Treball Fi de Grau - Curs 2020-2021

Els teoremes d'isomorfisme en àlgebres heterogènies

Autor: **RAÚL RUIZ MORA**

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Facultat de Matemàtiques | Grau en Matemàtiques

Para ti, papá

Índex

CAPÍTOL 1

Introducció

Els teoremes d'isomorfisme, estudiats en primer lloc per la matemàtica Emmy Noether, estableixen les relacions existents entre les subestructures, els quocients i els homomorfismes d'àlgebres i constitueixen tres teoremes algebraics fonamentals. Concretament, els tres teoremes estableixen que (1) donat un homomorfisme entre àlgebres el quocient del domini pel nucli és isomorf a la imatge; (2) donades dues congruències sobre un àlgebra, una menor que l'altra, el quocient de l'àlgebra per la congruència menor entre el quocient de les congruències és isomorf al quocient de l'àlgebra per la congruència major i (3) que el quocient d'una subàlgebra respecte a la restricció d'una congruència és isomorf al quocient de la saturació entre la restricció de la congruència.

En aquest treball exposem i demostrem la versió més general dels tres teoremes en el context de les àlgebres heterogènies. Definim i desenvolupem la teoria del conjunts heterogenis, ja que esdevindran els objectes subjacents de les àlgebres heterogènies, i definim els conceptes necessaris per a demostrar els teoremes mencionats.

A més, desenvolupem altres teoremes que proporcionen isomorfismes entre aquestes estructures. Concretament, demostrem que (1) els reticles algebraics són, exactament, reticles de subàlgebres per a alguna àlgebra heterogènia; (2) per a una congruència sobre un àlgebra, el reticle del segment inicial de la congruència és isomorf al reticle de congruències del quocient de l'àlgebra entre la congruència; (3) qualsevol àlgebra finita és isomorfa a un producte directe d'una família d'àlgebres directament irreductibles, (4) qualsevol àlgebra és isomorfa a un producte subdirecte d'una família d'àlgebres subdirectament irreductibles i, finalment, (5) tota àlgebra heterogènia és isomorfa a un quocient d'una àlgebra lliure per a un conjunt heterogeni de generadors.

En conclusió, el treball presenta una introducció a la teoria de l'àlgebra universal heterogènia així com una sèrie de resultats d'isomorfisme entre les diferents construccions que apareixen en l'estudi de les àlgebres heterogènies, concloent amb els coneguts teoremes d'isomorfisme.

A continuació, resumim breument el contingut de cadascú dels següents capítols d'aquest treball. El lector pot trobar una descripció més detalla al principi de cada capítol.

Al capítol 2 fem una introducció històrica al treball, des de la construcció de la noció de grup quocient fins a la teoria de l'àlgebra universal heterogènia.

Al capítol 3, per a un conjunt de tipus S, definim els conjunts S-tipificats i generalitzem, per a aquest context, les operacions conjuntistes bàsiques. Definim les relacions d'equivalència S-tipificades sobre conjunts S-tipificats i, a més, definim els operadors clausura que esdevindran importants més endavant.

Al capítol 4, per a un conjunt de tipus S i una signatura S-tipificada Σ, definim totes les construccions necessàries per a demostrar els Teoremes d'Isomorfisme al capítol següent i, finalment, diverses construccions com són els productes directes i subdirectes.

Al capítol 5, fent ús de l'aplicació bijectivitzada d'f demostrem el Primer Teorema d'Isomorfisme i, a partir d'ell, derivem el Segon i el Tercer.

Al capítol 6, per a una signatura S-tipificada Σ, definim l'àlgebra lliure sobre un conjunt S-tipificat i utilitzem el Primer Teorema d'Isomorfisme per a demostrar que qualsevol àlgebra heterogènia és isomorfa a un quocient de l'àlgebra lliure.

Al capítol 7 fem un breu resum del contingut del treball per a recollir les parts més importants i remarcar els teoremes clau.

Utilitzarem la teoria de conjunts **ZFSk**, teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel-Skolem (també coneguda com **ZFC**, i.e., teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma d'elecció) a més de l'existència d'un univers de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, fixat una volta i per a tot el treball (veure [**14**, pp. 21–24]). Remarquem que els elements d'$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ s'anomenen conjunts $\boldsymbol{\mathcal{U}}-$petits i que els subconjunts d'$\boldsymbol{\mathcal{U}}$ s'anomenen conjunts $\boldsymbol{\mathcal{U}}$-grans o classes. A més, d'ara endavant Set simbolitzarà la categoria dels conjunts, i.e., la categoria amb conjunt d'objectes $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ i conjunt de morfismes el conjunt de totes les aplicacions entre conjunts $\boldsymbol{\mathcal{U}}$-petits.

En el que segueix utilitzarem conceptes i construccions estàndard de l'àlgebra universal clàssica [**19, 2**] i la teoria de conjunts [**3**]. No obstant, en allò referent a la teoria de conjunts, hem adoptat els següents convenis. Un *ordinal* α és un conjunt transitiu ben ordenat per a $\in$, així $\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\}$. El primer ordinal transfinit ω serà denotat per $\mathbb{N}$, el conjunt de tots els *nombres naturals*, i, pel que acabem de dir sobre els ordinals, per a cada $n \in \mathbb{N}$, $n = \{0, \ldots, n-1\}$. Denotem per $\mathrm{Fnc}(A, B)$ al conjunt de totes les funcions d'A en B. Recordem que una funció d'A en B és un subconjunt F d'$A \times B$ que satisfà la condició funcional, això és, que per a cada $x \in A$, existeix un únic $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$. Una funció F d'A en B es denotarà usualment com $(F_x)_{x \in A}$. Denotem per $\mathrm{Hom}(A, B)$ al conjunt de totes las aplicacions d'A en B. Recordem que una aplicació d'A en B és una tupla ordenada $f = (A, F, B)$, denotada per $f\colon A \longrightarrow B$, en la que F és una funció d'A en B. Per tant, $\mathrm{Hom}(A, B) = \{A\} \times \mathrm{Fnc}(A, B) \times \{B\}$. Per a un conjunt A, denotem per $\mathrm{Sub}(A)$ el conjunt format, precisament, per tots els subconjunt d'A, açò és, $\mathrm{Sub}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$. Finalment, per a un ordre parcial $\leq$ sobre un conjunt A i dos elements $a, b \in A$, denotem per $\sup\{a, b\}$ o simplement per $a \vee b$, el mínim del conjunt de fites superiors d'a i b, açò és, $\min\{x \in A \mid a \leq x \,\&\, b \leq x\}$. Definim dualment el ínfim que denotarem

$\inf\{a,b\}$ o simplement per $a \wedge b$. De forma anàloga es defineix per a $X \subseteq A$, $\sup X = \bigvee X$ i $\inf X = \bigwedge X$. En les secciones successives s'inclouran i explicaran suposicions, condicions i convencions més especifiques.

CAPÍTOL 2

Context històric

La història de l'àlgebra moderna té els seus orígens en la resolució d'equacions algebraiques i l'estudi de les seues solucions [**21**]. Molts dels conceptes i resultats inicials tenen com a base l'estudi de les arrels de polinomis o la factorització d'enters.

El concepte de grup reuneix una ampli ventall d'estructures matemàtiques per a les quals existeix una noció de combinació. El primer teorema fonamental de la teoria, ara conegut com a teorema de Lagrange, és anterior a la formalització del concepte de grup i se'l devem en la seva versió més general a Jordan [**21**]. Per a arribar a aquest resultat es requereix la noció de *subgrup*. Diem que un subconjunt H d'un grup G és un *subgrup* si H també és un grup sota la mateixa operació de composició en G. El teorema de Lagrange fa referència al nombre d'elements d'un subgrup H, el que anomenem el seu *ordre* i denotem per $|H|$. El teorema estableix que si H és un subgrup d'un grup finit G, aleshores $|H|$ divideix a $|G|$. La seua demostració depén de la noció de *coclasses* d'H. Per a cada $g \in G$, si $H = \{h_i \mid i \in |H|\}$, aleshores la *coclasse a esquerra d'H respecte g* és el conjunt $gH = \{gh_i \mid i \in |H|\}$. És a dir, gH és el conjunt que resulta de multiplicar cada membre d'H a esquerra per g. Aquestes coclasses també poden considerar-se a dreta. Les propietats principals d'aquestes coclasses es poden resumir a continuació:

(1) Cada coclasse a esquerra gH té $|H|$ elements.
(2) Si dos coclasses a esquerra g_1H i g_2H són diferents, aleshores són disjuntes.

Se segueix d'aquestes dos propietats que G pot partir-se en conjunts disjunts, cadascun d'ordre $|H|$, per tant $|H|$ divideix a $|G|$.

La familiarització amb aquesta partició va ajudar també a formular la pregunta natural de quan aquest nou conjunt quocient admet estructura de grup. Per a que això tinga sentit es requereix que la multiplicació no depenga del representant de classe, açò és, que $g_1g_2H = g_1'g_2'H$ sempre que $g_1H = g_1'H$ i $g_2H = g_2'H$. Això passa sempre que $gH = Hg$, o el que és el mateix, quan H és un subgrup normal de G. Únicament en aquest cas, el conjunt de las coclasses de G respecte d'H admet estructura de grup, amb operació definida sobre els representants. Així, si g_1H i g_2H són dos coclasses, es defineix el resultat del producte de g_1H per g_2H com la coclasse a esquerra donada per $(g_1g_2)H$. El conjunt quocient dotat amb aquesta estructura s'anomena *grup quocient* i es denota per G/H.

Cal comentar que el concepte va estar present en moltes ocasions anteriors a la definició explícita de grup. Galois, per exemple, fa ús per primera volta del concepte de grup i de la normalitat d'un subgrup. No obstant, devem també a Jordan la concepció de la noció de grup quocient en el context de la teoria de grups de permutacions [**17**]. Es pot observar que la idea de calcular *mòdul* un subgrup normal és la que permet a Jordan entendre la importància del grup quocient, en analogia al treball de Gauss en congruències aritmètiques sobre els enters.

La comprensió de les solucions en context i la capacitat de generalització a altres problemes de natura similar va ajudar a configurar a finals del segle XIX un ambient propici per a la adopció d'una concepció moderna, configurada sobre la idea d'estructura i la identificació de les propietats abstractes que permeten raonar sobre els grups i les seues relacions, amb independència de la seua representació [**12**]. El desenvolupament del concepte de grup quocient està, per tant, estretament relacionat amb aquest procés d'abstracció que va donar lloc a la concepció moderna de la teoria de grups.

Altres autors van saber reconèixer el valor d'aquestes tècniques, particularment de la utilitat del concepte d'equivalència, que va ser reconegut i usat per Dedekind, Cantor o Frege, entre altres [**1**]. En aquest període es comença a entendre que formar classes d'equivalència és una *nova forma* de definir objectes matemàtics. Això va propiciar el canvi en la concepció mateixa de la equivalència; va passar de ser una ferramenta organitzativa a ser una ferramenta creativa [**1**].

Dedekind va saber comprendre el paper de l'equivalència en la teoria de grups però els seus escrits van romandre inèdits fins a després de la seua mort en 1916. En vida va mencionar este treball a Frobenius en una carta de 1895 [**17**]. Dedekind va explorar el concepte d'homomorfisme en una secció titulada "*Äquivalenz von Gruppen*". En aquest treball formà una imatge homomorfa fent *correspondre* cada element d'un grup G amb elements d'altre grup M. Sota certes condicions, que ara reconeguem com les condicions que defineixen un homomorfisme de grups, aquesta correspondència permetia identificar una imatge homomorfa de G en M. A més, els elements de G que es corresponien a la identitat en M formaven un subgrup H de G que resultà ser normal. Expressà G en termes d'H i les seues coclasses i afirmà que es podia definir una "composició" de coclasses. A més, va observar que existeix una correspondència entre les coclasses i els elements d'M en la imatge de G, de forma que a cada coclasse li correspon un element en M i a cada element en la imatge li correspon una coclasse. Dedekind no va donar nom ni al concepte d'homomorfisme ni al concepte de grup quocient [**17**].

Dedekind va ser l'últim alumne de Gauss i dedicà una part important de la seua vida a disseminar, fer accessibles i contribuir a les idees de l'escola del seu mestre. A Dedekind li devem també un apropament modern al concepte algebraic d'*anell*, que va emergir dels intents de trobar solucions *enteres* d'equacions [**12**]. Molts d'aquests conceptes estaven implícits en treballs anteriors d'Abel i Galois en la teoria d'equacions, però esdevingueren explícits quan Dedekind va introduir els cossos numèrics de grau finit com estructura distingida en la teoria algebraica de nombres. Va saber, igualment, concretar els resultats de factorització única i condicions de primalitat en anells mitjançant l'ús d'ideals. Aquest concepte obria la porta a treballar la factorització en un anell d'enters abstractes mòdul el contingut d'un ideal.

La teoria d'anells, en la seua versió moderna, és resultat, principalment, del treball de la matemàtica Emmy Noether, que va reformular per complet la teoria dels ideals, generalitzant treballs anteriors de Dedekind. Existeix una forma senzilla de mesurar els èxits de Noether en l'àlgebra abstracta: quan prenem qualsevol llibre de text avançat en la matèria, els matemàtics simplement treballen la teoria d'anells a la seua manera [**12**, p. 294].

En la seva aproximació a l'àlgebra, Noether va deixar de costat les preocupacions per les operacions sobre elements i passà a descriure les estructures algebraiques en termes de subconjunts distingits (subgrups normals en un grup o ideals en un anell, per exemple) i homomorfismes. La idea de Noether era realment profunda, ja que va saber posar en relació aquests subconjunts destacats amb la noció d'homomorfisme i usà aquesta correspondència per a demostrar els Teoremes d'Isomorfisme. Noether els utilitzà com a part essencial del seu desenvolupament dels fonaments de l'àlgebra [**16**].

Noether presentà originalment aquests teoremes per a la teoria algebraica de mòduls en el seu article de 1927 *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern* [**18**]. Noether va ser explícita en apuntar que existien diferents estructures algebraiques i que cadascuna d'elles tenia els seus propis Teoremes d'Isomorfisme. Va saber donar les corresponents presentacions d'aquests resultats per a, al menys, grups, grups abelians, grups i grups abelians amb un domini d'operadors, anells, anells commutatius i anells amb operadors[1]. Aquesta metodologia va suposar un gran avanç per a la concepció estructuralista de les matemàtiques i va convertir a Noether en una figura decisiva per a les matemàtiques del segle XX.

L'estudi posterior d'altres estructures algebraiques són més difícils de relacionar amb el cas dels grups o els anells degut, en gran part, a la necessitat de substituir les subestructures destacades que havia estudiat Noether per la noció de congruència. Una relació de congruència és una relació d'equivalència en una estructura algebraica que és compatible amb l'estructura en el sentit de que les operacions algebraiques realitzades sobre elements equivalents donaran lloc a elements equivalents. Aquesta és la propietat que, en definitiva, permet la definició d'una estructura algebraica en el quocient.

La definició de congruència depén del tipus d'estructura algebraica i de les operacions que es consideren. L'exemple típic és la relació de congruència

[1] Tots ells exemples de *categories* en el sentit actual.

mòdul n definida sobre $\mathbb{Z}$ que va introduir Gauss. Aquesta relació és compatible amb les operacions de suma i producte definides en els enters. Així, si a, b, c, d són elements en $\mathbb{Z}$ que satisfan $a \equiv c \pmod{n}$ i $b \equiv d \pmod{n}$, aleshores es té que $a + b \equiv c + d \pmod{n}$ i que $ab \equiv cd \pmod{n}$. Això ens porta a poder definir en el conjunt quocient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ una estructura d'anell, el *anell d'enters mòdul* n, definit en base a les operacions de suma i producte en $\mathbb{Z}$.

El concepte de congruència recull les subestructures destacades que va identificar Noether. Així, en el cas particular dels grups, una congruència definida sobre un grup està completament determinada per la classe de l'1 que, al seu torn, forma un subgrup normal. Es més, tota congruència correspon unívocament a algun subgrup normal. Per això, en lloc de parlar de congruències sobre grups, se sol parlar en termes de subgrups normals. Una situació similar permet caracteritzar les congruències sobre anells en relació a la classe del 0 que es correspon, precisament, amb els ideals. Desafortunadament aquesta situació no es repeteix en altres estructures algebraiques. En el cas dels semigrups, per exemple, remarca Howie

> En un grup una congruència queda determinada si coneixem una única classe de congruència, en particular si coneixem el subgrup normal que es correspon amb la classe de congruència de la identitat. De manera similar, en un anell, una congruència està determinada si coneixem l'ideal que es correspon amb la classe de congruència que conté el 0. Al cas dels semigrups no és cert aquest fet particular, i estem obligats a estudiar les congruències com a tal. Així, és aquesta necessitat la que li dóna als semigrups el seu sabor característic [**13**, p. V]. [2]

Més encara, en contraposició al cas dels grups, dos classes per a una congruència no tenen per què tindre el mateix cardinal. Aquest fet es pot veure de forma immediata en l'exemple següent. Només cal considerar l'estructura algebraica de reticle completament ordenat sobre el conjunt $\{a, b, c\}$ amb l'orde total $a < b < c$ i la congruència associada a la partició $\{\{a\}, \{b, c\}\}$. S'observa fàcilment que la relació d'equivalència associada és compatible amb les operacions d'ínfim i suprem però, per a aquesta congruència, no totes las classes tenen el mateix cardinal.

Tot el coneixement adquirit en aquest procés ha confluït en les últimes dècades en la teoria de l'àlgebra universal [**19, 2**]. Aquesta teoria naix amb l'objectiu de configurar un corpus de conceptes i proposicions comú a totes les estructures algebraiques, que pose en valor les idees centrals. D'aquesta

[2] In a group a congruence is determined if we know a single congruence class, in particular if we know the normal subgroup which is the class containing the identity. Similarly, in a ring a congruence is determined if we know the ideal which is the congruence class containing the zero. In semigroups there is no such fortunate occurrence, and we are therefore faced with the necessity of studying congruences as such. More than anything else, it is this necessity that gives semigroup theory its characteristic flavor.

forma es pretén evitar qualsevol raonament o mètode particular i recuperar els resultats comuns a tots els contexts algebraics. En aquesta teoria continuem trobant els Teoremes d'Isomorfisme com una peça fonamental per a explicar la relació entre homomorfismes, quocients i subestructures.

La versió més general d'aquesta teoria és la de l'àlgebra universal heterogènia, que considera diferents tipus entre els elements sobre els què treballa. L'interés per aquesta teoria és doble. Per un costat trobem la riquesa que dóna a la teoria el fet de poder treballar i operar amb elements de distinta natura, el que permet un nivell d'abstracció major. Però, per altra banda, aquest mateix fet fa que resultats de l'àlgebra homogènia siguen falsos sota les hipòtesis originals i requereix un estudi concret sobre quines hipòtesis addicionals són necessàries. Concretament, el teorema de Birkhoff sobre els operadors clausura algebraics que vorem al treball és un exemple d'aquest fet.

CAPÍTOL 3

Preliminars

En aquest capítol introduïm les definicions i construccions bàsiques que necessitarem als capítols següents per a definir i construir els objectes necessaris per a obtindre els teoremes d'isomorfisme. En concret, per a un conjunt de tipus S en $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ definim els conceptes de conjunt S-tipificat, subconjunt d'un conjunt S-tipificat, la noció de finitut i l'extensió de les operacions conjuntistes als conjunt S-tipificiats. Seguidament definim aplicació S-tipificada i els conceptes de composició d'aplicacions S-tipificades, imatges directes i inverses d'aplicacions S-tipificades, el subconjunts imatge i nucli per a una aplicació S-tipificada i l'aplicació inclusió. Continuem amb alguns objectes especials de la categoria dels conjunts S-tipificats, com el suport d'un conjunt S-tipificat, i algunes de les seues propietats, les nocions de relació binària i d'equivalència S-tipificades sobre un conjunt S-tipificat i demostrem que el conjunt de relacions d'equivalència S-tipificades sobre un conjunt S-tipificat forma un reticle complet ordenat amb la inclusió. Introduïm el concepte de conjunt quocient d'un conjunt S-tipificat per una relació d'equivalència S-tipificada, quocient entre dues relacions d'equivalència sobre un conjunt S-tipificat, la saturació d'una relació d'equivalència S-tipificada sobre un conjunt S-tipificat i les seues propietats. Finalment, caracteritzem els reticles complets i algebraics per mitjà dels operadors clausura i els operadors clausura algebraics.

Com dos dels teoremes centrals del treball consisteixen en demostrar que els conjunts de subestructures i de congruències ordenats amb la inclusió són reticles algebraics homogenis, definim a continuació les nocions de reticle complet, isomorfisme de reticles complets i reticle algebraic.

Definició 3.1. Un *reticle complet* és un parell $\mathbf{A} = (A, \leq)$ on A és un conjunt i $\leq$ un ordre parcial sobre A, i.e., $\leq$ és una relació reflexiva, antisimètrica i transitiva sobre A, tal que, per a cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$, existeixen $\sup X = \bigvee X$ i $\inf X = \bigwedge X$ respecte a l'ordre parcial $\leq$.

Definició 3.2. Siguen $\mathbf{A} = (A, \leq)$ i $\mathbf{B} = (B, \leq')$ dos reticles. Un *isomorfisme entre els reticles* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ és una aplicació bijectiva f que preserva i reflecteix l'ordre, i.e., per a tot $a, b \in A$ es té que $a \leq b$ si, i només si, $f(a) \leq' f(b)$.

Definició 3.3. Siga $\mathbf{A} = (A, \leq)$ un reticle complet. Un element a d'L es diu *compacte* si, per a cada $X \subseteq L$, si $a \leq \bigvee X$, aleshores existeix un subconjunt finit Y d'X tal que $a \leq \bigvee Y$. Denotem per $\mathrm{K}(\mathbf{A})$ el conjunt de tots els elements compactes del reticle complet $\mathbf{A}$. Un reticle complet $\mathbf{A}$

és *algebraic* si és compactament generat, i.e., per a tot $a \in L$ existeix un subconjunt X de $\mathrm{K}(\mathbf{A})$ tal que $a = \bigvee X$.

1. Conjunts i funcions S-tipificats

Fixat un conjunt S, un conjunt heterogeni és una aplicació que assigna a cada tipus sobre S un conjunt. La majoria de construccions relatives a conjunts ordinaris es poden generalitzar treballant coordenada a coordenada, encara que no totes, e.g., la noció de pertinença. Definim el concepte de conjunt S-tipificat i les construccions necessàries per a la resta del treball.

DEFINICIÓ 3.4. Un *conjunt S-tipificat* és una aplicació $A = (A_s)_{s \in S}$ d'S en $\boldsymbol{\mathcal{U}}$.

NOTA. Els conjunts, més precisament conjunts homogenis per a diferenciar-los dels conjunts heterogenis o S-tipificats, seran els conjunts $1-$tipificats. És senzill comprovar que les definicions següents són generalitzacions de les definicions habituals dels conjunts homogenis. No obstant, veurem que existeixen construccions que perden el sentit en el cas homogeni i que resulten necessàries per al cas heterogeni.

DEFINICIÓ 3.5. Si A i B són conjunts S-tipificats, aleshores direm que A és un *subconjunt* de B, denotat per $A \subseteq B$, si, per a cada s en S, $A_s \subseteq B_s$. Denotarem per $\mathrm{Sub}(A)$ el conjunt de tots els conjunts S-tipificats X tals que $X \subseteq A$. Direm que A és un subconjunt *propi* de B, denotat com $A \subset B$, si $A \subseteq B$ i, per a algun s, $B_s - A_s \neq \varnothing$.

DEFINICIÓ 3.6. Un conjunt S-tipificat A és *finit* si

$$\coprod A = \bigcup_{s \in S} (A \times \{s\}) \tag{3.1}$$

és finit. Direm que A és un subconjunt *finit* de B, i ho denotarem per $A \subseteq_{\mathrm{f}} B$, si A és finit i $A \subseteq B$. Denotem per $\mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(B)$ el conjunt de tots els conjunts S-tipificats A en $\mathrm{Sub}(B)$ que són finits.

DEFINICIÓ 3.7. Siguen A i B dos conjunts S-tipificats. Una *aplicació S-tipificada d'A en B* és una família S-indexada $f = (f_s)_{s \in S}$, denotada per $f\colon A \longrightarrow B$, on, per a cada s en S, f_s és una aplicació d'A_s en B_s. Així, una aplicació S-tipificada d'A en B és un element de $\prod_{s \in S} \mathrm{Hom}(A_s, B_s)$, on, per a cada s en S, $\mathrm{Hom}(A_s, B_s)$ és el conjunt de totes les aplicacions d'A_s en B_s. Denotem per $\mathrm{Hom}(A, B)$ el conjunt de totes les aplicacions S-tipificades d'A en B. Direm que f es una *endoaplicació* si $A = B$.

Generalitzem ara les diferents operacions conjuntistes que utilitzarem al document.

DEFINICIÓ 3.8. Siga I un conjunt en $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ i $(A^i)_{i \in I}$ una família I-indexada de conjunts S-tipificats.

(1) el *producte* de $(A^i)_{i \in I}$, denotat per $\prod_{i \in I} A^i$, és el conjunt S-tipificat definit, per a cada $s \in S$, com

$$\left(\prod_{i \in I} A^i\right)_s = \prod_{i \in I} A^i_s. \tag{3.2}$$

(2) A més, per a cada $i \in I$, la *i-èssima projecció canònica*, $\mathrm{pr}^i = (\mathrm{pr}^i_s)_{s\in S}$, és l'aplicació S-tipificada des de $\prod_{j\in I} A^j$ en A^i que, per a cada $s \in S$, està definida com segueix:

$$\mathrm{pr}^i_s \begin{cases} \prod_{i\in I} A^i_s \longrightarrow A^i_s \\ (a^j_s)_{j\in I} \longmapsto a^i_s \end{cases} . \tag{3.3}$$

(3) D'altra banda, si B és un conjunt S-tipificat i $(f^i)_{i\in I}$ una família I-indexada d'aplicacions S-tipificades on, per a cada $i \in I$, f^i és una aplicació S-tipificada de B en A^i, aleshores denotem per $\langle f^i\rangle_{i\in I}$ la única aplicació de B a $\prod_{i\in I} A^i$ tal que, per a cada $i \in I$, $\mathrm{pr}^i \circ \langle f^i\rangle_{i\in I} = f^i$ (propietat universal per al producte directe).

$$\begin{tikzcd} A_i & \prod_{j\in I} A_j \arrow[l, "\mathrm{pr}^i"'] \\ & B \arrow[ul, "f^i"] \arrow[u, dashed, "\langle f^i\rangle_{i\in I}"'] \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Les altres operacions conjuntistes sobre conjunts S-tipificats: $\times$ (producte binari) , $\coprod$ (coproducte)coproducte—seeproducte, $\amalg$ (coproducte binari), $\bigcup$ (unió), $\cup$ (unió binària), $\bigcap$ (intersecció), $\cap$ (intersecció binària), $\complement_A$ (complementari d'un conjunt S-tipificat respecte a un conjunt S-tipificat donat A), i $-$ (diferència), queden definides de manera similar, i.e., component a component.

Nota. Siga A un conjunt S-tipificat, aleshores el parell ordenat $\mathbf{Sub}(\mathbf{A}) = (\mathrm{Sub}(A), \subseteq)$ és un reticle complet, on, per a $(A^i)_{i\in I} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$, $\bigvee_{i\in I} A^i = \bigcup_{i\in I} A^i$ i $\bigwedge_{i\in I} A^i = \bigcap_{i\in I} A^i$. Remarquem que, encara que el conjunt subjacent A és heterogeni, el reticle i l'ordenació per inclusió és una estructura homogènia.

Ara, una volta construïdes totes les nocions bàsiques, definim certs conceptes associades al de aplicació S-tipificada.

Definició 3.9. Siguen A i B dos conjunts S-tipificats. Una aplicació S-indexada f és *injectiva* (resp. *suprajectiva*, *bijectiva*) si, per a cada $s \in S$, f_s és injectiva. (resp. suprajectiva, bijectiva).

Definició 3.10. Siguen A, B i C tres conjunts S-tipificats, $f = (f_s)_{s\in S}$ una aplicació S-tipificada d'A en B i $g = (g_s)_{s\in S}$ una aplicació S-tipificada de B en C. La *composició de f i g* és l'aplicació S-tipificada d'A en C $f \circ g = (f_s \circ g_s)_{s\in S}$.

Definició 3.11. Siga $f : A \longrightarrow B$ una aplicació S-tipificada.

(1) L'aplicació d'*imatges $f-$directes* és l'aplicació definida com

$$f[\cdot] \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(B) \\ \quad X \quad \longmapsto (f_s[X_s])_{s\in S} \end{cases} . \tag{3.5}$$

(2) L'aplicació d'*imatges* $f-$*inverses* és l'aplicació definida com

$$f^{-1}[\cdot]\begin{cases} \mathrm{Sub}(B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad Y \quad \longmapsto (f_s^{-1}[Y_s])_{s\in S} \end{cases}. \tag{3.6}$$

DEFINICIÓ 3.12. Siguen A un conjunt S-tipificat i $B \in \mathrm{Sub}(A)$. La *inclusió de* B *en* A , denotada in^B, és l'aplicació S-tipificada definida com $\mathrm{in}^B = (\mathrm{in}^{B_s})_{s\in S}$. Convenim que, si per a algun $s \in S$, $B_s = \varnothing$, aleshores in^{B_s} és l'única aplicació del conjunt buit en A_s.

NOTA. L'existència d'aquesta aplicació implica que, per a cada conjunt S-tipificat A i cada $B \in \mathrm{Sub}(A)$, $\mathrm{Hom}(B, A)$ és no buit.

DEFINICIÓ 3.13. Siga $f : A \longrightarrow B$ una aplicació S-tipificada. La *imatge d'*f, denotada per $\mathrm{Im}(f)$, és el conjunt S-tipificat on cada coordenada s-èssima és el conjunt imatge d'f_s, i.e.,

$$\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Im}(f_s))_{s\in S} = (f_s[A_s])_{s\in S}. \tag{3.7}$$

El *nucli d'*f, denotat per $\mathrm{Ker}(f)$, és el conjunt S-tipificat on cada coordenada s-èssima és el nucli d'f_s, i.e.,

$$\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Ker}(f_s))_{s\in S} = (\{(a, b) \in A_s^2 \mid f_s(a) = f_s(b)\})_{s\in S}. \tag{3.8}$$

Encara que puga paréixer que el context heterogeni és una generalització coordenada a coordenada del context homogeni i no té importància per ell mateix, a la següent nota expliquem dos particularitzacions que estableixen la diferència entre ells.

NOTA. Remarquem i expliquem que, a la definició de conjunt S-tipificat, no fem les següents dues assumpcions: (1) que un conjunt S-tipificat A queda definit de forma que, per a cada $s \in S$, $A_s \neq \varnothing$. Fer aquesta suposició té una conseqüència immediata i és que la categoria formada pels conjunts i les aplicacions S-tipificades no és finitament cocompleta. I (2) que un conjunt S-tipificat A ha de verificar que, per a $s, t \in S$, $A_s \cap A_t = \varnothing$. Les convencions anteriors estan basades en la falsa creença estesa de que la lògica equacional heterogènia i la lògica de primer ordre heterogènia són variacions sense sentit de la lògica equacional i lògica de primer ordre, respectivament [**4**, p. 328].

2. Suports

Encara que la generalització de la majoria d'objectes del món homogeni a l'heterogeni es realitza coordenada a coordenada, la possibilitat de tindre coordenades buides en conjunts heterogenis fa necessària la definició d'un objecte que discrimine les coordenades buides de les que no ho són. Encara que parega una construcció simple serà molt necessària en alguns resultats del treball. A més, també cal definir els conjunts heterogenis més simples on només una coordenada és no buida. Aquestes són les construccions que diferencien el món heterogeni del món homogeni que seran importants d'ara endavant.

DEFINICIÓ 3.14. Un conjunt S-tipificat és *subfinal* si, per a cada $s \in S$, $\mathrm{card}(A_s) \leq 1$. Denotem per 1^S, o simplement per 1, el conjunt S-tipificat $(1)_{s\in S}$, i per $\varnothing^S$, o simplement per $\varnothing$, el conjunt S-tipificat $(\varnothing)_{s\in S}$.

DEFINICIÓ 3.15. Siga un tipus $t \in S$. Definim el *delta de Kronecker en* t com el conjunt S-tipificat $\delta^t = (\delta^t_s)_{s\in S}$ definit, per a cada $s \in S$, com segueix

$$\delta^t_s = \begin{cases} 1, & \text{si } s = t; \\ \varnothing, & \text{altre cas.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Siguen un tipus $t \in S$ i X un conjunt. Denotem per $\delta^{t,X}$ el conjunt S-tipificat definit, per a cada $s \in S$, com segueix:

$$\delta^{t,X}_s = \begin{cases} X, & \text{si } s = t; \\ \varnothing, & \text{alte cas.} \end{cases} \tag{3.10}$$

NOTA. Remarquem el fet que δ^t es $\delta^{t,1}$, i.e., les deltes de Kronecker són cassos particulars dels conjunts S-tipificats $\delta^{t,X}$. Utilitzarem indistintament les notacions δ^t i $\delta^{t,1}$.

DEFINICIÓ 3.16. Siga A un conjunt S-tipificat. Aleshores, el *suport d'*A, denotat per $\mathrm{supp}_S(A)$, és el conjunt $\{s \in S \mid A_s \neq \varnothing\}$.

NOTA. Un conjunt S-tipificat A és finit si, i només si, $\mathrm{supp}_S(A)$ és finit i, per a cada $s \in \mathrm{supp}_S(A)$, A_s és finit.

NOTA. Per a cada conjunt de tipus S, el suport és una aplicació de $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S$ en $\mathrm{Sub}(S)$, on $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S$ denota la classe dels conjunts S-tipificats.

Demostrem a la següent proposició certes propietats de l'aplicació suport que seran útils al llarg del treball.

PROPOSICIÓ 3.17. *Siguen A i B dos conjunts S-tipificats, I un conjunt de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ i $(A^i)_{i\in I}$ una família I-indexada de conjunts S-tipificats. Es tenen les següents propietats.*

(1) $\mathrm{Hom}(A,B) \neq \varnothing$ *si, i només si,* $\mathrm{supp}_S(A) \subseteq \mathrm{supp}_S(B)$. *Conseqüentment, si $A \subseteq B$, aleshores* $\mathrm{supp}_S(A) \subseteq \mathrm{supp}_S(B)$. *A més, si f és una aplicació S-tipificada d'A en B i $X \subseteq A$, aleshores* $\mathrm{supp}_S(X) \subseteq \mathrm{supp}_S(f[X])$.

(2) *Si existeix una aplicació S-tipificada d'A en B suprajectiva, aleshores* $\mathrm{supp}_S(A) = \mathrm{supp}_S(B)$. *A més, si $Y \subseteq B$, aleshores es té que* $\mathrm{supp}_S(Y) = \mathrm{supp}_S(f^{-1}[Y])$.

(3) $\mathrm{supp}_S(\varnothing^S) = \varnothing$; $\mathrm{supp}_S(1) = S$; $\mathrm{supp}_S(\bigcup_{i\in I} A^i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{supp}_S(A^i)$; $\mathrm{supp}_S(\coprod_{i\in I} A^i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{supp}_S(A^i)$; *si* $I \neq \varnothing$, $\mathrm{supp}_S(\bigcap_{i\in I} A^i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{supp}_S(A^i)$; $\mathrm{supp}_S(\prod_{i\in I} A^i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{supp}_S(A_i)$; *i* $\mathrm{supp}_S(A) - \mathrm{supp}_S(B) \subseteq \mathrm{supp}_S(A - B)$.

DEMOSTRACIÓ. (1) Suposem que $\mathrm{Hom}(A,B) \neq \varnothing$ i siga $s \in \mathrm{supp}_S(A)$. Com A_s és no buit i existeix $f\colon A \longrightarrow B$, considerant $a \in A_s$, $f_s(a) \in B_s$.

Així $B_s \neq \varnothing$ i $s \in \mathrm{supp}_S(B)$. La implicació recíproca és evident ja que entre dos conjunt no buits sempre podem construir, almenys, una aplicació.

(2) Considerem $s \in \mathrm{supp}_S(B)$ i $b \in B_s$. Per la sobrejectivitat d'f existeix $a \in A_s$ tal que $f(a_s) = b_s$ i $\mathrm{supp}_S(A) \supseteq \mathrm{supp}_S(B)$.

(3) Les dos primeres igualtats són evidents. Ens limitem a demostrar la tercera igualtat ja que les altres demostracions són similars. Notem que $s \in \mathrm{supp}_S(\bigcup_{i\in I} A^i)$ si, i només si, el conjunt $(\bigcup_{i\in I} A^i)_s = \bigcup_{i\in I} A^i_s$ és no buit, cosa que passa, exactament, quan existeix un index $j \in I$ tal que $A^j_s \neq \varnothing$ i $s \in \bigcup_{i\in I} \mathrm{supp}_S(A^i_s)$. □

3. Relacions binàries

Amb les nocions de subconjunt S-tipificat i de producte de dos conjunts S-tipificats és natural extendre el concepte de relació d'equivalència i, així, poder definir el conjunt quocient d'un conjunt heterogeni.

Definició 3.18. Siga A un conjunt S-tipificat. Una *relació binària S-tipificada* és un subconjunt $\Phi = (\Phi_s)_{s\in S}$ d'$A \times A = (A_s \times A_s)_{s\in S}$. Així, per a cada $s \in S$, Φ_s és un subconjunt d'$A_s \times A_s$, i.e., una relació binària sobre A_s i, per a $a, b \in A_s$, les expressions $(a, b) \in \Phi_s$, $a\,\Phi_s\, b$ i $a \equiv_{\Phi_s} b$ es consideraran sinònimes.

La *diagonal d'A*, denotada per Δ_A, és la relació S-tipificada $(\Delta_{A_s})_{s\in S} = (\{(a, a) \mid a \in A_s\})_{s\in S}$. La *relació total en A*, denotada per ∇_A, és la relació S-tipificada $(\nabla_{A_s})_{s\in S} = (A_s \times A_s)_{s\in S} = A \times A$.

La composició de relacions S-tipificades es realitza coordenada a coordenada, i.e., si Φ, Ψ són dues relacions S-tipificades, aleshores $\Phi \circ \Psi = (\Phi_s \circ \Psi_s)_{s\in S}$ on

$$\Phi_s \circ \Psi_s = \{(a, c) \mid \exists\, b \in A_s((a, b) \in \Phi_s \,\&\, (b, c) \in \Psi_s)\}.- \tag{3.11}$$

Siga Φ una relació binària S-tipificada sobre A. La *restricció de Φ a X* un subconjunt d'A, denotada per $\Phi\restriction_X$, és $\Phi \cap (X \times X)$.

Definició 3.19. Una relació binària Φ sobre un conjunt S-tipificat A és una *relació d'equivalència S-tipificada* sobre A si, per a cada $s \in S$, Φ_s és una relació d'equivalència sobre A_s, i.e., Φ_s és reflexiva, simètrica i transitiva. Denotem per $\mathrm{Eqv}(A)$ el conjunt de totes les relacions d'equivalència S-tipificades sobre A i per $\mathbf{Eqv}(A)$ el conjunt parcialment ordenat S-tipificat format per $\mathrm{Eqv}(A)$ ordenat mitjançant la inclusió, és a dir, $(\mathrm{Eqv}(A), \subseteq)$.

Proposició 3.20. *Per a cada conjunt S-tipificat A, el reticle S-tipificat $\mathbf{Eqv}(A)$ és complet.*

Demostració. Siga $(\Phi^i)_{i\in I} \subseteq \mathrm{Eqv}(A)$ una família I-indexada de relacions d'equivalència S-tipificades sobre A. Demostrem que

$$\textstyle\bigwedge_{i\in I} \Phi^i = \bigcap_{i\in I} \Phi^i \tag{3.12}$$

i el suprem $\bigvee_{i\in I}\Phi^i$ és la relació $\Psi = (\Psi_s)_{s\in S}$ amb coordenada s-èssima

$$\Psi_s = \Big\{(a,b)\in A_s^2 \mid \exists n\geq 1\,\exists x\in A_s^{n+1} \big(x_0 = a\,\&\, x_n = b\,\&\,\forall p\in n\,((x_p,x_{p+1})\in \textstyle\bigcup_{i\in I}\Phi_s^i))\big)\Big\}. \tag{3.13}$$

En primer lloc, sabem que, ordenant per la inclusió el conjunt de subconjunts d'un conjunt S-tipificat, l'ínfim d'una família ve donat per la seua intersecció. A més, es poden demostrar fàcilment que les propietats reflexiva, simètrica i transitiva es mantenen per intersecció. Així tenim que $\bigcap_{i\in I}\Phi^i\in \mathrm{Eqv}(A)$. Aleshores, $\bigwedge_{i\in I}\Phi^i = \bigcap_{i\in I}\Phi^i$.

D'altra banda, és evident que, per a cada $s\in S$, Ψ_s és una fita superior de $\{\Phi_s^i \mid i\in I\}$ i, per tant, $\Psi = (\Psi_s)_{s\in S}$ és una fita superior de $\{\Phi^i \mid i\in I\}$. Suposem $\Theta\in\mathrm{Eqv}(A)$ tal que, per a cada $i\in I$, $\Phi^i\subseteq\Theta$ i demostrem que $\Psi\subseteq\Theta$. Siguen $s\in S$, $a,b\in A_s$ tals que $(a,b)\in\Psi_s$, aleshores existeixen $n\geq 1$, $(c_i)_{i\in n+1}\in A_s^{n+1}$ tal que $c_0 = a$, $c_n = b$ i, per a cada $p\in n$, $(c_p,c_{p+1})\in\bigcup_{i\in I}\Phi_s^i$. Com $\bigcup_{i\in I}\Phi_s^i\subseteq\Theta_s$, aleshores per la propietat transtiva, $(c_0,c_n) = (a,b)\in\Theta_s$.

Per a completar la demostració només falta comprovar que $\Psi\in\mathrm{Eqv}(A)$. Siguen $s\in S$ i $a\in A_s$, aleshores $(a,a)\in A_s^2$ verifica la definició de Ψ_s i, per tant, $(a,a)\in\Psi_s$. Siguen ara $a,b\in A_s$ tals que $(a,b)\in\Psi_s$, aleshores existeixen $n\geq 1$ i $(x_i)_{i\in n+1}\in A_s^{n+1}$ tal que $x_0 = a$, $x_n = b$ i, per a cada $p\in n$, $(x_p,x_{p+1})\in\bigcup_{i\in I}\Phi_s^i$. Ara, si considerem, $(y_i)_{i\in n+1} = (x_{n-i})_{i\in n+1}\in A_s^{n+1}$ tenim que, $y_0 = x_n = b$, $y_n = x_0 = a$ i, per a cada $p\in n$, $(y_p,y_{p+1}) = (x_{n-p},x_{n-p-1)})\in\bigcup_{i\in I}\Phi_s^i$ per la propietat reflexiva de totes les Φ_s^i. Siguen finalment $a,b,c\in A_s$ tals que $(a,b),(b,c)\in\Phi_s^i$. Aleshores existeixen $n,m\geq 1$, $(x_i)_{i\in n+1}\in A_s^{n+1}$ i $(y_i)_{i\in m+1}\in A_s^{m+1}$ tals que $x_0 = a$, $x_n = b$, per a cada $p\in n$, $(x_p,x_{p+1})\in\bigcup_{i\in I}\Phi_s^i$, $y_0 = b$, $y_m = c$ i, per a cada $p\in m$, $(y_p,y_{p+1})\in\bigcup_{i\in I}\Phi_s^i$. Així considerem $(z_i)_{i\in n+m-1}\in A^{n+m+1}$ definit com segueix

$$z_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } 0\leq i< n;\\ y_{i-n}, & \text{si } n\leq i\leq m.\end{cases} \tag{3.14}$$

Així, $z_0 = x_0 = a$, $z_{m+n-1} = y_m = c$ i, per a cada $p\in n+m$, $(z_p,z_{p+1})\in\bigcup_{i\in I}\Phi_s^i$. Aleshores Φ és transitiva.

Així, $\Psi\in\mathrm{Eqv}(A)$ completant la demostració. □

Definició 3.21. Siga A un conjunt S-tipificat i $\Phi\in\mathrm{Eqv}(A)$. El *conjunt quocient d'A per* Φ, denotat per A/Φ, és el conjunt S-tipificat $(A_s/\Phi_s)_{s\in S}$ que té per coordenada s-èssima $A_s/\Phi_s = \{[a]_{\Phi_s}\mid a\in A_s\}$ on utilitzem la notació habitual donada per

$$[a]_{\Phi_s} = \{b\in A_s \mid (a,b)\in\Phi_s\}. \tag{3.15}$$

A més, la *projecció canònica d'A en* A/Φ, denotada per pr^Φ, és una aplicació S-tipificada $\mathrm{pr}^\Phi\colon A\longrightarrow A/\Phi$ que té per coordenada s-èssima la projecció canònica d'A_s en A_s/Φ_s, que envia cada x en A_s a $\mathrm{pr}^{\Phi_s}(x) = [x]_{\Phi_s}$.

$$\mathrm{pr}^{\Phi_s}\begin{cases} A_s \longrightarrow A/\Phi_s \\ x \longmapsto [x]_{\Phi_s} = \{\, y \in A_s \mid (x,y) \in \Phi_s \,\} \end{cases}. \tag{3.16}$$

Nota. Per a cada $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$, la projecció canònica d'A en A/Φ és una aplicació S-tipificada suprajectiva.

Nota. Siguen A un conjunt S-tipificat i $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$. Aleshores, per la Proposició 3.17 es té que $\mathrm{supp}_S(A) = \mathrm{supp}_S(A/\Phi)$.

Definició 3.22. Siga A un conjunt S-tipificat i siguen $\Phi, \Psi \in \mathrm{Eqv}(A)$ amb $\Phi \subseteq \Psi$. El *quocient de* Ψ *entre* Φ, denotat per Ψ/Φ, és la relació d'equivalència S-tipificada $\Psi/\Phi = (\Psi_s/\Phi_s)_{s\in S}$ sobre A/Φ que té per coordenada s-èssima la relació

$$\Psi_s/\Phi_s = \{([a]_{\Phi_s}, [b]_{\Phi_s}) \in (A_s/\Phi_s)^2 \mid (a,b) \in \Psi_s\}. \tag{3.17}$$

Finalment, associat a la definició de relació binària obtenim la noció de saturació d'un conjunt.

Definició 3.23. Siguen A un conjunt S-tipificat, $X \subseteq A$ i $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$. La Φ-*saturació d'*X o (la *saturació d'*X *respecte de* Φ), denotada per $[X]^{\Phi}$, és el conjunt S-tipificat definit, per a cada $s \in S$, com segueix:

$$[X]^{\Phi}_s = \{a \in A_s \mid X_s \cap [a]_{\Phi_s} \neq \varnothing\} = \textstyle\bigcup_{x\in X_s}[x]_{\phi_s} = [X_s]^{\Phi_s}. \tag{3.18}$$

Direm que X és Φ-*saturat* si $X = [X]^{\Phi}$. Denotem per $\Phi - \mathrm{Sat}(A)$ el subconjunt de $\mathrm{Sub}(A)$ definit com segueix

$$\Phi - \mathrm{Sat}(A) = \{X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = [X]^{\Phi}\}. \tag{3.19}$$

Nota. Siguen A un conjunt S-tipificat i $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$. Per a un subconjunt $X \subseteq A$, tenim que la $\Phi-$saturació d'X és $(\mathrm{pr}^{\Phi})^{-1}[\mathrm{pr}^{\Phi}[X]]$. Així, X és $\Phi-$saturat si, i només si, $X \supseteq [X]^{\Phi}$. A més, X és $\Phi-$saturat si, i només si, existeix $\mathcal{Y} \subseteq A/\Phi$ tal que $X = (\mathrm{pr}^{\Phi})^{-1}[\mathcal{Y}]$.

Proposició 3.24. *Siguen A un conjunt S-tipificat i $\Phi, \Psi \in \mathrm{Eqv}(A)$, aleshores*

$$\Phi \subseteq \Psi \textit{ si, i només si, } \forall X \subseteq A\,([[X]^{\Psi}]^{\Phi} = [X]^{\Psi}). \tag{3.20}$$

Demostració. Suposem que $\Phi \subseteq \Psi$ i siga X un subconjunt d'A. Per a demostrar que $[[X]^{\Psi}]^{\Phi} = [X]^{\Psi}$ és suficient verificar que $[[X]^{\Psi}]^{\Phi} \subseteq [X]^{\Psi}$. Siga s un element d'S. Aleshores, per definició, $a \in [[X]^{\Psi}]^{\Phi}_s$ si, i només si, existeix algun $b \in [X]^{\Psi}_s$ tal que $a \in [b]_{\Phi_s}$. Com $\Phi \subseteq \Psi$, tenim que $a \in [b]_{\Psi_s}$, aleshores $a \in [X]^{\Psi}_s$.

Per a demostrar la implicació contrària, suposem que $\Phi \not\subseteq \Psi$. Aleshores existeix algún tipus $s \in S$ i elements a, b en A_s tals que $(a,b) \in \Phi_s$ i $(a,b) \in \Psi_s$. Per tant, b no pertany a $[\delta^{s,[a]_{\Psi_s}}]^{\Psi}_s$, mentre que sí que pertany a $[[\delta^{s,[a]_{\Psi_s}}]^{\Psi}]^{\Phi}_s$. Se segueix que $[\delta^{s,[a]_{\Psi_s}}]^{\Psi}_s \neq [[\delta^{s,[a]_{\Psi_s}}]^{\Psi}]^{\Phi}_s$. □

Corol·lari 3.25. *Siguen A un conjunt S-tipificat i $\Phi, \Psi \in \mathrm{Eqv}(A)$. Si $\Phi \subseteq \Psi$, aleshores $\Psi - \mathrm{Sat}(A) \subseteq \Phi - \mathrm{Sat}(A)$.*

Nota. Si, per a un conjunt S-tipificat A, denotem per $(\cdot) - \mathrm{Sat}(A)$ l'aplicació d'$\mathrm{Eqv}(A)$ en $\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(A))$ que envia Φ a $\Phi - \mathrm{Sat}(A)$, aleshores el corol·lari anterior expressa que $(\cdot) - \mathrm{Sat}(A)$ és una aplicació que reflecteix l'ordre del conjunt parcialment ordenat $(\mathrm{Eqv}(A), \subseteq)$ en $(\mathrm{Sub}(\mathrm{Sub}(A)), \subseteq)$.

4. Operadors clausura S-tipificats

Per a finalitzar aquest capítol definim dos objectes que caracteritzen els reticles i reticles algebraics per a poder treballar més còmodament amb ells.

Definició 3.26. Un *operador clausura S-tipificat* sobre un conjunt S-tipificat A és una endoaplicació S-tipificada J de $\mathrm{Sub}(A)$ que és

(1) Extensiva, i.e., $\forall X \in \mathrm{Sub}(A)\,(X \subseteq J(X))$;
(2) Isòtona, i.e., $\forall X, Y \in \mathrm{Sub}(A)\,(X \subseteq Y \to J(X) \subseteq J(Y))$;
(3) Idempotent, i.e., $\forall X \in \mathrm{Sub}(A)\,(J(J(X)) = J(X))$.

Denotarem per ClOp(A) el conjunt dels operadors clausura heterogenis sobre A. Siga $J \in \mathrm{ClOp}(A)$, un conjunt $X \in \mathrm{Sub}(A)$ és *tancat per a J* si $X = J(X)$. Per a $J \in \mathrm{ClOp}(A)$, $\mathrm{Cl}_J(A)$ denotarà el conjunt dels tancats de l'operador clausura J i denotarem per $\mathbf{Cl}_J(A) = (\mathrm{Cl}_J(A), \subseteq)$ en conjunt ordenat per la inclusió dels tancats per a J.

En concret, definim a continuació els conceptes d'operador clausura algebraic i uniforme i especifiquem la connexió amb els reticles i reticles algebraics.

Definició 3.27. Siga $J \in \mathrm{ClOp}(A)$. L'operador J serà *algebraic* si, per a cada $X \in \mathrm{Sub}(A)$,

$$J(X) = \textstyle\bigcup_{Y \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(X)} J(Y). \tag{3.21}$$

Denotarem per AClOp(A) el conjunt dels operadors clausura algebraics heterogenis sobre A.

Definició 3.28. Siga A un conjunt S-tipificat un operador $J \in \mathrm{ClOp}(A)$ s'anomenarà *uniforme* si, per a cada $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, sempre que $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}_S(Y)$ aleshores $\mathrm{supp}_S(J(X)) = \mathrm{supp}_S(J(Y))$.

Nota. És evident que el concepte d'uniformitat no té sentit al cas homogeni, ja que en eixe cas qualsevol operador clausura és uniforme.

Teorema 3.29. *Siga J un operador clausura sobre un conjunt S-tipificat A. El conjunt parcialment ordenat $\mathbf{Cl}_J(A)$ és un reticle complet. A més, es tenen les següents relacions:*

$$\textstyle\bigwedge_{i\in I} J(A_i) = \bigcap_{i\in I} J(A_i); \qquad \bigvee_{i\in I} J(A_i) = J(\bigcup_{i\in I} A_i). \tag{3.22}$$

Demostració. Siga $(A_i)_{i\in I}$ una família I-indexada en $\mathrm{Cl}_J(A)$. Per ser tancats notem que $\{A_i \mid i \in I\} = \{J(A_i) \mid i \in I\}$. Recordem que a $\mathbf{Sub}(A)$, el suprem i l'ínfim són

$$\textstyle\bigwedge_{i\in I} J(A_i) = \bigcap_{i\in I} J(A_i); \qquad \bigvee_{i\in I} = \bigcup_{i\in I} J(A_i) \tag{3.23}$$

Per una banda tenim que, evidentment, per a qualsevol i en I, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i$, per tant, per isotonía, $J\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq J(A_i) = A_i$ i, així, $J\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ que, conjuntament amb la extensitivitat, tenim que $J\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} A_i$, per tant, $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathrm{Cl}_J(A)$ i tenim demostrada la primera igualtat.

Per altra banda, com $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} J(A_i) = J\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \in \mathrm{Cl}_J(A)$, es té que, $\bigvee_{i\in I} J(A_i) = J\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ demostrant la segona de les igualtats. En conclusió, com tota família arbitrària té suprem i ínfim, $\mathbf{Cl}_J(A)$ és un reticle complet. □

El teorema anterior estableix una forma de reconèixer reticles complets mitjançant operadors clausura heterogenis. El següent teorema demostra la propietat recíproca, i.e., que, per a cada reticle complet, podem construir un operador clausura heterogeni tal que el seu conjunt de tancats és isomorf al reticle complet. Així, els objectes dels reticles complets i dels operadors clausura heterogenis són equivalents.

Teorema 3.30. *Qualsevol reticle complet és isomorf al reticle de subconjunts tancats d'un operador clausura heterogeni J sobre un conjunt heterogeni.*

Demostració. Considerem un reticle complet $\mathbf{A} = (A, \leq)$ i, per a $t \in S$, definim la següent aplicació

$$J \begin{cases} \mathrm{Sub}(\delta^{t,A}) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\delta^{t,A}) \\ \quad X \quad \longmapsto \delta^{t,\downarrow_{\leq} X_t} \end{cases} . \tag{3.24}$$

on, $\downarrow_{\leq} X_t$ és el conjunt $\{\, x \in X_t \mid x \leq \bigvee X_t \,\}$. Aleshores, J és un operador clausura.

En primer lloc, notem que, per a cada $X \in \mathrm{Sub}(\delta^{t,A})$, $X \subseteq J(X)$. En efecte, com $\mathrm{Sub}(\delta^{t,A}) = \{\delta^{t,Y} \mid Y \in \mathrm{Sub}(A)\}$ només cal verificar que, per a cada $Y \in \mathrm{Sub}(A)$, $Y \subseteq \downarrow_{\leq} Y = \{a \in A \mid a \leq \bigvee Y\}$ la qual cosa és evident.

Veiem que $J^2 = J$. Notem que, com $Y \subseteq \downarrow_{\leq} Y$, tenim que $\bigvee Y \leq \bigvee \downarrow_{\leq} Y$. Recíprocament, com per a $y \in \downarrow_{\leq} Y$, es té que $y \leq \bigvee Y$ tenim que $\bigvee \downarrow_{\leq} Y \leq \bigvee Y$. Per tant, $\bigvee Y = \bigvee \downarrow_{\leq} Y$. Aquesta darrera igualtat demostra que J és idempotent ja que,

$$\downarrow_{\leq}\downarrow_{\leq} Y = \{a \in A \mid a \leq \bigvee \downarrow_{\leq} Y\} = \{a \in A \mid a \leq \bigvee Y\} = \downarrow_{\leq} Y. \tag{3.25}$$

Com les altres coordenades són buides, es conclou la idempotència de J.

Verifiquem finalment que, per a cada $X, Y \in \mathrm{Sub}(\delta^{t,A})$, si $X \subseteq Y$, aleshores $J(X) \subseteq J(Y)$. És suficient notar que

$$J(X)_t \subseteq J(Y)_t \equiv \downarrow_{\leq} X_t \subseteq \downarrow_{\leq} Y_t \tag{3.26}$$

ja que les altres coordenades són buides.

Resta demostrar que $\mathbf{A} \cong \mathbf{Cl}_J(A)$. Per a fer-ho considerem la següent aplicació

$$f \begin{cases} A \longrightarrow \mathrm{Sub}(\delta^{t,A}) \\ x \longmapsto \delta^{t,\downarrow_{\leq} x} \end{cases} . \tag{3.27}$$

on, per a $x \in A$, $\downarrow_{\leq} x = \{\, a \in A \mid a \leq x \,\}$.

Per definició de J i f tenim que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Cl}_J(A)$.

Seguidament, notem que f és injectiva ja que si $\delta^{t,\downarrow_{\leq} x} = \delta^{t,\downarrow_{\leq} y}$, aleshores, en ser $\mathbf{A}$ un reticle complet, existeixen i han de ser iguals els suprems dels corresponents conjunts, i.e.,

$$x = \bigvee \downarrow_{\leq} x = \bigvee \downarrow_{\leq} y = y. \tag{3.28}$$

D'altra banda, per a un subconjunt tancat $X \in \mathrm{Cl}_J(A)$, per definició de tancat, és de la forma $X = \delta^{t,\downarrow_{\leq} Y} = \delta^{t,\downarrow_{\leq} \bigvee Y} = f(\bigvee Y)$, per a Y un subconjunt d'A. Així, f és una bijecció entre A i $\mathrm{Cl}_J(A)$.

Finalment, demostrem que conserva i reflecteix l'ordre. Si $x \leq y$, aleshores, $\downarrow_{\leq} x \subseteq \downarrow_{\leq} y$ i, per tant, $\delta^{t,\downarrow_{\leq} x} \subseteq \delta^{t,\downarrow_{\leq} y}$, la qual cosa demostra que f preserva l'ordre. Recíprocament, si $\delta^{t,\downarrow_{\leq} x} \subseteq \delta^{t,\downarrow_{\leq} y}$, aleshores $\downarrow_{\leq} x \subseteq \downarrow_{\leq} y$, i es té que $x \in \downarrow_{\leq} x \subseteq \downarrow_{\leq} y$, i, per definició de $\downarrow_{\leq} y$, es té que $x \leq y$. Per tant, f reflecteix l'ordre.

Concloem que f és un isomorfisme entre reticles. □

Nota. L'operador associat a un reticle algebraic és uniforme. En efecte, si X, Y són subconjunts de $\delta^{t,A}$ tals que $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}_S(Y)$, aleshores o bé $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}_S(Y) = \varnothing$ o bé $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}_S(Y) = \{t\}$. En el primer dels cassos $X = Y = \varnothing^S$ i es compleix la condició d'uniformitat trivialment. En el segon, com $X \neq \varnothing^S$ i $Y \neq \varnothing^S$ i l'operador és extensiu, $\mathrm{supp}_S(J(X)) = \mathrm{supp}_S(J(Y)) = \{t\}$. Així, J és uniforme.

Finalment, per acabar la secció i al capítol, demostrem que, considerant reticles algebraics i operadors clausura algebraics, les corresponents versions del teoremes 3.29 i 3.30 també són certes. Açò és, són equivalents els objectes dels reticles algebraics i dels operadors clausura heterogenis algebraics.

Teorema 3.31. *Siga J un operador clausura algebraic sobre un conjunt S-tipificat A. El conjunt parcialment ordenat $\mathbf{Cl}_J(A)$ és un reticle complet algebraic i els elements compactes de $\mathbf{Cl}_J(A)$ són, precisament, els conjunts $J(X)$ per a X un subconjunt finit d'A.*

Demostració. Sabem que $\mathbf{Cl}_J(A)$ és un reticle complet en ser J un operador clausura heterogeni. Demostrem que els compactes són exactament els subconjunts finitament generats.

Siga $\{a_i \mid i \in n\} \subseteq A$, demostrem que $J(\{a_1, \ldots, a_n\}) \in \mathrm{K}(\mathbf{Cl}_J(A))$. Siga $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Cl}_J(A)$ tals que $J(\{a_i \mid i \in n\}) \subseteq \bigvee_{i \in I} A_i$. Així,

$$\begin{aligned} J(\{a_i \mid i \in n\}) &\subseteq \textstyle\bigvee_{i \in I} A_i && (1)\\ &= \textstyle\bigvee_{i \in I} J(A_i) && (2)\\ &= J\left(\textstyle\bigcup_{i \in I} A_i\right) && (3)\\ &= \textstyle\bigcup_{Y \subseteq_f \bigcup_{i \in I} A_i} J(Y). && (4)\end{aligned}$$

Notem que les relacions s'obtenen respectivament per: (1) la definició dels conjunts A_i, (2) per ser els A_i tancats per a J, (3) el Teorema 3.29 i (4) el fet que J és algebraic.

Així, per a cada $j \in n$, existeix $X_j \subseteq_{\mathrm{f}} \bigcup_{i\in I} A_i$ complint que $a_j \in J(X_j)$. Ara bé, per finitut de X_j, existeix $n_j \in \mathbb{N}$ i existeixen $A_{j,1}, \ldots, A_{j,n_j}$ tals que $X_j \subseteq A_{j,0} \cup \cdots \cup A_{j,n_j-1}$. Per tant, tenim la següent cadena de desigualtats.

$$
\begin{aligned}
J(\{a_i \mid i \in n\}) &\subseteq \textstyle\bigcup_{j\in n} J(X_j) && (1)\\
&\subseteq \textstyle\bigcup_{j\in n} J(A_{j,1} \cup \cdots \cup A_{j,n_j}) && (2)\\
&= J\left(\textstyle\bigcup_{j\in n} \bigcup_{i\in n_j} A_{j,i}\right) && (3)\\
&= \textstyle\bigvee_{j\in n} \bigvee_{i\in n_j} J(A_{j,i}). && (4)
\end{aligned}
$$

Notem que les relacions s'obtenen respectivament per: (1) la definició dels conjunts X_j, (2) el fet que J és extensiu, (3) el fet que, per a una aplicació f i una família de conjunts $\{C_i \mid i \in I\}$, sempre es verifica que $f(\bigcup_{i\in I} C_i) = \bigcup_{i\in I} f(C_i)$ i (4) el Teorema 3.29.

Recíprocament, suposem que existeix un $Y \in \mathrm{Sub}(A)$ complint que no existeix cap $X \subseteq_{\mathrm{f}} A$ tal que $J(Y) = J(X)$. Com $J(Y) \subseteq \bigcup_{X\subseteq_{\mathrm{f}} Y} J(X)$, si existira $n \in \mathbb{N}$ i existiren $\{X_i \mid i \in n\} \subseteq \mathrm{Sub}_f(Y)$ tals que

$$J(Y) \subseteq \textstyle\bigcup_{i\in n} J(X_i) = J(\bigcup_{i\in n} X_i), \tag{3.29}$$

com J és extensiu, $J(Y) = J(\bigcup_{i\in n} X_i)$ en contradicció amb la suposició. Per tant, $J(Y)$ no és compacte. Açò demostra que

$$\mathrm{K}(\mathbf{Cl}_J(A)) = \{J(X) \mid X \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(A)\}. \tag{3.30}$$

Finalment, notem que la condició de que J siga algebraic (Definició 3.27) és exactament que el reticle $\mathbf{Cl}_J(A)$ siga compactament generat (Definició 3.3. □

Teorema 3.32. *Qualsevol reticle complet algebraic és isomorf al reticle de subconjunts tancats d'un operador clausura heterogeni algebraic J sobre un conjunt A.*

Demostració. Demostració anàloga al Teorema 3.30. Només cal restringir les funcions que hem definit en el teorema a $\mathrm{K}(\mathbf{A})$, subconjunt d'A, i.e., considerar les aplicacions

$$J\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Sub}(\delta^{t,\downarrow_\leq \mathrm{K}(\mathbf{A})}) & \longrightarrow & \mathrm{Sub}(\delta^{t,\downarrow_\leq \mathrm{K}(\mathbf{A})}) \\ X & \longmapsto & \delta^{t,\downarrow_\leq X_t} \end{array}\right. . \tag{3.31}$$

$$f\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathrm{Sub}(\delta^{t,\mathrm{K}(\mathbf{A})}) \\ x & \longmapsto & \delta^{t,\downarrow_\leq x} \end{array}\right. . \tag{3.32}$$

□

Nota. Igual que hem fet notar abans, aquest operador clausura associat també és uniforme.

CAPÍTOL 4

Àlgebres heterogènies

L'estudi de l'àlgebra universal pot fer-se des d'una perspectiva homogènia o heterogènia. Encara que la primera d'elles és generosament abstracta, estructures simples com mòduls sobre un anell no tenen una abstracció simple en aquesta teoria ja que posseeixen una operació *externa*. En aquest context, les construccions heterogènies juguen un gran paper en fer possible la definició d'àlgebres que generalitzen, adequadament, aquest tipus d'estructures.

Una volta definits els conceptes generals sobre conjunts S-tipificats podem dotar-los d'estructura i estudiar-la. Definim a continuació el monoide lliure, clau en la construcció d'àlgebres heterogènies, el concepte de signatura S-tipificada, d'estructura de Σ-àlgebra sobre un conjunt S-tipificat i de Σ-àlgebra. Donem exemples per il·lustrar la generalitat que s'assoleix amb aquesta estructura i definim la noció d'homomorfisme entre dues àlgebres heterogènies i, en concret, el concepte d'isomorfisme. Definim la noció de subunivers d'una àlgebra heterogènia, de subàlgebra i introduïm el conjunt de les subàlgebres parcialment ordenat per la inclusió. Definim i estudiem les propietats de l'operador subàlgebra generada i demostrem que és algebraic i uniforme. A més, demostrem que qualsevol operador clausura algebraic uniforme és un operador subàlgebra generada. Finalment, definim els conceptes de congruència sobre una àlgebra i d'àlgebra quocient. Demostrem, per una banda, que el conjunt de congruències és un subreticle complet del conjunt de relacions d'equivalència ordenat amb la inclusió i, d'altra banda, que el conjunt de congruències sobre un àlgebra heterogènia és, exactament, el conjunt de tancats per a certa àlgebra heterogènia.

Després, per a completar l'estudi de les àlgebres heterogènies, definim el producte de dos àlgebres, la noció de parell de congruències factor i d'àlgebra directament irreductible. Demostrem que tota àlgebra heterogènia finita és isomorfa a un producte directe d'una família finita d'àlgebres heterogènies directament irreductibles. Finalitzem el capítol amb les definicions de producte subdirecte d'àlgebres, imbibició subdirecta i àlgebres subdirectament irreductibles. Caracteritzem les àlgebres heterogènies subdirectament irreductibles i generalitzem per a àlgebres heterogènies el teorema de Birkhoff, que diu que qualsevol àlgebra heterogènia és un producte subdirecte d'una família d'àlgebres heterogènies subdirectamente irreductibles.

1. Preliminars

Introduïm el monoide lliure sobre un conjunt per a, seguidament, definir signatura S-tipificada i àlgebra associada a una signatura S-tipificada.

DEFINICIÓ 4.1. El conjunt de totes les *paraules en* S, denotat $S^\star$, és

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(n,S). \tag{4.1}$$

La *concatenació* de paraules en S, és l'operació binària en $S^\star$ que envia un parell de paraules (w,v) de S a l'aplicació $w \curlywedge v$ de $|w|+|v|$ a S, on $|w|$ i $|v|$ són les longituds ($\equiv$ dominis) de les aplicacions w i v respectivament, definida com segueix:

$$w \curlywedge v \begin{cases} |w|+|v| \longrightarrow S \\ \quad i \quad \longmapsto \begin{cases} w_i, & \text{si } 0, \leq i < |w|; \\ v_{i-|w|} & \text{si } |w| \leq i < |w|+|v|. \end{cases} \end{cases} \tag{4.2}$$

La *paraula buida en* S, denotada per λ, és l'única aplicació de $0 = \varnothing$ a S. El *monoide lliure en* S, denotat per $\mathbf{S}^\star$, és $(S^\star, \curlywedge, \lambda)$.

DEFINICIÓ 4.2. Una *signatura* S*-tipificada* és una aplicació Σ de $S^\star \times S$ a $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ que envia cada parell $(w,s) \in S^\star \times S$ al conjunt $\Sigma_{w,s}$ de les *operacions formals* d'*aritat* w, *classificació* (o *coaritat*) s, i *rang* (o *biaritat*) (w,s). A voltes escriurem $\sigma\colon w \longrightarrow s$ per a indicar que l'aplicació formal σ pertany a $\Sigma_{w,s}$.

D'ara endavant farem la següent assumpció: Σ és una signatura S-tipificada, fixada una volta i per a tot el treball.

DEFINICIÓ 4.3. El conjunt $S^\star \times S$-tipificat de les *operacions finitàries sobre* un conjunt S-tipificat A es $(\mathrm{Hom}(A_w, A_s))_{(w,s)\in S^\star\times S}$, on per a cada $w \in S^\star$,

$$A_w = \textstyle\prod_{i\in|w|} A_{w_i}, \tag{4.3}$$

on $|w|$ denota la longitut de la paraula w. Una *estructura de* Σ*-àlgebra sobre* un conjunt S-tipificat A és una família $(F_{w,s})_{(w,s)\in S^\star\times S}$, denotada per F, on, per a cada $(w,s) \in S^\star \times S$, $F_{w,s}$ és una aplicació de $\Sigma_{w,s}$ en $\mathrm{Hom}(A_w, A_s)$.

$$F_{w,s} \begin{cases} \Sigma_{w,s} \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_w, A_s) \\ \quad \sigma \quad \longmapsto F_{w,s}(\sigma) \begin{cases} \quad A_w \quad \longrightarrow A_s \\ (a_i)_{i\in|w|} \longmapsto F_{w,s}(\sigma)((a_i)_{i\in|w|}) \end{cases} \end{cases}. \tag{4.4}$$

Una Σ*-àlgebra* és un parell (A,F), abreujat com $\mathbf{A}$, on A és un conjunt S-tipificat i F és una estructura de Σ-àlgebra sobre A. Per a una operació formal $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, per a simplificar la notació, l'operació d'A_w en A_s corresponent a σ sota $F_{w,s}$ l'escriurem com $\sigma^{\mathbf{A}}$. Denotem per $\mathrm{Alg}(\Sigma)$ a la classe de totes les Σ-àlgebres.

NOTA. Notem que, $\boldsymbol{\varnothing}^S = (\varnothing^S, F)$ és una Σ-àlgebra, precisament si, per a cada $s \in S$, $\Sigma_{\lambda,s} = \varnothing$. A més, si A és un conjunt S-tipificat subfinal, aleshores $\mathbf{A} = (A, F)$ és una Σ-àlgebra, precisament si, per a cada $s \in S - \mathrm{supp}_S(A)$, $\Sigma_{\lambda,s} = \varnothing$, i.e., si, per a cada $s \in S$ tal que $A_s = \varnothing$, aleshores $\Sigma_{\lambda,s} = \varnothing$. Finalment notem, que $\mathbf{1}^S = (1^S, F)$ és sempre una Σ-àlgebra que anomenarem *àlgebra trivial*.

2. Exemples

Exemple 4.4 (Àlgebres homogènies). Podem considerar el cas concret en què el conjunt subjacent siga homogeni, i.e., $S = 1 = \{0\}$. Amb aquesta assumpció molts conceptes se simplifiquen.

En concret el conjunt de paraules en S, i.e., $S^\star = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(n, 1)$, i cada paraula w queda totalment determinada per la seua longitut $|w|$. És a dir, $S^\star$ és bijectiu amb el conjunt dels nombres naturals. Per tant, l'aritat d'una operació formal vindrà determinada per un natural. Notem que la coaritat sempre és 0.

D'altra banda, una estructura de Σ-àlgebra és una família $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on, per a cada $n \in \mathbb{N}$, F_n és una aplicació de Σ_n en $\mathrm{Hom}(A^n, A)$.

$$F_n \begin{cases} \Sigma_n \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^n, A) \\ \sigma \longmapsto F(\sigma) \begin{cases} A^n \longrightarrow A \\ (a_i)_{i\in n} \longmapsto F_n(\sigma)((a_i)_{i\in n}) \end{cases} \end{cases} . \tag{4.5}$$

Moltes de les àlgebres habituals com grups o anells són exemples d'àlgebres homogènies. Enumerem a continuació algunes d'aquestes.

Exemple 4.5 (Magmes). Un *magma* és un parell $(A, *)$ on A és un conjunt i $*$ una operació binària interna sobre A.

Exemple 4.6 (Semigrup). Un *semigrup* és un parell $(A, *)$ on A és un conjunt i $*$ és una operació binària sobre A tal que

(1) $\forall x, y, z \in A\ (\ x * (y * z) = (x * y) * z\ )$.

Exemple 4.7 (Monoide). Un *monoide* és una trupla $(A, *, 1)$ on A és un conjunt, $*$ una operació binària sobre A i 1 un element d'A tals que

(1) $\forall x, y, z \in A\ (\ x * (y * z) = (x * y) * z\ )$;
(2) $\forall x \in A\ (\ x * 1 = 1 * x = x\ )$.

Exemple 4.8 (Grups). Un *grup* és una terna $(A, *, \cdot^{-1}, 1)$ on A és un conjunt, $*$ una operació binària sobre A, $\cdot^{-1}$ una operació unària sobre A i 1 un element d'A tals que

(1) $\forall x, y, z \in A\ (\ x * (y * z) = (x * y) * z\ )$;
(2) $\forall x \in A\ (\ x * 1 = 1 * x = x\ )$;
(3) $\forall x \in A\ (\ x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1\ )$.

Exemple 4.9 (Grups abelians). Un *grup* és una terna $(A, *, \cdot^{-1}, 1)$ on A és un conjunt, $*$ una operació binària sobre A, $\cdot^{-1}$ una operació unària sobre A i 1 un element d'A tals que

(1) $\forall x, y, z \in A\ (\ x * (y * z) = (x * y) * z\ )$;
(2) $\forall x \in A\ (\ x * 1 = 1 * x = x\ )$;

(3) $\forall x \in A\ (\ x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1\ )$;
(4) $\forall x, y \in A\ (\ x * y = y * x\ )$.

Exemple 4.10 (anell unitari). Un *anell unitari* és una terna $(A, \cdot, +, -, 0, 1)$ on A és un conjunt, $\cdot$ i $+$ dues operacions binàries sobre A, $-$ una operació unaria sobre A i $0, 1$ dos elements d'A tals que

(1) $(A, +, -, 0)$ és un grup abelià;
(2) $(A, \cdot, 1)$ és un monoide.

Veiem ara dos exemples d'àlgebres no homogènies.

Exemple 4.11 (Mòduls sobre un anell). Un *mòdul a esquerra* és una sèptupla $\mathbf{\Lambda} = (R, M, *, \cdot, +, -, 0, 1)$ on R és el conjunt dels *escalars*, M el conjunt dels *vectors*, $*\colon R \times M \longrightarrow M$ és l'aplicació *multiplicació per escalar*, $\cdot\colon R \times R \longrightarrow R$ és la *multiplicació d'escalars*, $+\colon R \times R \longrightarrow R$ és la *suma d'escalars*, $-\colon R \longrightarrow R$ és l'operació *oposat* i $0, 1\colon 1 \longrightarrow R$ són el *neutre* de la suma i la multiplicació en R, respectivament, tals que

(1) $(R, \cdot, +, -, 0, 1)$ és un anell unitari;
(2) $(M, +, -, 0)$ és un grup abelià;
(3) $\forall r \in R\ \forall x, y \in M\ (\ r * (x + y) = r * x + r * y\ )$;
(4) $\forall r, s \in R\ \forall x \in M\ (\ (r + s) * x = r * x + s * x\ )$;
(5) $\forall r, s \in R\ \forall x \in M\ (\ (r \cdot s) * x = r * (s * x)\ )$;
(6) $\forall x \in M\ (\ 1 * x = x\ )$.

En particular, els espais vectorials són una estructura coneguda que presenta una estructura heterogènia en la seua definició com a àlgebra.

Els autòmats són un altre exemple d'àlgebra heterogènia.

Exemple 4.12 (Autòmats). Un autòmata és una sèxtupla $\mathbf{A} = (I, Q, O, \delta, \lambda, q_0)$ on I és el conjunt d'*entrades*, Q el conjunt d'*estats*, O el conjunt de les *eixides*, $\delta\colon I \times Q \longrightarrow Q$ l'aplicació de *transició*, $\lambda\colon I \times Q \longrightarrow O$ l'aplicació d'*eixida* i $q_0\colon 1 \longrightarrow Q$ l'*estat inicial*.

3. Homomorfismes

Una volta definit el concepte de Σ-àlgebra, una forma d'estudiar-les és comparar-les entre elles, per a això definim homomorfismes, la seua composició i, en concret, el concepte d'isomorfisme.

Definició 4.13. Siguen $\mathbf{A} = (A, F)$ i $\mathbf{B} = (B, G)$ dues Σ-àlgebres. Un Σ-*homomorfisme* d'$\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ és una tupla $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$, abreujada per f i denotada per $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, on f és una aplicació S-tipificada d'A en B tal que, per a cada $(w, s) \in S^\star \times S$, cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i cada $(a_i)_{i \in |w|} \in A_w$, es té que

$$f_s(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in |w|})) = \sigma^{\mathbf{B}}((f_{w_i}(a_i))_{i \in |w|}). \tag{4.6}$$

Proposició 4.14. *Siguen* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *i* $\mathbf{C}$ *tres* Σ-*àlgebres. Aleshores,*

(1) $\mathrm{id}_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ *és un homomorfisme.*

(2) *Si* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *i* $g\colon \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ *són dos* Σ*-homomorfismes Aleshores* $g \circ f$ *és un* Σ*-homomorfisme d'*$\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{C}$*.*

Demostració. (1) És evident que l'aplicació identitat verifica la condició per a ser Σ-homomorfisme.

(2) Si f i g són Σ-homomorfismes Aleshores per a cada $(w, s) \in S^\star \times S$, cada $\sigma \in \Sigma_{(w,s)}$ i cada $(a_i)_{i\in|w|} \in A_w$, es verifica

$$\begin{aligned}(g \circ f)_s(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})) &= g_s \circ f_s(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})) &(1)\\ &= g_s(\sigma^{\mathbf{B}}((f_{w_i}(a_i))_{i\in|w|})) &(2)\\ &= \sigma^{\mathbf{C}}((g_{w_i}(f_{w_i}(a_i)))_{i\in|w|}) &(3)\\ &= \sigma^{\mathbf{C}}(((g \circ f)_{w_i}(a_i))_{i\in|w|}). &(4)\end{aligned}$$

Notem que les igualtats s'obtenen respectivament per: (1) la definició de composició d'aplicacions S-tipificades, (2) el fet que f és un Σ-homomorfisme, (3) el fet que g és un Σ-homomorfisme i (4) la definició de composició d'aplicacions S-tipificades. $\square$

Definició 4.15. Siguen $\mathbf{A} = (A, F)$ i $\mathbf{B} = (B, G)$ dues Σ-àlgebres. Un Σ-*monomorfisme* (resp. Σ-*epimorfisme*, Σ-*isomorfisme*) d'$\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ és un Σ-homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ l'aplicació S-tipificada del qual és injectiva (resp. suprajectiva, bijectiva).

Definició 4.16. Siguen $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues Σ-àlgebres. Direm que $\mathbf{A}$ és Σ-isomorfa a $\mathbf{B}$, denotat per $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, si existeix un Σ-isomorfisme $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$.

Proposició 4.17. *La relació* $\cong$ *sobre* $\mathrm{Alg}(\Sigma)$ *és una relació d'equivalència.*

Demostració. La relació és reflexiva ja que l'aplicació identitat és bijectiva.

Per a comprovar la simetria, siga $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un Σ-isomorfisme de Σ-àlgebres i considerem $f^{-1} = (f_s^{-1})_{s\in S}$. Demostrem que f^{-1} és un Σ-homomorfisme. Siga $(b_i)_{i\in|w|} \in B_w$, per la bijectivitat d'f existeix $(a_i)_{i\in|w|} \in A_w$ tal que, per a cada $i \in |w|$, $b_i = f_{w_i}(a_i)$ o, equivalentment, per a cada $i \in |w|$, $a_i = f_{w_i}^{-1}(b_i)$. Ara bé, en ser f un Σ-homomorfisme, $f_s(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})) = \sigma^{\mathbf{B}}((f_{w_i}(a_i))_{i\in|w|})$ que, si fem actuar f_s^{-1}, concloem que

$$\begin{aligned}\sigma^{\mathbf{A}}((f_{w_i}^{-1}(b_i))_{i\in|w|}) &= \sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) &(1)\\ &= f_s^{-1}(\sigma^{\mathbf{B}}((f_{w_i}(a_i))_{i\in|w|})) &(2)\\ &= f_s^{-1}(\sigma^{\mathbf{B}}((b_i)_{i\in|w|})). &(3)\end{aligned}$$

Notem que les igualtats s'obtenen respectivament per: (1) la definició de la família $(b_i)_{i\in|w|}$, (2) el fet que f és una bijecció i (3) la definició de la família $(b_i)_{i\in|w|}$. Per tant, hem demostrat que f^{-1} és un Σ-homomorfisme.

Finalment, la transitivitat és conseqüència directa de que la composició d'aplicacions bijectives és bijectiva. $\square$

NOTA. Per a $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues Σ-àlgebres, la proposició anterior ens permet dir simplement que són Σ-isomorfes per a significar, indistintament, que $\mathbf{A}$ és Σ-isomorfa a $\mathbf{B}$ o que $\mathbf{B}$ és Σ-isomorfa a $\mathbf{A}$.

4. Subàlgebres

De la mateixa forma que per a estudiar els conjunts és imprescindible considerar els seus subconjunts, per a l'estudi de les àlgebres hi ha que considerar les seues subàlgebres, que són els subconjunts amb la propietat d'estar tancats sota totes les operacions en la signatura.

Introduïm a continuació la noció de subàlgebra i de l'operador subàlgebra generada.

DEFINICIÓ 4.18. Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra i $X \subseteq A$. Siga $\sigma : w \longrightarrow s$, i.e., una operació formal en $\Sigma_{w,s}$. Direm que X *està tancat sota l'operació* $\sigma^{\mathbf{A}}$ si, per a cada $(a_i)_{i\in|w|} \in X_w$, $\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) \in X_s$. Direm que X és un *subunivers* o *tancat* d'$\mathbf{A}$ si X està tancat sota totes les operacions de Σ. Direm que $\mathbf{X} = (X, G)$ és una *subàlgebra* de la Σ-àlgebra $\mathbf{A} = (A, F)$ i ho denotarem per $\mathbf{X} \leq \mathbf{A}$ si X és un subconjunt tancat i

$$G(\sigma) = \sigma^{\mathbf{X}} = \sigma^{\mathbf{A}}\restriction_X = F(\sigma)\restriction_X, \tag{4.7}$$

i.e., per a cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i cada família $(x_i)_{i\in|w|} \in X_w$,

$$\sigma^{\mathbf{X}}((x_i)_{i\in|w|}) = \sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|}). \tag{4.8}$$

Denotem per $\mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ al conjunt de tots els subuniversos d'$\mathbf{A}$. Denotem per $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ al conjunt de totes les subàlgebres d'$\mathbf{A}$. Denotem per $\mathbf{Sub}(\mathbf{A})$ al conjunt $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ parcialment ordenat per la inclusió, i.e., $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$.

PROPOSICIÓ 4.19. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra y* $\mathbf{X}$ *una subàlgebra de* $\mathbf{A}$*, aleshores* in^X *és un* Σ*-homomorfisme injectiu.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen $(w, s) \in S^\star \times S$, $\sigma \in \Sigma_{(w,s)}$ i $(a_i)_{i\in|w|} \in A_w$. Aleshores, tenint en compte que X és un tancat d'$\mathbf{A}$, es té que

$$\begin{aligned}\mathrm{in}^X_s(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})) &= \sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) &(1)\\ &= \sigma^{\mathbf{X}}((a_i)_{i\in|w|}) &(2)\\ &= \sigma^{\mathbf{X}}((\mathrm{in}^X_{w_i}(a_i))_{i\in|w|}). &(3)\end{aligned}$$

Notem que les igualtats s'obtenen respectivament per: (1) el fet que X és un tancat d'$\mathbf{A}$, (2) la definició de la interpretació de σ en el subunivers $\mathbf{X}$ i (3) el fet que, per a cada $i \in |w|$, $a_i \in X_{w(i)}$. Així, es conclou que in^X és un Σ-homomorfisme. □

Un dels objectius del treball és demostrar que $\mathbf{Sub}(\mathbf{A})$ és un reticle algebraic i, recíprocament, que qualsevol reticle algebraic és isomorf al reticle de subestructures d'una àlgebra heterogènia. Per a arribar a aquest resultat treballem amb el reticle $\mathbf{Sub}(\mathbf{A})$ i amb l'operador clausura associat.

PROPOSICIÓ 4.20. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra. Aleshores l'endoaplicació*

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto \bigcap\{\, C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq X \,\} \end{cases} \tag{4.9}$$

té les següents propietats:

(1) $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.
(2) $\mathrm{Cl}(\mathbf{A}) = \{X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)\} = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}}(\mathrm{Sub}(A))$.
(3) $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *és extensiva, i.e., per a cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$, $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.
(4) $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *és isòtona, i.e., per a cada* $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$, *si* $X \subseteq Y$, *Aleshores* $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Y)$.
(5) $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *és idempotent, i.e., per a cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$,

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X). \tag{4.10}$$

DEMOSTRACIÓ. (1) Siguen $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$, $\sigma \colon w \longrightarrow s$ i $(x_i)_{i\in|w|} \in (\bigcap \mathcal{X})_w$. Aleshores, per a cada $X \in \mathcal{X}$ i cada $(x_i)_{i\in|w|} \in X_w$, $\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|}) \in X_s$, per tant, $\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|})) \in (\bigcap \mathcal{X})_s$. D'on es conclou que $\bigcap \mathcal{X} \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ i $\mathrm{Im}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}) \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$.

(2) Per (1) és evident que $\{X \in \mathrm{Sub}(A) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)\} \subseteq \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$. Recíprocament, siga $X \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$. Aleshores donat que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ és, per definició, $\bigcap\{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C\}$, és evident que $X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

(3) Siga $X \in \mathrm{Sub}(A)$. Donat que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcap\{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C\}$, és evident que $X \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

(4) Si $X \subseteq Y$, aleshores $\{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid Y \subseteq C\} \subseteq \{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C\}$ i, per tant, és clar que $\bigcap\{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C\} \subseteq \bigcap\{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid Y \subseteq C\}$.

(5) Siga $Z \in \mathrm{Sub}(A)$, aleshores sabem per (1) i (2) que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Z) \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) = \{X \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A}) \mid X = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)\}$, així se segueix que $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Z) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(Z))$. □

NOTA. Per a $X \subseteq A$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ és el menor subunivers d'$\mathbf{A}$ que conté a X i l'anomenarem subunivers d'$\mathbf{A}$ generat per X. Així, $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ és l'àlgebra associada al subunivers $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

PROPOSICIÓ 4.21. *Siguen* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra i* $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$. *Aleshores per a cada* $X \in \mathrm{Sub}(B)$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

DEMOSTRACIÓ. Si $X \in \mathrm{Sub}(B)$, aleshores $B \in \{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C\}$ i, per tant, $\bigcap\{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq C\} = \bigcap\{C \in \mathrm{Cl}(\mathbf{B}) \mid X \subseteq C\}$, i.e., $\mathrm{Sg}_{\mathbf{B}}(X) = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. □

NOTA. Per a una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ i un subconjunt X d'A, la proposició anterior ens permet a escriure simplement $\mathrm{Sg}(X)$ en compte de $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ i, igualment, $\mathbf{Sg}(X)$ en compte de $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

La definició que hem donat de l'operador subàlgebra generada ha sigut descriptiva. No obstant, per a demostrar que és un operador clausura algebraic, donem a continuació una definició constructiva.

DEFINICIÓ 4.22. Siga A una Σ-àlgebra.

(1) Denotem per $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$ l'operador sobre $\mathrm{Sub}(A)$ definit com

$$\mathrm{E}_{\mathbf{A}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto X \cup (\bigcup_{\sigma\in\Sigma_{\cdot,s}} \sigma^{\mathbf{A}}[X_{\mathrm{ar}(\sigma)}])_{s\in S} \end{cases} \tag{4.11}$$

on, per a $s \in S$, $\Sigma_{\cdot,s}$ és el conjunt de totes les operacions formals σ amb coaritat s i per a $\mathrm{ar}(\sigma) = w$, l'aritat de σ, $X_{\mathrm{ar}(\sigma)} = \prod_{j\in|w|} X_{w(i)}$.

(2) Si $X \subseteq A$, aleshores la família $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))_{n\in\mathbb{N}}$ queda definida recursivament com $\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) = X$ i $\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))$ per a $n \geq 0$.

(3) Denotem per $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)$.

NOTA. Per definició de l'operador $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}$, la cadena $(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}} \mid n \in \mathbb{N})$ és una cadena ascendent per a la inclusió.

La definició descriptiva que hem donat permet demostrar senzillament que és un operador clausura. Per a demostrar que és algebraic, i per tant, pel Teorema 3.31, que el reticle de subàlgebres és algebraic, donem amb la següent proposició una definició constructiva de l'operador $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$.

PROPOSICIÓ 4.23. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra heterogènia i* $X \subseteq A$. *Aleshores* $\mathrm{Sg}(X) = \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$.

DEMOSTRACIÓ. En primer lloc per a demostrar que $\mathrm{Sg}(X) \subseteq \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$, com $\mathrm{Sg}(X)$ és el menor tancat que conté a X, és suficient que demostrem que $\mathrm{E}^{\omega}(X)$ és un tancat que conté a X. Ara bé, $\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) = X$, doncs $X \subseteq \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$. D'altra banda, siguen $\sigma\colon w \longrightarrow s$ i $(a_i)_{i\in|w|} \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}})_w$. Com les longituds de les paraules són finites, i.e., les operacions son finitàries, aleshores existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ complint que $(a_i)_{i\in|w|} \in (\bigcup_{i\in n_0} \mathrm{E}^i_{\mathbf{A}}(X))_w$. Per definició, concloem que

$$\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) \in (\mathrm{E}^{n_0+1}_{\mathbf{A}}(X))_s \subseteq (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}})_s \tag{4.12}$$

i $\mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X) \in \mathrm{Cl}(\mathbf{A})$ que, a més, conté a X, per tant, $\mathrm{Sg}(X) \subseteq \mathrm{E}^{\omega}_{\mathbf{A}}(X)$.

Per a demostrar la inclusió contrària fem una demostració per inducció. En primer lloc, del fet que $\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) = X$ i $X \subseteq \mathrm{Sg}(X)$ es conclou que $\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}(X)$. Suposem que, per a $n \geq 0$ es compleix que $\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}(X)$. Aleshores com

$$\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \cup (\bigcup_{\sigma\in\Sigma_{\cdot,s}} \sigma^{\mathbf{A}}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)_{\mathrm{ar}(\sigma)}])_{s\in S} \tag{4.13}$$

i, per hipòtesi d'inducció, $\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \subseteq \mathrm{Sg}(X)$, només cal demostrar que $(\bigcup_{\sigma\in\Sigma_{\cdot,s}} \sigma^{\mathbf{A}}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)_{\mathrm{ar}(\sigma)}])_{s\in S} \subseteq \mathrm{Sg}(X)$. Siguen $s \in S$, $\sigma : w \longrightarrow s$, i $(a_i)_{i\in|w|} \in (\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))_w$. Aleshores com $(a_i)_{i\in|w|} \in (\mathrm{Sg}(X))_w$ i $\mathrm{Sg}(X)$ és un tancat, $\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) \in (\mathrm{Sg}(X))_s$ demostrant que $\sigma^{\mathbf{A}}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)_w] \subseteq (\mathrm{Sg}(X))_s$. □

COROL·LARI 4.24. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra heterogènia, aleshores l'operador clausura* Sg *és algebraic, és a dir, per a cada* $X \in \mathrm{Sub}(A)$,

$$\mathrm{Sg}(X) = \bigcup_{Y\in\mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(X)} \mathrm{Sg}(Y). \tag{4.14}$$

COROL·LARI 4.25. *El reticle* $\mathbf{Sub}(\mathbf{A})$ *és algebraic.*

PROPOSICIÓ 4.26. *Siguen* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra heterogènia i* $X, Y \subseteq A$. *Aleshores tenim que*

(1) *Si* $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}(Y)$*, aleshores per a cada* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y)). \tag{4.15}$$

(2) $\mathrm{supp}_S(\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X))$.
(3) *Si* $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}_S(Y)$*, aleshores*

$$\mathrm{supp}_S(\mathrm{Sg}(X)) = \mathrm{supp}_S(\mathrm{Sg}(Y)). \tag{4.16}$$

Conseqüentment, l'operador clausura heterogeni $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *és uniforme.*

DEMOSTRACIÓ. Ens limitem a demostrar (1) ja que (2) i (3) se segueixen de la Proposició 3.17. Siguen $X, Y \in \mathrm{Sub}(A)$ tals que $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}_S(Y)$. Demostrem per inducció que $\mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y))$. En primer lloc, del fet que $\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X) = X$ i de que $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}_S(Y)$ se segueix que $\mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^0_{\mathbf{A}}(Y))$. Suposem que, per a $n \geq 0$, es compleix que, si $\mathrm{supp}_S(X) = \mathrm{supp}_S(Y)$, aleshores $\mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y))$. Per a demostrar que $\mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(Y))$, per simetria, és suficient demostrar que $\mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X)) \subseteq \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(Y))$. Aleshores, com

$$\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X) = \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X) \cup (\textstyle\bigcup_{\sigma\in\Sigma_{\cdot,s}} \sigma^{\mathbf{A}}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)_{\mathrm{ar}(\sigma)}])_{s\in S}, \tag{4.17}$$

si $t \in \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(X))$, o bé $\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)_t \neq \varnothing$ o bé $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_{\cdot,t}} \sigma^{\mathbf{A}}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)_{\mathrm{ar}(\sigma)}] \neq \varnothing$.

En el primer dels cassos, com $\mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y))$, es conclou que $t \in \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y))$ i $\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y)_t \neq \varnothing$. Així $t \in \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(Y))$.

En el segon dels cassos, existeixen $w \in S^\star$ i $\sigma\colon w \longrightarrow t$ tals que $\sigma^{\mathbf{A}}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)_w]$ és no buit. Si $w = \lambda$ la paraula buida, aleshores trivialment $\sigma^{\mathbf{A}}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y)_\lambda] \neq \varnothing$ i $t \in \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(Y))$. Si $w \neq \lambda$, per a cada $i \in |w|$, $\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)_{w_i} \neq \varnothing$ i, com $\mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(X)) = \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y))$, aleshores, per a cada $i \in |w|$, $\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y)_{w_i} \neq \varnothing$ i $\sigma^{\mathbf{A}}[\mathrm{E}^n_{\mathbf{A}}(Y)_\lambda] \neq \varnothing$. Així, $t \in \mathrm{supp}_S(\mathrm{E}^{n+1}_{\mathbf{A}}(Y))$. □

Hem demostrat que l'operador clausura $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ és algebraic i uniforme. Demostrem que, recíprocament, cada operador clausura algebraic i uniforme és un operador subàlgebra generada per a una certa àlgebra heterogènia. Aquest teorema és el conegut com a teorema de Birkhoff que, en la seua versió homogènia no requereix la condició d'uniformitat ja que sempre es dóna. La necessitat d'imposar aquesta condició va ser demostrada per Mathiessen en [**15**]. Aquesta generalització heterogènia la devem a J. Climent Vidal i J. Soliveres Tur que estudiaren en [**20, 7**] aquesta condició addicional.

TEOREMA 4.27. *Siga* J *un operador clausura algebraic heterogeni en un conjunt* S*-tipificat* A*. Si* J *és uniforme, aleshores* $J = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ *per a alguna signatura* Σ *i alguna* Σ*-àlgebra heterogènia* $\mathbf{A}$*.*

Demostració. Siga $\Sigma = (\Sigma_{w,s})_{(w,s)\in S^\star\times S}$ una signatura S-tipificada definida, per a cada $(w,s)\in S^\star\times S$, com segueix:

$$\begin{aligned}\Sigma_{w,s} = \{\, (X,b) \in \textstyle\bigcup_{X\in\mathrm{Sub}(A)}(\{X\}\times J(X)_s) \mid \\ \forall t\in S\,(\mathrm{card}(X_t) = |w|_t)\,\} \quad (4.18)\end{aligned}$$

on, per a un tipus $s\in S$ i una paraula w, el *nombre d'ocurrències de s en w*, denotat per $|w|_s$, és $\mathrm{card}(\{i\in|w| \mid w(i)=s\})$. És a dir, definim la signatura S-tipificada, i.e., el conjunt d'operacions formals, per a cada $(w,s)\in S^\star\times S$, com el conjunt de parells (X,b) on X és un subconjunt d'A verificant que, per a cada tipus $t\in S$, el cardinal de X_t és igual al nombre d'ocurrències de t en w i b pertany a la coordenada s-èssima de la imatge d'X per J.

Remarquem que per a $(w,s)\in S^\star\times S$ i $(X,b)\in\bigcup_{X\in\mathrm{Sub}(A)}(\{X\}\times J(X)_s)$ les següents condicions són equivalents:

(1) $(X,b)\in\Sigma_{w,s}$, i.e., per a cada $t\in S$, $\mathrm{card}(X_t)=|w|_t$.
(2) $\mathrm{supp}_S(X)=\mathrm{Im}(w)$ i, per a cada $t\in\mathrm{supp}(X)$, $\mathrm{card}(X_t)=|w|_t$.

Per altra banda, per al conjunt d'índexs $\Lambda=\bigcup_{Y\in\mathrm{Sub}(A)}(\{Y\}\times\mathrm{supp}_S(Y))$ i la família Λ-indexada $(Y_s)_{(Y,s)\in\Lambda}$, on la coordenada (Y,s)-èssima és Y_s, considerem f una aplicació d'elecció per a $(Y_s)_{(Y,s)\in\Lambda}$, i.e., un element de $\prod_{(Y,s)\in\Lambda}Y_s$. A més, per a cada $w\in S^\star$ i $(a_i)_{i\in|w|}\in A_w$, considerem $M^{w,(a_i)_{i\in|w|}}=(M_s^{w,(a_i)_{i\in|w|}})_{s\in S}$ el conjunt S-tipificat finit definit per $M_s^{w,(a_i)_{i\in|w|}}=\{a_i\in A_s \mid i\in w^{-1}[\{s\}]\}$, per a cada $s\in S$. Remarquem que, per definició, $M^{w,(a_i)_{i\in|w|}}\subseteq A$.

Ara, per a cada $(w,s)\in S^\star\times S$ i $(X,b)\in\Sigma_{w,s}$, definim $F_{X,b}=(X,b)^{\mathbf{A}}$ com l'operació S-tipificada de A_w en A_s donada per

$$(X,b)^{\mathbf{A}}\begin{cases}\prod_{i\in|w|}A_{w(i)} \longrightarrow A_s\\ (a_i)_{i\in|w|} \longmapsto \begin{cases} b, & \text{si } M^{w,a}=X;\\ f(J(M^{w,a}),s), & \text{altre cas.}\end{cases}\end{cases} \tag{4.19}$$

Demostrarem que la Σ-àlgebra $\mathbf{A}=(A,F)$ és tal que $J=\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$. Però abans cal comprovar, per la definició de Λ, que la definició de les operacions és correcta, i.e., que per a cada $(w,s)\in S^\star\times S$, $(X,b)\in\Sigma_{w,s}$ i $s\in A_w$, $s\in\mathrm{supp}_S(J(M^{w,a}))$. Per a açò és suficient demostrar que $\mathrm{supp}_S(M^{w,a})=\mathrm{supp}_S(X)$ perquè, per hipòtesis, J és uniforme i, per definició, $b\in J(X)_s$.

Si $t\in\mathrm{supp}_S(M^{w,a})$, aleshores $M_t^{w,a}$ és no buit, i.e., existeix $i\in|w|$ tal que $w_i=t$. Aleshores, com $(X,b)\in\Sigma_{w,s}$, tenim que $0<|w|_t=\mathrm{card}(X_t)$, per tant $t\in\mathrm{supp}_S(X)$.

Recíprocament, si $t\in\mathrm{supp}_S(X)$, $|w|_t>0$ i existeix un $i\in|w|$ tal que $w_i=t$, aleshores $a_i\in A_t$. Concloem que $M_t^{w,a}\neq\varnothing$, i.e., $t\in\mathrm{supp}_S(M^{w,a})$. Per tant, $\mathrm{supp}_S(M^{w,a})=\mathrm{supp}_S(X)$ i, per la uniformitat de J, $\mathrm{supp}_S(J(M^{w,a}))=\mathrm{supp}_S(J(X))$. Però, per definició, $b\in J(X)_s$, així que $s\in\mathrm{supp}_S(J(M^{w,a}))$ i la definició és consistent.

Demostrem ara que, per a cada $X \subseteq A$, $J(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$. Siguen X un subconjunt d'A, $s \in S$ i $b \in J(X)_s$. Aleshores, com J és algebraic, $b \in J(Y)_s$ per a algun subconjunt finit Y d'X. A partir d'aquest Y definirem una paraula w_Y en S i un element a_Y de A_{w_Y} tal que

(1) $Y = M^{w_Y, a_Y}$,
(2) $(Y, b) \in \Sigma_{w_Y, s}$, i, per a cada $t \in S$, $\mathrm{card}(Y_t) = |w_Y|_t$, i
(3) $a_Y \in \prod_{i \in |w_Y|} X_{w_Y(i)} = X_{w_Y}$.

aleshores, ja que $(Y, b)^{\mathbf{A}}(a_Y) = b$, podem afirmar que $b \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)_s$.

Però, tenint en compte que Y és finit si, i només si, $\mathrm{supp}_S(Y)$ és finit i, per a cada $t \in \mathrm{supp}_S(Y)$, Y_t és finit, considerem $\{s_\alpha \mid \alpha \in |\mathrm{supp}_S(Y)|\}$ una enumeració de $\mathrm{supp}_S(Y)$ i, per a cada $\alpha \in |\mathrm{supp}_S(Y)|$, considerem $\{y_{\alpha,i} \mid i \in |Y_{s_\alpha}|\}$ una enumeració de les s_α-coordenades no buides d'Y. Aleshores, definim, en primer lloc, la paraula w_Y com l'aplicació de $|w_Y| = \sum_{\alpha \in m} p_\alpha$ en S tal que, per a cada $i \in |w_Y|$ i $\alpha \in |\mathrm{supp}_S(Y)|$,

$$w_Y(i) = s_\alpha \text{ si, i només si, } \textstyle\sum_{\beta \in \alpha} p_\beta \leq i \leq \sum_{\beta \in \alpha+1} p_\beta - 1 \tag{4.20}$$

i, en segon lloc, l'element a_Y de A_{w_Y} com l'aplicació de $|w_Y|$ en $\bigcup_{i \in |w_Y|} A_{w_Y(i)}$, tal que, per a cada $i \in |w_Y|$ i $\alpha \in |\mathrm{supp}_S(Y)|$,

$$a_Y(i) = y_{\alpha, i - \sum_{\beta \in \alpha} p_\beta} \text{ si, i només si, } \textstyle\sum_{\beta \in \alpha} \leq i \leq \sum_{\beta \in \alpha+1} p_\beta - 1. \tag{4.21}$$

D'aquestes definicions se segueixen els ítems (1), (2) i (3) anteriors. Observem que (1) és un cas particular del fet que l'aplicació M de $\bigcup_{w \in S^\star}(\{w\} \times A_w)$ en $\mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(A)$, que a un parell (w, a) li assigna $M^{w,a}$, és suprajectiva.

D'aquestes construccions i de la definició de $(Y, b)^{\mathbf{A}}$ podem afirmar que $(Y, b)^{\mathbf{A}}(a_Y) = b$, així $b \in \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)_s$. Per tant, $J(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Finalment, demostrem que, per a cada $X \subseteq A$, $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq J(X)$. Però per a això, per la Proposició 4.23, és suficient demostrar que, per a cada $X \subseteq A$, tenim que $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq J(X)$. Siga $s \in S$ i $c \in \mathrm{E}_{\mathbf{A}}(X)_s$. Si $c \in X_s$, aleshores $c \in J(X)_s$, ja que J és extensiu. Si $c \notin X_s$, aleshores, per definició de $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}(X)$, existeix una paraula $w \in S^\star$, una operació formal heterogènia $(Y, b) \in \Sigma_{w,s}$, i un element $(a_i)_{i \in |w|} \in X_w$ tals que $(Y, b)^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in |w|}) = c$. Si $M^{w,(a_i)_{i \in |w|}} = Y$, aleshores $c = b$, així $c \in J(Y)_s$. Per tant, com que $M^{w,(a_i)_{i \in |w|}} \subseteq X$ ja que $(a_i)_{i \in |w|} \in X_w$, $c \in J(X)_s$. Si $M^{w,(a_i)_{i \in |w|}} \neq Y$, aleshores $(Y, b)^{\mathbf{A}}((a_i)_{i \in |w|}) \in J(M^{w,(a_i)_{i \in |w|}})_s$, però, com $M^{w,(a_i)_{i \in |w|}} \subseteq X$ i J és isòton, $J(M^{w,(a_i)_{i \in |w|}})$ és un subconjunt de $J(X)$, per tant $(Y, (a_i)_{i \in |w|})^{\mathbf{A}} \in J(X)_s$. Així $\mathrm{E}_{\mathbf{A}}(X) \subseteq J(X)$. □

Se segueix del teorema anterior i de la Proposició 4.26 el següent resultat.

COROL·LARI 4.28. *Siga J un operador clausura heterogeni en un conjunt S-tipificat A. Aleshores $J = \mathrm{Sg}_{\mathbf{A}}$ per a alguna signatura Σ i alguna Σ-àlgebra heterogènia $\mathbf{A}$ si, i només si, J és uniforme.*

Com que l'operador clausura algebraic associat a un reticle algebraic (Teorema 3.32) és uniforme se segueix el següent corol·lari.

COROL·LARI 4.29. *Tot reticle algebraic és el reticle de subàlgebres per a alguna àlgebra heterogènia* $\mathbf{A}$.

5. Congruències

Definim a continuació la noció de congruència que permet dotar d'estructura algebraica al conjunt quocient. En concret demostrem que el reticle de congruències és algebraic i uniforme i enunciem i demostrem el conegut com Teorema de Correspondència.

DEFINICIÓ 4.30. Siguen $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra i $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$. Direm que Φ és una *congruència sobre* $\mathbf{A}$ si, per a cada $(w, s) \in (S^\star - \{\lambda\}) \times S$, $\sigma\colon w \longrightarrow s$ i $(a_i)_{i\in|w|}, (b_i)_{i\in|w|} \in A_w$, si, per a cada $i \in |w|$, $a_i \equiv_{\Phi_{w(i)}} b_i$, aleshores $\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) \equiv_{\Phi_s} \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in|w|})$, i.e.,

$$\forall i \in |w| \; (\; a_i \equiv_{\Phi_{w(i)}} b_i \;) \to \sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) \equiv_{\Phi_s} \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in|w|}). \tag{4.22}$$

Denotem per $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$ el conjunt de totes les congruències sobre $\mathbf{A}$ i escriurem $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ quan es considera ordenat per la inclusió.

Així, una congruència sobre una Σ-àlgebra és una relació d'equivalència amb la propietat que, per a cada operació en Σ, si apliquem la operació a famílies amb elements relacionats, lis assigna elements relacionats. Aquesta propietat és la que permet definir en el conjunt quocient una estructura de Σ-àlgebra.

DEFINICIÓ 4.31. Siguen $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra i $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$. L'*àlgebra quocient d'*$\mathbf{A}$ *entre* Φ és la Σ-àlgebra $(A/\Phi, F^{\mathbf{A}/\Phi})$ on, per a cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$,

$$\sigma^{\mathbf{A}/\Phi} \begin{cases} (A/\Phi)_w & \longrightarrow (A/\Phi)_s \\ ([a_i]_{\Phi_{w(i)}})_{i\in|w|} & \longmapsto [\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})]_{\Phi_s} \end{cases}. \tag{4.23}$$

NOTA. De la pròpia definició d'àlgebra quocient se segueix que la projecció canònica al quocient pr^Φ, introduïda en la Definició 3.21, és un Σ-homomorfisme.

NOTA. Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra. Aleshores, per a la congruència ∇_A, tenim que $\mathbf{A}/\nabla_A$ és isomorfa a una subàlgebra d'$\mathbf{1}^S$. Al cas homogeni, si $\boldsymbol{\varnothing}$ és una àlgebra, aleshores $\boldsymbol{\varnothing}/\nabla_\varnothing$ és $\boldsymbol{\varnothing}$, que és una subàlgebra d'$\mathbf{1}$, i $\mathrm{Sub}(\mathbf{1})$ és $\{\boldsymbol{\varnothing}, \mathbf{1}\}$. Al cas heterogeni, per a un conjunt de tipus S amb $\mathrm{card}(S) \geq 2$ i una signatura Σ tal que, per a cada $s \in S$, $\Sigma_{\lambda,s} = \varnothing$, tenim que $\boldsymbol{\varnothing}^S$ és una Σ-àlgebra i que $\boldsymbol{\varnothing}^S/\nabla_{\varnothing^S}$ és $\boldsymbol{\varnothing}^S$. No obstant, en contrast amb el que passa al cas homogeni, al cas heterogeni, per a un conjunt S i una signatura S-tipificada Σ satisfent les condicions anteriors, poden existir Σ-àlgebres $\mathbf{A}$ tal que $\varnothing \subset \mathrm{supp}_S(\mathbf{A}) \subset S$. Així, per a aquest tipus de Σ-àlgebres, la Σ-àlgebra quocient $\mathbf{A}/\nabla_A$ serà isomorfa a una subàlgebra de $\mathrm{Sub}(\mathbf{1}^S) - \{\boldsymbol{\varnothing}^S, \mathbf{1}^S\}$

Ja hem definit al capítol anterior els suprems i ínfims de famílies d'equivalències (Teorema 3.20). La pregunta natural és si, per a una família de congruències, el seu suprem i ínfim són, també, congruències. La resposta és afirmativa i la demostració la presentem a la següent proposició.

PROPOSICIÓ 4.32. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra. Aleshores* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ *és un subreticle complet d'*$\mathbf{Eqv}(A)$.

DEMOSTRACIÓ. Comprovem que, per a una família $(\Phi^j)_{j\in J}$ de congruències sobre $\mathbf{A}$, el seu suprem i ínfim en el reticle complet $\mathbf{Eqv}(A)$ descrits en la Proposició 3.20 són, de fet, congruències en $\mathbf{A}$.

Siguen $(w,s)\in(S^\star-\{\lambda\})\times S$, $\sigma\colon w\longrightarrow s$ i $(x_i)_{i\in|w|},(y_i)_{i\in|w|}\in A_w$ tals que, per a cada $i\in|w|$, $(x_i,y_i)\in\bigcap_{j\in J}\Phi^j_{w(i)}$. Aleshores podem afirmar que, per a cada $i\in|w|$ i $j\in J$, $(x_i,y_i)\in\Phi^j_{w(i)}$ d'on, per definició de congruència, concloem que, per a cada $j\in I$, $(\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|}),\sigma^{\mathbf{A}}((y_i)_{i\in|w|}))\in\Phi^j_s$. Així, $(\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|}),\sigma^{\mathbf{A}}((y_i)_{i\in|w|}))\in\bigcap_{j\in I}\Phi^j_s$, la qual cosa demostra que $\bigcap_{j\in J}\Phi^j$ és una congruència sobre $\mathbf{A}$.

D'altra banda, siguen $(w,s)\in(S^\star-\{\lambda\})\times S$, $\sigma\colon w\longrightarrow s$ i $(x_i)_{i\in|w|},(y_i)_{i\in|w|}\in A_w$ tals que, per a cada $i\in|w|$, $(x_i,y_i)\in(\bigvee_{j\in J}\Phi^j)_{w(i)}$. Aleshores, com, per cada $i\in|w|$,

$$(\textstyle\bigvee_{j\in J}\Phi^j)_{w(i)}=\Big\{(a,b)\in A^2_{w(i)}\mid\exists n\geq 1\,\exists x\in A^{|w|+1}_{w(i)}\\ \Big(x_0=a\,\&\,x_{|w|-1}=b\,\&\,\forall p\in|w|\,(x_p,x_{p+1})\in\textstyle\bigcup_{i\in I}\Phi^i_{w(i)}\Big)\Big\},\tag{4.24}$$

per la Proposició 3.20, podem afirmar que existeixen successions finites d'elements d'A_w i congruències de les famílies $(\Phi^j_{w(\alpha)})_{j\in J}$ per a $\alpha\in|w|$ tals que

$$\begin{array}{ccc} x_0\Phi^{j_{0,0}}_{w(0)}z_{0,1} & \dots & z_{0,k_0-1}\Phi^{j_{0,k_0-1}}_{w(0)}y_0,\\ x_1\Phi^{i_{1,0}}_{w(1)}z_{1,1} & \dots & z_{1,k_1-1}\Phi^{i_{1,k_1-1}}_{w(1)}y_1,\\ & \dots & \\ x_{|w|-1}\Phi^{i_{|w|-1,0}}_{w(|w|-1)}z_{|w|-1,1} & \dots & z_{|w|-1,k_{|w|-1}-1}\Phi^{i_{|w|-1,k_{|w|-1}-1}}_{w(|w|-1)}y_{|w|-1}. \end{array}\tag{4.25}$$

Aleshores tenim que

$$\begin{gathered}(\sigma^{\mathbf{A}}(x_0,x_1,\dots,x_{n-1}),\sigma^{\mathbf{A}}(y_0,x_1,\dots,x_{n-1}))\in\textstyle\bigvee_{\beta\in k_0}\Phi^{i_0,\beta}_s,\\ (\sigma^{\mathbf{A}}(y_0,x_1,\dots,x_{n-1}),\sigma^{\mathbf{A}}(y_0,y_1,\dots,x_{n-1}))\in\textstyle\bigvee_{\beta\in k_1}\Phi^{i_1,\beta}_s,\\ \dots\\ (\sigma^{\mathbf{A}}(y_0,\dots,y_{|w|-2},x_{|w|-1}),\sigma^{\mathbf{A}}(y_0,\dots,y_{|w|-2},y_{|w|-1}))\in\textstyle\bigvee_{\beta\in k_{|w|-1}}\Phi^{i_{|w|-1},\beta}_s.\end{gathered}\tag{4.26}$$

Per tant,

$$(\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|}),\sigma^{\mathbf{A}}((y_i)_{i\in|w|}))\in\textstyle\bigvee_{\alpha\in n}\bigvee_{\beta\in k_\alpha}\Phi^{i_\alpha,\beta}_s.\tag{4.27}$$

Així que podem afirmar que

$$(\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|}),\sigma^{\mathbf{A}}((y_i)_{i\in|w|}))\in\textstyle\bigvee_{j\in I}\Phi^j_s.\tag{4.28}$$

la qual cosa demostra que $\bigvee_{i\in I}\Phi^i$ és una congruència. □

Igual que passava amb les subàlgebres, les congruències parcialment ordenades per la inclusió formen un reticle algebraic. Per a demostrar-ho, construïm una estructura algebraica sobre $A \times A$ tal que, les congruències sobre $\mathbf{A}$ siguen, exactament, els seus subuniversos.

TEOREMA 4.33. *Per a cada Σ-àlgebra $\mathbf{A}$, existeix una signatura S-tipificada Γ i una estructura de Γ-àlgebra G sobre $A \times A$ tal que*

$$\mathrm{Cl}_{\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}\times\mathbf{A}}}(\mathrm{Sub}(A \times A)) = \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}). \tag{4.29}$$

DEMOSTRACIÓ. La signatura Γ es construeix afegint a Σ, per a cada $s \in S$, els següents símbols d'operació:

(1) Per a cada $a \in A_s$, $\omega_a^{\lambda,s} : \lambda \longrightarrow s$;
(2) $\omega^{s,s} : s \longrightarrow s$;
(3) $\omega^{ss,s} : ss \longrightarrow s$.

I els símbols d'operació s'interpreten en $A \times A$ com segueix. Si $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, aleshores

$$\sigma^{\mathbf{A}\times\mathbf{A}} \begin{cases} (A \times A)_w & \longrightarrow (A \times A)_s \\ ((a_i)_{i\in|w|}, (b_i)_{i\in|w|}) & \longmapsto (\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}), \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in|w|})) \end{cases} \tag{4.30}$$

i els nous símbols d'operació actuen com

(1) $\omega_a^{\lambda,s\mathbf{A}\times\mathbf{A}}$ és la constant (a, a),
(2) $\omega^{s,s,\mathbf{A}\times\mathbf{A}}$ és l'aplicació d'$(A \times A)_s$ en $(A \times A)_s$ donada per

$$\omega^{s,s,\mathbf{A}\times\mathbf{A}} \begin{cases} (A \times A)_s & \longrightarrow (A \times A)_s \\ (a, b) & \longmapsto (b, a) \end{cases} \tag{4.31}$$

(3) $\omega^{ss,s\mathbf{A}\times\mathbf{A}}$ és l'aplicació d'$(A \times A)_{ss}$ en $(A \times A)_s$ donada per

$$\omega^{ss,s,\mathbf{A}\times\mathbf{A}} \begin{cases} (A \times A)_{ss} & \longrightarrow (A \times A)_s \\ ((a, b), (c, d)) & \longmapsto \begin{cases} (a, d), & \text{si } b = c; \\ (a, b), & \text{si } b \neq c. \end{cases} \end{cases} \tag{4.32}$$

Així, per construcció de la signatura i l'àlgebra, Φ és una congruència sobre $\mathbf{A}$, exactament si Φ és un tancat per a la $\Gamma-$àlgebra $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. □

COROL·LARI 4.34. $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ *és un reticle algebraic.*

NOTA. En ser $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ un reticle algebraic sabem que existeix un operador clausura algebraic associat, concretament $\mathrm{Sg}_{\mathbf{A}\times\mathbf{A}}$ per a l'àlgebra del Teorema 4.33. Aquest operador també es denomina *operador congruència generada* i es denota com $\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}$. Aquest operador satisfà les mateixes propietats demostrades a la Proposició 4.20 i, de fet, la seua definició és anàloga.

Per a àlgebres homogènies Grätzer i Schmidt demostraren en [**11**] que qualsevol operador clausura algebraic és un operador congruència generada per a alguna àlgebra homogènia. Per al cas heterogeni pareix intuïtiu que, imposant la condició de que l'operador siga uniforme, també serà cert. No obstant, la demostració d'aquest fet en el context homogeni fa ús d'àlgebres parcials que s'allunyen del nivell d'aquest treball [**11**]. A més, la condició d'uniformitat i els suports fan la demostració encara més complicada.

Finalment, demostrem un teorema que esdevindrà important en l'estudi dels productes subdirectes. En essència, el teorema demostra que, per a cada congruència Φ, les congruències sobre $\mathbf{A}/\Phi$ són, exactament, les congruències Ψ/Φ on Ψ és una congruència que conté a Φ.

TEOREMA 4.35 (de correspondència). *Siga* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra i* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$. *Aleshores, els reticles* $([\Phi, \nabla_A], \subseteq) = \Uparrow \Phi$ *i* $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi)$ *són isomorfs.*

DEMOSTRACIÓ. Per la Definició 3.2 d'isomorfisme de reticles hem de donar una bijecció entre els reticles que preserve i reflectisca els ordres. Recordem que $[\Phi, \nabla_A] = \uparrow_{\subseteq} \Phi = \{\Theta \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) \mid \Phi \subseteq \Theta \subseteq \nabla_A\}$. Considerem l'aplicació f donada per

$$f \begin{cases} [\Phi, \nabla_A] \longrightarrow \mathrm{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi) \\ \quad \Psi \quad \longmapsto \Psi/\Phi \end{cases} . \tag{4.33}$$

Veiem en primer lloc que és una aplicació injectiva. Siguen $\Psi, \Theta \in [\Phi, \nabla_A]$ tals que $\Psi \neq \Theta$. Per tant existeix $s \in S$ i, suposem, sense pèrdua de generalitat, que existeix $(a, b) \in \Psi_s - \Theta_s$. Per definició, $([a]_\Phi, [b]_\Phi) \in \Psi_s/\Phi_s - \Theta_s/\Phi_s$ i, així, $\Psi/\Phi \neq \Theta/\Phi$.

L'aplicació f és suprajectiva. En efecte, siga $\Theta \in \mathbf{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi)$. Aleshores, considerem Ψ com $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^\Theta \circ \mathrm{pr}^\Phi)$ i tenim que, per a cada $s \in S$ i cada $a, b \in A_s$, $(a, b) \in \Psi_s/\Phi_s$ si, i només si, $(a, b) \in \Psi_s$ si, i només si, $([a]_{\Phi_s}, [b]_{\Phi_s}) \in \Theta_s$. Així, $\Theta = \Psi/\Phi$ i f és suprajectiva.

Finalment, el fet que f preserva i reflecteix els ordres és evident, ja que, per la definició de quocient entre dues congruències que és, per a $\Phi \subseteq \Psi$,

$$(\Psi_s/\Phi_s)_{s \in S} = (\{([a]_{\Phi_s}, [b]_{\Phi_s}) \in (A_s/\Phi_s)^2 \mid (a, b) \in \Psi_s\})_{s \in S}, \tag{4.34}$$

$\Psi \subseteq \Theta$ exactament quan $\Psi/\Phi \subseteq \Theta/\Phi$. □

NOTA. El teorema anterior és conegut com, per a alguns autors, el quart teorema d'isomorfisme.

6. Productes directes

Fins ara hem definit tots els conceptes necessaris per a la construcció i demostració dels teoremes d'isomorfisme. En particular, donades una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ i una congruència sobre ella Φ, hem definit els conceptes de subàlgebra d'$\mathbf{A}$ i d'àlgebra quocient $\mathbf{A}/\Phi$. Notem que aquestes construccions sempre reduïxen el cardinal del conjunt heterogeni subjacent o, als cassos trivials, el mantenen. Per tant, per a completar el capítol, definim construccions sobre les àlgebres que augmenten els cardinals i estudiem certs isomorfismes entre aquestes construccions. En particular, demostrem en aquesta secció que tota àlgebra heterogènia finita és isomorfa a un producte directe finit d'àlgebres heterogènies.

Recordem que el *producte* d'una família de conjunts $(A^i)_{i \in I}$, denotat com $\prod_{i \in I} A^i$, és el conjunt $\{f \in \mathrm{Hom}(I, \bigcup_{i \in I} A^i) \mid \forall i \in I\ (f(i) \in A^i)\}$. Notem que al cas que $\mathrm{card}(I) < \infty$, i.e., existeix un natural n tal que $I \cong n$,

$\prod_{i\in I} A^i = \{(a_i)_{i\in n} \mid \forall i \in n\ (a_i \in A^i)\}$. Dotem d'estructura de Σ-àlgebra al producte directe d'una família de Σ-àlgebres.

DEFINICIÓ 4.36. Siga $(\mathbf{A}^i)_{i\in I}$ una família I-indexada de Σ-àlgebres, on, per a cada $i \in I$, $\mathbf{A}^i = (A^i, F^i)$. El *producte* de $(\mathbf{A}^i)_{i\in I}$, denotat per $\prod_{i\in I} \mathbf{A}^i$, és la Σ-àlgebra $(\prod_{i\in I} A^i, F)$ on, per a cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $\sigma^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}^i}$ es defineix com

$$\sigma^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}^i} \begin{cases} (\prod_{i\in I} A^i)_w \longrightarrow \prod_{i\in I} A^i_s \\ (a_j)_{j\in|w|} \longmapsto (\sigma^{\mathbf{A}^i}(a_j(i))_{j\in|w|})_{i\in I} \end{cases} \tag{4.35}$$

Definim en concret, les àlgebres heterogènies subfinals, les que es poden descompondre com a un producte directe i com i les que no.

DEFINICIÓ 4.37. Siga $\mathbf{A} = (A, F)$ una Σ-àlgebra. Direm que $\mathbf{A}$ és *subfinal* si el conjunt subjacent és subfinal, i.e., si, per a cada $s \in S$, $\mathrm{card}(A_s) \leq 1$.

DEFINICIÓ 4.38. Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra. Direm que $\mathbf{A}$ és *directament reductible* si $\mathbf{A}$ és Σ-isomorfa a un producte directe de dos Σ-àlgebres no subfinals tals que els seus suports estan inclosos en el suport d'$\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ no és directament reductible, aleshores direm que és *directament irreductible.*

NOTA. Evidentment, qualsevol Σ-àlgebra subfinal és directament irreductible.

DEFINICIÓ 4.39. Siguen Φ i Ψ dues congruències sobre una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$. Direm que Φ i Ψ són un *parell de congruències factor sobre* $\mathbf{A}$ si satisfan les següents tres condicions

$$\Phi \wedge \Psi = \Delta_A, \qquad \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi, \qquad \Phi \vee \Psi = \nabla_A. \tag{4.36}$$

Una conseqüència immediata de la definició és que, donades dos Σ-àlgebres $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, existeixen sempre un parell de congruències factor natural per a $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

PROPOSICIÓ 4.40. *Siguen* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *dues* Σ*-àlgebres. Aleshores els nuclis de les projeccions canòniques d'*$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *en* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$*, denotats* $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0)$ *i* $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1)$*, respectivament, són un parell de congruències factor sobre* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

DEMOSTRACIÓ. Comprovem que $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0)$ i $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1)$ compleixen les condicions per a ser un parell de congruències factor.

Notem que per a demostrar que $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0_s) \wedge \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1_s) = \Delta_{A_s\times A_s}$ és suficient comprovar que $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0_s) \wedge \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1_s) \subseteq \Delta_{A_s\times A_s}$. Siga $((a,b),(c,d)) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0_s) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1_s)$. Així, per definició de nucli i de les projeccions canòniques, $a = \mathrm{pr}^0_s((a,b)) = \mathrm{pr}^0_s((c,d)) = c$ i també, $b = \mathrm{pr}^1_s((a,b)) = \mathrm{pr}^1_s((c,d)) = d$. Per tant, $((a,b),(c,d)) \in \Delta_{A_s\times A_s}$.

Finalment, notem que, per a demostrar les dos igualtats que resten és suficient demostrar que $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0_s)\circ\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1_s) = \nabla_{A_s\times A_s}$, i que, per a demostrar això, només necessitem demostrar que $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0_s) \circ \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1_s) \supseteq \nabla_{A_s\times A_s}$. Siga $((a,b),(c,d)) \in \nabla_{A_s\times A_s}$. Aleshores, com

$$(a,b)\ \ \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0_s)\ \ (a,d)\ \ \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1_s)\ \ (c,d), \tag{4.37}$$

tenim que $((a, b), (c, d))$ pertany a $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^0_s) \circ \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^1_s)$. □

Recíprocament a la proposició anterior, donat un parell de congruències factor sobre una Σ-àlgebra, aquesta es pot descompondre com un producte directe.

PROPOSICIÓ 4.41. *Si Φ i Ψ són un parell de congruències factor sobre $\mathbf{A}$, aleshores $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\Phi \times \mathbf{A}/\Psi$.*

DEMOSTRACIÓ. Siga $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\Phi \times \mathbf{A}/\Psi$ l'aplicació que envia cada $a \in A$ en $([a]_\Phi, [a]_\Psi)$. És evident que f és un Σ-homomorfisme en ser-ho les corresponents projeccions canòniques al quocient. A més, si $f_s(a) = f_s(b)$, aleshores $(a, b) \in \Phi_s$ i $(a, b) \in \Psi_s$. Així $(a, b) \in \Delta_{A_s}$ i f és injectiva. Finalment, si $a, b \in A_s$ aleshores, com que $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$ i $\bigvee\{\Phi, \Psi\} = \nabla_{A_s}$, necessàriament existeix $c \in A_s$ tal que $(a, c) \in \Phi_s$ i $(c, b) \in \Psi_s$. Per tant $f_s(c) = ([a]_{\Psi_s}, [b]_{\Psi_s})$ i f és suprajectiva. □

COROL·LARI 4.42. *Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra. Aleshores $\mathbf{A}$ és directament irreductible si, i només si, Δ_A i ∇_A són l'únic parell de congruències factor.*

Per a concloure la secció demostrem que les àlgebres directament irreductibles formen els blocs fonamentals per a construir, mitjançant productes directes, les àlgebres finites. Amb arguments complexos es pot demostrar que un àlgebra homogènia booleana amb cardinal infinit numerable no és isomorfa a un producte directe i, per tant, la tesi del teorema no és millorable [**19**, p. 59]. Podem trobar la següent demostració en [**10**].

TEOREMA 4.43. *Tota Σ-àlgebra finita és isomorfa a un producte d'una família finita de Σ-àlgebres directament irreductibles.*

DEMOSTRACIÓ. Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra finita. Si $\mathrm{card}(\coprod_{s\in S} A_s) = 0$, aleshores $\mathbf{A}$ és irreductible. Siga $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{card}(\coprod_{s\in S} A_s) = n+1$, amb $n \geq 0$, i assumim l'enunciat per a cada Σ-àlgebra finita $\mathbf{B}$ amb $\mathrm{card}(\coprod_{s\in S} B_s) \leq n$. Si $\mathbf{A}$ és directament irreductible, l'enunciat és cert. En altre cas, tenim que $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}^0 \times \mathbf{A}^1$, amb $\mathbf{A}^0$ i $\mathbf{A}^1$ àlgebres no subfinals i tals que, per a cada $i \in 2$, $\mathrm{supp}_S(A^i) \subseteq \mathrm{supp}_S(A)$.

Siga $\mathbf{A}^i{\restriction}_T$, per a cada $i \in 2$ i $T = \mathrm{supp}_S(A) = \mathrm{supp}_s(A^0) \cap \mathrm{supp}_S(A^1)$, la Σ-àlgebra $(A^i{\restriction}_T, F^{\mathbf{A}^i{\restriction}_T})$, on $A^i{\restriction}_T$, per a cada $s \in s$ es defineix com

$$(A^i{\restriction}_T)_s = \begin{cases} A_s, & \text{si } s \in T; \\ \varnothing, & \text{en altre cas.} \end{cases} \tag{4.38}$$

i $F^{\mathbf{A}^i{\restriction}_T}$ es defineix, per a cada $(w, s) \in S^\star \times S$, com

$$F^{\mathbf{A}^i{\restriction}_T}_{w,s} \begin{cases} \Sigma_{w,s} \longrightarrow \mathrm{Hom}((A^i{\restriction}_T)_w, (A^i{\restriction}_T)_s) \\ \quad\sigma \quad\longmapsto \begin{cases} \sigma^{\mathbf{A}^i}, & \text{si } \mathrm{Im}(w) \subseteq T \text{ i } s \in T; \\ \alpha_{A_s}\colon \varnothing \longrightarrow A_s, & \text{si } \mathrm{Im}(w) \subseteq T. \end{cases} \end{cases} \tag{4.39}$$

on α_{A_s} és l'única aplicació de $\varnothing$ en A_s. Notem que la definició és consistent ja que, per a $\sigma\colon w \longrightarrow s$, no pot ocórrer que $\mathrm{Im}(w) \subseteq T$ i $s \notin T$.

D'ací se segueix que $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}^0{\restriction}_T \times \mathbf{A}^1{\restriction}_T$ i, per a $i \in 2$, que $\mathrm{card}(A^i{\restriction}_T) \leq \mathrm{card}(A)$, així, per hipòtesi d'inducció, podem concloure que

$$\mathbf{A}^0{\restriction}_T \cong \mathbf{B}^0 \times \cdots \times \mathbf{B}^{p-1}; \qquad \mathbf{A}^1{\restriction}_T \cong \mathbf{C}^0 \times \cdots \times \mathbf{C}^{q-1}. \tag{4.40}$$

on, per a $j \in p$ i $h \in q$, $\mathbf{B}^j$ i $\mathbf{C}^h$ són Σ-àlgebres directament irreductibles. Així,

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{B}^0 \times \cdots \times \mathbf{B}^{p-1} \times \mathbf{C}^0 \times \cdots \times \mathbf{C}^{q-1}. \tag{4.41}$$

Com volíem demostrar. □

7. Productes subdirectes

És evident que el Teorema 4.43 té una limitació important amb la hipòtesi de que les àlgebres heterogènies han de ser finites. En aquesta secció demostrem el Teorema de Birkhoff que extén el resultat anterior. En concret demostrem que qualsevol àlgebra heterogènia és isomorfa a un producte subdirecte d'àlgebres heterogènies subdirectament irreductibles.

A continuació introduïm els productes subdirectes.

Definició 4.44. Una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ és un *producte subdirecte d'una família de Σ-àlgebres* $(\mathbf{A}^i)_{i\in I}$ si satisfà les següents condicions

(1) $\mathbf{A}$ és una subàlgebra de $\prod_{i\in I} \mathbf{A}^i$.
(2) Per a cada $i \in I$, $\mathrm{pr}^i{\restriction}_{\mathbf{A}}$ és suprajectiva.

A més, direm que un Σ-monomorfisme ($\equiv$ imbibició) $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathbf{A}^i$ és una *imbibició subdirecta* si $f[\mathbf{A}]$ és un producte subdirecte de $(\mathbf{A}^i)_{i\in I}$.

De la mateixa forma que hem fet en la secció anterior amb els productes directes, donada una Σ-àlgebra i una família de congruències, trobem una Σ-àlgebra que siga un producte subdirecte d'alguna família de Σ-àlgebres.

Proposició 4.45. *Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra i $(\Phi^i)_{i\in I}$ una família de congruències en $\mathbf{A}$. Aleshores $\mathbf{A}/\bigcap_{i\in I}\Phi^i$ es pot embeure subdirectament en $\prod_{i\in I}\mathbf{A}/\Phi^i$.*

Demostració. Siga f^i, per a cada $i \in I$, l'únic Σ-homomorfisme d'$\mathbf{A}/\bigcap_{i\in I}\Phi^i$ en $\mathbf{A}/\Phi^i$ tal que $f^i \circ \mathrm{pr}^{\bigcap_{i\in I}\Phi^i} = \mathrm{pr}^{\Phi^i}$. Aleshores l'únic Σ-homomorfisme $\langle f^i\rangle_{i\in I}\colon \mathbf{A}/\bigcap_{i\in I}\Phi^i \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathbf{A}/\Phi^i$ determinada per la propietat universal del producte, és una imbibició subdirecta. □

Corol·lari 4.46. *Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra i $(\Phi^i)_{i\in I}$ una família de congruències en $\mathbf{A}$ tals que $\bigcap_{i\in I}\Phi^i = \Delta_A$. Aleshores*

$$\langle \mathrm{pr}^i\rangle_{i\in I}\colon \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i\in I}\mathbf{A}/\Phi^i \tag{4.42}$$

és una imbibició subdirecta.

Anàlogament a la definició de Σ-àlgebra directament irreductible trobem la definició de subdirectament irreductible i, d'igual forma, podem caracteritzar-la.

Definició 4.47. Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra. Direm que $\mathbf{A}$ és *subdirectament irreductible* si, per a cada imbibició subdirecta f d'$\mathbf{A}$ en el producte cartesià $\prod_{i\in I}\mathbf{A}^i$ d'una família no buida de Σ-àlgebres $(\mathbf{A}^i)_{i\in I}$, existeix un índex $i\in I$ tal que el Σ-homomorfisme $\mathrm{pr}^i\circ f\colon\mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{A}^i$ és injectiu.

Proposició 4.48. *Una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ és subdirectament irreductible si, i només si, $\mathbf{A}$ és subfinal o existeix una mínima congruència en* $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})-\{\Delta_A\}$.

Demostració. Si $\mathbf{A}$ no és subfinal i $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})-\{\Delta_A\}$ no té una congruència mínima, aleshores $\bigcap(\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})-\{\Delta_A\}=\Delta_A$. Denotem $I=\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})-\{\Delta_A\}$, aleshores l'aplicació $\langle\mathrm{pr}^{\Phi}\rangle_{\Phi\in I}\colon\mathbf{A}\longrightarrow\prod_{\Phi\in I}\mathbf{A}/\Phi$ és, pel Corol·lari 4.46, una imbibició subdirecta i com, per a cada $\Phi\in I$, la projecció canònica $\mathrm{pr}^{\Phi}\colon\mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{A}/\Phi$ no és injectiva, se segueix que $\mathbf{A}$ no és subdirectament irreductible. Així, si $\mathbf{A}$ és subdirectament irreductible, aleshores $\mathbf{A}$ és subfinal o existeix una mínima congruència en $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})-\{\Delta_A\}$.

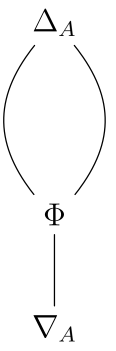
Si $\mathbf{A}$ és subfinal, aleshores és subdirectament irreductible, ja que si f és una imbibició subdirecta d'$\mathbf{A}$ en el producte cartesià $\prod_{i\in I}\mathbf{A}^i$ d'una família no buida de Σ-àlgebres $(\mathbf{A}^i)_{i\in I}$, aleshores, per a cada $i\in I$, pr^i és suprajectiva i $\mathrm{supp}_S(A)=\mathrm{supp}_S(\prod_{i\in I}A^i)=\mathrm{supp}_S(A^i)$, aleshores $\mathbf{A}\cong\prod_{i\in I}\mathbf{A}^i\cong\mathbf{A}^i$, per a cada $i\in I$.

Finalment, suposem que existeix una mínima congruència Φ en $\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})-\{\Delta_A\}$, aleshores, necessàriament, $\Phi=\bigcap(\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})-\{\Delta_A\})(\neq\Delta_A)$ i $\mathbf{A}$ no és subfinal. Aleshores podem escollir un tipus $s\in S$ i un parell $(a,b)\in\Phi_s$ tal que $a\neq b$. Siga $f\colon\mathbf{A}\longrightarrow\prod_{i\in I}\mathbf{A}^i$ una imbibició subdirecta d'$\mathbf{A}$ en el producte cartesià $\prod_{i\in I}\mathbf{A}^i$. Aleshores existeix un índex $i\in I$ tal que $(\mathrm{pr}^i_s\circ f_s)(a)\neq(\mathrm{pr}^i_s\circ f_s)(b)$, ja que, en altre cas, $f_s(a)=f_s(b)$ i, per tant, $a=b$, que és una contradicció. D'ací se segueix que $(a,b)\notin\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^i_s\circ f_s)$ i, del fet que $(a,b)\in\Phi_s$ se segueix que $\Phi\not\subseteq\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^i\circ f)$. Per tant, $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^i\circ f)=\Delta_A$ i, conseqüentement, $\mathrm{pr}^i\circ f\colon\mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{A}^i$ és injectiu. Podem deduir que $\mathbf{A}$ és subdirectament irreductible. □

Nota. Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra. Si el reticle $(\mathrm{Cgr}(\mathbf{A})-\{\Delta_A\},\subseteq)$ té un mínim Φ, aleshores el reticle $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ té la forma representada a la Figura 1. La congruència Φ, anomenada *monòlit d'*$\mathbf{A}$ i denotada per $\mathrm{M}^{\mathbf{A}}$, té la propietat que $\mathrm{M}^{\mathbf{A}}=\mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\delta^{s,(a,b)})$, per a cada $s\in S$ i cada $(a,b)\in\mathrm{M}^{\mathbf{A}}_s$, amb $a\neq b$ [**10**].

Finalment podem demostrar que les àlgebres heterogènies subdirectament irreductibles formen els blocs fonamentals per a construir amb elles la resta de àlgebres heterogènies mitjançant productes subdirectes. Remarquem que en el següent teorema no requerim la finitut de les Σ-àlgebres que era la generalització que volíem trobar.

Teorema 4.49 (Birkhoff). *Tota Σ-àlgebra heterogènia és isomorfa a un producte subdirecte d'un família de Σ-àlgebres heterogènies subdirectament irreductibles.*



$$\Phi = \bigcap(\mathrm{Cgr}(\mathbf{A}) - \{\Delta_A\})$$

FIGURA 1. Il·lustració de la Proposició 4.48.

DEMOSTRACIÓ. Com les Σ-àlgebres subfinals són subdirectament irreductibles, és suficient considerar Σ-àlgebres no subfinals. Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra no subfinal i

$$I = \bigcup_{s\in S}(\{s\} \times (A_s^2 - \{\Delta_{A_s}\})), \tag{4.43}$$

que és no buit, perquè $\mathbf{A}$ no és subfinal. Aleshores, per a cada $(s,(a,b)) \in I$, emprant el Lema de Zorn considerant l'ordre de la inclusió, existeix una congruència $\Phi^{(s,(a,b))}$ en $\mathbf{A}$ tal que $\Phi^{(s,(a,b))} \cap \delta^{s,(a,b)} = \varnothing^S$ i maximal amb eixa propietat. A més, la congruència $\Phi^{(s,(a,b))} \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\delta^{s,(a,b)})$ és el mínim de $[\Phi^{(s,(a,b))}, \Delta_A] - \{\Phi^{(s,(a,b))}\}$. Així, pel Teorema de Correspondència 4.35, al reticle $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi^{s,(a,b)})$, la congruència

$$\Phi^{(s,(a,b))} \vee \mathrm{Cg}_{\mathbf{A}}(\delta^{s,(a,b)}) \tag{4.44}$$

és el monòlit d'$\mathbf{A}/\Phi^{(s,(a,b))}$, que és subdirectament irreductible.

Com $\bigcap\{\Phi^{(s,(a,b))} \mid (s,(a,b)) \in I\} = \Delta_A$, tenim, finalment, que $\mathbf{A}$ pot ser subdirectament embeguda en $\prod(\mathbf{A}/\Phi^{(s,(a,b))})_{(s,(a,b))\in I}$ que és un producte d'àlgebres subdirectament irreductibles. $\square$

CAPÍTOL 5

Teoremes d'isomorfisme

En aquest capítol demostrem els tres teoremes centrals d'aquest treball, els teoremes d'isomorfisme d'Emmy Noether en la seua versió heterogènia. Concretament, en aquest capítol demostrem que el conjunt imatge és un subunivers del codomini, que el nucli d'un homomorfisme és una congruència sobre el domini i que l'àlgebra quocient del domini pel nucli és isomorfa a la imatge (Primer Teorema d'Isomorfisme). Seguidament demostrem que el Segon i Tercer teoremes d'Isomorfisme es deriven com a aplicacions immediates del Primer Teorema d'Isomorfisme.

Basem les demostracions d'aquests teoremes en les respectives demostracions en la seua versió heterogènia que se poden trobar a [**19**].

1. Primer Teorema d'Isomorfisme

A continuació demostrem que la imatge d'un homomorfisme és un subunivers del codomini.

PROPOSICIÓ 5.1. *Siga* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un* Σ*-homomorfisme, aleshores* $\mathrm{Im}(f)$ *és un subunivers de* $\mathbf{B}$.

DEMOSTRACIÓ. Siguen $\sigma\colon w \longrightarrow s$ i $(b_i)_{i\in|w|} \in \mathrm{Im}(f)_w$. Aleshores, per definició del conjunt $\mathrm{Im}(f)$, existeix $(a_i)_{i\in|w|} \in A_w$ tal que, per a cada $i \in |w|$, $f_{w_i}(a_i) = b_i$. Així,

$$\sigma^{\mathbf{B}}((b_i)_{i\in|w|}) = \sigma^{\mathbf{B}}((f_{w_i}(a_i))_{i\in|w|}) \tag{1}$$

$$= f_s(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})). \tag{2}$$

Notem que les igualtats s'obtenen respectivament per: (1) definició de la família $(b_i)_{i\in|w|}$ i (2) el fet que f és un Σ-homomorfisme.

Així, $\sigma^{\mathbf{B}}((b_i)_{i\in|w|}) \in f_s[A_s] = \mathrm{Im}(f_s)$. □

Així, podem considerar la subàlgebra amb subunivers $\mathrm{Im}(f)$.

DEFINICIÓ 5.2. Siga $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un Σ-homomorfisme. La *subàlgebra imatge*, denotada per $\mathbf{Im}(f)$, és la subàlgebra amb subunivers $\mathrm{Im}(f)$.

Demostrem a continuació que el nucli d'un homomorfisme és una congruència sobre el codomi.

PROPOSICIÓ 5.3. *Siga* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un* Σ*-homomorfisme, aleshores,* $\mathrm{Ker}(f)$ *és una congruència sobre* $\mathbf{A}$.

Demostració. Siguen $(w,s) \in (S^\star - \{\lambda\}) \times S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i $(x_i)_{i\in|w|}$, $(y_i)_{i\in|w|} \in A_w$ tals que, per a cada $i \in |w|$, $(x_i, y_i) \in \mathrm{Ker}(f_{w_i})$, i.e., per a cada $i \in |w|$, $f_{w_i}(x_i) = f_{w_i}(y_i)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} f_s(\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|})) &= \sigma^{\mathbf{B}}((f_{w_i}(x_i))_{i\in|w|}) && (1)\\ &= \sigma^{\mathbf{B}}((f_{w_i}(y_i))_{i\in|w|}) && (2)\\ &= f_s(\sigma^{\mathbf{A}}((y_i)_{i\in|w|})). && (3) \end{aligned}$$

Notem que les igualtats s'obtenen respectivament per: (1) el fet que f és un Σ-homomorfisme, (2) el fet que, per a cada $i \in |w|$, $(x_i, y_i) \in \mathrm{Ker}(f_{w_i})$ i (3) el fet que f és un Σ-homomorfisme.

Així, podem afirmar que $(\sigma^{\mathbf{A}}((x_i)_{i\in|w|}), \sigma^{\mathbf{A}}((y_i)_{i\in|w|})) \in \mathrm{Ker}(f_s)$ d'on concloem que $\mathrm{Ker}(f)$ és una congruència sobre $\mathbf{A}$. □

Els dos resultats anteriors permeten enunciar el Primer Teorema d'Isomorfisme que demostrem a continuació.

Teorema 5.4 (Noether). *Siga $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un Σ-homomorfisme. Aleshores,*

$$\mathbf{A}/\,\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbf{Im}(f). \tag{5.1}$$

Demostració. Per definició, per a demostrar que les àlgebres són Σ-isomorfes només ens cal donar un Σ-isomorfisme entre elles. Siga $f^\flat$ l'aplicació *bijectivitzada* d'f definida, per a cada $s \in S$, com

$$f^\flat_s \left\{ \begin{array}{ccc} A - s/\,\mathrm{Ker}(f_s) & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f_s) \\ [a]_{\mathrm{Ker}(f_s)} & \longmapsto & f_s(a) \end{array} \right. . \tag{5.2}$$

Remarquem el fet que l'aplicació està ben definida ja que, per definició, $[a]_{\mathrm{Ker}(f_s)} = [b]_{\mathrm{Ker}(f_s)}$ si, i només si, $f_s(a) = f_s(b)$, per a cada $s \in S$.

Per a cada $s \in S$, f^flat_s és una aplicació bijectiva. En efecte, si $a, b \in A_s$ són elements tals que $f_s(a) = f_s(b)$, aleshores $[a]_{\mathrm{Ker}(f_s)} = [b]_{\mathrm{Ker}(f_s)}$. D'altra banda, si $b \in \mathrm{Im}(f_s)$, per definició, existeix $a \in A_s$ tal que $f_s(a) = b$ i com $f^\flat_s([a]_{\mathrm{Ker}(f_s)}) = f_s(a)$, concloem que $f^\flat_s([a]_{\mathrm{Ker}(f_s)}) = b$.

Finalment, $f^\flat$ és un Σ-homomorfisme. En efecte, siguen $(w,s) \in S^\star \times S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i $([a_i]_{\mathrm{Ker}(f_{w_i})})_{i\in|w|} \in (A/\,\mathrm{Ker}(f))_w$. Aleshores,

$$\begin{aligned} f^\flat_s(\sigma^{\mathbf{A}/\,\mathrm{Ker}(f)}(([a_i]_{\mathrm{Ker}(f_{w_i})})_{i\in|w|})) &= f^\flat_s([\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})]_{\mathrm{Ker}(f_s)}) && (1)\\ &= f_s(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})) && (2)\\ &= \sigma^{\mathbf{B}}((f_{w_i}(a_i))_{i\in|w|}) && (3)\\ &= \sigma^{\mathbf{Im}(f)}((f_{w_i}(a_i))_{i\in|w|}) && (4)\\ &= \sigma^{\mathbf{Im}(f)}((f^\flat_{w_i}([a_i]_{\mathrm{Ker}(f_{w_i})})_{i\in|w|}). && (5) \end{aligned}$$

Notem que les igualtats s'obtenen respectivament per: (1) la definició de la interpretació de σ en $\mathbf{A}/\,\mathrm{Ker}(f)$, (2) la definició de $f^\flat_s$, (3) el fet que f és un Σ-homomorfisme, (4) la definició de la interpretació en el subunivers $\mathrm{Im}(f)$ i (5) la definició de $f^\flat_{w_i}$.

Queda així demostrat el teorema. □

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}^{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\
\mathbf{A}/\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "f^{\flat}"'] & \mathbf{Im}(f) \arrow[u, "\mathrm{in}^{\mathrm{Im}(f)}"']
\end{tikzcd}$$

FIGURA 2. Representació del Primer Teorema d'Isomorfisme

COROL·LARI 5.5. *Siga* $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un* Σ*-homomorfisme. Aleshores, existeix un únic isomorfisme bijectiu* $f^{\flat}$*, el* bijectivitzat d'f*, d'*$\mathbf{A}/\operatorname{Ker}(f)$ *en* $\mathbf{Im}(f)$*, que fa commutatiu el diagrama de la Figura 2.*

2. Segon Teorema d'Isomorfisme

Per a la demostració del Segon teorema d'Isomorfisme intervindrà el quocient de relacions d'equivalència. Recordem la seua definició (Definició 3.22). Per a un conjunt S-tipificat A i $\Phi, \Psi \in \operatorname{Eqv}(A)$ amb $\Phi \subseteq \Psi$, aleshores

$$\Psi/\Phi = (\Psi_s/\Phi_s)_{s\in S} = (\{([a]_{\Phi_s}, [b]_{\Phi_s}) \in (A_s/\Phi_s)^2 \mid (a,b) \in \Psi_s\})_{s\in S}. \quad (5.3)$$

Així, com a conseqüència d'aplicar el Primer Teorema d'Isomorfisme demostrem a continuació el Segon Teorema d'Isomorfisme que estableix la relació entre quocients d'àlgebres quocient.

TEOREMA 5.6 (Noether). *Siguen* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra i* $\Phi, \Psi \in \operatorname{Cgr}(\mathbf{A})$ *tals que* $\Phi \subseteq \Psi$*. Aleshores,*

(1) $\Psi/\Phi \in \operatorname{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi)$;
(2) $(\mathbf{A}/\Phi)/(\Psi/\Phi) \cong \mathbf{A}/\Psi$.

DEMOSTRACIÓ. Per a demostrar el resultat, en virtut de la Proposició 5.3 i del Teorema 5.4, és suficient trobar un Σ-epimorfisme f de $\mathbf{A}/\Phi$ en $\mathbf{A}/\Psi$ amb nucli Ψ/Φ. Siga $f = (f_s)_{s\in S}$ l'aplicació S-tipificada definida, per a cada $s \in S$, com

$$f_s \begin{cases} A_s/\Phi_s \longrightarrow A_s/\Psi_s \\ [a]_{\Phi_s} \longmapsto [a]_{\Psi_s} \end{cases} \quad (5.4)$$

Notem que, per a cada $s \in S$, la definició de l'aplicació és consistent ja que, si $[a]_{\Phi_s} = [b]_{\Phi_s}$, aleshores $a \equiv_{\Phi_s} b$ i, com $\Phi \subseteq \Psi$, aleshores $a \equiv_{\Psi_s} b$, i.e., $[a]_{\Psi_s} = [b]_{\Psi_s}$.

Demostrem en primer lloc que f és un Σ-homomorfisme. Siguen $(w,s) \in S^{\star} \times S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i $([a_i]_{\Phi_{w_i}})_{i\in|w|} \in (A/\Phi)_w$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
f_s(\sigma^{\mathbf{A}/\Phi}(([a_i]_{\Phi_{w_i}})_{i\in|w|})) &= f_s([\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})]_{\Phi_s}) && (1)\\
&= [\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|})]_{\Psi_s} && (2)\\
&= \sigma^{\mathbf{A}/\Psi}(([a_i]_{\Psi_{w_i}})_{i\in|w|}) && (3)\\
&= \sigma^{\mathbf{A}/\Psi}((f_{w_i}([a_i]_{\Phi_{w_i}}))_{i\in|w|}) && (4)
\end{aligned}$$

Notem que les igualtats s'obtenen respectivament per: (1) la definició de la interpretació de σ en $\mathbf{A}/\Phi$, (2) la definició de f_s, (3) la definició de la interpretació de σ en $\mathbf{A}/\Psi$ i (4) la definició de f_s.

A més, és evident que f és suprajectiva, ja que si $[a]_{\Psi_s} \in A_s/\Psi_s$, aleshores $f_s([a]_{\Phi_s}) = [a]_{\Psi_s}$.

Finalment, demostrem que $\Psi_s/\Phi_s = \mathrm{Ker}(f_s)$. Per a això, recordem que, per definició,

$$\Psi_s/\Phi_s = \{([a]_{\Phi_s}, [b]_{\Phi_s}) \in (A_s/\Phi_s)^2 \mid (a,b) \in \Psi_s\}. \tag{5.5}$$

És suficient notar que

$$f_s([a]_{\Phi_s}) = [a]_{\Psi_s} = [b]_{\Psi_s} = f_s([b]_{\Phi_s}) \text{ si, i només si, } (a,b) \in \Psi_s. \tag{5.6}$$

Queda així demostrat el teorema. □

3. Tercer Teorema d'Isomorfisme

Finalment, demostrem el Tercer Teorema d'Isomorfisme. Recordem els conceptes que intervindran en la seua demostració. En concret per a Φ una congruència sobre una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ i un subconjunt $X \subseteq A$, la Φ-saturació d'X és el conjunt S-tipificat $[X]^{\Phi}$ amb coordenada s-èssima

$$[X]^{\Phi}_s = \{\, a \in A_s \mid X_s \cap [a]_{\Phi_s} \neq \varnothing \,\} = \textstyle\bigcup_{x \in X_s} [x]_{\Phi_s} = [X_s]^{\Phi_s}. \tag{5.7}$$

A més, la restricció de Φ a X, denotada $\Phi{\restriction}_X$ és el conjunt $\Phi \cap (X \times X)$.

Així, com a conseqüència d'aplicar el Primer Teorema d'Isomorfisme demostrem a continuació el Tercer Teorema d'Isomorfisme que estableix la relació entre quocients de subuniversos i de saturats.

Teorema 5.7 (Noether). *Siguen* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra,* $X \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ *i* $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\mathbf{A})$. *Aleshores es té que*

(1) $[\mathbf{X}]^{\Phi} \in \mathrm{Sub}(\mathbf{A})$;
(2) $\Phi{\restriction}_{[X]^{\Phi}} \in \mathrm{Cgr}([\mathbf{X}]^{\Phi})$;
(3) $\mathbf{X}/(\Phi{\restriction}_X) \cong [\mathbf{X}]^{\Phi}/(\Phi{\restriction}_{[X]^{\Phi}})$.

Demostració. (1) Siguen $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i $(a_i)_{i\in|w|} \in [X]^{\Phi}_w$. Aleshores, per la Definició 3.23 del conjunt $[X]^{\Phi}$, existeix $(b_i)_{i\in|w|} \in X_w$ tal que, per a cada $i \in |w|$, $a_i \equiv_{\Phi_{w_i}} b_i$ i, en ser Φ una congruència, $\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) \equiv_{\Phi_s} \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in|w|})$. Així, com X és un tancat, $\sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in|w|}) \in X$ i, concloem que $\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in|w|}) \in [X]^{\Phi}_s$.

Per a demostrar (2) i (3), en virtut de la Proposició 5.3 i del Teorema 5.4, és suficient trobar un Σ-epimorfisme f de $\mathbf{X}$ en $[\mathbf{X}]^{\Phi}/(\Phi{\restriction}_{[X]^{\Phi}})$ amb nucli $\Phi{\restriction}_X$. Siga $f = (f_s)_{s\in S}$ l'aplicació S-tipificada definida, per a cada $s \in S$, com l'aplicació de X en $[X]^{\Phi}/(\Phi{\restriction}_{[X]^{\Phi}})$ definida com

$$f_s \begin{cases} X_s \longrightarrow [X]^{\Phi_s}/(\Phi_s{\restriction}_{[X_s]^{\Phi_s}}) \\ a \longmapsto [a]_{\Phi_s{\restriction}_{[X_s]^{\Phi_s}}} \end{cases}. \tag{5.8}$$

Demostrem en primer lloc que f és un Σ-homomorfisme. Siguen $(w,s) \in S^{\star} \times S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i $(a_i)_{i\in|w|} \in X_w$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
f_s(\sigma^{\mathbf{X}}((a_i)_{i\in|w|})) &= [\sigma^{\mathbf{X}}((a_i)_{i\in|w|})]_{\Phi\restriction_{[X]^\Phi}} && (1)\\
&= [\sigma^{[\mathbf{X}]^\Phi}((a_i)_{i\in|w|})]_{\Phi\restriction_{[X]^\Phi}} && (2)\\
&= \sigma^{[\mathbf{X}]^{\Phi}/(\Phi\restriction_{[X]^\Phi})}(([a_i]_{\Phi_{w(i)}\restriction_{[X_{w(i)}]^{\Phi_{w(i)}}}})_{i\in|w|}) && (3)\\
&= \sigma^{[\mathbf{X}]^{\Phi}/(\Phi\restriction_{[X]^\Phi})}((f_{w_i}(a_i))_{i\in|w|}). && (4)
\end{aligned}$$

Notem que les igualtats s'obtenen respectivament per: (1) la definició de f_s, (2) la definició de la interpretació de σ en el subunivers $[\mathbf{X}]^\Phi$, (3) la definició de la interpretació de σ en $[\mathbf{X}]^\Phi/(\Phi\restriction_{[X]^\Phi})$ i (4) la definició de f_{w_i}.

A més, és evident que f és suprajectiva, ja que si $[a]_{\Phi_s\restriction_{[X_s]^{\Phi_s}}} \in [X]^\Phi/(\Phi_s\restriction_{[X_s]^{\Phi_s}})$, aleshores, per definició del conjunt $[X]^\Phi$, existeix $b \in X$ tal que $[a]_{\Phi_s\restriction_{[X_s]^{\Phi_s}}} = [b]_{\Phi_s\restriction_{[X_s]^{\Phi_s}}}$ i, per tant, $f_s(b) = [a]_{\Phi_s\restriction_{[X_s]^{\Phi_s}}}$

Finalment, demostrem que $\Phi_s\restriction_{X_s} = \mathrm{Ker}(f_s)$. Per a això notem que, si $a, b \in X_s$, les següents proposicions són equivalents,

(1) $[a]_{\Phi_s\restriction_{[X_s]^{\Phi_s}}} = [b]_{\Phi_s\restriction_{[X_s]^{\Phi_s}}}$, i.e., $(a,b) \in \mathrm{Ker}(f_s)$.

(2) $[a]_{\Phi_s} = [b]_{\Phi_s}$, i.e., $(a,b) \in \Phi_s\restriction_{X_s}$.

Queda així demostrat el teorema. $\square$

CAPÍTOL 6

L'àlgebra lliure

Existeixen moltes aplicacions dels teoremes d'isomorfisme. En concret al context dels grups, un resultat immediatament que se'n deriva és que tot grup és isomorf a un subgrup d'un grup de permutacions per a un conjunt amb cardinal suficientment gran. A més, trobem altres resultats com el Lema de Zassenhaus en teoria de grups, que estableix un isomorfisme entre subgrups normals de subgrups d'un grup, que utilitzen el Tercer Teorema d'Isomorfisme en la demostració. Fóra del context de l'àlgebra, en anàlisi harmònic i topologia, és necessari el Primer Teorema d'Isomorfisme per a demostrar que, com a grup multiplicatiu, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ és isomorf al grup additiu quocient $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Aquestes són algunes de les aplicacions dels teoremes. En aquest capítol exposem una aplicació directa dels teoremes dins del context de l'àlgebra universal. En concret, introduïm l'àlgebra de paraules en X per a una signatura Σ i l'àlgebra lliure per a un conjunt X. Demostrem que l'àlgebra lliure posseeix la propietat universal i, finalment, gràcies al Primer Teorema d'Isomorfisme, demostrem que qualsevol àlgebra heterogènia és quocient d'una àlgebra lliure.

Definim ara, per a una signatura S-tipificada Σ i un conjunt heterogeni X l'àlgebra de paraules en X que, en essència és construir la Σ-àlgebra més simple a partir d'X.

Definició 6.1. Siga X un conjunt S-tipificat. Aleshores la *Σ-àlgebra de paraules* en X, denotada per $\mathbf{W}_\Sigma(X)$ es defineix com segueix:

(1) El conjunt S-tipificat subjacent de $\mathbf{W}_\Sigma(X)$, escrit com $\mathrm{W}_\Sigma(X)$, és precisament el conjunt S-tipificat $((\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star)_{s\in S}$, i.e., l'aplicació d'$S$ en $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ que és constant igual a $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$, on $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$ és el conjunt de totes les paraules sobre el conjunt $\coprod \Sigma \amalg \coprod X$, i.e., sobre el conjunt

$$[(\textstyle\bigcup_{(w,s)\in S^\star\times S}(\Sigma_{w,s} \times (w,s))) \times \{0\}] \cup [(\textstyle\bigcup_{s\in S}(X_s \times \{s\})) \times \{1\}]. \tag{6.1}$$

(2) Per a cada $(w,s) \in S^\star \times S$, i cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, l'operació formal $F_\sigma = \sigma^{\mathbf{W}_\Sigma(X)}$ associada a σ és l'aplicació de $W_\Sigma(X)_w$ en $W_\Sigma(X)_s$ que envia $(P_i)_{i\in|w|} \in W_\Sigma(X)_w$ en $(\sigma) \curlywedge \bigcurlywedge_{i\in|w|} P_i \in W_\Sigma(X)$ on, per a cada $(w,s) \in S^\star \times S$ i cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, (σ) és $(((\sigma,(w,s)),0))$, el valor de la imbibició canònica de $\Sigma_{w,s}$ en $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$, i.e.,

$$\sigma^{\mathbf{W}_\Sigma(X)} \begin{cases} W_\Sigma(X)_w \longrightarrow W_\Sigma(X)_s \\ (P_i)_{i\in|w|} \longmapsto (\sigma) \curlywedge \bigcurlywedge_{i\in|w|} P_i \end{cases}. \tag{6.2}$$

Concretament, definim la subàlgebra sobre l'àlgebra de paraules generada per les variables en X.

Definició 6.2. La Σ-*àlgebra lliure* sobre un conjunt S-tipificat X, denotada per $\mathbf{T}_\Sigma(X)$, és la Σ-àlgebra determinada per

$$\mathrm{Sg}_{\mathbf{W}_\Sigma(X)}((\{(x) \mid x \in X_s\})_{s\in S}), \tag{6.3}$$

la subàlgebra de $\mathbf{W}_\Sigma(X)$ generada per $(\{(x) \mid x \in X_s\})_{s\in S}$, on, per a cada $s \in S$ i cada $x \in X_s$, (x) és $(((x,s),1))$, que és el valor de la imbibició canònica de X_s en $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$. Denotem per $\mathrm{T}_\Sigma(X)$ el conjunt S-tipificat subjacent de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ i, per a cada $s \in S$, diem que els elements de $\mathrm{T}_\Sigma(X)_s$ són els *termes* del tipus s amb variables en X o, simplement, (X,s)-termes.

De la construcció de l'operador Sg obtenim la següent proposició que caracteritza els elements de $(\mathrm{T}_\Sigma(X))_s$, per a $s \in S$.

Proposició 6.3. *Siga X un conjunt S-tipificat. Aleshores, per a cada $s \in S$ i cada $P \in \mathrm{W}_\Sigma(X)_s$, tenim que P és un terme del tipus s amb variables en X si, i només si,*

(1) *$P = (x)$, per a un únic $x \in X_s$;*
(2) *$P = (\sigma)$, per a un únic $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$;*
(3) *$P = (\sigma) \curlywedge \bigcurlywedge_{i\in|w|} P_i$, per a una única $w \in S^\star - \{\lambda\}$, un únic $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, i una única família $(P_i)_{i\in|w|} \in T_\Sigma(X)_w$.*

A més, les tres possibilitat son mútuament excloents.

Per simplicitat de notació escrivim x, σ i $\sigma((P_i)_{i\in|w|})$ en compte de (x), (σ), i $(\sigma) \curlywedge \bigcurlywedge_{i\in|w|} P_i$, respectivament.

Així, el resultat que volem demostrar és un resultat derivat del fet que l'àlgebra lliure verifica la propietat universal.

Proposició 6.4 (Propietat Universal). *Per a cada conjunt S-tipificat X, el parell $(\eta^X, \mathbf{T}_\Sigma(X))$, on η^X és la* inserció de generadors X en $\mathrm{T}_\Sigma(X)$, *la co-restricció a $\mathrm{T}_\Sigma(X)$ de la imbibició canònica de X en $\mathrm{W}_\Sigma(X)$, té la següent propietat universal: per a cada Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ i cada aplicació S-tipificada $f\colon X \longrightarrow A$, existeix un únic Σ-homomorfisme $f^\sharp\colon \mathbf{T}_\Sigma(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ tal que $f^\sharp \circ \eta^X = f$, i.e., el diagrama és de la Figura 3 és commutatiu.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}_\Sigma(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

Figura 3. Representació de la Propietat Universal

Demostració. Per a cada $s \in S$ i cada (X,s)-terme P, la coordenada s-èssima d'$f^\sharp$ es defineix recursivament com segueix:

(1) $f_s^\sharp(x) = f_s(x)$, si $P = x$;
(2) $f_s^\sharp(\sigma^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}) = \sigma^{\mathbf{A}}$, si $P = \sigma^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}$;
(3) $f_s^\sharp(\sigma^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}((P_i)_{i\in|w|}) = \sigma^{\mathbf{A}}((f_{w_i}^\sharp(P_i))_{i\in|w|})$, si $P = \sigma^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}((P_i)_{i\in|w|})$.

Per construcció $f^\sharp$ compleix les condicions demanades. □

Ara sí, estem en condicions de demostrar que qualsevol àlgebra heterogènia és quocient d'una àlgebra lliure com a aplicació directa de la propietat universal.

Teorema 6.5. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* Σ*-àlgebra. Aleshores* $\mathbf{A}$ *és* Σ*-isomorfa a un quocient d'una* Σ*-àlgebra lliure sobre un conjunt* S*-tipificat.*

Demostració. Siga $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra. Donat que $\mathbf{A}$ té un conjunt de generadors (eventualment tot A), considerem X un d'ells. Aleshores, per a la inclusió canònica in_X d'X en A, en virtut de la Propietat Universal de l'àlgebra lliure (Proposició 6.4) sobre X, existeix un únic Σ-homomorfisme $\mathrm{in}_X^\sharp$ de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ en $\mathbf{A}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_X"'] & \mathbf{T}_\Sigma(X) \arrow[d, "\mathrm{in}_X^\sharp"] \\ & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

commuta. Ara bé, en ser X un conjunt de generadors d'$\mathbf{A}$ i estar X contingut en la imatge de $\mathrm{in}_X^\sharp$, el Σ-homomorfisme $\mathrm{in}_X^\sharp$ és suprajectiu. Pel Primer Teorema d'Isomorfisme, $\mathbf{A} \cong \mathbf{T_\Sigma(X)}/\operatorname{Ker}(\mathrm{in}_X^\sharp)$. □

Corol·lari 6.6. *Tota* Σ*-àlgebra heterogènia és isomorfa al quocient d'una* Σ*-àlgebra lliure per a algun conjunt heterogeni de generadors.*

CAPÍTOL 7

Conclusions

La teoria de l'àlgebra universal heterogènia permet la generalització de diverses construccions i l'estudi dels seus resultats i propietats propis de l'estructura d'àlgebra aïllats de les respectives particularitzacions. En aquest treball hem presentat una introducció a aquesta teoria i hem donat diversos isomorfismes entre els seus objectes.

En concret, hem definit els conceptes previs necessaris per a descriure l'estructura d'àlgebra heterogènia, per a, seguidament, definir els objectes algebraics bàsics com són les subestructures, quocients, homomorfismes, productes directes i productes subdirectes.

Les set relacions d'isomorfisme demostrades al llarg del treball relacionen tots els objectes anteriors i l'estructura particular de reticle algebraic. Al llarg del Capítol 4 s'han demostrar certs isomorfismes que recordarem a continuació. En primer lloc, els reticles algebraics han sigut caracteritzats, tret d'isomorfismes, pels reticles de subàlgebres de les àlgebres heterogènies. Així trobem que

$$\mathbf{L} \text{ reticle algebraic si, i només si } \exists \mathbf{A} \in \mathrm{Alg}(\Sigma)\,(\mathbf{L} \cong \mathbf{Sub}(\mathbf{A})), \tag{7.1}$$

la qual cosa explica concretament la forma d'aquests reticles i permet un estudi més senzill.

Seguidament, s'ha exposat el Teorema de Correspondència, que, per a $\mathbf{A}$ una àlgebra heterogènia i Φ una congruència sobre ella, estableix que

$$[\Phi, \nabla_A] \cong \mathbf{Cgr}(\mathbf{A}/\Phi). \tag{7.2}$$

Aquest isomorfisme és molt útil en la demostració de diferents resultats, com hem pogut vore en els següents resultats.

En relació amb els productes d'àlgebres, en concret, hem demostrat que, per a una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$, si és finita, aleshores $\mathbf{A}$ és isomorfa al producte directe d'una família finita de Σ-àlgebres directament irreductibles, i, en general, qualsevol Σ-àlgebra és isomorfa a un producte subdirecte d'una família de Σ-àlgebres subdirectament irreductibles.

Així, el primer resultat demostra que, per a les àlgebres heterogènies finites, les àlgebres heterogènies directament irreductibles constitueixen els blocs fonamentals que constitueixen aquestes àlgebres. Mentre que el segon demostra que, en general, les àlgebres heterogènies subdirectament irreductibles constitueixen els blocs fonamentals que constitueixen les àlgebres heterogènies.

El Capítol 5 l'hem dedicat a demostrar els tres Teoremes d'Isomorfisme, part central del treball, i que estableixen, per a $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dues àlgebres heterogènies, $f\colon \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$, Φ, Ψ dues congruències en $\mathbf{A}$ amb $\Phi \subseteq \Psi$ i $\mathbf{X}$ una subàlgebra d'$\mathbf{A}$, les relacions

$$\begin{aligned} &\text{Primer Teorema d'Isomorfisme: } \mathbf{A}/\operatorname{Ker}(f) \cong \mathbf{Im}(f);\\ &\text{Segon Teorema d'Isomorfisme: } (\mathbf{A}/\Phi)/(\Psi/\Phi) \cong \mathbf{A}/\Psi;\\ &\text{Tercer Teorema d'Isomorfisme: } \mathbf{X}/(\Phi{\restriction_X}) \cong [\mathbf{X}]^{\Phi}/(\Phi{\restriction_{[\mathbf{X}]^{\Phi}}}). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Aquestes relacions resulten fonamentals per a demostrar resultats algebraics i, particularment, al treball s'ha demostrat que una conseqüència directa és que qualsevol àlgebra heterogènia és quocient d'una àlgebra lliure.

Així, al treball, a partir de les construccions bàsiques de les àlgebres heterogènies dels articles [**4, 6, 10**] demostrem alguns dels teoremes d'isomorfisme més importants d'aquests articles. I, seguidament, de les demostracions homogènies del llibre d'H. P. Sankappanavar i S. Burris "A course in universal algebra"[**19**] exposem la versió, en el context de l'àlgebra universal heterogènia, dels teoremes d'isomorfisme.

Bibliografia

[1] A. Asghari. Equivalence: an attempt at a history of the idea. *Synthese*, 196(11):4657–4677, 2019.

[2] G. M. Bergman. *An invitation to general algebra and universal constructions*, volume 558 of *Universitext*. Springer, 2015.

[3] N. Bourbaki. *Théorie des ensembles*. Springer, 2006.

[4] J. Climent Vidal and E. Cosme Llópez. Eilenberg theorems for many-sorted formations. *Houston Journal of Mathematics*, 54(2):321–369, 2016.

[5] J. Climent Vidal and E. Cosme Llópez. A characterization of the n-ary many-sorted closure operators and a many-sorted Tarski irredundant basis theorem. *Quaestiones Mathematicae*, 42(10):1427–1444, 2019.

[6] J. Climent Vidal and E. Cosme Llópez. Congruence-based proofs of the recognizability theorems for free many-sorted algebras. *Journal of Logic and Computation*, 30(2):561–633, 2020.

[7] J. Climent Vidal and J. Soliveres Tur. On many-sorted algebraic closure operators. *Mathematische Nachrichten*, 266(1):81–84, 2004.

[8] J. Climent Vidal and J. Soliveres Tur. On the completeness theorem of many-sorted equational logic and the equivalence between Hall algebras and Bénabou theories. *Reports Math. Log.*, 40:127–158, 2006.

[9] J. Climent Vidal and J. Soliveres Tur. A 2-categorical framework for the syntax and semantics of many-sorted equational logic. *Reports on Mathematical Logic*, 45, 2010.

[10] J. Climent Vidal and J. Soliveres Tur. On the directly and subdirectly irreducible many-sorted algebras. *Demonstratio Mathematica*, 48(1):1–12, 2015.

[11] G. Grätzer and E. T. Schmidt. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras. *Acta Sci. Math.(Szeged)*, 24(3):34–59, 1963.

[12] J. Gray. *A History of Abstract Algebra: From Algebraic Equations to Modern Algebra*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer International Publishing, 2018.

[13] J. M. Howie. *An introduction to semigroup theory*, volume 7. Academic press, 1976.

[14] S. Mac Lane. Categories for the working mathematician. *Graduate Texts in Mathematics*, 5, 1972.

[15] G. Mathienssen. *Heterogene Algebren*. Universität Bremen, unveröffentlichte Ausarbeitung eines Seminarvirtrages, 1972.

[16] C. McLarty. Emmy Noether's 'set theoretic' topology: From Dedekind to the rise of functors. In J. Ferreirós and J.J. Gray, editors, *The architecture of modern mathematics: Essays in history and philosophy*, chapter 7, pages 187–208. Oxford University Press Oxford, 2006.

[17] J. Nicholson. The development and understanding of the concept of quotient group. *Historia Mathematica*, 20(1):68–88, 1993.

[18] E. Noether. Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. *Mathematische Annalen*, 96(1):26–61, 1927.

[19] H. P. Sankappanavar and S. Burris. A course in universal algebra. *Graduate Texts Math*, 78, 1981.

[20] J. Soliveres Tur. *Álgebra heterogénea*. Tesis, Departament de Lògica i Filosofia de la Ciència. Universitat de València, Setembre 1999.

[21] J. Stillwell. *Mathematics and Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2010.

Índex alfabètic