només si, tenen el mateix rang?

Qüestió 7.14: Siguen A i B dues matrius congruents en $M_n(\mathbb{R})$. És cert que si A és diagonalitzable, aleshores B també és diagonalitzable?

Qüestió 7.15: Suposem que A és la matriu coordenada de la forma bilineal $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, on

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- i. Troba, si és possible, una base $\overline{\mathcal{B}}$ d' $\mathbb{R}^2$ ortogonal.
- ii. Calcula C , la matriu coordenada de g en la base $\overline{\mathcal{B}}$.
- iii. Quina és la relació entre C i A ?

Qüestió 7.16: Dóna un exemple de forma bilineal simètrica f sobre $\mathbb{R}^2$ de signatura 1 i rang 2 tal que $f((1, 1), (1, -1)) = 2$.

Qüestió 7.17: Siga f una forma bilineal simètrica definida sobre un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V . Siguen U i W subespais vectorials de V . És cert que $(U + W)^\perp = U^\perp + W^\perp$?

Qüestió 7.18: Quin és el subconjunt d' $M_n(\mathbb{R})$ format per les matrius congruents a alguna matriu diagonal?

Qüestió 7.19: Siga V un espai vectorial de dimensió major o igual a 2. Troba l'expressió analítica d'alguna forma bilineal en V per a la què existeix un vector $v \in V$ tal que $\langle v \rangle = \langle v \rangle^\perp$.

Qüestió 7.20: Siga $\mathbb{K}$ un cos amb $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal sobre V . Demuestra que les següents proposicions són equivalents.

1. f és una forma bilineal simètrica.
2. Tota matriu coordenada d' f és simètrica.
3. Existeix una base $\mathcal{B}$ de V ortogonal per a f .
4. Existeix una matriu coordenada d' f que és una matriu diagonal.
5. Tota matriu coordenada d' f és congruent a una matriu diagonal.

Enuncia els resultats que utilitzes sense demostrar-los.

8 Productes escalars

Qüestió 8.1: Siga $(V, \cdot)$ un espai vectorial euclidià. És necessàriament cert que $v \cdot w \geq 0$ per a tot $v, w \in V$?

Qüestió 8.2: Siga $(V, \cdot)$ un espai vectorial euclidià. Siga $\{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunt de vectors no nuls de V ortogonals 2 a 2. Demuestra que el conjunt $\{v_1, \dots, v_r\}$ és linealment independent.

Qüestió 8.3: Troba una base ortogonal $\mathcal{B}$ de l'espai euclidià estàndard $\mathbb{R}^2$ tal que $(1, 2) \in \mathcal{B}$.

Qüestió 8.4: Siga V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial i f una forma bilineal simètrica sobre V . Demuestra que V té bases ortonormals si i només si f és un producte escalar.

Qüestió 8.5: Siga $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ una matriu simètrica de tamany n sobre $\mathbb{R}$. És cert que si existeix un índex i per al qual $a_{ii} \geq 0$ aleshores A és una matriu coordinada d'un producte escalar sobre $\mathbb{R}^n$?

Qüestió 8.6: Siga $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ la matriu coordinada d'un producte escalar sobre $\mathbb{R}^n$ en una base $\overline{\mathcal{B}}$. És cert que existeix un índex i per al qual $a_{ii} \geq 0$?

Qüestió 8.7: Siga V un espai vectorial euclidià de dimensió 2. Siguen $\mathcal{B} = \{u, v\}$ i $\overline{\mathcal{B}} = \{u, w\}$ dues bases ortonormals de V . Demuestra que $w = v$ o $w = -v$.

Qüestió 8.8: Considerem l'espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}^4, \cdot)$. Calcula la projecció ortogonal del vector $(1, 2, 1, 0)$ sobre l'espai vectorial $U = \langle (1, 1, 0, -1), (1, 0, -2, 2) \rangle$.

Qüestió 8.9: Dins l'espai euclidià estàndard $(\mathbb{R}^3, \cdot)$, considerem el subespai vectorial

$$U = \langle (1, 2, 0), (1, 0, 1) \rangle.$$

i. Troba una base ortonormal d' $U^\perp$.

ii. Calcula la projecció ortogonal del vector $(3, 0, 0)$ sobre $U^\perp$.

Qüestió 8.10: Siga f una forma bilineal simètrica regular d'un espai vectorial V . Siga $U \leq V$. Demuestra que $(U^\perp)^\perp = U$.

Qüestió 8.11: Siga $(V, \cdot)$ un espai vectorial euclidià de dimensió n . Siguen W i U dos subespais de la mateixa dimensió $r \leq n$. Demuestra que existeix una isometria $f: V \rightarrow V$ que satisfà

$$f[W] = U.$$

Qüestió 8.12: Siguen f un producte escalar en un espai vectorial V i U un subespai de V diferent a $\{0\}$. Considerem $f|_{U \times U}$, la restricció d' f a U . Siga A la matriu coordinada d' $f|_{U \times U}$ en una base $\mathcal{B}$ d' U . Demuestra que $\det(A) > 0$.

Qüestió 8.13: Siga $(V, \cdot)$ un espai vectorial euclidià amb $\dim V = 2$. Siga $u \in V$ tal que $u \cdot u = 1$. Demuestra que només hi ha dos formes possibles d'escollir un vector $v \in V$ de forma que el conjunt $\{u, v\}$ siga una base ortonormal.

Qüestió 8.14: Es considera la forma bilinear f d' $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ que té a A com a matriu coordenada en la base $\overline{\mathcal{B}} = \{(0, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$, on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- És f un producte escalar?
- Determina l'expressió analítica d' f .
- Utilitza Gram-Schmidt per obtenir a partir de $\overline{\mathcal{B}}$ una base ortonormal d' $\mathbb{R}^3$.

Qüestió 8.15: Siga $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià estàndard de dimensió 3. Considerem la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, 2, 0)\}$ d' $\mathbb{R}^3$. Obtén, si és possible, una nova base d' $\mathbb{R}^3$

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$$

que satisfaci les següents condicions:

- $\langle \overline{e}_1 \rangle = \langle (1, 0, 1) \rangle$;
- $\langle \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle = \langle (1, 0, 1), (1, -1, 1) \rangle$;
- Els vectors de $\overline{\mathcal{B}}$ formen, dos a dos, un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians.

Qüestió 8.16: Es considera l'espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.

- Troba, si és possible, una base ortonormal del subespai vectorial U d' $\mathbb{R}^3$ donat per

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$$

- Determina, si és possible, una isometria $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ que complisca que $f[V] = U$ on V és el subespai vectorial d' $\mathbb{R}^3$ donat per

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

Qüestió 8.17: Siga $(V, \cdot)$ un espai vectorial euclidià, siga $U \leq V$ i $v \in V$. És cert que si $v \notin U$, aleshores $v \in U^\perp$?

Qüestió 8.18: Siga f una forma bilinear simètrica en un $\mathbb{R}$ -espai vectorial V . És cert que si f no és un producte escalar, aleshores existeix $v \in V$ no nul tal que $f(v, v) = 0$?

Qüestió 8.19: Siga $(V, \cdot)$ un espai vectorial euclidià, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V i $h: V \rightarrow V$ una aplicació lineal. Demostra que si l'equació $h(e_i) \cdot h(e_j) = e_i \cdot e_j$ se satisfà per a tot $1 \leq i, j \leq n$, aleshores h és injectiva.

Qüestió 8.20: Siga V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$ i siga $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ una base de V . Es considera la forma bilinear $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que té a la següent matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

com a matriu coordenada d' f en la base $\mathcal{B}$.

1. Determina una base $\overline{\mathcal{B}}$ ortogonal per a f .
2. Determina $\overline{A}$ la matriu coordenada d' f en $\overline{\mathcal{B}}$.
3. Troba la relació de congruència entre A i $\overline{A}$.
4. És f un producte escalar?

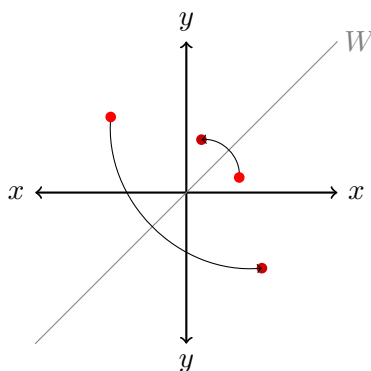
Qüestió 8.21: Siga V un $\mathbb{R}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ i siga $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de V . Siga $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal en V que satisfà la següent condició

$$\text{Per a tot } v \in V, f(v, v) \geq 0.$$

És cert que f és un producte escalar?

Qüestió 8.22: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}^2, \cdot)$. Determina l'expressió analítica de l'isometria $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donada per la reflexió sobre el subespai vectorial

$$W = \langle (1, 1) \rangle$$



(Ajuda: Adoneu-vos que en esta situació podeu trobar dos vectors propis per a h . Fixeu una base adequada per al problema, considereu la matriu coordenada en aquesta base i després passeu-la a la base canònica.)

Qüestió 8.23: Siga $(V, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià amb $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortogonal de V . Demostra que

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$$

és una base ortonormal de V .

Qüestió 8.24: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai vectorial euclidià estàndard $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ i el subespai vectorial $U = \langle (1, 0, 1), (1, 1, -2) \rangle$.

- i. Determina una base ortonormal per a U .
- ii. Calcula la projecció ortogonal del vector $(0, 1, 1)$ en U .

9 Espai afí

Qüestió 9.1: Dóna la definició d'espai afí.

Qüestió 9.2: Considerem l'espai afí estàndard $\mathbb{R}^3$. Determina les equacions cartesianes en el sistema de referència canònic de la menor varietat afí que conté els punts

$$P = (1, 0, 1), \quad Q = (2, 0, 2), \quad R = (3, 1, 1).$$

Qüestió 9.3: Sobre l'espai afí estàndard $\mathbb{R}^2$ es consideren els dos sistemes de referència afí següents.

$$\mathcal{R}_1 = ((0, 1), \{(2, -2), (0, -1)\}), \quad \mathcal{R}_2 = ((3, -1), \{(1, 2), (-1, 7)\})$$

Obtén les matrius afins de canvi de sistema de referència entre $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$.

Qüestió 9.4: Siguen W_P i U_Q dues varietats afins d'un espai afí $\mathcal{A}$. Demostra la següent igualtat entre varietats afins.

$$W_P + U_Q = (W + U + \overrightarrow{PQ})_P$$

Qüestió 9.5: Considerem l'espai afí estàndard $\mathbb{R}^2$. Siga $P = (0, 0)$. Calcula les coordenades de P en el sistema de referència

$$\mathcal{R} = ((1, 1); \{(1, 1), (1, 0)\})$$

Qüestió 9.6: Sobre l'espai afí estàndard $\mathbb{R}^4$, determina el menor espai afí que conté els següents 4 punts $P = (1, 3, 0, 0)$, $Q = (2, 0, -1, 1)$, $R = (3, 0, 1, 1)$ i $S = (2, 3, 2, 0)$. Determina les seues equacions cartesianes respecte el sistema de referència canònic. Quina és la dimensió d'aquest espai afí?

Qüestió 9.7: Siguen P , Q i R tres punts en un espai afí $\mathcal{A}$. Demostra que l'espai afí $\langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QR} \rangle_P$ és el menor espai afí que conté els punts P , Q i R .

Qüestió 9.8: Sobre l'espai afí estàndard $\mathbb{R}^4$ es consideren els següents plànols.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 3t - 3 = 0, -2x - y + z + 5 = 0\} \\ \Pi_2 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - z - 3t - 2 = 0, 2x + 2y - z + 3t - 8 = 0\} \end{aligned}$$

Determina la seua posició relativa.

Qüestió 9.9: Siga $\mathcal{A}$ un espai afí. Siguen W_P i U_Q dues varietats afins en $\mathcal{A}$. Siga $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una afinitat. Demostra que si $f[W_P]$ i $f[U_Q]$ es creuen, aleshores les varietats W_P i U_Q també es creuen.

Qüestió 9.10: Siga $(\mathcal{A}, V, +)$ un espai afí. Siguen $P, Q \in \mathcal{A}$ i $v, w \in V$. Demostra que si $P + v = Q + w$, aleshores $\overrightarrow{PQ} = v - w$.

Qüestió 9.11: Siga $\mathcal{A}$ un espai afí de dimensió 3. Demostra que si dos plans distints Π_1 i Π_2 es tallen, aleshores $\Pi_1 \cap \Pi_2$ és una recta.

Qüestió 9.12: Siga $\mathcal{A}$ un espai afí de dimensió 3 i siguen $P, Q, R \in \mathcal{A}$. Demosta que si existeix un únic pla que passa per P, Q i R , aleshores $\dim\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR} \rangle = 2$.

Qüestió 9.13: Es considera l' $\mathbb{R}$ -espai afí estàndard $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, +)$. Es consideren els sistemes de referència afí següents

$$\mathcal{R}_c^{(3)}, \text{ el sistema de referència afí canònic d' } \mathbb{R}^3$$

$$\overline{\mathcal{R}} = ((1, 2, 0); \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\})$$

- i Determina les equacions del canvi de sistema de referència de $\mathcal{R}_c$ a $\overline{\mathcal{R}}$ i de $\overline{\mathcal{R}}$ a $\mathcal{R}_c$.
- ii Determina les equacions cartesianes en els dos sistemes de referència de la recta que passa pels punts $P = (0, 0, 1)$ i $Q = (1, 0, 0)$.

10 Afinitats

Qüestió 10.1: Defineix afinitat entre espais afins. Pots donar un exemple d'una afinitat no bijectiva?

Qüestió 10.2: Siga $\mathcal{A}$ un espai afí amb espai vectorial subjacent V . Siga g un endomorfisme de V . Pots donar una afinitat $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\overline{f} = g$?

Qüestió 10.3: Siga f una afinitat d'un espai afí $\mathcal{A}$. Demosta que f és injectiva si i només si $\overline{f}$ és injectiva.

Qüestió 10.4: Siga f una afinitat d'un espai afí $\mathcal{A}$. Demosta que f és sobrejectiva si i només si $\overline{f}$ és sobrejectiva.

Qüestió 10.5: Siga $\mathcal{A}$ un espai afí i siga $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una aplicació afí. Siguen W_P i U_Q dues varietats afins dins d' $\mathcal{A}$. És cert que si $f[W_P]$ i $f[U_Q]$ es creuen, aleshores W_P i U_Q es creuen?

Qüestió 10.6: Siga $(\mathcal{A}, V, +)$ un espai afí euclidià i $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una afinitat. Siguen P_1, P_2 i P_3 tres punts colineals d' $\mathcal{A}$. Demosta que les respectives imatges per f , és a dir, $f(P_1)$, $f(P_2)$ i $f(P_3)$, tornen a ser tres punts colineals d' $\mathcal{A}$.

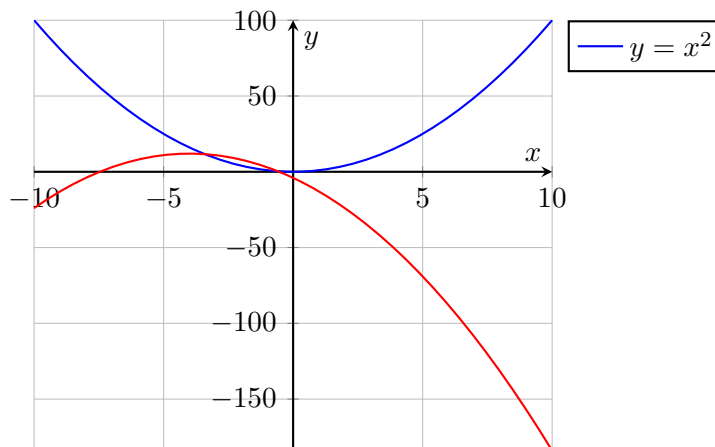
Qüestió 10.7: Demosta que dos espais afins de la mateixa dimensió són isomorfs.

Qüestió 10.8: Dóna un exemple d'afinitat en l'espai afí estàndard $\mathbb{R}^2$ que tinga a $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$ com a conjunt de punts fixos.

Qüestió 10.9: Es considera la paràbola d'equació cartesiana $y = x^2$. Aquesta corba ve determinada pel conjunt de punts $\{(\lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, en blau a la gràfica. A aquest conjunt de punts li apliquem els següents moviments: En primer lloc li apliquem una simetria respecte l'eix x i al conjunt de punts resultants els apliquem una translació de vector $(-4, 12)$. Aquests moviments transformen la paràbola original en la paràbola roja de la gràfica.

- i. Dóna la matriu afí d'aquest moviment.

ii. Dóna l'equació cartesiana de la paràbola resultant.



Qüestió 10.10: Sigui $\mathcal{A}$ un espai afí i sigui $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una aplicació afí. És cert que si $\bar{f}$ és la identitat, aleshores f és una translació?

Qüestió 10.11: Siguen $(\mathcal{A}, V, +)$ i $(\mathcal{B}, U, +)$ dos espais afins. Sigui $W \leq V$ un subespai vectorial i P un punt d' $\mathcal{A}$. Sigui $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ una afinitat amb aplicació subjacent $\bar{f}: V \rightarrow U$. Demuestra que, per a la varietat afí W_P , es té que

$$f[W_P] = (\bar{f}[W])_{f(P)}.$$

Qüestió 10.12: Sigui $(\mathcal{A}, V, +)$ un espai afí i sigui $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una afinitat amb aplicació lineal subjacent $\bar{f}: V \rightarrow V$. Raona sobre la veritat o falsedat de les següents proposicions.

- Si $P \in \mathcal{A}$ és un punt fixe per a f i $v \in V$ un vector propi per a $\bar{f}$ associat a un valor propi no nul, aleshores existeix una recta r en $\mathcal{A}$ que satisfà que $f[r] = r$, és a dir, existeix una recta f -invariant.
- Si existeix una recta r en $\mathcal{A}$ que satisfà que $f[r] = r$, és a dir si existeix una recta f -invariant, aleshores existeix $P \in \mathcal{A}$ un punt fixe per a f i $v \in V$ un vector propi per a $\bar{f}$ associat a un valor propi no nul.

11 Espai afí euclidià

Qüestió 11.1: Defineix isometria en un espai afí euclidià i enuncia una caracterització equivalent.

Qüestió 11.2: Sigui $\mathcal{A}$ un espai afí euclidià i siguin W_P i U_Q dues varietats afins d' $\mathcal{A}$. Demuestra que existeixen $R \in W_P$ i $S \in U_Q$ tals que $\overrightarrow{RS} \in (W + U)^\perp$.

Qüestió 11.3: Sigui $\mathcal{A}$ un espai afí euclidià i $P, Q, R \in \mathcal{A}$. Demuestra que les següents proposicions són equivalents.

- $d(P, Q)^2 + d(P, R)^2 = d(Q, R)^2$.

ii. Els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ són ortogonals.

Qüestió 11.4: Siga $(\mathcal{A}, V, +)$ un espai afí euclidà, $P, Q \in \mathcal{A}$ i $v \in V$. Demuestra que

$$d(P, Q) = d(P + v, Q + v).$$

Dedueix que tota translació és sempre un moviment.

Qüestió 11.5: Siga $\mathcal{A}$ un espai afí euclidà i siga U_Q un subespai afí. Considerem l'aplicació $g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, que a cada punt $P \in \mathcal{A}$ li assigna $P_{U_Q}(P)$, la seua projecció ortogonal respecte U_Q . És g una afinitat?

Qüestió 11.6: Siga $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +)$ l'espai afí euclidà estàndard. Siga $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un moviment i siga $v \in \mathbb{R}^n$ un vector propi d' $\bar{f}$. Demuestra que $f \circ t_v$ és igual a $t_v \circ f$ o igual a $t_{-v} \circ f$.

Qüestió 11.7: Sobre l'espai afí estàndard $\mathbb{R}^2$ es considera l'homotècia de raó 2 i centre $P = (1, 3)$. Determina la seua matriu afí respecte el sistema de referència canònic. És aquesta aplicació afí un moviment sobre $\mathbb{R}^2$?