



Treball Fi de Grau - Curs 2020/2021

Axiomàtica de Zermelo Fraenkel Skolem per a la teoria de conjunts

Autora: **CELIA SIFRE ARMENGOL**

Tutor: **ENRIC COSME LLÓPEZ**

Índex

Capítol 1. Introducció	3
Capítol 2. Primers axiomes	7
1. Esquema axiomàtic de separació	10
2. Propietats del conjunt de tots els subconjunts d'un conjunt	15
3. Propietats de la relació d'inclusió	17
4. Propietats de la unió	18
5. Propietats de la intersecció	19
6. Propietats de la diferència	22
Capítol 3. Relacions	25
1. Producte cartesià de conjunts	26
2. Relacions binàries	28
3. L'esquema axiomàtic de reemplaçament	31
4. Inversió i composició de relacions	33
5. Imatges directes, imatges inverses i restriccions	40
Capítol 4. Funcions i aplicacions	43
1. Conjunts i aplicacions especials	48
2. Seccions i monomorfismes	50
3. Retraccions i epimorfismes	54
4. L'axioma d'elecció	56
5. Isomorfismes i bimorfismes	58
6. Factorització a través de la imatge	61
7. Relacions d'equivalència i particions	62
8. Factorització a través de la coimatge	70
9. Famílies de conjunts i les seues propietats	73
Capítol 5. Conjunts ordenats	77
1. El Lema de Zorn-Kuratowski	78
Capítol 6. Els números naturals	85
1. Axioma de regularitat	85
2. El principi de definició per recursió finita	91
Capítol 7. Conclusions	97
Bibliografia	99

CAPÍTOL 1

Introducció

El final del segle XIX fou una època molt fructífera per a les matemàtiques, on s'aconseguí introduir i desenvolupar la lògica matemàtica; primerament amb el matemàtic Gottlob Frege (1848-1925), que tenia com a objectiu demostrar que l'aritmètica era una part de la lògica i, posteriorment, amb el matemàtic Georg Cantor (1845-1918), que aconseguí l'objectiu que tenia Frege, trobar una fonamentació lògica de l'aritmètica.

A partir d'aquesta fonamentació, entre 1874 i 1897, Cantor creà una nova disciplina matemàtica: la teoria de conjunts. A més, donà la primera definició formal de conjunt, que és:

“S'entén per conjunt l'agrupació d'un tot d'objectes ben diferenciats de la nostra intuïció o de la nostra ment”.

La teoria de conjunts és una disciplina fonamental de les matemàtiques, ja que serveix com a base de moltes altres teories. En els primers anys d'aquesta teoria intuïtiva de conjunts aparegué la famosa Paradoxa de Russell, que demostrava que la teoria era inconsistent i necessitava uns fonaments més sòlids.

En les dècades posteriors, la confiança en aquesta teoria es restableix gràcies a matemàtics com Ernst Zermelo (1871-1953), que en el 1908 presenta la seua teoria axiomàtica de la teoria de conjunts, a semblança de la presentació axiomàtica de la geometria presentada per Euclides. L'objectiu era fonamentar cada pas i construir, de manera progressiva, tots els conjunts, posant cura en què les noves construccions no donaren lloc a cap tipus de paradoxa. Posteriorment, els matemàtics Adolf Fraenkel (1891-1965) i Thoralf Skolem (1887-1963) refinaren l'axiomàtica proposada per Zermelo, fins a obtindre la presentació actual.

Aquest treball és una introducció als formalismes necessaris per a la fonamentació conjuntista de les matemàtiques seguint el desenvolupament axiomàtic de Zermelo, Fraenkel i Skolem. Hem elegit aquest tema pel fet de no haver treballat aquests formalismes durant la carrera i per a poder aprofundir en les construccions i els resultats més importants de la teoria de conjunts. L'elecció de nocions que es presenten en aquest treball no intenta abastar totes les construccions possibles en la teoria de conjunts però sí que conté una selecció destacada de les més importants.

En aquest treball enunciem els axiomes de Zermelo-Fraenkel-Skolem, és a dir, l'axioma d'extensionalitat, del conjunt buit, del conjunt parell no ordenat, del conjunt unió, del conjunt potència i l'esquema axiomàtic de separació. A partir d'aquests axiomes introduïm les operacions usals sobre els conjunts i justifiquem les seues propietats. A més, estudiem les conseqüències més destacables que se'n deriven. Els quatre axiomes restants, és a dir, l'axioma d'elecció, l'axioma del conjunt infinit, l'axioma de regularitat i l'esquema axiomàtic de reemplaçament seran enunciats posteriorment, i emprats per a demostrar propietats bàsiques de les aplicacions entre conjunts.

En virtut d'aquests axiomes, estudiem dues presentacions equivalents de l'Axioma d'Elecció. Una primera equivalència la trobem amb la proposició que diu que tot epimorfisme és una retracció i una segona equivalència amb el Lema de Zorn-Kuratowski. Per últim, introduïm els números naturals, el principi de demostració per inducció i el principi de definició per recursió. Emprarem aquestes construccions per a introduir les operacions aritmètiques fonamentals de suma i producte.

En aquest treball hem seguit principalment el treball de J. Climent Vidal, *Teoría de conjuntos* [CV10]. No obstant, l'equivalència entre l'Axioma d'Elecció i el Lema de Zorn-Kuratowski ha seguit els desenvolupaments presentats per B. Bukh en [Buk19] i per J.W. Lewin en [Lew91].

En cada capítol introduïm progressivament els axiomes de la teoria de conjunts i estudiem les construccions que se'n deriven. D'aquesta forma comprovem com les diferents definicions donen lloc als conjunts més habituals i podem observar les dependències en l'ús dels axiomes.

Més concretament, en el Capítol 2 introduïm els primers axiomes i conjunts bàsics i treballem les propietats del conjunt de les parts, de la relació d'inclusió, de la unió, la intersecció i la diferència de conjunts.

En el Capítol 3 introduïm el producte cartesià de conjunts, les relacions binàries, l'esquema axiomàtic de reemplaçament, les propietats bàsiques de la inversió i composició de relacions i la formació d'imatges inverses, imatges directes i restriccions.

En el Capítol 4 introduïm les nocions de funció i aplicació i estudiem els conjunts i aplicacions més destacats. Introduïm les nocions d'aplicació injectiva, secció i monomorfisme i estudiem les relacions entre aquests conceptes. També introduïm les nocions d'aplicació sobrejectiva, retracció i epimorfisme i estudiem les relacions entre aquests conceptes. En aquest capítol apareix la primera presentació equivalent a l'Axioma d'Elecció. També estudiem els conceptes d'aplicació bijectiva, els isomorfismes i els bimorfismes. Finalment treballem la factorització a través de la imatge i de la coimatge d'una aplicació.

En el Capítol 5 introduïm les nocions bàsiques de la teoria d'ordre i presentem el Lema de Zorn-Kuratowski com una presentació equivalent de l'Axioma d'Elecció.

En el Capítol 6 introduïm les nocions bàsiques de l'aritmètica i estudiem el principi de demostració per inducció i el principi de definició per recursió.

Concloem l'exposició amb una secció de conclusions que conté un resum dels resultats vistos en aquest treball.

La notació que seguim principalment és la de Climent [CV10]. Tot element d'aquesta teoria serà un conjunt. Diferenciarem el grau d'abstracció tipogràficament, amb notació més elaborada per als conjunts més abstractes, per exemple x , X , $\mathcal{X}$, $\dots$. A més, com hem dit abans, en aquest treball diferenciarem els conceptes de funció i d'aplicació. Una funció és una relació que satisfà la condició funcional i una aplicació, que denotem per $f: A \longrightarrow B$, on A i B són dos conjunts, la definim com la tripla ordenada $f = (A, F, B)$, on F és una funció d' A en B . En els diferents capítols introduïrem nocions i construccions més específiques.

CAPÍTOL 2

Primers axiomes

En aquest primer capítol enunciem els primers axiomes de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel-Skolem.

Axioma d'extensionalitat. Una condició necessària i suficient perquè dos conjunts siguin el mateix conjunt és que tinguin els mateixos elements. És a dir:

$$\forall X, Y (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \leftrightarrow X = Y). \quad (1)$$

Amb aquest primer axioma podem afirmar que els elements d'un conjunt, en cas de tenir, no apareixen repetits.

A continuació, introduïm l'axioma que garanteix l'existència del conjunt que no té membres.

Axioma del conjunt buit. Existeix un conjunt que no té elements.

$$\exists X \forall y (y \in X \leftrightarrow y \neq y). \quad (2)$$

Anem a demostrar que aquest conjunt sense membres és únic.

PROPOSICIÓ 2.1. *El conjunt sense elements és únic. El denominem el conjunt buit i el denotem per $\emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ. Per l'Axioma del conjunt buit (2) existeix un conjunt sense membres. Ara bé, suposem que existeix X' un conjunt diferent de X també sense elements. Aleshores, per a tot element y d' X' , y és diferent d' y . Així, emprant l'Axioma d'extensionalitat (1), $X' = X$. $\square$

Hem establert que dos conjunts són iguals si tenen els mateixos elements i que existeix un únic conjunt sense membres. Ara establim que si tenim dos conjunts, existeix el conjunt format per aquests dos conjunts.

Axioma del conjunt parell no ordenat. Donats dos conjunts x i y , existeix un conjunt on els seus membres són exactament x i y :

$$\forall x, y \exists Z \forall t (t \in Z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)). \quad (3)$$

Demostrem que el conjunt que acabem de definir és únic.

PROPOSICIÓ 2.2. *Siguen x i y dos conjunts. El conjunt amb membres exactament x i y és únic. Aquest conjunt el denominem el conjunt parell no ordenat determinat per x i y i el denotem per $\{x, y\}$.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen x i y dos conjunts, per l'Axioma del conjunt parell no ordenat (3) existeix un conjunt Z que consta de x i y . Suposem que existeix un altre conjunt que satisfà les condicions de l'Axioma del conjunt parell no ordenat (3), el denotem per Z' . Aleshores, per a tot element de Z' , o és x o és y . Per tant, Z i Z' estan formats pels mateixos elements, aleshores, aplicant l'Axioma d'extensionalitat (1) obtenim $Z = Z'$. $\square$

Com a conseqüència d'aquesta proposició podem definir el conjunt amb un únic membre.

COROLLARI 2.3. *Siga x un conjunt. Aleshores existeix un únic conjunt amb únic element x . Denominem aquest conjunt el conjunt terminal o final determinat per x i el denotem per $\{x\}$.*

DEMOSTRACIÓ. En virtut de la Proposició 2.2, amb els dos conjunts de l'enunciat iguals a x , obtenim el conjunt $\{x, x\}$. Aleshores, emprant l'Axioma d'extensionalitat (1) tenim $\{x, x\} = \{x\}$. Per tant, hem trobat l'únic conjunt amb un únic element x . $\square$

Amb els axiomes fins ara presentats només podem construir conjunts amb un màxim de dos elements. A continuació, presentem altres axiomes i propietats per a poder formar conjunts amb més de dos elements.

Axioma del conjunt unió. Siga $\mathcal{X}$ un conjunt, aleshores existeix un conjunt amb membres els membres dels membres de $\mathcal{X}$:

$$\forall \mathcal{X} \exists Y \forall t (t \in Y \leftrightarrow \exists X (t \in X \wedge X \in \mathcal{X})). \quad (4)$$

Demostrem que el conjunt definit en aquest nou axioma és únic.

PROPOSICIÓ 2.4. *Siga $\mathcal{X}$ un conjunt. Aleshores el conjunt amb membres exactament els membres dels membres de $\mathcal{X}$ és únic. Denominem a aquest conjunt el conjunt unió de $\mathcal{X}$ i el denotem per $\bigcup \mathcal{X}$, en alguns casos també el denotem per $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$.*

DEMOSTRACIÓ. Donat un conjunt $\mathcal{X}$, per l'Axioma del conjunt unió (4) sabem que existeix un conjunt Y tal que els elements d' Y són exactament els membres dels membres d' $\mathcal{X}$. Suposem que existeix un conjunt Y' que satisfà les condicions de l'Axioma del conjunt unió (4). Aleshores, com els dos conjunts tenen els mateixos elements, aplicant l'Axioma d'extensionalitat (1) obtenim $Y = Y'$. $\square$

Per tant, si $\mathcal{X}$ és un conjunt tenim que

$$\bigcup \mathcal{X} = \{ t \mid \exists X (t \in X \wedge X \in \mathcal{X}) \}.$$

Una volta definida la unió d'un conjunt, definim, amb la següent proposició, la unió de dos conjunts.

PROPOSICIÓ 2.5. *Siguen X i Y dos conjunts. Aleshores, existeix un únic conjunt amb elements exactament aquells conjunts que pertanyen a X o a Y . Denominem a aquest conjunt la unió (binària) de X i Y i el denotem com $X \cup Y$.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen X i Y dos conjunts, per l'Axioma del parell no ordenat (3) existeix el conjunt $\{X, Y\}$. Apliquem l'Axioma del conjunt unió (4) a $\{X, Y\}$, és a dir, existeix el conjunt

$$\bigcup\{X, Y\} = \{ t \mid \exists A (t \in A \wedge A \in \{X, Y\}) \}.$$

Però, els membres de $\bigcup\{X, Y\}$ són els conjunts que pertanyen a X o a Y . La unicitat d'aquest conjunt és conseqüència de l'Axioma d'extensionalitat (1). $\square$

Per tant, per a dos conjunts X i Y , la unió binària serà:

$$X \cup Y = \{ t \mid t \in X \vee t \in Y \}.$$

Amb la següent proposició demostrem l'existència de conjunts amb més de dos elements.

PROPOSICIÓ 2.6.

- (1) *Siguen x, y, z tres conjunts. Aleshores, existeix un únic conjunt amb membres exactament x, y, z . El denotem per $\{x, y, z\}$.*
- (2) *Siguen X, Y i Z tres conjunts. Aleshores, existeix un únic conjunt amb membres els conjunts que pertanyen a algun dels conjunts donats. El denotem per $X \cup Y \cup Z$.*
- (3) *Per a cada número natural n , no nul, i n conjunts qualsevol $x_0, \dots, x_{n-1}$, existeix un únic conjunt denotat per $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ tal que*

$$\forall x (x \in \{x_0, \dots, x_{n-1}\} \leftrightarrow (x = x_0 \vee \dots \vee x = x_{n-1})).$$
- (4) *Per a cada número natural n , no nul, i n conjunts qualsevol $X_0, \dots, X_{n-1}$ existeix un únic conjunt denotat per $X_0 \cup \dots \cup X_{n-1}$ tal que*

$$\forall x (x \in X_0 \cup \dots \cup X_{n-1} \leftrightarrow (x \in X_0 \vee \dots \vee x \in X_{n-1})).$$

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Donats els conjunts x, y i z , per l'Axioma del parell no ordenat (3) obtenim $\{x, y\}$ i $\{z\}$. Sabem que tots aquests conjunts existeixen. Apliquem una altra volta l'Axioma del parell no ordenat (3) als conjunts $\{x, y\}, \{z\}$ i obtenim $\{\{x, y\}, \{z\}\}$. En virtut de l'Axioma del conjunt unió (4) obtenim $\bigcup\{\{x, y\}, \{z\}\}$ que és el conjunt que busquem.
- (2) Per l'apartat 1 sabem que existeix $\{X, Y, Z\}$. Considerem, gràcies a l'Axioma del conjunt unió (4), $\bigcup\{X, Y, Z\}$, que és el conjunt dels conjunts que pertanyen a X o a Y o a Z . Aquest és el conjunt que busquem.

Per finalitzar la demostració, observem que les dues últimes propietats són generalitzacions de les dues primeres propietats, respectivament. I per tant, es poden demostrar per inducció. $\square$

El final d'aquest capítol el dedicarem a definir la relació binària d'inclusió entre conjunts, per a després presentar l'Axioma del conjunt potència. A més, estudiarem les propietats de la inclusió i presentarem els conjunts ordenats.

DEFINICIÓ 2.7. *Siguen X i Y dos conjunts. Direm que X està inclòs en Y o que X és un subconjunt de Y , si per a cada z , si $z \in X$, aleshores $z \in Y$. Ho denotem per $X \subseteq Y$. Definim també que X està estrictament inclòs en Y , o que és un subconjunt estricte, si $X \subseteq Y$, però $X \neq Y$. La inclusió estricta la denotarem per $X \subset Y$.*

Axioma del conjunt potència Donat un conjunt X , existeix un conjunt amb membres els subconjunts de X .

$$\forall X \exists \mathcal{Y} \forall T (T \in \mathcal{Y} \leftrightarrow T \subseteq X). \quad (5)$$

Demostrem a continuació que el conjunt que defineix aquest últim axioma és únic.

PROPOSICIÓ 2.8. *Siga X un conjunt. Aleshores, el conjunt definit per l'axioma del conjunt potència és únic. Aquest conjunt el denominem conjunt potència o conjunt dels subconjunts de X i serà denotat per $\text{Sub}(X)$.*

DEMOSTRACIÓ. Siga X un conjunt aleshores, aplicant l'Axioma del conjunt potència (5) obtenim un conjunt $\mathcal{Y}$, que és el conjunt format pels subconjunts de X .

Suposem ara que existeix un altre conjunt $\mathcal{Y}'$ que satisfà les condicions de l'Axioma del conjunt potència (5). Observem que aplicant l'Axioma d'extensionalitat (1), com tenen els mateixos elements, aleshores $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'$. Per tant, el conjunt definit per l'Axioma del conjunt potència (5) és únic. $\square$

Així, tenim que per a un conjunt X ,

$$\text{Sub}(X) = \{ T \mid T \subseteq X \}.$$

1. Esquema axiomàtic de separació

En aquesta secció enunciem l'esquema axiomàtic de separació, però abans de conèixer aquest nou axioma convé contextualitzar la raó per la qual es creà. Frege, coetani de Cantor, sustentà el principi de comprensió, segons el qual tota fórmula φ de la teoria de conjunts amb almenys una variable lliure, determinava un conjunt, $\{ x \mid \varphi \}$. És a dir, el conjunt de tots els conjunts que satisfan φ .

No obstant, Russell, amb la seua famosa paradoxa, va impossibilitar el programa de Frege. Aquesta paradoxa demostra que no tota fórmula de la teoria de conjunts defineix un conjunt.

Paradoxa de Russell. No existeix el conjunt amb membres aquells conjunts que no es pertanyen a si mateix, és a dir, no existeix:

$$R = \{ x \mid x \notin x \}.$$

DEMOSTRACIÓ. Suposem que existeix el conjunt R , aleshores $R \in R$ si, i només si, $R \notin R$, que és una contradicció. $\square$

Per evitar situacions d'autoreferència, com la que ocorre en la Paradoxa de Russell, i poder mantindre l'esquema de separació que plantejava Frege, Zermelo presentà la següent versió limitada de l'esquema de comprensió.

Esquema axiomàtic de separació. Si la fórmula $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$, té com a variables lliures $x, t_0, \dots, t_{n-1}$ i en la fórmula no ocorre B , aleshores per a qualsevol conjunts $t_0, \dots, t_{n-1}$ i A , existeix un conjunt B amb membres exactament els conjunts x que pertanyen a A tals que $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$:

$$\forall t_0, \dots, t_{n-1} \forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1}))). \quad (6)$$

Podem observar que la condició de que en la fórmula no pot ocórrer B és la condició que evita paradoxes relacionades amb les definicions autoreferencials.

PROPOSICIÓ 2.9. *Siga $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$ una fórmula amb variables lliures $x, t_0, \dots, t_{n-1}$ i en la que no ocorre B . Aleshores, per a qualsevol conjunt $t_0, \dots, t_{n-1}$ i A , existeix un únic conjunt B amb membres exactament els conjunts $x \in A$ tals que $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$. Denotem a aquest conjunt B per:*

$$\{ x \in A \mid \varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1}) \}.$$

DEMOSTRACIÓ. Siga $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$ una fórmula amb les variables lliures esmentades en l'enunciat i on no ocorre B . Per l'Esquema axiomàtic de separació (6), donats $t_0, \dots, t_{n-1}$ i A existeix almenys un conjunt B amb membres els conjunts x , on $x \in A$, tal que $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$. Hem demostrat l'existència.

Per demostrar la unicitat suposem que existeix altre conjunt B' que satisfà les condicions de l'Esquema axiomàtic de separació (6). És a dir, que en la fórmula no ocorre B' i per a tot x es compleix que $x \in B'$ si, i només si, $x \in A$ i a més $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$. Aleshores, per a cada x , $x \in B$ si, i només si, $x \in B'$. Per tant, per l'Axioma d'extensionalitat (1), B i B' han de ser el mateix conjunt. $\square$

Com hem analitzat anteriorment, la paradoxa de Russell, amb aquesta nova condició no pot donar lloc a una paradoxa. Anem a estudiar quin conjunt obtenim amb l'Esquema axiomàtic de separació (6) formulat per Zermelo si considerem la fórmula $x \notin x$.

PROPOSICIÓ 2.10. *Per a cada conjunt A , existeix un conjunt $R(A)$, el conjunt de Russell per a A , tal que $R(A) \in \text{Sub}(A)$ però $R(A) \notin A$.*

DEMOSTRACIÓ. Definim el nostre conjunt $R(A)$ com

$$R(A) = \{ x \in A \mid x \notin x \}.$$

Aquest conjunt està format per conjunts que pertanyen a A , aleshores, $R(A)$ és un subconjunt d' A . Per tant, $R(A) \in \text{Sub}(A)$.

Ara ens queda demostrar que $R(A)$ no és un element d' A . Suposem per reducció a l'absurd que $R(A) \in A$, aleshores $R(A)$ també pertany a $R(A)$ si, i només si, $R(A) \in A$ i $R(A) \notin R(A)$. Aquesta última afirmació és una contradicció. Per tant, podem concloure que $R(A)$ no pot ser un element d' A . $\square$

Amb el següent corol·lari observem que sempre existeix un conjunt que conté a un altre conjunt.

COROLLARI 2.11. *Per a cada conjunt A , existeix un B tal que $A \subset B$.*

DEMOSTRACIÓ. Per demostrar el corol·lari hem de trobar el conjunt B que satisfà que, per a cada conjunt A , $A \subset B$. Prenem $B = A \cup \{R(A)\}$. Aleshores, per a cada conjunt x , element d' A , aquest pertany a B . Però, A no podrà ser mai el conjunt $A \cup \{R(A)\}$ i, per tant, $A \subset B$. $\square$

Com ja sabem, el mínim per a la inclusió sempre és el conjunt buit. Ara bé, podem dir que existeix un conjunt que siga màxim respecte de la inclusió? El següent teorema demostra que açò no és possible. És a dir, que no existeix el conjunt de tots els conjunts.

TEOREMA 2.12 (Cantor). *No existeix el conjunt amb membres tots els conjunts. I per tant, no existeix cap conjunt que siga màxim respecte a la relació de pertinença.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que existeix el conjunt de tots els conjunts, és a dir, el conjunt $V = \{ x \mid x = x \}$. En virtut de l'Esquema axiomàtic de separació (6), ha d'existir el conjunt $R(V) = \{ x \in V \mid x \notin x \}$. On $R(V)$ és precisament el conjunt $\{ x \mid x \notin x \}$, és a dir el conjunt de la paradoxa de Russell. Per tant, V no existeix. $\square$

Una volta demostrat que existeix el mínim respecte a la inclusió ($\emptyset$) i que no existeix el màxim respecte a la inclusió ni respecte a la relació de pertinença a un conjunt, definim i enunciem algunes propietats relacionades amb la pertinença i la inclusió.

PROPOSICIÓ 2.13. *Siga $\mathcal{X}$ un conjunt no buit. Existeix un únic conjunt amb membres els conjunts que pertanyen a tots i cada un dels membres de $\mathcal{X}$. A aquest conjunt l'anomenem, el conjunt intersecció de $\mathcal{X}$ i el denotem per $\bigcap \mathcal{X}$ o per $\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$.*

DEMOSTRACIÓ. Siga $\mathcal{X}$ un conjunt no buit, aleshores sabem que almenys té un element. Siga aquest element X , arbitrari però fixe, aleshores, en virtut de l'Esquema axiomàtic de separació 6 obtenim el conjunt

$$\{ t \in X \mid \forall Y (Y \in \mathcal{X} \rightarrow t \in Y) \}.$$

Observem que tenim una fórmula i $\mathcal{X}$ no ocorre en aquesta. El conjunt que hem obtingut és precisament $\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$. Ara ens queda demostrar la unicitat. Emprant la Proposició 2.9 sabem que aquest conjunt és únic. $\square$

Així, hem obtingut per a un conjunt no buit $\mathcal{X}$ el conjunt intersecció:

$$\bigcap \mathcal{X} = \{ t \mid \forall X (X \in \mathcal{X} \rightarrow t \in X) \}.$$

Observem que una condició necessària és que $\mathcal{X}$ siga un conjunt no buit, ja que la intersecció del conjunt buit no existeix.

PROPOSICIÓ 2.14. *La intersecció del conjunt buit, és a dir, $\bigcap \emptyset$, no existeix.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem per reducció a l'absurd que existeix. Sabem que per cada conjunt X , $\emptyset$ és un subconjunt de X . Aleshores, en particular, $\emptyset$ està inclòs en $\{X\}$. Per tant, per a cada conjunt X , $\bigcap \{X\} = X$ està inclosa en $\bigcap \emptyset$. Però, sabem que no existeix cap conjunt que continga a qualsevol conjunt, ja que per a cada conjunt A existeix un conjunt B , tal que $A \subset B$. Aleshores, la intersecció del conjunt buit no existeix. $\square$

PROPOSICIÓ 2.15. *Siguen X i Y dos conjunts, aleshores existeix un únic conjunt amb membres exactament els conjunts que pertanyen a X i Y . A aquest conjunt l'anomenem la intersecció (binària) de X i Y , i el denotem per $X \cap Y$.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen X i Y dos conjunts. Gràcies a l'Axioma del parell no ordenat (3) obtenim $\{X, Y\}$. Apliquem a aquest conjunt el que hem definit com a intersecció i obtenim el conjunt

$$\{ t \mid \forall Z (Z \in \{X, Y\} \rightarrow t \in Z) \}.$$

Aleshores, els conjunts t que pertanyen a la intersecció satisfan que per a qualsevol conjunt Z , si $Z \in \{X, Y\}$, aleshores $t \in Z$. Però, si Z pertany a $\{X, Y\}$, aleshores tenim dues opcions, o és X o és Y . Així, t pertany a X i a Y . Per tant, hem obtingut

$$\{ t \mid t \in X \wedge t \in Y \}.$$

Aquest conjunt és la intersecció binària.

Demostrem ara la unicitat. Suposem que existeix un conjunt W on els seus membres són els conjunts que pertanyen a X i a Y . Aleshores, W i $X \cap Y$ tindran els mateixos elements. Per l'Axioma d'Extensionalitat (1) són el mateix conjunt. $\square$

Definirem la intersecció binària de X i Y com el conjunt:

$$X \cap Y = \{ t \mid t \in X \wedge t \in Y \}.$$

DEFINICIÓ 2.16. *Dos conjunts X, Y són disjunts si $X \cap Y = \emptyset$. Denotem aquest fet per $X \perp Y$. A més, direm que $\mathcal{X}$ és un conjunt de conjunts disjunts dos a dos si, per a cada $X, Y \in \mathcal{X}$, si $X \neq Y$ aleshores X i Y són disjunts.*

A més, siga $\mathcal{X}$ un conjunt. Direm que $\mathcal{X}$ està format per conjunts dos a dos disjunts, si, per a cada $X, Y \in \mathcal{X}$ tals que $X \neq Y$, aleshores $X \cap Y = \emptyset$. Direm que els conjunts de $\mathcal{X}$ són disjunts dos a dos i denotarem aquesta propietat per $\text{Disj}(\mathcal{X})$.

PROPOSICIÓ 2.17. *Siguen X, Y, Z tres conjunts. Aleshores, existeix un únic conjunt amb membres exactament els conjunts que pertanyen a X, Y i Z , el denotem per $X \cap Y \cap Z$.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem

$$\bigcap \{X, Y, Z\} = \{ t \mid \forall V (V \in \{X, Y, Z\} \rightarrow t \in V) \}.$$

Emprant la Proposició 2.6 sabem que el conjunt $\{X, Y, Z\}$ existeix. Aleshores, siga t un conjunt que pertany a $\bigcap \{X, Y, Z\}$, tenim que el conjunt $t \in V$, per a tot V , tal que $V \in \{X, Y, Z\}$. Aleshores, V sols pot ser X, Y o Z . Com ha de ser per a qualsevol conjunt V , aleshores, t ha de pertànyer a X, Y i Z . Per tant, obtenim la intersecció de tres conjunts. $\square$

PROPOSICIÓ 2.18. *Siguen X i Y dos conjunts. Aleshores existeix un únic conjunt amb membres precisament els conjunts que pertanyen a X però no pertanyen a Y . Aquest conjunt l'anomenem diferència o diferència relativa de Y en X i el denotem per $X - Y$ o $X \setminus Y$.*

DEMOSTRACIÓ. Donats els conjunts X i Y , aleshores en virtut de l'Esquema axiomàtic de separació (6) podem obtenir el conjunt $\{ x \in X \mid x \notin Y \}$. A més, en virtut de la Proposició 2.9 podem concloure que el conjunt que hem obtingut és únic. $\square$

Cal observar que en la proposició anterior en cap moment hem indicat que $Y \subseteq X$, aleshores cabria la possibilitat que existira el complementari absolut. Però, en virtut de la següent proposició demostrarem que aquest cas no és possible.

PROPOSICIÓ 2.19. *Per a qualsevol conjunt X , no existeix el conjunt que consta de tots els conjunts que no pertanyen a X , és a dir, no existeix el complementari absolut.*

DEMOSTRACIÓ. Siga X un conjunt. Suposem que existeix el conjunt $\{ t \mid t \notin X \}$. Aleshores, en virtut de l'Axioma del conjunt unió (4) podem definir

$$X \cup \{ t \mid t \notin X \}.$$

Per tant, tindríem el conjunt de tots els conjunts, el qual sabem que no existeix. Aleshores, $\{ t \mid t \notin X \}$, que és el complementari absolut, no existeix. $\square$

Una volta demostrat que el complementari absolut no existeix convé definir el complementari relatiu, que existeix i és el que emprarem.

PROPOSICIÓ 2.20. *Siga X un conjunt i Y un subconjunt de X , aleshores, existeix el conjunt de tots els conjunts que pertanyen a X però no pertanyen a Y . És a dir, existeix el complementari relatiu de Y en X , al que denotem per $C_X(Y)$, o per $X \setminus Y$.*

DEMOSTRACIÓ. La demostració és directa ja que és un cas particular de la Proposició 2.18, especificant que Y és un subconjunt de X i no un conjunt arbitrari. $\square$

Alternativament podem definir el complementari relatiu com:

$$X \setminus Y = \bigcup_{Y \cap Z = \emptyset, Z \subseteq X} Z.$$

És a dir, la unió de tots els subconjunts Z de X que són disjunts a Y . Per tant, $X \setminus Y$ és el major subconjunt de X disjunt d' Y .

Per últim, trobem altra definició alternativa per a $X \setminus Y$ com a la intersecció de tots els subconjunts Z de X que són suplementaris a Y , és a dir,

$$X \setminus Y = \bigcap_{Y \cup Z = X, Z \subseteq X} Z.$$

Acabem de veure que el complementari relatiu el podem definir a partir de la unió o de la intersecció. A continuació introduïm el concepte de diferència simètrica.

PROPOSICIÓ 2.21. *Siguen X i Y dos conjunts. Aleshores existeix un únic conjunt que consta dels conjunts que pertanyen a X però no a Y i els que pertanyen a Y però no a X . Anomenem aquest conjunt diferència simètrica de X i Y . El denotem per $X \oplus Y$.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen X i Y dos conjunts, aleshores considerem el conjunt $(X - Y) \cup (Y - X)$, amb elements els conjunts que pertanyen a X i no a Y i els conjunts que pertanyen a Y i no a X . És a dir, la diferència simètrica de X i Y . Els conjunts de la intersecció existeixen i per tant, la intersecció també existeix.

Demostrem ara la unicitat. Observem el conjunt que hem definit és la unió de dos conjunts que són únics, aleshores serà un conjunt únic. $\square$

2. Propietats del conjunt de tots els subconjunts d'un conjunt

A continuació, enumerem una sèrie de propietats sobre el conjunt format pels subconjunts d'un conjunt, és a dir, el conjunt que obtenim gràcies a l'Axioma del conjunt potència (5).

PROPOSICIÓ 2.22.

- (1) $\emptyset, A \in \text{Sub}(A)$.

- (2) $\text{Sub}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- (3) $A \subseteq B$, *si, i només si*, $\text{Sub}(A) \subseteq \text{Sub}(B)$.
- (4) $\text{Sub}(A \cap B) = \text{Sub}(A) \cap \text{Sub}(B)$.
- (5) $\text{Sub}(A) \cup \text{Sub}(B) \subseteq \text{Sub}(A \cup B)$.
- (6) $\text{Sub}(A) \cup \text{Sub}(B) = \text{Sub}(A \cup B)$ *si, i només si*, $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les propietats anteriors:

- (1) Recordem que $\text{Sub}(A) = \{ T \mid T \subseteq A \}$. Per una part el buit és un subconjunt d' A , aleshores $\emptyset \in \text{Sub}(A)$. El conjunt A també és un subconjunt d' A , perquè per a tot conjunt $x \in A$, x pertany a A .
- (2) $\text{Sub}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Recordem que el conjunt buit és el mínim conjunt respecte a la inclusió, aleshores, només podrà tindre com a subconjunt a ell mateix.
- (3) Volem demostrar que $A \subseteq B$ si, i només si, $\text{Sub}(A) \subseteq \text{Sub}(B)$. Demostrem les dues implicacions. Primerament, suposem que T és un subconjunt d' A , aleshores $T \in \text{Sub}(A)$. Volem demostrar que $T \in \text{Sub}(B)$. Com $T \in \text{Sub}(A)$, aleshores, per a tot $x \in T$, $x \in A$. Com A és un subconjunt de B , aleshores $x \in B$. Per tant, T és un subconjunt de B .
Demostrem l'altra implicació. Suposem que $\text{Sub}(A) \subseteq \text{Sub}(B)$. Per tant, per a tot T element de $\text{Sub}(A)$, aleshores $T \in \text{Sub}(B)$. Així, per a tot conjunt $x \in T$ sabem que $x \in A$. Com a conseqüència de $\text{Sub}(A) \subseteq \text{Sub}(B)$ sabem que T també és un subconjunt de B , aleshores $x \in B$. Per tant, $A \subseteq B$.
- (4) Volem demostrar que $\text{Sub}(A \cap B) = \text{Sub}(A) \cap \text{Sub}(B)$. Demostrem la doble inclusió. Primerament, siga T un element de $\text{Sub}(A \cap B)$. Aleshores, T és un subconjunt de $A \cap B$ i per tant, per a tot $x \in T$, $x \in A \cap B$. Per tant, x pertany a A i a B . Aleshores, T és un subconjunt d' A i de B . És a dir, T pertany al conjunt $\text{Sub}(A) \cap \text{Sub}(B)$.
Demostrem l'altra inclusió. Siga un conjunt T que pertany a $\text{Sub}(A) \cap \text{Sub}(B)$, és a dir T pertany a $\text{Sub}(A)$ i a $\text{Sub}(B)$. Aleshores, per a tot conjunt x que pertany a T , x pertany a A i a B . Per tant, T és un subconjunt de $A \cap B$.
- (5) Siga T un element de $\text{Sub}(A) \cup \text{Sub}(B)$. Aleshores, $T \in \text{Sub}(A)$ o $T \in \text{Sub}(B)$. Suposem cada un dels casos i observem què ocorre. Suposem que $T \in \text{Sub}(A)$, aleshores T és un subconjunt d' A . Com A està inclòs en $A \cup B$, T estarà inclòs en $A \cup B$. Aleshores, T pertany a $\text{Sub}(A \cup B)$. Ara, suposem que $T \in \text{Sub}(B)$, aleshores, T serà un subconjunt de B . Com B està contingut en $A \cup B$, aleshores T serà també un subconjunt de la unió d' A i B .
- (6) $\text{Sub}(A) \cup \text{Sub}(B) = \text{Sub}(A \cup B)$ si, i només si, A és subconjunt de B o B és subconjunt d' A .

Demostrem les dues implicacions. Suposem primerament que $\text{Sub}(A \cup B) = \text{Sub}(A) \cup \text{Sub}(B)$. És a dir tenim

$$\{ t \mid t \in \text{Sub}(A) \vee t \in \text{Sub}(B) \} = \{ t \mid t \subseteq A \cup B \}.$$

Aleshores, siga T un conjunt que pertany a $\text{Sub}(A \cup B)$. Aleshores, T està format per conjunts d' A i conjunts de B . Per la igualtat de conjunts, aleshores T ha de pertànyer o a $\text{Sub}(A)$ o a $\text{Sub}(B)$. Per tant, l'única opció és que o A siga un subconjunt de B , o viceversa. Perquè així, el fet que T estiga format per conjunts d' A i conjunts de B , serà el mateix que siguen conjunts d'un dels dos conjunts i aleshores la igualtat que hem suposat certa es compleix.

Suposem ara que $A \subseteq B$, volem demostrar que $\text{Sub}(A \cup B) = \text{Sub}(A) \cup \text{Sub}(B)$. Com A està inclòs en B , emprant la propietat 3, aleshores $\text{Sub}(A)$ és un subconjunt de $\text{Sub}(B)$. A més, com la unió d' A amb B també està inclosa en B , aleshores $\text{Sub}(A \cup B)$ està contingut en $\text{Sub}(B)$. Tenint en compte aquestes inclusions obtenim que els conjunts són iguals. Si considerem que B és subconjunt d' A la demostració és anàloga.

Tenim, així, demostrades les sis propietats més destacables del conjunt dels subconjunts. $\square$

3. Propietats de la relació d'inclusió

En aquesta secció enumerem les propietats més destacables de la relació d'inclusió entre conjunts. Però, abans cal recordar que els conjunts no formen una cadena respecte a la relació d'inclusió, ja que hi ha conjunts que no són comparables.

PROPOSICIÓ 2.23. *Propietats de la inclusió:*

- (1) $\emptyset$ és el mínim respecte a la inclusió, $\emptyset \subseteq A$.
- (2) *Reflexivitat.* $A \subseteq A$.
- (3) *Antisimètrica.* Si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, aleshores $A = B$.
- (4) *Transitivitat.* Si $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, aleshores $A \subseteq C$.
- (5) *Existeixen dos conjunts incomparables respecte a la inclusió. És a dir, existeixen dos conjunts A i B tals que cap d'ells està inclòs en l'altre.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem únicament l'última propietat. Considerem els conjunts $\{\emptyset\}$ i $\{\{\emptyset\}\}$. Aquests conjunts no són comparables, perquè l'únic membre de $\{\emptyset\}$ és $\emptyset$ i aquest no pertany a $\{\{\emptyset\}\}$ i, per altra banda, l'únic element de $\{\{\emptyset\}\}$ és $\{\emptyset\}$ que no pertany a $\{\emptyset\}$. Aleshores cap pot ser subconjunt de l'altre. $\square$

PROPOSICIÓ 2.24. *Propietats de la inclusió estricta:*

- (1) *Irreflexivitat.* $A \not\subset A$.
- (2) Si $A \subset B$ i $B \subseteq C$, aleshores $A \subset C$.
- (3) Si $A \subseteq B$ i $B \subset C$, aleshores $A \subset C$.

- (4) *Transitivitat.* Si $A \subset B$ i $B \subset C$, aleshores $A \subset C$.
 (5) *Asimetria.* Si $A \subset B$ aleshores $B \not\subset A$

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera propietat, la irreflexivitat. Observem que A no pot ser un subconjunt estricte d' A , ja que A és igual a A .

Demostrem ara la segona propietat. Tenim que $A \subset B$, i $B \subseteq C$. Aleshores, siga x un element d' A , $x \in B$ perquè $A \subset B$. A més, com $B \subseteq C$, aleshores x pertany a C . Com aquest argument es compleix per a tot element d' A , aleshores A és un subconjunt de C . Però, observem que B és diferent d' A , aleshores C tampoc pot ser igual a A .

La següent demostració és anàloga a la que acabem de fer. Per tant, demostrem la propietat de transitivitat. Per hipòtesi, $A \subset B$, és a dir, A està contingut en B , però B és diferent d' A . A més, $B \subset C$. Aleshores, per a tot conjunt $x \in A$, $x \in C$. Per tant, A està contingut en C . Com B és diferent d' A i C és diferent de B , aleshores C és diferent d' A .

Per últim, demostrem la propietat d'asimetria. Suposem que $A \subset B$. Per tant, per a tot x element d' A , x és element de B . Suposem per reducció a l'absurd que $B \subset A$. Aleshores els elements de $B \setminus A$, també pertanyen a A . Acabem de trobar la nostra contradicció per com hem definit el conjunt diferència. Per tant, els elements no pertanyen a A . $\square$

A continuació, enumerem les propietats més importants de la unió, la intersecció i la diferència.

4. Propietats de la unió

A continuació enunciem les propietats més importants de la unió. A més, en la segona proposició que incloem en aquesta secció introduïm les propietats de la unió amb la inclusió.

PROPOSICIÓ 2.25. *Propietats de la unió:*

- (1) $A \subseteq A \cup B$ i $B \subseteq A \cup B$.
- (2) Si $A \subseteq X$ i $B \subseteq X$, aleshores $A \cup B \subseteq X$.
- (3) $\bigcup \emptyset = \emptyset$.
- (4) $\bigcup \{x\} = x$.
- (5) *Isotonia.* Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ aleshores $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.
- (6) $\bigcup (A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$.
- (7) $\bigcup (A \cap B) \subseteq (\bigcup A) \cap (\bigcup B)$.
- (8) Si $A \in \mathcal{A}$ aleshores $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.
- (9) *Siga B un conjunt.* Si per a cada $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$ aleshores $\bigcup \mathcal{A} \subseteq B$.

DEMOSTRACIÓ. Les demostracions de les propietats són directes emprant la definició d'unió, unió binària, intersecció i intersecció binària. $\square$

PROPOSICIÓ 2.26. *Propietats de la unió amb la inclusió:*

- (1) *El conjunt buit és el neutre per a la unió binària.* $A \cup \emptyset = A$

- (2) *Idempotència.* $A \cup A = A$.
- (3) *Commutativitat.* $A \cup B = B \cup A$.
- (4) *Associativa.* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- (5) $A \subseteq B$ si, i només, si $A \cup B = B$.
- (6) *Isotonia.* Si $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$, aleshores $A \cup C \subseteq B \cup D$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les propietats:

- (1) $A \cup \emptyset = \{ t \mid t \in A \vee t \in \emptyset \}$. Però no existeix un conjunt t que pertanyi a $\emptyset$. Per tant,

$$A \cup \emptyset = \{ t \mid t \in A \vee t \in \emptyset \} = \{ t \mid t \in A \} = A.$$

- (2) Demostrem la idempotència. Recordem que $\{A, A\} = \{A\}$. Per tant,

$$A \cup A = \bigcup \{A, A\} = \bigcup \{A\} = A.$$

- (3) Demostrem la commutativitat. Recordem que $\{A, B\} = \{B, A\}$. Per tant,

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \bigcup \{B, A\} = B \cup A.$$

- (4) Demostrem l'associativitat.

$$A \cup (B \cup C) = \left(\bigcup \{A\} \right) \cup \left(\bigcup \{B, C\} \right) = \bigcup (\{A\} \cup \{B, C\}) = \bigcup \{A, B, C\}.$$

Per altra banda,

$$(A \cup B) \cup C = \left(\bigcup \{A, B\} \right) \cup \left(\bigcup \{C\} \right) = \bigcup (\{A, B\} \cup \{C\}) = \bigcup \{A, B, C\}.$$

Queden demostrades les propietats més destacables de la unió amb la inclusió. $\square$

5. Propietats de la intersecció

Presentem i demostrem algunes propietats de la intersecció.

PROPOSICIÓ 2.27. *Propietats de la intersecció:*

- (1) $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$.
- (2) Si $X \subseteq A$ i $X \subseteq B$, aleshores $X \subseteq A \cap B$.
- (3) $\bigcap \{x\} = x$.
- (4) *Antimonotonia.* Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ i $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, aleshores $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.
- (5) Si $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ són diferents del buit, aleshores $\bigcap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (\bigcap \mathcal{A}) \cap (\bigcap \mathcal{B})$.
- (6) Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ i $A \in \mathcal{A}$, aleshores $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A$.
- (7) Si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ i B satisfà que per a cada $A \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, aleshores $B \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Recordem que la intersecció binària d' A i B és el conjunt

$$A \cap B = \{ t \mid t \in A \wedge t \in B \}.$$

Gràcies a la definició podem afirmar que la intersecció està continguda en A i en B , respectivament. Ja que, per a tot conjunt t , si t pertany a la intersecció, aleshores t pertany a A i a B .

- (2) Siga X un subconjunt d' A i de B . Per a tot x element de X , x és element d' A i de B . Aleshores, $x \in A \cap B$. Podem concloure que $X \subseteq A \cap B$.
- (3) Definim el conjunt de l'enunciat,

$$\bigcap \{x\} = \{ t \mid \forall X (X \in \{x\} \rightarrow t \in X) \}.$$

Però, l'únic element que té $\{x\}$ és x . Aleshores, la intersecció contindrà únicament el conjunt x .

- (4) Siga $\mathcal{A}$ un subconjunt de $\mathcal{B}$. Per tant, per a tot X en $\mathcal{A}$, X pertany a $\mathcal{B}$. Hem de demostrar que $\bigcap \mathcal{B}$ és un subconjunt de $\bigcap \mathcal{A}$. Recordem la definició de la intersecció

$$\bigcap \mathcal{B} = \{ t \mid \forall X (X \in \mathcal{B} \rightarrow t \in X) \}.$$

Considerem un conjunt t que pertany a $\bigcap \mathcal{B}$. Aleshores, per a tot conjunt $X \in \mathcal{B}$, aleshores $t \in X$. Com $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, aleshores per a tot conjunt $Y \in \mathcal{A}$, t pertany a Y . Així, t compleix la definició de pertànyer al conjunt $\bigcap \mathcal{A}$. Per tant, $\bigcap \mathcal{B}$ està inclòs en $\bigcap \mathcal{A}$.

- (5) Demostrem les dues inclusions. Primerament, prenem un element de $\bigcap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Recordem la definició d'aquest conjunt

$$\bigcap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \{ t \mid \forall X (X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \rightarrow t \in X) \}.$$

Aleshores, $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ per tant, X pertany a $\mathcal{A}$ i a $\mathcal{B}$. Siga un conjunt t que pertany a $\bigcap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, aleshores t pertany a $\mathcal{A}$ i a $\mathcal{B}$. Definim el conjunt intersecció d' $\mathcal{A}$

$$\bigcap \mathcal{A} = \{ t \mid \forall X (X \in \mathcal{A} \rightarrow t \in X) \}.$$

Com X pertany a $\mathcal{A}$, aleshores t pertany a la intersecció d' $\mathcal{A}$, el mateix per a $\mathcal{B}$. Per tant, t pertany a la intersecció binària de $\bigcap \mathcal{A}$ i $\bigcap \mathcal{B}$.

Demostrem ara l'altra inclusió, aleshores siga t un conjunt que pertany a $(\bigcap \mathcal{A}) \cap (\bigcap \mathcal{B})$. Per tant, t pertany a la intersecció d' $\mathcal{A}$ i a la intersecció de $\mathcal{B}$. Així, per a tot conjunt que pertany a $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ t ha de pertànyer a aquests conjunts. Aleshores, t pertany a $\bigcap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

- (6) Recordem la definició de $\bigcap \mathcal{A}$:

$$\bigcap \mathcal{A} = \{ t \mid \forall X (X \in \mathcal{A} \rightarrow t \in X) \}.$$

Siga t un element d'aquesta intersecció. Aleshores, per a tot X que pertany a $\mathcal{A}$, t pertany a X . Per hipòtesi, A pertany a $\mathcal{A}$, aleshores t pertany a A . Per tant, $\bigcap \mathcal{A}$ és un subconjunt d' A .

- (7) Per a tot $A \in \mathcal{A}$, aleshores el conjunt B és un subconjunt d' A . Per tant, siga x un element de B , x és també un element d' A . Així, x satisfà que per a tot A en $\mathcal{A}$ aleshores x és un element d' A . És a dir, x pertany a $\bigcap \mathcal{A}$. Com açò es satisfà per a tot membre de B , aleshores B és un subconjunt de la intersecció d' $\mathcal{A}$.

Donem per finalitzada la demostració. $\square$

PROPOSICIÓ 2.28. *Propietats de la intersecció.*

- (1) *$\emptyset$ anul·la la intersecció binària.* $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- (2) *Idempotència.* $A \cap A = A$.
- (3) *Commutativitat.* $A \cap B = B \cap A$.
- (4) *Associativa.* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- (5) *$A \subseteq B$ si, i només si, $A \cap B = A$.*
- (6) *Isotonia.* Si $A \subseteq B$, $C \subseteq D$, aleshores $A \cap C \subseteq B \cap D$.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Demostrem que el conjunt buit anul·la la intersecció binària. Recordem que el buit és el mínim per a la inclusió. Aleshores, $\emptyset$ és un subconjunt d' A . Per tant, la intersecció binària d' A amb el conjunt buit, serà el conjunt buit.
- (2) La segona propietat ens diu que tot conjunt és idempotent per a la intersecció. Considerem $A \cap A$. Siga un conjunt x que pertany a la intersecció, aleshores $x \in A$ i $x \in A$. Així, $A \cap A \subseteq A$. L'altra inclusió és anàloga.
- (3) Demostrem la propietat commutativa. Siga c un conjunt que pertany a $A \cap B$. Aleshores, c pertany a A i a B . Òbviament, c pertany a B i a A , que és $B \cap A$. La demostració de l'altra inclusió és anàloga.
- (4) Propietat associativa. Siga un conjunt x que pertany a $A \cap (B \cap C)$, aleshores x pertany a A i a $B \cap C$. Per tant, x pertany a B i a C . Així, x és un element d' A , de B i de C . De la mateixa manera, si prenem un element y de $(A \cap B) \cap C$ tindrem que y pertany a $A \cap B$ i a C . Aleshores, y pertany a A i a B . Així, y és un element d' A , de B i de C . Aleshores, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- (5) Suposem que $A \subseteq B$. Aleshores, demostrem que el conjunt $A \cap B$ és igual al conjunt A . Siga x un element de la intersecció, aleshores x pertany a A i a B . Com $A \subseteq B$, aleshores, x pertany a A .

Per altra banda, si suposem que $A \cap B$ és igual a A , aleshores els elements de la intersecció, és a dir, els elements que estan en A i en B , pertanyen només a A . Per tant, A ha d'estar inclòs en B .

- (6) Isotonia. Suposem que $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$. Aleshores, hem de demostrar que $A \cap C \subseteq B \cap D$. Siga y un element de $A \cap C$, aleshores y pertany a A i a C . Com A està inclòs en B i C està inclòs en D . Podem concloure que y pertany a B i a D .

Queden, així, demostrades les propietats de la intersecció. $\square$

Per concloure aquest capítol mencionarem la relació entre la intersecció i la unió, i les propietats de la diferència.

PROPOSICIÓ 2.29. *Enumerem dues propietats distributives i dues d'absorció.*

- (1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (3) $A \cup (A \cap B) = A$.
- (4) $A \cap (A \cup B) = A$.

A més, enunciem la propietat distributiva general de la unió respecte de la intersecció.

$$A \cup \left(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \right) = \bigcap \{ A \cup B \mid B \in \mathcal{B} \}.$$

6. Propietats de la diferència

Presentem i demostrem algunes propietats de la diferència de conjunts.

PROPOSICIÓ 2.30. *Propietats relacionades amb la unió, intersecció i la diferència.*

- (1) *Llei de Morgan*, $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
- (2) *Llei de Morgan*, $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
- (3) $A \cap (C \setminus A) = \emptyset$.
- (4) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.
- (5) $A \subseteq B$ si, i només si, $A \setminus B = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera propietat. Siga x un conjunt que pertanyi a $C \setminus (A \cup B)$, aleshores, $x \in C$ però no pertanyi a $A \cup B$. Per tant, x no pot pertànyer ni a A ni a B . Aleshores, aquest element pertanyi a la intersecció de $C \setminus A$ amb $C \setminus B$.

De la mateixa manera, considerem un conjunt x que pertanyi a la intersecció de $C \setminus A$ amb $C \setminus B$. Aleshores, $x \in C$ i no pot pertànyer ni a A ni a B . Per tant, aquest element no podrà estar en la unió dels conjunts A i B .

La segona propietat es demostra de manera anàloga. Demostrem ara la tercera. Recordem que el complementari relatiu d' A , $C \setminus A$, està compost pels conjunts que pertanyen a C i no pertanyen a A . Aleshores, aquest conjunt no tindrà elements en comú amb A .

A continuació, demostrem la quarta propietat. Observem que tal i com està definit, ens estan dient que la unió d' A amb B és la unió dels conjunts $A \setminus B$, $A \cap B$ i $B \setminus A$. Tenint en compte que la unió binària d' A amb B està formada pels conjunts que pertanyen a A o a B la demostració és immediata.

Per últim, demostrem la doble implicació que trobem en l'última propietat. Suposem que A està inclòs en B . Per tant, els conjunts que pertanyen a A també són elements de B . Així, no existeix cap conjunt que siga element d' A però no ho siga de B .

Suposem ara que la diferència $A \setminus B$ és igual al buit. Aleshores, no tenim cap conjunt diferent del buit que estiga a A i no a B . Per tant, tot conjunt que estiga en A estarà en B . $\square$

CAPÍTOL 3

Relacions

En aquest capítol definim el concepte de relació. Emprarem més endavant aquest concepte per a poder parlar de les funcions. A més, les relacions basen la seua definició en la noció de parell ordenat.

PROPOSICIÓ 3.1. *Siguen x i y dos conjunts. Aleshores existeix un únic conjunt amb membres exactament $\{x\}$ i $\{x, y\}$. Aquest conjunt l'anomenem parell ordenat amb coordenada primera x i coordenada segona y . El denotem per (x, y) .*

DEMOSTRACIÓ. Donats els conjunts x i y podem aplicar l'Axioma del conjunt parell no ordenat (3) per a obtindre $\{x\}$ i $\{x, y\}$. A partir del mateix axioma podem obtindre el conjunt $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. A més, sabem que aquest conjunt és únic, ja que està format per dos conjunts únics. Emprant l'Axioma d'Extensionalitat (1), si suposem que existeix un altre conjunt amb les mateixes característiques, han de ser el mateix conjunt. $\square$

LEMA 3.2. *Donats quatre conjunts x, y, x' i y' . Aleshores $\{x, y\} = \{x', y'\}$ si, i només si, $x = x'$ i $y = y'$ o $x = y'$ i $y = x'$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Suposem primerament que

$$\{x, y\} = \{x', y'\}.$$

Aleshores, per l'Axioma d'extensionalitat (1), com els conjunts són iguals, han de tindre els mateixos elements. Així, $x = x'$, $y = y'$, o $x = y'$, $y = x'$.

Demostrem l'altra implicació. Fem la demostració amb una de les opcions, l'altra és anàloga, ja que es tracten de parells no ordenats. Si $x = x'$, $y = y'$, aleshores $\{x, y\} = \{x', y'\}$. $\square$

Demostrem a continuació la mateixa propietat però per als parells ordenats.

PROPOSICIÓ 3.3. *Donats quatre conjunts x, y, x', y' . Aleshores $(x, y) = (x', y')$ si, i només si, $x = x'$ i $y = y'$.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $(x, y) = (x', y')$, és a dir

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}.$$

Distingim dos casos; que x siga igual a y , i que no siga igual a y . Per al primer cas, el parell ordenat $(x, y) = \{\{x\}\}$. Com, per hipòtesi, $(x, y) = (x', y')$, aleshores $(x', y') = \{\{x\}\}$. Tenint en compte la definició de parell

ordenat tindrem que $\{x'\} = \{x\}$ i $\{x', y'\} = \{x\}$. Açò implica que $x' = x$ i que $y' = x$. Per tant els dos conjunts són iguals.

Suposem ara l'altre cas, que x no siga igual a y . Aleshores, per hipòtesi, els parells ordenats (x, y) i (x', y') són iguals. Per tant, x' és diferent de y' . A més, tenint en compte el conjunt que defineixen els parells ordenats tenim que, $\{x\}$ és igual a $\{x'\}$ i $\{x, y\}$ és igual a $\{x', y'\}$. Com $\{x\} = \{x'\}$, tenim $x = x'$ i com a conseqüència d'aquesta igualtat i $\{x, y\} = \{x', y'\}$, aleshores y és igual a y' .

Demostrem ara l'altra implicació. Suposem que $x = x'$ i que $y = y'$. Amb aquestes igualtats tenim que $\{x\} = \{x'\}$. Per altra banda, els conjunts que obtenim aplicant l'Axioma del parell no ordenat (3), $\{x, y\}$ i $\{x', y'\}$, també són iguals. Per tant, podem concloure que els parells ordenats són iguals. $\square$

El procés de creació de parells ordenats pot continuar per recursió.

DEFINICIÓ 3.4. *Siguen x, y, z tres conjunts. Definim la tripla ordenada determinada per x, y, z com:*

$$(x, y, z) = ((x, y), z).$$

A més, si $x_0, \dots, x_{n-1}$ són conjunts i la n -tupla ordenada associada és $(x_0, \dots, x_{n-1})$, per a $n \geq 3$. Aleshores, si $x_0, \dots, x_n$ són conjunts, definim la $n+1$ -tupla com:

$$(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) = ((x_0, \dots, x_{n-1}), x_n).$$

1. Producte cartesià de conjunts

Abans de definir el concepte de relació binària definim el producte cartesià de dos conjunts. Aquesta noció l'emprarem posteriorment per a caracteritzar a les relacions.

LEMA 3.5. *Siguen x i y dos conjunts que pertanyen a A . Aleshores,*

$$(x, y) \in \text{Sub}(\text{Sub}(A)).$$

DEMOSTRACIÓ. Per hipòtesi, x i y són elements d' A . En virtut de l'Axioma del parell no ordenat (3) el conjunt $\{x\}$ i el conjunt $\{x, y\}$ existeixen. Com x i y són membres d' A , els anteriors dos conjunts són subconjunts d' A . Per tant, el parell ordenat, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ és un subconjunt de $\text{Sub}(A)$, és a dir, un element de $\text{Sub}(\text{Sub}(A))$. $\square$

PROPOSICIÓ 3.6. *Siguen A i B dos conjunts. Existeix un únic conjunt amb elements els parells ordenats (x, y) , on x és membre d' A i y és membre de B . A aquest conjunt l'anomenem el producte cartesià d' A i B , el denotem per $A \times B$.*

DEMOSTRACIÓ. Observem que el conjunt del producte cartesià d' A i B és un subconjunt de $\text{Sub}(\text{Sub}(A \cup B))$. Fent ús de l'Esquema axiomàtic de separació (6) obtenim el següent conjunt:

$$A \times B = \{ z \in \text{Sub}(\text{Sub}(A \cup B)) \mid \exists x \in A \exists y \in B (z = (x, y)) \}.$$

Per últim, emprant la Proposició 2.9 obtenim la unicitat. $\square$

COROLLARI 3.7. *Siga A un conjunt. Aleshores, existeix un únic conjunt amb elements els parells ordenats (x, y) amb $x, y \in A$. Denotem aquest conjunt per A^2 .*

DEMOSTRACIÓ. Es demostra emprant la Proposició 3.6 considerant A com els dos conjunts. $\square$

Com hem fet amb la definició d' n -tupla, el producte cartesià també el podem generalitzar per a un número n de conjunts.

DEFINICIÓ 3.8. *Considerem tres conjunts A , B i C . Definim el producte cartesià d'aquests conjunts com:*

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C.$$

Si suposem definit el producte cartesià d' n conjunts, $A_0 \times A_1 \cdots \times A_{n-1}$, definim el producte cartesià d' $n+1$ conjunts com:

$$A_0 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n = (A_0 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

A continuació, enunciem una propietat del conjunt cartesià respecte de la inclusió.

PROPOSICIÓ 3.9. *Siguen A , A' , B , B' conjunts. Si A i B són diferents del buit, aleshores $A \times B \subseteq A' \times B'$ si, i només si, $A \subseteq A'$ i $B \subseteq B'$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Suposem que $A \times B \subseteq A' \times B'$. Volem demostrar que, per una banda $A \subseteq A'$ i que $B \subseteq B'$.

Com A i B són conjunts diferents del buit, podem prendre un x que pertany a A i un y que pertany a B . En virtut de la definició de parell ordenat considerem (x, y) , que és membre d' $A \times B$, perquè $x \in A$ i $y \in B$. Per hipòtesi, $A \times B \subseteq A' \times B'$ per tant, (x, y) pertany a $A' \times B'$. Així, x pertany a A' , i y pertany a B' . Per tant, A està inclòs en A' , i B en B' .

Demostrem ara l'altra implicació. Suposem que $A \subseteq A'$ i que $B \subseteq B'$. Aleshores, com A i B són conjunts diferents del buit, considerem un conjunt x element d' A i un y element de B . En virtut del conjunt parell ordenat, definim (x, y) , que pertany a $A \times B$. Com $A \subseteq A'$ i $B \subseteq B'$, aleshores $x \in A'$ i $y \in B'$. Per tant, (x, y) també pertany a $A' \times B'$. Així, $A \times B \subseteq A' \times B'$. $\square$

Enunciem ara la condició necessària i suficient perquè el producte cartesià de dos conjunts siga diferent del buit.

PROPOSICIÓ 3.10. *Siguen A i B dos conjunts. Aleshores $A \times B \neq \emptyset$ si, i només si, $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que els conjunts A i B són diferents del buit. Aleshores, siga x un element d' A i y un element de B . Sabem que (x, y) pertany a $A \times B$. Per tant $A \times B$ és diferent del buit.

Suposem ara que $A \times B$ és diferent del buit. Per tant, té com a mínim un element, denotem-lo per z . Per la definició del producte cartesià, sabem que existeix un x que pertany a A i un y que pertany a B tal que $z = (x, y)$. Per tant, A i B són diferents del buit. $\square$

2. Relacions binàries

A partir dels axiomes i definicions de conjunts que hem construït podem definir el concepte de relació binària.

DEFINICIÓ 3.11. *Un conjunt R és una relació (binària) si tots els seus elements són parells ordenats, és a dir, si*

$$\forall z (z \in R \rightarrow \exists x, y (z = (x, y))).$$

Per tant, si existeix un $z \in R$ que no és un parell ordenat, aleshores R no serà una relació.

PROPOSICIÓ 3.12. *Siguen R i S dues relacions.*

- (1) $R \subseteq S$ si, i només si, $\forall x, y ((x, y) \in R \rightarrow (x, y) \in S)$.
- (2) *Principi d'extensionalitat per a les relacions.*
 $R = S$ si, i només si, $\forall x, y ((x, y) \in R \leftrightarrow (x, y) \in S)$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem que la condició és suficient per a la primera, ja que la segona es pot deduir a partir d'aquesta. Siga z un conjunt que pertany a R , aleshores existeixen x i y tal que $z = (x, y)$. Per hipòtesi, com $(x, y) \in R$, aleshores $(x, y) \in S$, per tant, $R \subseteq S$. Òbviament, si també tenim que donat un parell ordenat (x, y) si aquest pertany a S , aleshores també pertany a R , obtenim que R i S són el mateix conjunt per l'Axioma d'extensionalitat per a conjunts (1). $\square$

2.1. Operacions sobre les relacions.

LEMA 3.13. *Siguen x i y dos conjunts. Si $(x, y) \in R$, aleshores $x, y \in \bigcup \bigcup R$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem que x pertany a $\bigcup \bigcup R$.

$$x \in \{x\} \in (x, y) \in R.$$

Recordem la definició de la unió de R

$$\bigcup R = \{ t \mid \exists X (t \in X \wedge X \in R) \}.$$

$$\bigcup \left(\bigcup R \right) = \{ t \mid \exists X (t \in X \wedge X \in \bigcup R) \}.$$

Observem que x pertany a $\bigcup \bigcup R$.

Ara demostrarem que y pertany també a $\bigcup \bigcup R$.

$$y \in \{x, y\} \in (x, y) \in R.$$

Queda demostrat el lema. $\square$

PROPOSICIÓ 3.14. *Si R és una relació, aleshores:*

- (1) *Existeix un únic conjunt amb elements aquells x per als quals existeix un y tal que $(x, y) \in R$. Aquest conjunt serà el domini de definició o d'existència o simplement el domini de relació de R . El denotem per $\text{Dom}(R)$.*
- (2) *Existeix un únic conjunt amb membres aquells y per als quals existeix un x tal que $(x, y) \in R$. A aquest conjunt el denominem la imatge de la relació R . El denotem per $\text{Im}(R)$.*

Per últim, definirem el camp de la relació R com el conjunt donat per la unió binària del domini i la imatge d' R . El denotem per $\text{Fld}(R)$ i el definim com

$$\text{Fld}(R) = \text{Dom}(R) \cup \text{Im}(R).$$

DEMOSTRACIÓ. Emprant l'Esquema axiomàtic de separació (6) definim el domini com segueix

$$\text{Dom}(R) = \left\{ x \in \bigcup \bigcup R \mid \exists y \ ((x, y) \in R) \right\}.$$

Definim ara el conjunt imatge de la relació R com segueix

$$\text{Im}(R) = \left\{ y \in \bigcup \bigcup R \mid \exists x \ ((x, y) \in R) \right\}.$$

Queda demostrada la igualtat que hem presentat a l'enunciat. $\square$

La següent proposició ens indicarà la condició necessària i suficient perquè un conjunt siga una relació.

PROPOSICIÓ 3.15. *Siga R un conjunt. Aleshores R és una relació si, i només si, $R \subseteq \text{Dom}(R) \times \text{Im}(R)$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Suposem que R és un subconjunt de $\text{Dom}(R) \times \text{Im}(R)$. Hem de demostrar que és una relació. Siga z un element d' R , aleshores $z \in \text{Dom}(R) \times \text{Im}(R)$. Per tant, existeix un x element de $\text{Dom}(R)$ i un y element de $\text{Im}(R)$ tal que $z = (x, y)$. Així, R és una relació.

Demostrem l'altra implicació. Suposem que R és una relació. Hem de demostrar que R està inclòs en $\text{Dom}(R) \times \text{Im}(R)$. Siga z un element d' R , aleshores existeixen x, y tal que $z = (x, y)$. Pel lema 3.13 sabem que x, y han de pertànyer a $\bigcup \bigcup R$. Podem concloure que x pertany al domini d' R i, per altra banda, que y pertany a la imatge d' R . Aleshores, per la definició del producte cartesià, el parell ordenat (x, y) pertany a $\text{Dom}(R) \times \text{Im}(R)$. $\square$

Enunciem a continuació les propietats més destacables del domini i la imatge d'una relació.

PROPOSICIÓ 3.16. *Siguen R i S dues relacions.*

- (1) $\text{Dom}(R \cup S) = \text{Dom}(R) \cup \text{Dom}(S)$.
 $\text{Im}(R \cup S) = \text{Im}(R) \cup \text{Im}(S)$.

- (2) $\text{Dom}(R \cap S) \subseteq \text{Dom}(R) \cap \text{Dom}(S)$.
 $\text{Im}(R \cap S) \subseteq \text{Im}(R) \cap \text{Im}(S)$.
- (3) $\text{Dom}(R) \setminus \text{Dom}(S) \subseteq \text{Dom}(R \setminus S)$.
 $\text{Im}(R) \setminus \text{Im}(S) \subseteq \text{Im}(R \setminus S)$.
- (4) Si $R \subset S$ aleshores $\text{Dom}(R) \subseteq \text{Dom}(S)$ i $\text{Im}(R) \subseteq \text{Im}(S)$.
- (5) $\text{Dom}(\emptyset) = \emptyset$ i $\text{Im}(\emptyset) = \emptyset$.
- (6) $\text{Fld}(R \cup S) = \text{Fld}(R) \cup \text{Fld}(S)$.
- (7) $\text{Fld}(R \cap S) \subseteq \text{Fld}(R) \cap \text{Fld}(S)$.
- (8) $\text{Fld}(R) \setminus \text{Fld}(S) \subseteq \text{Fld}(R \setminus S)$.
- (9) Si $R \subseteq S$, aleshores $\text{Fld}(R) \subseteq \text{Fld}(S)$.
- (10) $\text{Fld}(\emptyset) = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera propietat. Suposem que x pertany a $\text{Dom}(R \cup S)$, aleshores, $x \in \bigcup \bigcup (R \cup S)$ i existeix un y tal que $(x, y) \in R \cup S$. Però observem que

$$\bigcup \bigcup (R \cup S) = \left(\bigcup \bigcup R \right) \cup \left(\bigcup \bigcup S \right).$$

Per tant, com x pertany a $\bigcup \bigcup (R \cup S)$, aleshores x pertany a $\bigcup \bigcup R$ o a $\bigcup \bigcup S$. Així, (x, y) és un element d' R o és un element d' S , respectivament. La demostració per a la imatge és anàloga.

Demostrem la segona propietat. Procedirem d'una manera molt similar a la demostració de la propietat anterior, però tenint en compte que:

$$\bigcup (R \cap S) \subseteq \left(\bigcup R \right) \cap \left(\bigcup S \right).$$

Si x pertany al domini de $R \cap S$, aleshores x pertany a $\bigcup \bigcup (R \cap S)$. Així:

$$\bigcup \bigcup (R \cap S) \subseteq \bigcup \left(\left(\bigcup R \right) \cap \left(\bigcup S \right) \right) \subseteq \left(\bigcup \bigcup R \right) \cap \left(\bigcup \bigcup S \right).$$

Per tant, x pertany a $\bigcup \bigcup R$ i a $\bigcup \bigcup S$.

Demostrem la quarta propietat. Per hipòtesi, $R \subset S$. Suposem que x és un element de $\text{Dom}(R)$. Per tant x pertany a $\bigcup \bigcup R$ i existeix un y tal que (x, y) pertany a R . Com $R \subset S$ aleshores (x, y) també és un element d' S . Així, $\bigcup \bigcup R$ és un subconjunt de $\bigcup \bigcup S$. Per tant, x pertany a $\bigcup \bigcup S$ i existeix un y tal que (x, y) pertany a S . Aleshores, podem concloure que $\text{Dom}(R)$ és un subconjunt de $\text{Dom}(S)$. La demostració per a la imatge és totalment anàloga.

Per últim demostrem la propietat 7. La propietat de la unió per al camp és directa tenint en consideració les propietats que tenim de la unió del domini i la imatge i per la definició de camp. Demostrem aleshores que $\text{Fld}(R \cap S)$ és un subconjunt de $\text{Fld}(R) \cap \text{Fld}(S)$. Considerem la propietat 2. És a dir:

$$\text{Dom}(R \cap S) \subseteq \text{Dom}(R) \cap \text{Dom}(S).$$

$$\text{Im}(R \cap S) \subseteq \text{Im}(R) \cap \text{Im}(S).$$

Aleshores,

$$\text{Dom}(R \cap S) \cup \text{Im}(R \cap S) \subseteq \text{Dom}(R) \cup \text{Im}(R).$$

A més,

$$\text{Dom}(R \cap S) \cup \text{Im}(R \cap S) \subseteq \text{Dom}(S) \cup \text{Im}(S).$$

Per tant, és subconjunt dels dos. Aleshores, és subconjunt de la unió dels dos camps. $\square$

3. L'esquema axiomàtic de reemplaçament

En aquesta secció enunciam l'esquema axiomàtic de reemplaçament, introduït per Skolem, amb el qual tindrem la possibilitat de demostrar l'existència de conjunts com:

$$\text{Dom} \left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \right) = \bigcup \{ \text{Dom}(R) \mid R \in \mathcal{R} \}.$$

El mateix ocorre amb la imatge.

Esquema axiomàtic de reemplaçament. Siga una fórmula

$\varphi(x, y, t_0, \dots, t_{n-1})$ amb variables lliures $x, y, t_0, \dots, t_{n-1}$ i en la que no ocorre B . Si per als conjunts $t_0, \dots, t_{n-1}$ i A es compleix que per a tot element x d' A existeix un únic y tal que $\varphi(x, y, t_0, \dots, t_{n-1})$, aleshores existeix un conjunt B amb elements exactament els conjunts y tals que existeix $x \in A$ tal que $\varphi(x, y, t_0, \dots, t_{n-1})$:

$$\forall t_0, \dots, t_{n-1} \forall A \exists! y \varphi(x, y, t_0, \dots, t_{n-1}) \rightarrow \exists B \forall y \quad (7)$$

$$(y \in B \leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(x, y, t_0, \dots, t_{n-1}))). \quad (8)$$

Observem que si prenem $y = \text{Dom}(R)$ i $x = \text{Im}(R)$ i considerant el conjunt de relacions $\mathcal{R}$ obtenim els conjunts:

$$\text{Dom} \left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \right) = \bigcup \{ \text{Dom}(R) \mid R \in \mathcal{R} \}.$$

$$\text{Im} \left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \right) = \bigcup \{ \text{Im}(R) \mid R \in \mathcal{R} \}.$$

A més basant-nos en aquest esquema i el concepte de relació definim els requisits previs als conceptes de funció i aplicació.

DEFINICIÓ 3.17. *Siguen A, B dos conjunts i R una relació. Direm que R és una relació, multifunció o una funció no determinista d' A en B si $\text{Dom}(R) \subseteq A$ i $\text{Im}(R) \subseteq B$. En particular les funcions no determinista d' A en A les denominarem relacions en A .*

PROPOSICIÓ 3.18. *Siguen A, B dos conjunts i R una relació. R és una relació d' A en B si, i només si, $R \subseteq A \times B$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Primerament, suposem que $R \subseteq A \times B$. Demostrem que el domini de R està inclòs en A . La demostració de què la imatge de la relació R està inclosa en el conjunt B és totalment anàloga. Per tant, sols ens dedicarem a demostrar la propietat per al domini.

Siga x un element de $\text{Dom}(R)$, aleshores existeix un y tal que $(x, y) \in R$. Per tant, (x, y) serà un element d' $A \times B$. Així, x és un element d' A .

Suposem ara que R és una relació d' A en B . Per tant, $\text{Dom}(R) \subseteq A$ i $\text{Im}(R) \subseteq B$. Siga z un element d' R aleshores existeixen x i y tal que $z = (x, y)$. Per tant, x és un element de $\text{Dom}(R)$ i y un element de $\text{Im}(R)$. Podem concloure que z pertany a $A \times B$. $\square$

Demostrem a continuació que el conjunt de les relacions d'un conjunt a un altre és únic.

COROLLARI 3.19. *Considerem A i B dos conjunts, aleshores existeix un únic conjunt amb membres les relacions d' A en B . Denotem aquest conjunt per $\text{Rel}(A, B)$. Si considerem la relació d' A en A aleshores, denotarem el conjunt anterior per $\text{Rel}(A)$.*

DEMOSTRACIÓ. Observem que els conjunts que pertanyen a $\text{Rel}(A, B)$, és a dir, les relacions d' A en B , són subconjunts del producte cartesià d' A per B . Per tant, $\text{Rel}(A, B)$ és el mateix conjunt que $\text{Sub}(A \times B)$, que sabem que existeix i és únic. Així, $\text{Rel}(A, B)$ existeix i és únic. $\square$

Gràcies als axiomes presentats fins ara podem definir la relació complementària, $(A \times B) \setminus R$. Observem que el complementari d'aquest conjunt és exactament R .

Definim també $\bar{R} = (A \setminus \text{Dom}(R)) \times (B \setminus \text{Im}(R))$. On $\bar{R}$ no satisfà que el seu complementari és R , simplement conté a R .

PROPOSICIÓ 3.20. *Considerem A i B dos conjunts. Aleshores*

- (1) $\text{Dom}(A \times B) = A$, si $B \neq \emptyset$.
- (2) $\text{Im}(A \times B) = B$, si $A \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrarem només que el domini del producte cartesià d' A per B és A , ja que la demostració per a la imatge és anàloga.

Suposem que B és un conjunt no buit. Volem demostrar que $\text{Dom}(A \times B) = A$.

Siga x un conjunt que pertany a A . Aleshores, hem de provar que $x \in \text{Dom}(A \times B)$. Siga y un element de B . Tenint en compte que x és l'únic conjunt que pertany al conjunt $\{x\}$, per la definició de parell ordent tenim que $\{x\}$ pertany a (x, y) . Com x és un element d' A i y és un element de B , aleshores (x, y) pertany al producte cartesià d' A per B . Per tant, x pertany al domini d' $A \times B$.

Ara suposem que x és membre de $\text{Dom}(A \times B)$, aleshores existeix un y tal que $(x, y) \in A \times B$. Per tant, x ha de ser un element d' A . $\square$

Anteriorment hem definit el concepte de relació entre dos conjunts o també anomenat funció no determinista. A continuació, definim el concepte d'aplicació no determinista.

DEFINICIÓ 3.21. *Siguen A i B dos conjunts. Una multiaplicació o aplicació no determinista d' A en B és una tripla ordenada $r = (A, R, B)$. On R és una relació d' A en B , que denominem relació subjacent de r . A més, denotem al conjunt d'aplicacions no deterministes d' A en B per $\text{Hom}_{\text{nd}}(A, B)$:*

$$\text{Hom}_{\text{nd}}(A, B) = \{A\} \times \text{Rel}(A, B) \times \{B\}.$$

Les aplicacions d' A en A les denominem endoaplicacions no deterministes d' A i les denotem per $\text{End}_{\text{nd}}(A)$.

A més, en el cas d'aplicacions no deterministes, $r = (A, R, B)$, el domini de r és A . El denotem per $d_0(r)$. El conjunt B és el codomini de r . El denotem per $d_1(r)$.

Per últim, hem de tindre en compte que el domini de definició de la relació R d' A en B no té per què ser el mateix que $d_0(r)$. El mateix per a la imatge i $d_1(r)$.

PROPOSICIÓ 3.22. *Considerem quatre conjunts A, A', B, B' . Si $(A, B) \neq (A', B')$, aleshores $\text{Hom}_{\text{nd}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\text{nd}}(A', B') = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ. Per hipòtesi, el parell ordenat $(A, B) \neq (A', B')$. Suposem, per reducció a l'absurd, que $\text{Hom}_{\text{nd}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\text{nd}}(A', B')$ no és buida. És a dir, existeix una aplicació no determinista r tal que el domini de r és A i A' i el codomini és B i B' . Observem que açò no és possible perquè tenim que els parells ordenats són diferents. Per tant, A no pot ser igual a A' i B no pot ser igual a B' . Concloem que la intersecció és buida. $\square$

4. Inversió i composició de relacions

Definirem els dos operadors mencionats en el títol d'aquesta secció, és a dir, la inversa d'una relació i la composició de relacions i estudiarem les seues propietats bàsiques.

PROPOSICIÓ 3.23. *Siga R una relació. Existeix una única relació amb membres els parells ordenats (y, x) tals que $(x, y) \in R$. A aquesta nova relació la denominem la inversa o recíproca de R i la denotem per R^{-1} .*

DEMOSTRACIÓ. Construïm el conjunt que ens descriu l'enunciat com

$$R^{-1} = \{ (y, x) \in \text{Im}(R) \times \text{Dom}(R) \mid (x, y) \in R \}.$$

Gràcies a l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7) aquest conjunt existeix i és únic. $\square$

A continuació veurem la forma de fer referència a la primera i segona coordenada d'un parell ordenat.

PROPOSICIÓ 3.24. *Considerem x i y dos conjunts. Aleshores*

- (1) $\bigcap \bigcap (x, y) = x$.
- (2) $\bigcap \bigcap \bigcap \{(x, y)\}^{-1} = y$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera propietat. En virtut de la definició de parell ordenat tenim que el conjunt enunciat és:

$$\bigcap \bigcap (x, y) = \bigcap \left(\bigcap \{\{x\}, \{x, y\}\} \right).$$

Recordem la definició d'intersecció

$$\bigcap \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{ t \mid \forall X (X \in \{\{x\}, \{x, y\}\} \rightarrow t \in X) \} = \{x\}.$$

Com la intersecció del conjunt $\{x\}$ és x . Aleshores queda demostrada la propietat.

Demostrem la segona propietat. Tenim

$$\bigcap \bigcap \bigcap \{(x, y)\}^{-1}.$$

Ara bé, per la definició de relació inversa obtenim:

$$\bigcap \bigcap \bigcap \{(y, x)\}.$$

Emprant la definició de parell ordenat tindrem:

$$\bigcap \bigcap \left(\bigcap \{\{y\}, \{y, x\}\} \right) = \bigcap \left(\bigcap \{\{y\}, \{y, x\}\} \right).$$

Emprant la primera propietat obtenim:

$$\bigcap \left(\bigcap \{\{y\}, \{y, x\}\} \right) = y.$$

Per tant, queda demostrada la segona propietat. $\square$

DEFINICIÓ 3.25. *Siga z un parell ordenat, aleshores la primera coordenada de z , denotada per $(z)_0$, és $\bigcap \bigcap z$ i la segona coordenada de z , denotada per $(z)_1$, és $\bigcap \bigcap \bigcap \{z\}^{-1}$.*

Enunciem una de les propietats més importants de la relació inversa.

LEMA 3.26. *Siga R una relació, aleshores $\bigcup \bigcup R^{-1} = \bigcup \bigcup R$.*

A partir d'aquest lema i de la pròpia definició de relació inversa enunciem les següents propietats.

PROPOSICIÓ 3.27. *Siguen R i S dues relacions.*

- (1) $\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$. Per altra banda, $\text{Im}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$.
- (2) *Involució.* $(R^{-1})^{-1} = R$.
- (3) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
- (4) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
- (5) $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$.
- (6) Si $R \subseteq S$, aleshores $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera propietat. Siga y un element del domini de R^{-1} . Aleshores, existeix un x que pertany a la imatge d'aquesta relació tal que (y, x) pertany a R^{-1} . Emprant la definició de la relació inversa, $(x, y) \in R$. Per tant, x és un element del domini de R i y de la imatge de R . L'altra inclusió es demostra emprant el mateix argument.

Provem la segona propietat. Escrivim el conjunt que obtenim com

$$(R^{-1})^{-1} = \{ (x, y) \in \text{Im}(R^{-1}) \times \text{Dom}(R^{-1}) \mid (y, x) \in R^{-1} \}.$$

Emprant la primera propietat que acabem de demostrar i la definició d'inversa d'una relació tindrem que el conjunt que hem obtingut és igual a

$$\{ (x, y) \in \text{Dom}(R) \times \text{Im}(R) \mid y \in \text{Im}(R), x \in \text{Dom}(R) \wedge (x, y) \in R \}.$$

Observem que aquest conjunt és la relació R . Per tant, queda demostrada la propietat.

Provem el tercer resultat, és a dir, que els conjunts $(R \cup S)^{-1}$ i $R^{-1} \cup S^{-1}$ són el mateix.

Considerem la relació $(R \cup S)^{-1}$. Aleshores, el parell ordenat (y, x) és un element d'aquesta relació si y és un element de la imatge de $R \cup S$ i x un element del domini de $R \cup S$. Aleshores, el parell ordenat (x, y) és un element de $R \cup S$. Per tant, x i y són elements de $\bigcup \bigcup (R \cup S)$. Com a conseqüència de la unió de les relacions, el parell ordenat és element d' R i d' S . Per la definició de relació inversa tindrem el resultat que buscàvem.

L'altra inclusió es demostra de la mateixa manera emprant les definicions d'unió binària, relació i relació inversa. La resta de propietats relacionades amb la intersecció i la diferència es demostren de manera anàloga a la propietat que hem vist per a la unió.

Provem l'última propietat. Per hipòtesi, la relació R està inclosa en S , és a dir els parells ordenats que pertanyen a R també són elements de la relació S . En virtut de la definició de relació inversa, siga (x, y) un element d' R aleshores (y, x) és un element de R^{-1} . Com (x, y) pertany a S , aleshores (y, x) pertany a la relació inversa d' S . Per tant, R^{-1} està inclosa en S^{-1} .

Queden així demostrades les propietats. $\square$

Hem definit el concepte de relació inversa. Ara definim el concepte d'aplicació no determinista inversa.

DEFINICIÓ 3.28. Siga $r = (A, R, B)$ una aplicació no determinista on A , B són conjunts i R és una relació d' A en B . Aleshores, definim l'aplicació no determinista inversa de R com $r^{-1} = (A, R^{-1}, B)$.

A continuació, definim l'altra operació presentada en la introducció d'aquesta secció, la composició de dues relacions. Amb aquesta operació tindrem la capacitat d'obindre una nova relació a partir de dues relacions donades.

PROPOSICIÓ 3.29. *Siguen R i S dues relacions, aleshores existeix una única relació amb membres els parells ordenats (x, z) per als que existeix un y tal que $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in S$. Aquesta nova relació serà el conjunt de la composició o el producte relatiu de R i S , que denotem per $S \circ R$.*

DEMOSTRACIÓ. Definim el conjunt presentat a l'enunciat i provem l'existència a partir dels axiomes i propietats que hem enunciat fins a aquest moment. El conjunt el definim com:

$$S \circ R = \{ (x, z) \in \text{Dom}(R) \times \text{Im}(S) \mid \exists y \ ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S) \}.$$

Gràcies a l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7) el conjunt que acabem de definir existeix i és únic. $\square$

PROPOSICIÓ 3.30. *Considerem R i S dues relacions.*

- (1) $\text{Dom}(S \circ R) \subseteq \text{Dom}(R)$
- (2) $\text{Im}(S \circ R) \subseteq \text{Im}(S)$.

DEMOSTRACIÓ. Recordem la definició de la composició de dues relacions:

$$S \circ R = \{ (x, z) \in \text{Dom}(R) \times \text{Im}(S) \mid \exists y \ ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S) \}.$$

Per tant, $S \circ R$ és un subconjunt de $\text{Dom}(R) \times \text{Im}(S)$. Així, $\text{Dom}(S \circ R)$ està inclòs en el domini del producte cartesià $\text{Dom}(R) \times \text{Im}(S)$.

Considerem dos casos, el cas en què la imatge de la relació S és buida, i el cas en què és un conjunt diferent del buit.

Si suposem que $\text{Im}(S)$ és igual al buit, aleshores $S \circ R$ serà la relació buida. Com a conseqüència, el domini també serà el conjunt buit. Com ja sabem, el conjunt buit és el mínim per a la inclusió, aleshores, estarà inclòs en el domini de la relació R .

Ara suposem l'altre cas, on $\text{Im}(S)$ no és el buit. Per tant, emprant la Proposició 3.20 amb $A = \text{Dom}(R)$ i $B = \text{Im}(S)$. Tenint en compte que B no és igual al buit, aleshores $\text{Dom}(\text{Dom}(R) \times \text{Im}(S))$ és el mateix conjunt que $\text{Dom}(R)$. Com la composició de la relació S amb R està inclosa en la imatge de S , aleshores queda demostrada la propietat per a aquest cas. $\square$

Enunciem les propietats més importants de la composició de dues relacions i de la inversa d'una relació.

PROPOSICIÓ 3.31. *Considerem R, S, T tres relacions, aleshores*

- (1) *Propietat associativa.* $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.
- (2) *Distributiva de la composició respecte de la unió (esquerra i dreta)*
 $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.
 $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.
- (3) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$.
 $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$.
- (4) *Isotonia.* Si $R \subseteq S$ aleshores $R \circ T \subseteq S \circ T$, i a més $T \circ R \subseteq T \circ S$.
- (5) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera propietat. Definim els dos conjunts que tenim a cada banda de la igualtat. Recordem la definició de $S \circ T$

$$S \circ T = \{ (x, y) \in \text{Dom}(T) \times \text{Im}(S) \mid \exists z ((x, z) \in T \wedge (y, z) \in S) \}.$$

Aleshores definim $R \circ (S \circ T)$ com

$$\{ (x, y) \in \text{Dom}(S \circ T) \times \text{Im}(R) \mid \exists z ((x, z) \in S \circ T \wedge (z, y) \in R) \}.$$

Emprant la definició dels parells ordenats que pertanyen a $S \circ T$ obtenim que $R \circ (S \circ T)$ és:

$$\{ (x, y) \in \text{Dom}(T) \times \text{Im}(R) \mid \exists z, x' ((x, x') \in T, (x', z) \in S, (z, y) \in R) \}.$$

Ara realitzem els mateixos passos per obtindre el conjunt $(R \circ S) \circ T$

$$R \circ S = \{ (x, y) \in \text{Dom}(S) \times \text{Im}(R) \mid \exists z ((x, z) \in S \wedge (z, y) \in R) \}.$$

Aleshores,

$$(R \circ S) \circ T = \{ (x, y) \in \text{Dom}(T) \times \text{Im}(R \circ S) \mid \exists z ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in R \circ S) \}.$$

Emprant la definició de $R \circ S$ obtenim que el conjunt $(R \circ S) \circ T$ es defineix com:

$$\{ (x, y) \in \text{Dom}(T) \times \text{Im}(R) \mid \exists z, x' ((x, z) \in T, (z, x') \in S, (x', y) \in R) \}.$$

Observant els dos conjunts podem concloure que tenim els mateixos elements. Per l'Axioma d'extensionalitat (1) són el mateix conjunt.

Demostrem la segona propietat. El conjunt donat per $(R \circ S) \cup (R \circ T)$ és la unió de

$$\{ (x, y) \in \text{Dom}(S) \times \text{Im}(R) \mid \exists z ((x, z) \in S \wedge (z, y) \in R) \}$$

amb el conjunt

$$\{ (x, y) \in \text{Dom}(T) \times \text{Im}(S) \mid \exists z ((x, z) \in T \wedge (z, y) \in S) \}.$$

Tenint en compte el conjunt que hem obtingut a l'apartat anterior, $R \circ (S \circ T)$, aleshores els dos conjunts estan formats pels mateixos elements. Emprant l'Axioma d'extensionalitat (1) concloem que els conjunts són iguals.

La demostració de $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$ és anàloga.

La demostració de la tercera propietat és anàloga a la demostració de la primera propietat però amb la intersecció.

Demostrem la propietat d'isotonia. Considerem que R és un subconjunt de S . Demostrem que la relació $R \circ T$ està continguda en la relació $S \circ T$. La demostració de que $T \circ R$ està continguda en $T \circ S$ és anàloga.

Siga (x, y) un element de $R \circ T$. Per tant, x pertany al domini de T i y pertany a la imatge de R . A més, existeix un conjunt z tal que (x, z) pertany a la relació T i (z, y) pertany a R . Com R està continguda en S , aleshores y pertany a la imatge de S i (z, y) pertany a S . Per tant, (x, y) pertany a $S \circ T$.

Demostrem l'última propietat, $(R \circ S)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. Tenim que

$$R \circ S = \{ (x, y) \in \text{Dom}(S) \times \text{Im}(R) \mid \exists z ((x, z) \in S \wedge (z, y) \in R) \}.$$

Aleshores, la relació inversa de $R \circ S$ és el conjunt format pels parells ordenats (y, x) tal que y pertany a la imatge de R i x pertany al domini de S . A més, existeix un conjunt z tal que (z, x) pertany a S^{-1} i (y, z) pertany a R^{-1} . Aleshores, (x, y) pertany a $S^{-1} \circ R^{-1}$, ja que $\text{Dom}(S) = \text{Im}(S^{-1})$ i $\text{Im}(R) = \text{Dom}(R^{-1})$. L'altra inclusió es demostra de manera anàloga.

Així, queden demostrades les propietats. $\square$

Abans de continuar amb la següent secció definim la generalització de la propietat distributiva de la composició respecte de la unió. Considerem $\mathcal{R}$ un conjunt de relacions i S una relació.

Per la dreta tindrem:

$$S \circ \left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \right) = \bigcup \{ S \circ R \mid R \in \mathcal{R} \}.$$

Per l'esquerra:

$$\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \right) \circ S = \bigcup \{ R \circ S \mid R \in \mathcal{R} \}.$$

Demostrem l'existència dels conjunts $\{ S \circ R \mid R \in \mathcal{R} \}$ i $\{ R \circ S \mid R \in \mathcal{R} \}$ emprant l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7) a partir del conjunt de relacions $\mathcal{R}$ i de les fórmules $y = \text{Dom}(x)$ i $x = \text{Im}(y)$. Aleshores, podem obtindre els conjunts

$$\{ \text{Dom}(R) \mid R \in \mathcal{R} \}. \quad \{ \text{Im}(R) \mid R \in \mathcal{R} \}.$$

En virtut de l'Axioma del conjunt unió (4) obtenim:

$$\bigcup_{R \in \mathcal{R}} \text{Dom}(R). \quad \bigcup_{R \in \mathcal{R}} \text{Im}(R).$$

Emprant el producte cartesià obtenim:

$$\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} \text{Dom}(R) \right) \times \text{Im}(S). \quad \text{Dom}(R) \times \left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} \text{Im}(R) \right).$$

Emprem l'Axioma del conjunt potència (5),

$$\text{Sub} \left(\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} \text{Dom}(R) \right) \times \text{Im}(S) \right). \quad \text{Sub} \left(\text{Dom}(R) \times \left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} \text{Im}(R) \right) \right).$$

Finalment, emprant altra volta l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7) obtenim els conjunts que volíem. Per tant, la propietat distributiva generalitzada està ben definida.

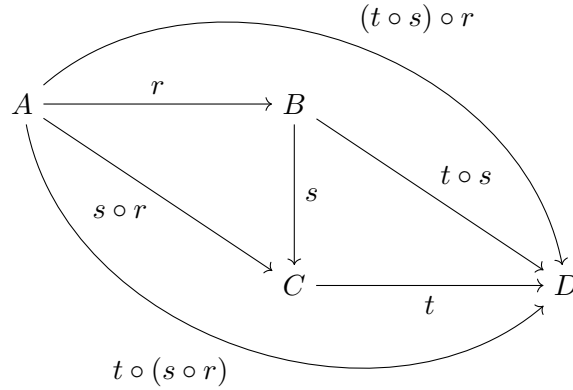
DEFINICIÓ 3.32. Siga r una aplicació no determinista d' A en B , s una aplicació no determinista de B en C . Aleshores, l'aplicació no determinista $(A, S \circ R, C)$ d' A en C la denominem composició de r i s i la denotem per $s \circ r$.

Observem que aquesta aplicació no determinista que acabem de definir solament existeix si $d_1(r) = d_0(s)$, a diferència de la composició de relacions.

PROPOSICIÓ 3.33. Siga r una aplicació no determinista d' A en B , s una aplicació no determinista de B en C , i t altra aplicació no determinista de C a D , aleshores:

$$t \circ (s \circ r) = (t \circ s) \circ r,$$

és a dir, el diagrama següent commuta



A continuació, estudiem l'existència de neutres en la composició d'aplicacions no deterministes tant a esquerra com a dreta. Per poder definir el neutre introduïm el concepte de la diagonal d'un conjunt.

PROPOSICIÓ 3.34. Siga A un conjunt. Existeix un únic conjunt amb aquells conjunts z per als que existeix un $a \in A$ tal que $z = (a, a)$. Aquest conjunt l'anomenem la diagonal d' A i el denotem per Δ_A .

DEMOSTRACIÓ. Definim el conjunt descrit en l'enunciat com:

$$\Delta_A = \{ z \in A \times A \mid \exists a \in A (z = (a, a)) \}.$$

Per l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7) existeix i és únic. $\square$

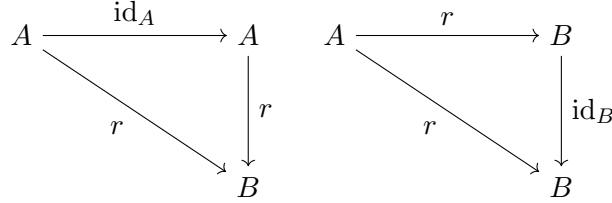
A més, una de les característiques més destacables que trobem sobre el conjunt diagonal d' A és que $\bigcup \bigcup \Delta_A = A$. També cal destacar que el domini de la diagonal d' A , $\text{Dom}(\Delta_A)$ és A , i la imatge, $\text{Im}(\Delta_A)$, és A . Per tant, el camp també serà A .

Per últim, com els elements de la relació diagonal són, (a, a) , per a un a elements d' A , aleshores la relació inversa és igual.

Construïm a continuació l'aplicació no determinista identitat.

DEFINICIÓ 3.35. Considerem A un conjunt i la relació diagonal d' A , Δ_A . Aleshores, l'aplicació no determinista (A, Δ_A, A) la denominem identitat d' A i la denotem per id_A .

PROPOSICIÓ 3.36. Siga r una aplicació no determinista d' A en B , aleshores $r \circ \text{id}_A = r$ i $\text{id}_B \circ r = r$. Aleshores els diagrames següents commuten,



5. Imatges directes, imatges inverses i restriccions

En aquesta secció definim els conceptes d'imatge directa i imatge inversa d'una relació i estudiem les seues propietats bàsiques.

PROPOSICIÓ 3.37. Siga R una relació i X un conjunt. Existeix un únic conjunt amb elements els conjunts y per als quals existeix un conjunt x tal que $x \in X$ i $(x, y) \in R$. Aquest conjunt l'anomenem la R -imatge directa o existencial de X i el denotem per $R[X]$.

DEMOSTRACIÓ. Definim el conjunt descrit a l'enunciat com

$$R[X] = \{ y \in \text{Im}(R) \mid \exists x \in X ((x, y) \in R) \}.$$

Per l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7), aquest conjunt existeix i és únic. $\square$

PROPOSICIÓ 3.38. Siga R una relació i Y un conjunt. Existeix un únic conjunt amb elements els conjunts x per als quals existeix un conjunt y tal que $y \in Y$ i, a més, $(x, y) \in R$. Aquest conjunt l'anomenem la R -imatge inversa de Y i el denotem per $R^{-1}[Y]$.

DEMOSTRACIÓ. Definim el conjunt descrit a l'enunciat com:

$$R^{-1}[Y] = \{ x \in \text{Dom}(R) \mid \exists y \in Y ((x, y) \in R) \}.$$

Existeix i és únic en virtut de l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7). $\square$

És important no confondre la notació de R^{-1} i $R^{-1}[Y]$. El primer fa referència a la relació inversa d' R , i $R^{-1}[Y]$ és un operador que ens dona el conjunt d'elements del domini de la relació R associats amb y .

Enumerem a continuació algunes propietats de la imatge directa i la imatge inversa d'una relació.

PROPOSICIÓ 3.39. Siguen R i S dues relacions, A i B dos conjunts.

- (1) Si $\text{Dom}(R) \subseteq A$, aleshores $R[A] = \text{Im}(R)$. Ara bé si considerem $\text{Im}(R) \subseteq B$, aleshores $R^{-1}[B] = \text{Dom}(R)$.
- (2) Si $A \cap \text{Dom}(R) = \emptyset$, aleshores $R[A] = \emptyset$. Si $B \cap \text{Im}(R) = \emptyset$, aleshores $R^{-1}[B] = \emptyset$.
- (3) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.
- (4) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.
- (5) $R^{-1}[A \cup B] = R^{-1}[A] \cup R^{-1}[B]$.
- (6) $R^{-1}[A \cap B] \subseteq R^{-1}[A] \cap R^{-1}[B]$.
- (7) $A \subseteq R^{-1}[R[A]]$ sí, i només sí, $A \subseteq \text{Dom}(R)$.
- (8) $B \subseteq R^{-1}[R[B]]$ sí, i només sí, $B \subseteq \text{Im}(R)$.
- (9) Si $A \subseteq B$ aleshores $R[A] \subseteq R[B]$. A més $R^{-1}[A] \subseteq R^{-1}[B]$.
- (10) $(R \circ S)[A] = R[S[A]]$ i $(R \circ S)^{-1}[B] = S^{-1}[R^{-1}[B]]$.
- (11) $\Delta_A[A] = A$, $\Delta_B^{-1}[B] = B$.
- (12) $\text{Dom}(R \circ S) \subseteq S^{-1}[\text{Dom}(R)]$, $\text{Im}(R \circ S) \subseteq R[\text{Im}(S)]$.

A més, tenint en compte la definició d'aplicació no determinista d'un conjunt en un altre, podem redefinir el concepte d'imatge directa i imatge inversa.

DEFINICIÓ 3.40. Considerem A i B dos conjunts, i r una aplicació no determinista d' A en B . És a dir $r = (A, R, B)$. Siga $X \subseteq A$. Definim $r[X]$ amb el mateix significat que $R[X]$. Denominem $r[X]$ com la imatge directa de X sota l'aplicació no determinista r .

Anàlogament, considerem un conjunt Y , $Y \subseteq B$. Definim $r^{-1}[Y]$ amb el mateix significat que $R^{-1}[Y]$. Denominem $r^{-1}[Y]$ com la imatge inversa de Y sota l'aplicació no determinista r .

Per finalitzar aquesta secció definim l'operador binari que assigna a una relació i un conjunt, una altra relació. Més en concret, assignarà la relació restringida al conjunt que hem mencionat.

PROPOSICIÓ 3.41. Siga R una relació i A un conjunt. Aleshores existeix un únic conjunt amb elements els parells ordenats, (x, y) tals que $x \in A$. Aquest conjunt l'anomenarem la restricció d' R a A i el denotarem per $R \upharpoonright_A$.

DEMOSTRACIÓ. La demostració es basarà en definir el conjunt descrit a l'enunciat i a partir dels axiomes que hem anat enunciat, justificar que existeix i és únic. Definim

$$R \upharpoonright A = \{ (x, y) \in R \mid x \in A \}.$$

O, equivalentment, el conjunt descrit a l'enunciat es pot definir també com:

$$R \cap (A \times \text{Im}(R)).$$

Si considerem el conjunt definit a la primera equació, en virtut de l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7), aleshores existeix i és únic. $\square$

CAPÍTOL 4

Funcions i aplicacions

En aquest capítol estudiem amb profunditat el concepte de funció i de funció parcial, definits sobre la noció de relació que hem analitzat en el capítol anterior. Les funcions són un concepte fonamental per a totes les àrees de les matemàtiques. A més, classificarem les funcions segons el seu domini i codomini.

DEFINICIÓ 4.1. *Direm que un conjunt F és una funció, relació funcional o una família, quan satisfà:*

- (1) F és una relació.
- (2) $\forall x, y, z ((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F) \rightarrow y = z)$.

A més, si F és una funció i x un element del domini de F , aleshores podem definir $F(x)$ com el següent conjunt:

$$F(x) = \bigcup \{ y \in \text{Im}(F) \mid (x, y) \in F \}.$$

Aquest conjunt el denominem valor o imatge de la funció F en x .

Per últim, si trobem que $\text{Dom}(F) = I$, on F és una funció, aleshores la funció F s'anomena una família indexada o coordinada pel conjunt d'índexs I . En aquest cas ho denotem per $(F(i))_{i \in I}$ o $(F_i)_{i \in I}$.

Observem que si $(F(i))_{i \in I}$ és una família indexada, aleshores

$$\bigcup_{i \in I} (F(i)) = \bigcup_{i \in I} \text{Im}((F(i))_{i \in I}).$$

A més, si $I \neq \emptyset$, aleshores

$$\bigcap_{i \in I} (F(i)) = \bigcap_{i \in I} \text{Im}((F(i))_{i \in I}).$$

Per últim, hem de tindre en compte que F no serà una funció si no satisfà que és una relació, és a dir, si té algun element que no siga un parell ordenat. Per altra banda, no és suficient que F siga relació per a ser una funció. Ha de complir que, si x, y, z són tres conjunts tals que els parells ordenats (x, y) i (x, z) pertanyen a F aleshores y és igual a z .

Observem, per tant, que les funcions són un cas particular de les relacions i, per tant, satisfan la següent proposició.

PROPOSICIÓ 4.2. *Siguen F i G dues funcions. Aleshores:*

- (1) $F \subseteq G$ si, i només si, $\text{Dom}(F) \subseteq \text{Dom}(G)$. Aleshores, per a cada $x \in \text{Dom}(F)$ tindrem que $F(x) = G(x)$.
- (2) *Principi d'extensionalitat per a les funcions.* Una condició suficient i necessària perquè $F = G$ és que $\text{Dom}(F) = \text{Dom}(G)$ i que per a cada x element de $\text{Dom}(F)$, $F(x) = G(x)$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem primer que si F és un subconjunt de G , aleshores $\text{Dom}(F)$ és un subconjunt de $\text{Dom}(G)$.

Siga z un parell ordenat que pertany a F , aleshores $z \in G$. Per tant, existeixen dos conjunts x i y tals que $z = (x, y)$. On, x pertany al domini d' F i de G . Ara bé, considerem un element x del domini d' F . Definim la imatge de la funció F com

$$F(x) = \bigcup \{ y \in \text{Im}(F) \mid (x, y) \in F \}.$$

Com F i G són funcions, aleshores, per a tot x , y , z si (x, y) i (x, z) són dos elements d' F , aleshores y i z són iguals. Com x és un element del domini, el conjunt y que associem amb x és únic. Per tant, $F(x)$ és el mateix conjunt que $G(x)$.

Demostrem ara el Principi d'extensionalitat per a les funcions. Suposem primer que les funcions F i G són iguals. Aleshores, el domini d' F és el mateix que el de G . Demostrem que, si x és element del domini, aleshores el conjunt $F(x)$ és el mateix que el conjunt $G(x)$.

En el conjunt del valor de la funció F en x només trobem un element, i aquest és el mateix per a la funció G . Aleshores, el domini és el mateix i F i G són iguals. Per tant, $F(x)$ ha de ser el mateix conjunt que $G(x)$.

Suposem que el domini de F és el mateix que el de G i que els conjunts $F(x)$ i $G(x)$ són iguals. Aleshores

$$F(x) = \{ y \in \text{Im}(F) \mid (x, y) \in F \} = \{ y' \in \text{Im}(G) \mid (x, y) \in G \} = G(x).$$

Per tant, la imatge serà la mateixa per a F i per a G , perquè el domini és el mateix i per a qualsevol punt del domini, la imatge d'aquest punt és la mateixa. Per tant són la mateixa funció. $\square$

Hem definit el concepte de restricció per a les relacions. Com les funcions són un cas particular de les relacions, aleshores tindrem definit el concepte de restricció també per a les funcions. Definim a continuació el concepte d'extensió.

DEFINICIÓ 4.3. *Siguen F i G dues funcions tals que $F \subseteq G$, aleshores G és una extensió d' F . A més, que G siga una extensió d' F és el mateix que dir que F és una restricció de G .*

A continuació enunciem algunes propietats de les famílies de funcions.

PROPOSICIÓ 4.4.

- (1) Si $\mathcal{F}$ és un conjunt no buit de funcions, aleshores $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ és una funció.

- (2) Si $\mathcal{F}$ és un conjunt de funcions tal que, per a cada $F, G \in \mathcal{F}$, existeix un element H de $\mathcal{F}$, tal que $F \cup G \subseteq H$. Aleshores $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ és una funció.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Demostrem que la intersecció de funcions és funció. Primerament, com la intersecció de relacions és una relació, aleshores tenim demostrada la primera propietat que ha de satisfer. Ara hem de demostrar que

$$\forall x, y, z \left(\left((x, y) \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \wedge (x, z) \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \right) \rightarrow y = z \right).$$

Com $\mathcal{F}$ és una família no buida de funcions, aleshores, per a tot F element d' $\mathcal{F}$ sabem que se satisfà la propietat funcional. Per tant, la intersecció també ho satisfà.

- (2) Per hipòtesi, donades dues funcions de $\mathcal{F}$ aleshores existeix una altra funció que pertany a aquesta família que conté la unió. Per tant, totes les unions dos a dos seran relacions, perquè queden dins d'una relació funcional. Així, la unió de totes les funcions serà una relació. Ara bé, hem de demostrar que

$$\forall x, y, z \left(\left((x, y) \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \wedge (x, z) \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \right) \rightarrow y = z \right).$$

Aleshores, com $(x, y) \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$, existeix una funció $F \in \mathcal{F}$ tal que $(x, y) \in F$. El mateix ocorre per a (x, z) , com $(x, z) \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ aleshores, existeix una funció $G \in \mathcal{F}$ tal que $(x, z) \in G$. Observem que (x, y) i (x, z) pertanyen a $G \cup F$. Per la condició de la proposició existeix una funció $H \in \mathcal{F}$ tal que $G \cup F \subseteq H$. Com (x, y) i (y, z) pertanyen a H i H és una funció, aleshores $y = z$.

Així, queden demostrades les dues propietats enunciades. $\square$

Si F és una funció, aleshores, com F és una relació, F^{-1} serà una relació, però en general no serà una funció. A continuació enunciem una condició necessària i suficient perquè aquesta situació es done. Abans de caracteritzar quan la inversa d'una funció és una funció, definim el concepte de funció injectiva i sobrejectiva.

DEFINICIÓ 4.5. Siga F una funció. F és injectiva si,

$$\forall x, y \in \text{Dom}(F) \ (F(x) = F(y) \rightarrow x = y).$$

Equivalentment,

$$\forall x, y \in \text{Dom}(F) \ (x \neq y \rightarrow F(x) \neq F(y)).$$

Siga F una funció, F és sobrejectiva si,

$$\forall y \in \text{Im}(F) \ \exists x \in \text{Dom}(F) / F(x) = y.$$

Per tant, una funció no serà injectiva si

$$\exists x, y \in \text{Dom}(F) \ (x \neq y \rightarrow F(x) = F(y)).$$

I no serà sobrejectiva si

$$\exists y \in \text{Im}(F) \forall x \in \text{Dom}(F) \ F(x) \neq y.$$

Una volta introduït el concepte de funció injectiva i sobrejectiva enunciem la condició necessària i suficient perquè la inversa d'una funció siga una funció.

PROPOSICIÓ 4.6. *Considerem F una funció. Una condició necessària i suficient perquè F^{-1} siga una funció és que F siga injectiva.*

DEMOSTRACIÓ. Observem que si F és funció, aleshores ha de satisfer que és una relació i que

$$\forall x, y, z \ ((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F) \rightarrow y = z).$$

Òbviament F^{-1} serà una relació, perquè F ho és. Ara, demostrem si satisfà la segona condició.

Provem primerament que si F és injectiva aleshores F^{-1} satisfà la segona condició i, per tant, és una funció. La funció F és injectiva, aleshores, per a tot x, y elements del domini d' F . Si $F(x) = F(y)$ necessàriament $x = y$. Aleshores, siguen (x, z) i (x, z') elements de F^{-1} , tenim que $(z, x), (z', x)$ pertanyen a F . Com F és injectiva i les imatges són iguals. Aleshores z ha de ser igual a z' , i, per tant, F^{-1} satisfà la condició funcional.

Ara suposem que F^{-1} satisfà que, donats dos parells ordenats (x, y) i (x, z) , per a qualsevol x, y, z tal que els parells són membres de F^{-1} , aleshores $y = z$. Per definició de relació inversa, $(y, x), (z, x)$ pertanyen a F . Els parells ordenats tenen la mateixa imatge i com F^{-1} és funció sabem que y és igual a z . Aleshores, F és injectiva. $\square$

A continuació, definim un cas particular de funció.

PROPOSICIÓ 4.7. *Siguen A i B dos conjunts. Aleshores, existeix un únic conjunt amb membres les funcions F que $\text{Dom}(F) \subseteq A$ i $\text{Im}(F) \subseteq B$. Aquest conjunt el denominem conjunt de les funcions parcials d' A en B i el denotem per $\text{Pfunc}(A, B)$.*

DEMOSTRACIÓ. Definim el conjunt descrit a l'enunciat com

$$\text{Pfunc}(A, B) = \{ F \in \text{Sub}(A \times B) \mid \forall x \in A \ \exists! y \in B \ (x, y) \in F \}.$$

En virtut de l'Esquema axiomàtic de reemplaçament (7) obtenim que el conjunt definit existeix i és únic. $\square$

En moltes àrees matemàtiques és necessària una noció més fina que la definida com a funció parcial, en la que ocorrega, tant el conjunt que conté el domini, com el de la imatge. És per aquesta raó que definim a continuació el concepte d'aplicació parcial.

DEFINICIÓ 4.8. *Siguen A i B dos conjunts. Una aplicació parcial d' A en B és una tripla $f = (A, F, B)$, denotada per $f: A \rightarrow B$, en el que F és una funció parcial d' A en B . La denominem funció parcial subjacent de f . A més, al conjunt d'aplicacions parcials d' A en B el denotem per $\text{Hom}_p(A, B)$. Així:*

$$\text{Hom}_p(A, B) = \{A\} \times \text{Pfunc}(A, B) \times \{B\}.$$

En particular, el conjunt d'aplicacions parcials d' A en A el denotem per $\text{End}_p(A)$ i l'anomenem conjunt de les endoaplicacions parcials d' A .

Si $f: A \rightarrow B$ és una aplicació parcial, denominem el domini de f per $d_0(f)$, i el codomini de f , $d_1(f)$. En general, el domini de f i el domini de definició de la funció parcial F d' A en B seran distints. El mateix passa amb el codomini de f i la imatge de F , que poden ser distints.

PROPOSICIÓ 4.9. *Siguen A, A', B, B' conjunts. Si $(A, B) \neq (A', B')$, aleshores $\text{Hom}_p(A, B) \cap \text{Hom}_p(A', B') = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ. Emprant la definició de $\text{Hom}_p(A, B)$

$$\text{Hom}_p(A, B) = \{A\} \times \text{Pfunc}(A, B) \times \{B\}.$$

Com A és diferent d' A' i B és diferent de B' , aleshores la intersecció ha de ser buida. $\square$

PROPOSICIÓ 4.10. *Siguen F i G dues funcions, aleshores*

- (1) $G \circ F$ és una funció.
- (2) $\text{Dom}(G \circ F) = \{x \in \text{Dom}(F) \mid F(x) \in \text{Dom}(G)\}$.
- (3) Per a cada element x de $\text{Dom}(G \circ F)$ tenim que $G \circ F(x) = G(F(x))$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera propietat. Per una banda, sabem que la composició de relacions és relació, aleshores $G \circ F$ satisfà la primera condició per a ser una funció.

Ara hem de demostrar que si x, y, z són tres conjunts tals que (x, y) i (x, z) pertanyen a $G \circ F$, aleshores $y = z$. Com els parells ordenats pertanyen a la composició, aleshores x és un element del domini d' F i y i z són elements de la imatge d' G , per als que existeix un t tal que (x, t) pertany a F i (t, z) i (t, y) pertanyen a G . Aleshores, y i z han de ser el mateix conjunt, ja que $F(t)$ sols pot estar format per un conjunt. $\square$

Tenint en compte aquesta última proposició demostrarem que la composició de funcions i aplicacions parcials i no parcials és també funció o aplicació parcial o no parcial, respectivament.

COROLLARI 4.11. *Siguen A, B, C tres conjunts.*

- (1) *Considerem F una funció parcial d' A en B i G una funció parcial de B en C . Aleshores $G \circ F$ és també una funció parcial. En aquest cas d' A en C . La denominem composició de les funcions parcials de F i G .*

A més, si f és una aplicació parcial d' A en B i g una aplicació parcial de B en C , ocorre el mateix, la composició $g \circ f: A \rightarrow$

C és una aplicació parcial i la denominem la composició de les aplicacions parcials f i g .

- (2) Si F és una funció d' A en B i G una funció de B en C , aleshores $G \circ F$ és una funció que l'anomenarem, composició de les funcions F i G .

A més, si considerem $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions, aleshores $g \circ f$ és també una aplicació, en aquest cas d' A en C .

1. Conjunts i aplicacions especials

En capítols anteriors hem caracteritzat el conjunt buit respecte a la relació de pertinença com l'únic conjunt que no conté elements. Ara, amb el concepte de relació podem caracteritzar el conjunt buit respecte a la relació que té amb la resta de conjunts a través de les aplicacions.

PROPOSICIÓ 4.12. *El conjunt buit és l'únic conjunt que té la propietat que per a cada conjunt A existeix una única aplicació del buit al conjunt A . És per aquesta raó per la qual direm que el conjunt buit és el conjunt inicial respecte a les aplicacions. Denotem per α_A l'única aplicació de $\emptyset$ en A .*

DEMOSTRACIÓ. Siga A un conjunt, aleshores la tripla ordenada $\alpha_A = (\emptyset, \emptyset, A)$ és una aplicació del $\emptyset$ en A . Ja que, la segona coordenada que trobem és una funció de $\emptyset$ en A . Per tant, hem demostrat l'existència.

Ens falta demostrar la unicitat. Suposem que existeix una altra aplicació f del $\emptyset$ en A , aleshores la seua funció subjacent, per ser un subconjunt de $\emptyset \times A$ haurà de ser buida. Si apliquem l'Axioma d'extensionalitat reformulat per a les funcions, obtenim que $f = \alpha_A$. Aleshores, queda demostrada la unicitat.

A més, demostrem que si X no fóra el conjunt buit, aleshores, existeix un conjunt A per al qual, o no existeix cap aplicació d'aquest conjunt en A , o existeixen dues aplicacions diferents. Aleshores, siga X un conjunt no buit. Si considerem A el conjunt buit, aleshores no existeix cap aplicació de X en $\emptyset$. $\square$

Per últim, observem que per al conjunt buit, $\alpha_\emptyset$ és l'única aplicació de $\emptyset$ en $\emptyset$, és a dir, la identitat de $\emptyset$, que coincideix amb $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

Una volta definit el conjunt inicial, definirem a continuació el concepte de conjunt final o terminal.

DEFINICIÓ 4.13. *Un conjunt T és final o terminal si, per a cada conjunt A , existeix una única aplicació d' A en T . Aquesta aplicació la denominem ω_A .*

PROPOSICIÓ 4.14. *T serà un conjunt final o terminal si, i només si, existeix un conjunt t tal que $T = \{t\}$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrarem les dues implicacions. Suposem que existeix un conjunt t tal que $T = \{t\}$ i siga A un conjunt. Aleshores, $\omega_A = (A, A \times \{t\}, \{t\})$ és una aplicació d' A en $\{t\}$. Si suposem que existeix una altra aplicació d' A en T , pel Principi d'extensionalitat per a les funcions, aleshores aquesta aplicació ha de ser igual a ω_A . L'aplicació és única. Podem concloure que T és un conjunt terminal.

Suposem ara que, per a cada conjunt A , es compleix que existeix una única aplicació d' A en T . Per una banda, T no pot ser el buit, perquè si ho fora podríem prendre $A = \{\emptyset\}$ i no existiria cap aplicació d' A en T . Per altra banda, T no pot tindre més de dos elements distints, ja que, si es donara aquest cas, aleshores podem prendre $A = \{\emptyset\}$ i tindríem almenys dues aplicacions diferents d' A en T . Per tant, hem arribat a la conclusió que T no pot ser el buit però tampoc pot tindre més de dos elements. Concloem que T , necessàriament, ha de tindre un element. En virtut de l'Axioma d'extensionalitat (1) aquest element és únic, així, existeix un conjunt t tal que $T = \{t\}$. $\square$

Observem que, malgrat que els conceptes de conjunt inicial i terminal són duals, el conjunt inicial és únic, només pot ser el buit, mentre que el conjunt terminal no ho és, ja que pot existir més d'un conjunt amb aquesta caracterització. Per tant, el concepte de conjunt final o terminal no especifica un conjunt en concret, sinó tota una classe de conjunts.

Per finalitzar aquesta secció, enunciam una proposició que ens assegura que en el cas de les aplicacions no existeix cap conjunt que siga inicial i terminal.

PROPOSICIÓ 4.15. *No existeix cap conjunt que, respecte de les aplicacions, siga inicial i terminal. Però, respecte de les aplicacions parcials i les aplicacions no deterministes, observem que $\emptyset$ serà inicial i terminal.*

DEFINICIÓ 4.16. *Un conjunt X és un separador o generador si, donats A i B dos conjunts i f, g dues aplicacions distintes d' A en B , aleshores existeix una aplicació h de X en A tal que $f \circ h \neq g \circ h$, és a dir:*

$$\forall A, B \forall f, g: A \longrightarrow B (f \neq g \rightarrow \exists h: X \longrightarrow A (f \circ h \neq g \circ h)).$$

Així, X no és separador si existeixen dos conjunts A i B i dues aplicacions distintes f i g d' A en B tals que, per a cada aplicació h de X en A es compleix que $f \circ h = g \circ h$.

A continuació, enunciem una condició necessària i suficient perquè un conjunt siga un conjunt separador.

PROPOSICIÓ 4.17. *Un conjunt serà un conjunt separador si, i només si, no és el conjunt buit.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Suposem que X no és el buit i, a més, que f, g són dues aplicacions distintes d' A en B . Aleshores, existeix un a , element d' A , tal que $f(a)$ és diferent de $g(a)$ i, per a l'aplicació

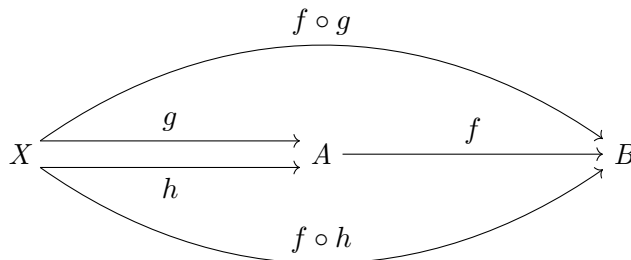
$h = (X, X \times \{a\}, A)$ de X en A es compleix que $f \circ h \neq g \circ h$. Per tant, X és un conjunt separador.

Demostrem l'altra implicació per reducció a l'absurd. Suposem que X és el conjunt buit, aleshores demostrem que X no podrà ser un conjunt separador. Siga $A = 1$, on $1 = \{\emptyset\}$, i $B = 2$, on $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Siguen $f = (1, \{(\emptyset, \emptyset)\}, 2)$ i $g = (1, \{(\emptyset, 1)\}, 2)$ dues aplicacions. Observem que $f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_1$. Per tant, X no pot ser el conjunt buit. $\square$

2. Seccions i monomorfismes

En aquesta secció definim els conceptes de secció i monomorfisme i analitzarem les relacions entre aquests conceptes. A continuació definim el concepte de monomorfisme. Posteriorment estudiem l'equivalència entre les aplicacions injectives i els monomorfismes.

DEFINICIÓ 4.18. Siga $f: A \longrightarrow B$ una aplicació. Direm que f és un monomorfisme si, per a cada conjunt X i per a dues aplicacions qualsevol $g, h: X \longrightarrow A$ si el següent diagrama commuta,



aleshores $g = h$. És a dir, quan $f \circ g = f \circ h$, aleshores $g = h$. Per aquest motiu, aquestes aplicacions també les denominarem aplicacions simplificables per l'esquerra. Denotem el conjunt de monomorfismes d' A en B per $\text{Mono}(A, B)$.

Per tant, una aplicació $f: A \longrightarrow B$ no serà un monomorfisme si

$$\exists g, h: X \longrightarrow A \ (f \circ g = f \circ h \wedge g \neq h).$$

A més, amb aquests nous conceptes observem que, per a demostrar que dues aplicacions $g, h: X \longrightarrow A$ són la mateixa aplicació serà suficient determinar un monomorfisme d' A en B tal que $f \circ g = f \circ h$.

Ara demostrarem que el concepte de monomorfisme és equivalent al d'injectivitat.

PROPOSICIÓ 4.19. Una aplicació $f: A \longrightarrow B$ és injectiva si, i només si, és un monomorfisme.

DEMOSTRACIÓ. Suposem que X és un conjunt, que $f: A \longrightarrow B$ és una aplicació injectiva i que $g, h: X \longrightarrow A$ són dues aplicacions tals que $f \circ g = f \circ h$. Volem demostrar que $g = h$. Aleshores, donat x un element de X es

compleix que $f(g(x)) = f(h(x))$. Com f és injectiva, aleshores $g(x) = h(x)$. Per tant, $g = h$.

Suposem ara que f és un monomorfisme. Suposem per reducció a l'absurd que f no és injectiva. Aleshores, existeixen un x i un y elements d' A tal que x i y són diferents, però amb $f(x)$ igual a $f(y)$. Per a $X = \{0\} = 1$ i per a g_x , l'aplicació d'1 a x , i h_y , l'aplicació d'1 a y , és a dir:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{g_x} & A \\ & \xrightarrow{h_y} & \\ & & \xrightarrow{f} B \end{array}$$

Observem que $(f \circ g_x)(0) = f(x)$ i que $(f \circ h_y)(0) = f(y)$. Com $f(x) = f(y)$, aleshores, $f \circ g = f \circ h$, però $g \neq h$. Per tant, f no és un monomorfisme. Hem trobat la nostra contradicció. Podem concloure que f ha de ser necessàriament injectiva. $\square$

PROPOSICIÓ 4.20. *Siguen A , B , C tres conjunts, X un subconjunt d' A , $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions. Aleshores:*

- (1) id_A , l'aplicació identitat d' A , és un monomorfisme.
- (2) $\text{in}_{X,A} = (X, \Delta_X, A)$, la inclusió canònica de X en A , també denotada per in_X és un monomorfisme.
- (3) Si f i g són monomorfismes, aleshores $g \circ f$ és un monomorfisme.
- (4) Si $g \circ f$ és un monomorfisme, aleshores f és un monomorfisme.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Demostrem que la identitat és un monomorfisme. Emplem la Proposició 4.19. Com la identitat és injectiva, aleshores és un monomorfisme.
- (2) La inclusió canònica també és un monomorfisme per la Proposició 4.19.
- (3) Suposem que f i g són monomorfismes. Demostrarem que la composició d'aquestes dos també és un monomorfisme.

Considerem M un conjunt i $u, v: M \rightarrow A$ dues aplicacions tals que $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$. Aleshores, per la propietat associativa, $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$. Com g és monomorfisme per hipòtesi, aleshores $f \circ u = f \circ v$. Com f és monomorfisme, per tant, $u = v$. Així, la composició és un monomorfisme.

- (4) Tenim per hipòtesi que $g \circ f$ és un monomorfisme. Considerem un conjunt M i dues aplicacions, $u, v: M \rightarrow A$, tals que $f \circ u = f \circ v$. Aleshores, $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$, emprant la propietat associativa obtenim $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$. Com la composició és un monomorfisme, $u = v$. Per tant, f és un monomorfisme.

Finalitzem, així, la demostració de les propietats esmentades. $\square$

Definim el concepte de dominància entre dos conjunts.

DEFINICIÓ 4.21. *Siguen A i B dos conjunts, aleshores direm que B domina a A , o que A està dominat per B , si existeix un monomorfisme d' A en B . Denotarem aquesta condició per $A \leq B$.*

A continuació, definirem el concepte de secció i, a més, demostrarem que tota secció és un monomorfisme, però no tot monomorfisme és una secció.

DEFINICIÓ 4.22. *Una aplicació $f: A \longrightarrow B$ és una secció o és invertible per l'esquerra si existeix una aplicació $g: B \longrightarrow A$ tal que el següent diagrama commuta*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \text{id}_A & \downarrow g \\ & & A \end{array}$$

Així, $f: A \longrightarrow B$ és una secció si, i només si,

$$\exists g: B \longrightarrow A \ (g \circ f = \text{id}_A).$$

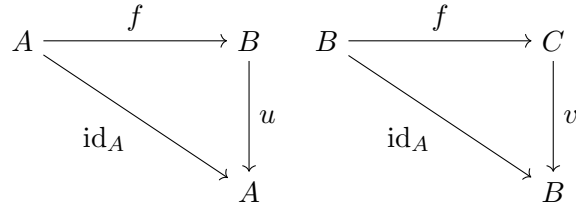
Observem que, per a que $f: A \longrightarrow B$ siga una secció només demanem que existisca una aplicació $g: B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$. Però, no exigim que siga única.

PROPOSICIÓ 4.23. *Siga T un conjunt terminal. A , B , C tres conjunts, $f: A \longrightarrow B$ i $g: B \longrightarrow C$ dues aplicacions Aleshores:*

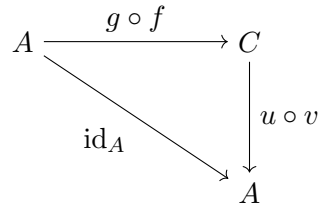
- (1) id_A és una secció.
- (2) Si $f: T \longrightarrow A$, aleshores f és una secció.
- (3) Si f i g són seccions, aleshores $g \circ f$ és una secció.
- (4) Si $g \circ f$ és una secció, aleshores f és una secció.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) La identitat serà secció, ja que l'aplicació identitat és idempotent per a la composició.
- (2) Sabem que T és un conjunt final, emprant la Proposició 4.14, existeix un conjunt t tal que $T = \{t\}$. Aleshores f és una aplicació de $\{t\}$ en A . Prenem ω_A , que és l'única aplicació que va d' A en T , definida en la Definició 4.13. Observem que $\omega_A \circ f = \text{id}_A$, per tant, f és una secció.
- (3) Suposem que f i g són seccions. Per tant, existeixen dues aplicacions $u: B \longrightarrow A$ i $v: C \longrightarrow B$ inverses a esquerra d' f i g , respectivament. Per tant, els següents diagrames commuten.

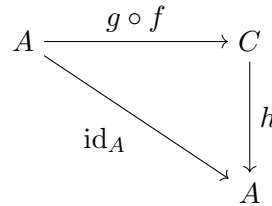


Per tant, el següent diagrama també commuta,

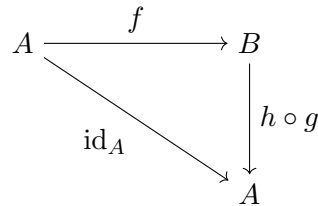


Aleshores, $g \circ f$ és una secció.

- (4) Per hipòtesi, $g \circ f$ és una secció. Per tant, existeix una aplicació $h: C \rightarrow A$, tal que el següent diagrama commuta



Aleshores el següent diagrama també commuta



Per tant, f és una secció.

Queda demostrada la proposició. $\square$

La següent proposició ens donarà una condició suficient i necessària per a que una aplicació siga una secció.

PROPOSICIÓ 4.24. *Una aplicació serà una secció si, i només si, és un monomorfisme i és diferent de l'única aplicació del conjunt buit en un conjunt no buit.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Suposem que f és una secció i que $g, h: X \rightarrow A$ són dues aplicacions tals que $f \circ g = f \circ h$.

Com f és una secció, aleshores existeix una aplicació $t: B \rightarrow A$ tal que $t \circ f = \text{id}_A$. Per tant, $t \circ (f \circ g) = t \circ (f \circ h)$. Per la propietat associativa tenim que és equivalent a $(t \circ f) \circ g = (t \circ f) \circ h$, que, per la condició de ser secció $\text{id}_A \circ g = \text{id}_A \circ h$. Per tant, $g = h$. Aleshores, f és un monomorfisme. A més, f no pot ser l'única aplicació del buit a un conjunt no buit, perquè si ho fora, no seria una secció.

Demostrem l'altra implicació. Suposem que $f: A \rightarrow B$ és un monomorfisme i que f no és l'única aplicació del conjunt buit a un conjunt no buit. Aleshores pot ocórrer que f és $\text{id}_\emptyset$. Per tant, f seria la seua inversa per l'esquerra. O pot ocórrer que f no és $\text{id}_\emptyset$, i, per tant, a banda de ser monomorfisme i no ser l'única aplicació del buit en un conjunt no buit, tindríem necessàriament que A no és el conjunt buit. Així, si i és un element d' A , definim $g: B \rightarrow A$ com:

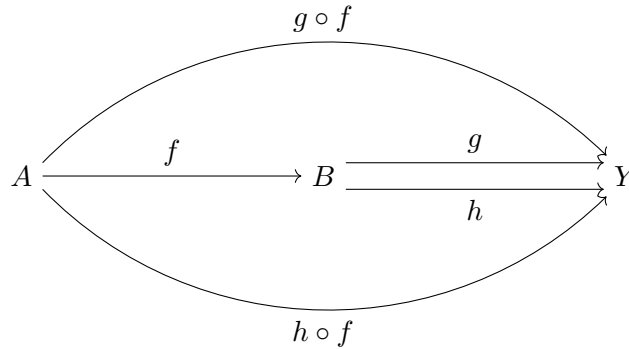
$$g = \begin{cases} B \rightarrow A \\ b \mapsto g(b) = f(x) = \begin{cases} a & \text{si } b \in \text{Im}(f) \text{ on } \{a\} = f^{-1}(\{b\}); \\ i & \text{si } b \notin \text{Im}(f). \end{cases} \end{cases}$$

Observem que $g \circ f = \text{id}_A$ i, per tant, f serà una secció. $\square$

3. Retraccions i epimorfismes

En aquesta secció definim els conceptes de retracció i epimorfisme i analitzarem les relacions entre aquests conceptes. A continuació definim el concepte d'epimorfisme. Posteriorment estudiem l'equivalència entre les aplicacions sobrejectives i els epimorfismes.

DEFINICIÓ 4.25. Siga $f: A \rightarrow B$ una aplicació. Direm que f és un epimorfisme si, per a cada conjunt Y i per a dues aplicacions qualsevol $g, h: B \rightarrow Y$, aleshores, si el següent diagrama commuta



tenim $g = h$. És a dir, si $g \circ f = h \circ f$, aleshores $g = h$. A aquestes aplicacions també les anomenarem simplificables per la dreta. Denotem el conjunt dels epimorfismes d' A en B per $\text{Epi}(A, B)$.

Per tant, una aplicació no serà un epimorfisme quan:

$$\exists g, h: B \rightarrow Y \ (g \circ f = h \circ f \wedge g \neq h).$$

Observem que amb el concepte d'epimorfisme també podem demostrar que dues aplicacions coincideixen. És a dir, si tenim $g, h: B \rightarrow Y$, aleshores serà suficient trobar un epimorfisme $f: A \rightarrow B$ tal que $g \circ f = h \circ f$ per obtenir que $g = h$.

A continuació, demostrem que els conceptes de sobrejectiva i epimorfisme són equivalents.

PROPOSICIÓ 4.26. *Siga $f: A \rightarrow B$ una aplicació. Aleshores és sobrejectiva si, i només si, f és un epimorfisme.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Suposem que $f: A \rightarrow B$ és una aplicació sobrejectiva. Considerem Y un conjunt i $g, h: B \rightarrow Y$ dues aplicacions tals que $g \circ f = h \circ f$. Volem demostrar que $g = h$. Per tant, siga b un element de B , com f és sobrejectiva, existeix un element a d' A , tal que $f(a) = b$. Aleshores, $g(b) = g(f(a))$ i $h(b) = h(f(a))$. Per tant, com $(g \circ f)(a) = (h \circ f)(a)$, podem concloure que $g(b) = h(b)$. És a dir, $g = h$ i, per tant, f és un epimorfisme.

Demostrem ara l'altra implicació. Suposem que f és un epimorfisme. Per reducció a l'absurd suposem que f no és sobrejectiva. Això vol dir que existeix un x element de B tal que, per a cada a element d' A , $f(a) \neq x$. Siga x arbitrari però fixe. Aleshores, prenint Y el conjunt $2 = \{0, 1\}$ i com aplicacions $g, h: B \rightarrow 2$ les definides, respectivament, per:

$$g = \begin{cases} B \rightarrow 2 \\ b \mapsto g(b) = 1 \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} B \rightarrow 2 \\ b \mapsto h(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \text{Im}(f); \\ 0 & \text{si } b \in B \setminus \text{Im}(f). \end{cases} \end{cases}$$

Per com hem definit els conjunts i les aplicacions, $g \circ f = h \circ f$, però $g \neq h$, perquè $g(x) = 1$ i $h(x) = 0$. Per tant, f no és un epimorfisme. Aleshores, f ha de ser sobrejectiva, ja que per hipòtesi teníem que f és un epimorfisme. $\square$

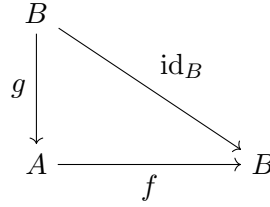
PROPOSICIÓ 4.27. *Siguen A, B, C tres conjunts, $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ aplicacions. Aleshores:*

- (1) id_A és epimorfisme.
- (2) Si f i g són epimorfismes, aleshores $g \circ f$ és un epimorfisme.
- (3) Si $g \circ f$ és un epimorfisme, aleshores g és un epimorfisme.

DEMOSTRACIÓ. La demostració és anàloga a la demostració de la Proposició 4.23. $\square$

A continuació introduïm el concepte de retracció.

DEFINICIÓ 4.28. *Una aplicació $f: A \rightarrow B$ és una retracció o invertible per la dreta si existeix una aplicació $g: B \rightarrow A$ tal que el següent diagrama commuta.*



Així, $f: A \longrightarrow B$ és una retracció si, i només si,

$$\exists g: B \longrightarrow A \ (f \circ g = \text{id}_B).$$

Observem que, perquè $f: A \longrightarrow B$ siga una retracció, només exigim que existisca una aplicació $g: B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \text{id}_B$, però aquesta aplicació no té per què ser única.

PROPOSICIÓ 4.29. *Tota retracció és un epimorfisme*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que f és una retracció qualsevol. Volem demostrar que és un epimorfisme. Per la definició de retracció, siguen A i B dos conjunts i $f: A \longrightarrow B$, aleshores existeix una aplicació $g: B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \text{id}_B$.

Volem demostrar que per a dues aplicacions $h_1, h_2: B \longrightarrow X$ qualsevol, si $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, aleshores $h_1 = h_2$. Componem per la dreta per g

$$h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g)$$

Per hipòtesi, $f \circ g$ és igual a la identitat de B . Per tant, obtenim que h_1 és igual a h_2 . $\square$

4. L'axioma d'elecció

El recíproc de la Proposició 4.29 requereix la introducció d'un nou axioma, l'axioma d'Elecció. Aleshores, en aquesta secció enunciem l'Axioma d'elecció de Zermelo i veurem una forma equivalent de presentar aquest axioma.

Axioma d'elecció de Zermelo. Siga $\mathcal{X}$ tal que $\emptyset \notin \mathcal{X}$ i $\text{Disj}(\mathcal{X})$, aleshores existeix una funció

$$F: \mathcal{X} \longrightarrow \bigcup \mathcal{X}$$

On, per a cada $X \in \mathcal{X}$, $F(X) \in X$. Equivalentment,

$$\forall \mathcal{X} \left((\emptyset \notin \mathcal{X} \wedge \text{Disj}(\mathcal{X})) \rightarrow \exists F: \mathcal{X} \longrightarrow \bigcup \mathcal{X} \ (\forall X \in \mathcal{X} \ (F(X) \in X)) \right). \quad (9)$$

A una funció d'aquest tipus l'anomenarem, aplicació d'elecció per al conjunt $\mathcal{X}$.

TEOREMA 4.30. *L'Axioma d'elecció (9) és equivalent a què tot epimorfisme és una retracció.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Primerament, suposem l'Axioma d'elecció (9). Siga f un epimorfisme aleshores, per a tot conjunt X i per a dues aplicacions qualsevol $h_1, h_2: B \rightarrow X$ si $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, es té que $h_1 = h_2$. Volem demostrar que f és una retracció, és a dir, volem trobar $g: B \rightarrow A$ tal que $f \circ g = \text{id}_B$.

Com f és un epimorfisme, aleshores, emprant la Proposició 4.26, f és sobrejectiva. Per tant, per a tot $b \in B$, existeix un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Per tant, per a tot $b \in B$, $f^{-1}[\{b\}]$ tindrà com a mínim un element, és a dir, serà diferent del buit. Considerem el conjunt:

$$\mathcal{X} = \{ f^{-1}[\{b\}] \mid b \in B \}.$$

Notem que $\emptyset$ no serà un element de $\mathcal{X}$. A més, com f és aplicació, aleshores els elements de $\mathcal{X}$ són disjunts dos a dos. Ja que, si $f^{-1}[\{b\}] \neq f^{-1}[\{b'\}]$, aleshores la intersecció de $f^{-1}[\{b\}]$ amb $f^{-1}[\{b'\}]$ és buida, perquè f és una aplicació. Per tant, podem aplicar l'Axioma d'elecció (9). Existeix una aplicació $F: \mathcal{X} \rightarrow \bigcup \mathcal{X}$, tal que $F[X]$ està contingut en X , per a tot X en $\mathcal{X}$. Recordem que volem demostrar que f és retracció. Observem que si prenem l'aplicació $g: B \rightarrow A$ tal que la imatge d'un $b \in B$ és $F(f^{-1}[\{b\}])$ aleshores:

$$(f \circ g)(b) = f(F(f^{-1}[\{b\}])).$$

Denotem $F(f^{-1}[\{b\}])$ com a' . Observem que a' pertany a $f^{-1}[\{b\}]$, per la definició de l'aplicació d'elecció. Per tant, $f(a') = b$. És a dir, $f \circ g = \text{id}_B$. Queda demostrat que f és retracció.

Demostrem l'altra implicació. Suposem que tot epimorfisme és retracció i demostrem l'Axioma d'elecció (9).

Considerem $\mathcal{X}$ un conjunt tal que $\emptyset$ no hi pertany i tal que $\text{Disj}(\mathcal{X})$. Volem demostrar que existeix una aplicació $F: \mathcal{X} \rightarrow \bigcup \mathcal{X}$ tal que, per a tot X en $\mathcal{X}$, aleshores $F[X]$ pertany a X .

Considerem $f: \bigcup \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ on, si t és un element de $\bigcup \mathcal{X}$, aleshores $f(t) = X$, on X és l'únic $X \in \mathcal{X}$ tal que $t \in X$. Aquest conjunt existeix per la condició de $\text{Disj}(\mathcal{X})$.

Demostrem que f és epimorfisme. Emprant la Proposició 4.26, sabem que açò és equivalent a demostrar que f és sobrejectiva. Per tant, siga X un element de $\mathcal{X}$, aleshores $X \neq \emptyset$, perquè $\emptyset$ no pertany a $\mathcal{X}$. Aleshores, existeix un conjunt t que pertany a X . Comprovem que $f(t) = X$. Suposem que $f(t) = X'$ on $X' \in \mathcal{X}$ i $t \in X'$. Com $\mathcal{X}$ és disjunt, aleshores, com t pertany a X i a X' , arribem a que $X = X'$. Per tant, necessàriament, $f(t) = X$ on $t \in X$. Per tant, f és sobrejectiva, aleshores f és un epimorfisme. Per la hipòtesi, tot epimorfisme és una retracció, aleshores existeix una aplicació $g: \mathcal{X} \rightarrow \bigcup \mathcal{X}$ tal que $f \circ g = \text{id}_{\mathcal{X}}$. Així, per a tot X element de $\mathcal{X}$

$$(f \circ g)(X) = \text{id}_{\mathcal{X}}(X) = X.$$

Per tant, $g(X) \in X$. Hem trobat l'aplicació d'elecció que buscàvem. $\square$

5. Isomorfismes i bimorfismes

Fins ara hem definit els conceptes de secció, retracció i, per altra banda, monomorfisme i epimorfisme, i les equivalències entre aquests conceptes.

A continuació, definim el concepte d'isomorfisme i bimorfisme, que podem considerar-los la síntesi de les relacions duals anteriors. Demostrem que els conceptes d'isomorfisme i bimorfismes són equivalents.

DEFINICIÓ 4.31. Una aplicació $f: A \rightarrow B$ és un isomorfisme si existeix una aplicació $g: B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$ i $f \circ g = \text{id}_B$. A més, direm que una aplicació $f: A \rightarrow B$ és bijectiva o és un bimorfisme si f és un monomorfisme i epimorfisme.

PROPOSICIÓ 4.32. Siguen $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ i $h: B \rightarrow A$ aplicacions tal que es compleix que $g \circ f = \text{id}_A$ i $f \circ h = \text{id}_B$, aleshores $g = h$.

DEMOSTRACIÓ. Com l'aplicació f és una retracció, aleshores, per la Proposició 4.29, f és un epimorfisme. Per tant, si tenim dues aplicacions $g, h: B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = h \circ f$, aleshores $g = h$.

A més, com tenim que $g \circ h = \text{id}_B$, aleshores:

$$f \circ (g \circ f) = f \circ (\text{id}_A) = f = (\text{id}_B) \circ f = f \circ (h \circ f).$$

Per tant, $g \circ f = h \circ f$. Aleshores, les aplicacions g i h són iguals. $\square$

COROLLARI 4.33. Siguen $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ i $h: B \rightarrow A$ tres aplicacions que satisfan

$$g \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

$$h \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ h = \text{id}_B.$$

Aleshores $g = h$. Per tant, si $f: A \rightarrow B$ és un isomorfisme, aleshores existeix una única aplicació que anomenem la inversa d' f i denotem per f^{-1} de B en A , tal que $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ i $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$. És a dir, existeix una única aplicació tal que els següents diagrames commuten:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \text{id}_A & \downarrow f^{-1} \\ & & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f^{-1}} & A \\ & \searrow \text{id}_B & \downarrow f \\ & & B \end{array}$$

Demostrem a continuació que una condició necessària i suficient perquè una aplicació siga un isomorfisme és que siga secció i retracció.

PROPOSICIÓ 4.34. Una aplicació és un isomorfisme si, i només si, és una secció i una retracció.

DEMOSTRACIÓ. Denotem per f l'aplicació de l'enunciat. Recordem que la condició necessària i suficient perquè f siga una secció és que siga un monomorfisme i que no siga l'única aplicació del buit a un conjunt no buit, gràcies a la Proposició 4.24. Per altra banda, també recordarem que f és una retracció si, i només si, és un epimorfisme.

Així, obtenim l'equivalència que volíem. $\square$

A continuació, donem altra caracterització dels isomorfismes emprant les equivalències entre monomorfisme i injectiva i per altra banda, epimorfisme i sobrejectiva.

PROPOSICIÓ 4.35. *Una condició necessària i suficient perquè una aplicació siga un isomorfisme és que siga una bijectió.*

DEMOSTRACIÓ. La demostració és immediata emprant resultats anteriors. Per tant, emprarem la Proposició 4.34, la Proposició 4.19, la qual ens diu que una aplicació és injectiva si, i només si, és un monomorfisme. També, la Proposició 4.24, una aplicació serà una secció si, i només si, és un monomorfisme i no és l'única aplicació del conjunt buit a un conjunt no buit. Emprem també la Proposició 4.26, una aplicació és sobrejectiva si, i només si, és un epimorfisme. I per últim, emprem la Proposició 4.29, on una aplicació serà una retracció si i només si, és un epimorfisme.

$$\begin{aligned} \text{isomorfisme} &\iff \begin{cases} \text{secció } i \\ \text{retracció} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \text{monomorfisme } i \\ \text{epimorfisme} \end{cases} & (4.24, 4.29) \\ &\iff \begin{cases} \text{injectiva } i \\ \text{sobrejectiva} \end{cases} & (4.19, 4.26) \end{aligned}$$

Queda demostrada la proposició, ja que si una aplicació és injectiva i sobrejectiva, aleshores és bijectiva. $\square$

PROPOSICIÓ 4.36. *Siguen A , B , C conjunts, $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ aplicacions, aleshores:*

- (1) id_A és un isomorfisme.
- (2) Si f i g són bijectcions, aleshores $g \circ f$ és una bijectió i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- (3) Si f és una bijectió, aleshores f^{-1} és una bijectió i $(f^{-1})^{-1} = f$.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Demostrem que id_A és un isomorfisme. id_A és bijectiva, és a dir, injectiva i sobrejectiva. Aleshores emprant la Proposició 4.35 és un isomorfisme.
- (2) Demostrem que $g \circ f$ és una bijectió, és a dir, injectiva i sobrejectiva. Primerament, demostrem que és injectiva. Per a tot $x, y \in A$, si $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ aleshores $x = y$.

$$g(f(x)) = g(f(y)),$$

Com g és injectiva, $f(x) = f(y)$. Com f és injectiva, aleshores $x = y$.

Demostrem que és sobrejectiva. Per a tot $c \in C$ aleshores existeix un a element d' A , tal que $(g \circ f)(a) = c$. Com g és sobrejectiva, sabem que per a tot c element de C aleshores existeix un b element de B tal que $g(b) = c$. Com f és sobrejectiva, aleshores, per a tot element de B , prenem l'element b que teníem, existeix un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Per tant,

$$g(f(a)) = c.$$

Per a tot c element de C existeix un a element d' A tal que $(g \circ f)(a) = c$.

Demostrem per últim que $f^{-1} \circ g^{-1}$ és la inversa de $g \circ f$. Aleshores calculem que obtenim al compondre $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}.$$

Com f^{-1} és la inversa de f aleshores, $f^{-1} \circ f = \text{id}_B$.

$$g \circ (\text{id}_B) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_C.$$

- L'altra composició és anàloga. Aleshores $(f^{-1} \circ g^{-1}) = (g \circ f)^{-1}$.
- (3) Demostrem que f^{-1} és injectiva i sobrejectiva. Primerament demostrem que és injectiva. Aleshores, suposem $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$ per a dos conjunts x i y que pertanyen a B . Aleshores:

$$f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)).$$

Aleshores $x = y$. Demostrem que és sobrejectiva. Aleshores, com f és sobrejectiva, per a tot $b \in B$ existeix un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Així,

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b).$$

Aleshores, f^{-1} és sobrejectiva.

Queden, així, demostrades les propietats enunciades. $\square$

Definim el concepte que dos conjunts siguin isomorfs.

DEFINICIÓ 4.37. *Considerem A i B dos conjunts. Aleshores direm que A i B són isomorfs o equipotents si existeix un isomorfisme d' A en B . Denotem aquesta condició per $A \cong B$.*

PROPOSICIÓ 4.38. *Siguin A , B , C tres conjunts. Aleshores:*

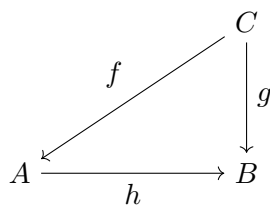
- (1) $A \cong A$.
- (2) Si $A \cong B$ aleshores $B \cong A$.
- (3) Si $A \cong B$ i $B \cong C$, aleshores $A \cong C$.

6. Factorització a través de la imatge

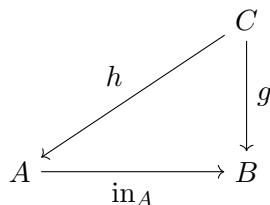
Per estudiar les aplicacions convé factoritzar-les en altres aplicacions que tinguin característiques concretes. A més, en aquesta secció definim la propietat universal que tenen els subconjunts.

PROPOSICIÓ 4.39. *Siguen A , B , C tres conjunts, $f: A \rightarrow B$ una aplicació injectiva i $g: C \rightarrow B$ una aplicació. Aleshores:*

- (1) *Una condició necessària i suficient perquè existisca una aplicació $h: C \rightarrow A$ tal que el següent diagrama commute és que $\text{Im}(g) \subseteq \text{Im}(f)$.*



- (2) *Propietat universal del subconjunt. Si $A \subseteq B$, aleshores una condició necessària i suficient perquè existisca una aplicació $h: C \rightarrow A$ tal que el següent diagrama commute és que $\text{Im}(g) \subseteq A$.*



DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera condició. Suposem que $\text{Im}(g)$ està inclòs en $\text{Im}(f)$, aleshores per a cada $c \in C$, aleshores existeix un únic $a \in A$, tal que $g(c) = f(a)$, perquè f és injectiva. A més, recordem que, per a un conjunt x , $\bigcup \{x\} = x$. Aleshores, definim l'aplicació $h: C \rightarrow A$ com:

$$h(c) = \bigcup \{ a \in A \mid g(c) = f(a) \}.$$

Amb aquesta definició tenim $f \circ h = g$. A més, com f és injectiva l'aplicació que trobem ha de ser única.

Demostrem la segona propietat. Suposem que $\text{Im}(g)$ està inclòs en A , així, per a cada $c \in C$, existeix un únic $a \in A$ tal que $g(c) = a$. De la mateixa manera que hem fet en la demostració de la primera propietat, definim l'aplicació h com:

$$h(c) = \{ a \in A \mid g(c) = a \}.$$

Per tant, el diagrama commutarà. □

7. Relacions d'equivalència i particions

Una partició d'un conjunt és una distribució dels seus elements en subconjunts no buits, tal que aquestes parts són disjunts dos a dos. Aquesta noció la formalitzarem a continuació amb el concepte de relació d'equivalència. Posteriorment demostrarem que és l'equivalent al concepte de partició.

DEFINICIÓ 4.40. *Siga A un conjunt, R una relació (binària) en A . Direm que R és una relació d'equivalència sobre A o que és una classificació d' A si satisfà:*

- (1) R és reflexiva. És a dir, per a tot membre x d' A , $(x, x) \in R$. O l'equivalent, $\Delta_A \subseteq R$, és a dir, que la diagonal d' A siga un subconjunt del conjunt que forma la relació R .
- (2) R és simètrica. $\forall x, y \in A$ ($(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$). O el que és equivalent, que $R^{-1} \subseteq R$.
- (3) R és transitiva. És a dir, $\forall x, y, z \in A$ ($(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$) $\rightarrow (x, z) \in R$, o el que és equivalent, $R \circ R \subseteq R$.

Denotarem per $\text{Eqv}(A)$ el conjunt de les relacions d'equivalència sobre A . A més, si $R \in \text{Eqv}(A)$, aleshores el parell ordenat (A, R) el denominem conjunt classificat.

Per altra banda, si (A, R) i (B, S) són dos conjunts classificats, un monomorfisme de (A, R) en (B, S) és una tripla ordenada $((A, R), f, (B, S))$ denotada per $f: (A, R) \rightarrow (B, S)$, on f és una aplicació d' A en B tal que:

$$\forall x, y \in A \quad ((x, y) \in R \rightarrow ((f(x), f(y)) \in S)).$$

A continuació, enunciem les propietats més rellevants de les relacions d'equivalència.

PROPOSICIÓ 4.41. *Siga A un conjunt, aleshores es compleix:*

- (1) Δ_A i $A \times A$, aquest últim també el denominarem la codiagonal d' A són relacions d'equivalència sobre A . A més, respecte a la inclusió, la diagonal és la mínima, i la codiagonal la màxima relació d'equivalència.
- (2) Si $\mathcal{R} \subseteq \text{Eqv}(A)$ i $\mathcal{R} \neq \emptyset$, aleshores $\bigcap_{R \in \mathcal{R}} R \in \text{Eqv}(A)$.
- (3) Si $\mathcal{R} \subseteq \text{Eqv}(A)$ i a més, $\mathcal{R} \neq \emptyset$, aleshores, si donades $R, S \in \mathcal{R}$, existeix un $T \in \mathcal{R}$ tal que $R \cup S \subseteq T$, aleshores $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \in \text{Eqv}(A)$.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Demostrem que la diagonal és una relació d'equivalència. Hem de comprovar que és reflexiva, simètrica i transitiva.

En primer lloc, observem que $\Delta_A \subseteq \Delta_A$, i per tant, és reflexiva.

Per altra banda, la relació inversa de la diagonal d' A és la diagonal d' A . Per tant, la relació inversa està continguda en la relació. Aleshores, és simètrica.

Ens queda demostrar que és transitiva. Siguen dos elements de Δ_A , per tant, seran de la forma (x, x) i (y, y) , on x i y són

elements d' A . Aleshores, per demostrar que és transitiva, la segona coordenada de (x, x) ha de ser igual a la primera coordenada de (y, y) . Per tant $x = y$, aleshores, (x, x) pertany a la diagonal d' A . Aleshores, és transitiva.

Demostrem ara que la codiagonal, $A \times A$ és una relació d'equivalència.

Primerament, per a tot x element d' A , (x, x) és un element de $A \times A$. Per tant, és reflexiva.

Per altra banda, siguin x i y dos elements d' A qualsevol. Suposem (x, y) pertany a $A \times A$. Aleshores x, y són dos elements d' A , i, per tant, (y, x) pertany a $A \times A$. Podem concloure que és simètrica.

Per últim, ens queda demostrar que és transitiva. Siguin x, y, z tres conjunts que pertanyen a A . Suposem que (x, y) i (y, z) són dos elements de $A \times A$. Aleshores, com x, z són elements d' A obtenim que (x, z) també pertany a $A \times A$. Per tant, és transitiva.

- (2) Si $\mathcal{R} \subseteq \text{Eqv}(A)$ i $\mathcal{R} \neq \emptyset$ aleshores $\bigcap_{R \in \mathcal{R}} R \in \text{Eqv}(A)$. Recordem la definició d'intersecció:

$$\bigcap_{R \in \mathcal{R}} R = \bigcap \{ R \mid R \in \mathcal{R} \} = \{ t \mid \forall R (R \in \mathcal{R} \rightarrow t \in R) \}.$$

Recordem que les relacions en $\mathcal{R}$ són relacions d'equivalència, i, per tant, tots els parells ordenats que formen aquestes relacions satisfan les tres condicions, reflexiva, simètrica i transitiva. Per tant, la intersecció arbitrària de relacions d'equivalència és una relació d'equivalència.

- (3) $\mathcal{R}$ és un subconjunt d' $\text{Eqv}(A)$, on $\mathcal{R}$ és un conjunt diferent del buit. A més, suposem que si R i S són dos elements de $\mathcal{R}$, aleshores existeix un T tal que $R \cup S$ està inclosa en T . Hem demostrat que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \in \text{Eqv}(A)$. Recordem la definició d'aquest últim conjunt

$$\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = \bigcup \{ R \mid R \in \mathcal{R} \} = \{ t \mid \exists R (t \in R \wedge R \in \mathcal{R}) \}.$$

Demostrem que la unió és una relació d'equivalència. Notem que per a cada propietat que defineix una relació d'equivalència el que farem serà agafar elements t i s en $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$, aleshores existeixen dues relacions d'equivalència R que conté a t i S que conté a s . Per tant, t i s pertanyen a $R \cup S$ que, per la propietat de l'enunciat sabem que existeix una relació d'equivalència T que inclou aquesta unió. Aleshores, com T és una relació d'equivalència, totes les propietats se satisfan en T i per tant, la unió és una relació d'equivalència.

Donem per finalitzada la demostració. □

A continuació, estudiem la mínima relació d'equivalència sobre un conjunt que conté una relació donada.

COROLLARI 4.42. *Siga A un conjunt i R una relació en A . Aleshores es compleix que $\bigcap \{ E \in \text{Eqv}(A) \mid R \subseteq E \}$ és la mínima relació d'equivalència sobre A que conté a R . Denominem a aquesta relació d'equivalència sobre A , la relació d'equivalència generada per R i la denotem per $\text{Eg}_A(R)$.*

PROPOSICIÓ 4.43. *Siga A un conjunt. Aleshores l'endoaplicació Eg_A , del conjunt $\text{Sub}(A \times A)$, definida com:*

$$\begin{cases} \text{Sub}(A \times A) \longrightarrow \text{Sub}(A \times A) \\ R \longmapsto \bigcap \{ E \in \text{Eqv}(A) \mid R \subseteq E \} \end{cases}$$

Té les següents propietats:

- (1) $\text{Im}(\text{Eg}_A) \subseteq \text{Eqv}(A)$.
- (2) $\{ R \in \text{Sub}(A \times A) \mid R = \text{Eg}_A(R) \} = \text{Eqv}(A)$.
- (3) Eg_A és extensiva. És a dir, per a cada $R \in \text{Sub}(A \times A)$, aleshores $R \subseteq \text{Eg}_A(R)$.
- (4) Eg_A és isòtona. És a dir, per a cada $R, S \in \text{Sub}(A \times A)$, si $R \subseteq S$ aleshores $\text{Eg}_A(R) \subseteq \text{Eg}_A(S)$.

DEMOSTRACIÓ. La primera propietat es demostra de manera immediata emprant la segona propietat de la Proposició 4.41.

Per demostrar la segona propietat hem de demostrar que el conjunt

$$\{ R \in \text{Sub}(A \times A) \mid R = \text{Eg}_A(R) \},$$

és el conjunt de les relacions d'equivalència sobre A . Aleshores, siga un R que pertany a l'anterior conjunt, aleshores R ha de complir que és igual a $\text{Eg}_A(R) = \bigcap \{ E \in \text{Eqv}(A) \mid R \subseteq E \}$. Per tant, és una relació d'equivalència sobre A en virtut de la segona propietat de la Proposició 4.41. Demostrem l'altra inclusió. Siga R una relació d'equivalència. Aleshores, $R \in \text{Sub}(A \times A)$, per la definició de relació. A més, $R = \text{Eg}_A(R)$, ja que la intersecció de relacions d'equivalència que contenen a R serà R .

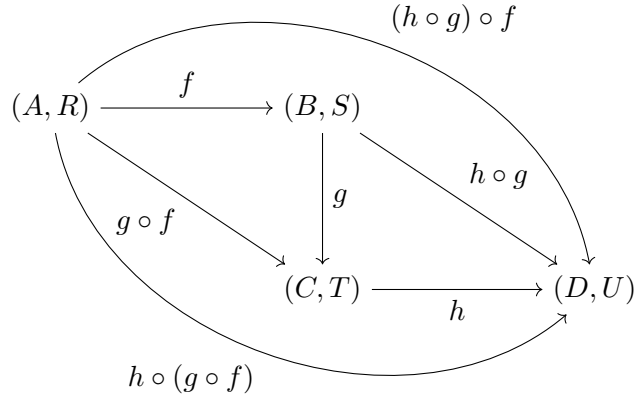
Demostrem la tercera propietat. Aleshores, per a cada $R \in \text{Sub}(A \times A)$, hem de demostrar que R és un subconjunt d' $\text{Eg}_A(R)$. Siga $R \in \text{Sub}(A \times A)$, R és una relació d'equivalència i, a més, R està continguda en R .

Demostrem que Eg_A és isòtona. Siguen $R, S \in \text{Sub}(A \times A)$ tal que $R \subseteq S$. Siga E un element de $\text{Eg}_A(R)$, aleshores E és una relació d'equivalència sobre A . A més, la relació R està continguda en E per la definició de $\text{Eg}_A(R)$. $\square$

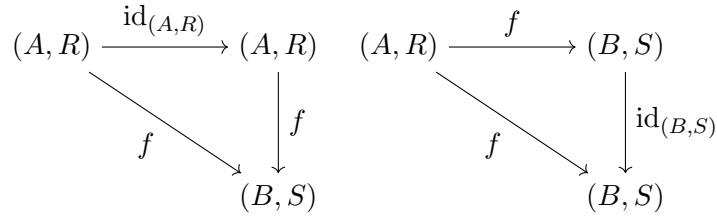
PROPOSICIÓ 4.44. *Siguen (A, R) , (B, S) , (C, T) , (D, U) quatre conjunts classificats, f un monomorfisme de (A, R) a (B, S) , g un monomorfisme de (B, S) en (C, T) i h un monomorfisme de (C, T) en (D, U) . Aleshores:*

- (1) $\text{id}_{(A, R)}: (A, R) \longrightarrow (A, R)$ és un endomorfisme de (A, R) .
- (2) $g \circ f: (A, R) \longrightarrow (C, T)$ és un monomorfisme de (A, R) en (C, T) .

(3) *Propietat associativa. El següent diagrama commuta.*



(4) *Neutres. Els diagrames següents commuten.*



A continuació, enunciem la condició necessària i suficient perquè la composició de dues relacions d'equivalència siga relació d'equivalència.

PROPOSICIÓ 4.45. *Siga un conjunt A i R i S dues relacions d'equivalència sobre A . Aleshores $R \circ S$ és una relació d'equivalència si, i només si, $R \circ S = S \circ R$.*

DEMOSTRACIÓ. Recordem la definició de la composició de dues relacions:

$$R \circ S = \{ (x, z) \in \text{Dom}(S) \times \text{Im}(R) \mid \exists y \ ((x, y) \in S \wedge (y, z) \in R) \}.$$

Sabem que si R i S són relacions, aleshores la seua composició també és una relació.

Demostrem les dues implicacions. Suposem que $R \circ S = S \circ R$ i hem de demostrar que $R \circ S$ és una relació d'equivalència. Per tant, $R \circ S$ ha de ser reflexiva, simètrica i transitiva.

Per a ser reflexiva, la diagonal d' A ha d'estar continguda en la relació $R \circ S$. Com R i S són relacions d'equivalència, aleshores aquesta condició es compleix.

Per a ser simètrica, $(R \circ S)^{-1}$ ha d'estar inclòs en $R \circ S$. Aleshores

$$(R \circ S)^{-1} = (S \circ R)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Com R i S són relacions d'equivalència aleshores tenim que $S^{-1} \subseteq S$ i que $R^{-1} \subseteq R$. Aleshores tenim $(R \circ S)^{-1} \subseteq R \circ S$ i satisfà la propietat simètrica.

Per últim, hem de demostrar la transitivitat. És a dir, hem de demostrar que $(R \circ S) \circ (R \circ S)$ està inclosa en $R \circ S$.

$$(R \circ S) \circ (R \circ S) = R \circ (S \circ R) \circ S.$$

Per hipòtesi, $R \circ S$ és igual a $S \circ R$, aleshores,

$$R \circ (R \circ S) \circ S = (R \circ R) \circ (S \circ S).$$

Com R i S són relacions d'equivalència les composicions estan incloses, respectivament en R i S .

Per tant, satisfà la propietat transitiva. Per tant, $R \circ S$ és una relació d'equivalència.

Suposem ara que $R \circ S$ és una relació d'equivalència i volem demostrar que $R \circ S = S \circ R$.

Per ser $R \circ S$ una relació d'equivalència ha de ser reflexiva, simètrica i transitiva. Per tant, ha de satisfer que Δ_A està continguda en $R \circ S$. A més

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq R \circ S.$$

I per últim,

$$(R \circ S) \circ (R \circ S) \subseteq R \circ S.$$

Tenint en compte les condicions que ha de satisfer la relació d'equivalència, necessàriament $R \circ S = S \circ R$. $\square$

A continuació, enunciem el concepte de partició d'un conjunt. A més, demostrarem que aquest concepte és equivalent al de relació d'equivalència sobre un conjunt.

DEFINICIÓ 4.46. *Siga un conjunt A i $\mathcal{P} \subseteq \text{Sub}(A)$. Direm que $\mathcal{P}$ és una partició d' A si satisfà les següents condicions:*

- (1) $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
- (2) $\forall X, Y \in \mathcal{P} \ (X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset)$.
- (3) $\bigcup \mathcal{P} = A$.

Denotem per $\text{Part}(A)$ el conjunt de particions d' A .

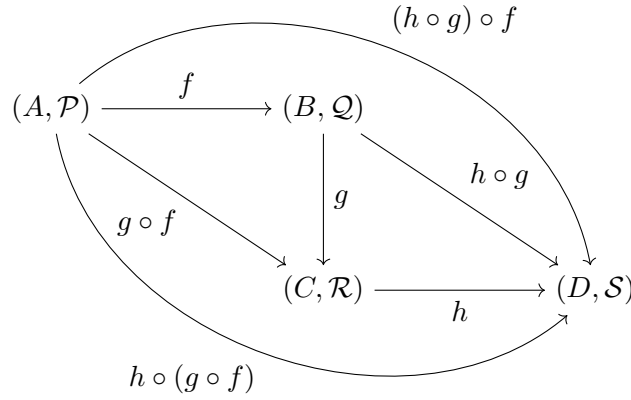
Siga $\mathcal{P} \in \text{Part}(A)$, aleshores, el parell ordenat $(A, \mathcal{P})$ el denominem espai estratificat. A més, si $(A, \mathcal{P})$ i $(B, \mathcal{Q})$ són dos espais estratificats, un monomorfisme de $(A, \mathcal{P})$ en $(B, \mathcal{Q})$ és una tripla ordenada $((A, \mathcal{P}), f, (B, \mathcal{Q}))$, Aquesta tripla la denotem per $f: (A, \mathcal{P}) \rightarrow (B, \mathcal{Q})$, on f és una aplicació d' A en B tal que:

$$\forall P \in \mathcal{P} \ \exists Q \in \mathcal{Q} \ (f[P] \subseteq Q).$$

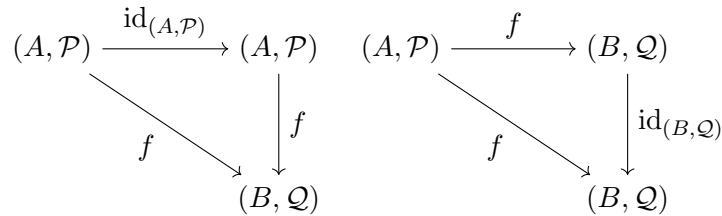
A més, si A és el conjunt buit, aleshores $\text{Sub}(A) = \{\emptyset\}$. Per tant, l'únic subconjunt $\mathcal{P}$ de $\{\emptyset\}$, que siga partició, és $\emptyset$. És a dir, $\text{Part}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

PROPOSICIÓ 4.47. *Siguen $(A, \mathcal{P})$, $(B, \mathcal{Q})$, $(C, \mathcal{R})$, $(D, \mathcal{S})$, quatre espais estratificats, f un monomorfisme de l'espai estratificat $(A, \mathcal{P})$ en $(B, \mathcal{Q})$, g un monomorfisme de $(B, \mathcal{Q})$ en $(C, \mathcal{R})$ i h un monomorfisme de $(C, \mathcal{R})$ en $(D, \mathcal{S})$, aleshores:*

- (1) $\text{id}_{(A, \mathcal{P})}: (A, \mathcal{P}) \rightarrow (A, \mathcal{P})$ és un endomorfisme de l'espai estratificat $(A, \mathcal{P})$.
- (2) $g \circ f: (A, \mathcal{P}) \rightarrow (C, \mathcal{R})$ és un monomorfisme de $(A, \mathcal{P})$ en $(C, \mathcal{R})$.
- (3) Propietat associativa. El següent diagrama commuta.



- (4) Neutres. Els diagrames següents commuten.



A continuació, enunciem dos lemes que ens permetran obtenir relacions d'equivalència i particions sobre el domini d'una aplicació quan el codomini d'aquesta tinga una relació d'equivalència o una partició.

LEMA 4.48. *Siga A un conjunt, (B, S) un conjunt classificat, és a dir, S és una relació d'equivalència sobre B , i $f: A \rightarrow B$ una aplicació, que indiquem com*

$$f: A \rightarrow (B, S)$$

Aleshores, hi ha un alçament optimal de S a través de f . És a dir, que existeix una relació d'equivalència sobre A , denotada per $L^f(S)$ per a la que $((A, L^f(S)), f, (B, S))$ és un monomorfisme del conjunt classificat $(A, L^f(S))$ en el conjunt classificat (B, S) . Per a cada conjunt classificat (C, T) i cada aplicació $g: C \rightarrow A$, si $((C, T), f \circ g, (B, S))$ és un monomorfisme de (C, T) en (B, S) , aleshores $((C, T), g, (A, L^f(S)))$ ho és de (C, T) en $(A, L^f(S))$. A més, se satisfà:

(1) Per a cada relació d'equivalència $R \in \text{Eqv}(A)$:

$$L^f(R) = R.$$

(2) Si $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow A$ són aplicacions, i $T \in \text{Eqv}(C)$, aleshores:

$$L^{g \circ f}(T) = L^f(L^g(T)).$$

DEMOSTRACIÓ. És suficient prendre com a $L^f(R)$ la relació definida sobre A següent:

$$L^f(R) = \{ (x, y) \in A \times A \mid (f(x), f(y)) \in R \}.$$

Aquesta relació satisfà totes les propietats enumerades. $\square$

LEMA 4.49. Siga A un conjunt, $(B, \mathcal{Q})$ és un espai estratificat, és a dir, $\mathcal{Q}$ és una partició del conjunt B , i $f: A \rightarrow B$ una aplicació, que indicarem com

$$f: A \rightarrow (B, \mathcal{Q}).$$

Aleshores, hi ha alçament optimal de $\mathcal{Q}$ a través d' f . És a dir, que existeix una relació d'equivalència sobre B , denotada per $L^f(\mathcal{Q})$, per a la que $(A, L^f(\mathcal{Q}), f, (B, \mathcal{Q}))$ és un monomorfisme de l'espai estratificat $(A, L^f(\mathcal{Q}))$ en l'espai estratificat $(B, \mathcal{Q})$. Per a cada espai estratificat $(C, \mathcal{R})$ i per a cada aplicació $g: C \rightarrow A$, si $((C, \mathcal{R}), f \circ g, (B, \mathcal{Q}))$ és un monomorfisme de $(C, \mathcal{R})$ en $(B, \mathcal{Q})$, aleshores, $((C, \mathcal{R}), g, (A, L^f(\mathcal{Q})))$ ho és de $(C, \mathcal{R})$ en $(A, L^f(\mathcal{Q}))$.

DEMOSTRACIÓ. És suficient prendre com a $L^f(\mathcal{Q})$ la partició sobre B definida com:

$$L^f(\mathcal{Q}) = \{ f^{-1}[Q] \mid Q \in \mathcal{Q} \} \setminus \{\emptyset\}.$$

Aquesta relació satisfà totes les propietats enumerades. $\square$

Abans de demostrar l'equivalència definim el concepte de classe d'equivalència.

DEFINICIÓ 4.50. Siga R una relació d'equivalència sobre un conjunt A , denotem per A/R , el conjunt on els seus membres els denominem R -classes d'equivalència. On, si tenim un element x d' A , aleshores la seua R -classe d'equivalència la denotem per $[x]_R$, que és, simplement, $R[x]$. És a dir, el conjunt definit com:

$$[x]_R = \{ y \in A \mid (x, y) \in R \}.$$

A més, denotem per pr_R l'aplicació sobrejectiva d' A en A/R que a un $a \in A$ li assigna $[a]_R$. Aquesta aplicació la denominem la projecció canònica determinada per R .

Finalment demostrem que el conjunt de relacions d'equivalència sobre un conjunt A és bijectiu amb el conjunt de particions sobre aquest conjunt A .

PROPOSICIÓ 4.51. *Siga A un conjunt. Aleshores existeix una bijecció del conjunt $\text{Eqv}(A)$ en el conjunt $\text{Part}(A)$.*

DEMOSTRACIÓ. Definim l'aplicació φ de $\text{Eqv}(A)$ en $\text{Part}(A)$ com:

$$\begin{aligned}\varphi: \text{Eqv}(A) &\longrightarrow \text{Part}(A) \\ R &\longmapsto A/R = \{ [a]_R \mid a \in A \} \subseteq \text{Sub}(A)\end{aligned}$$

Primerament observem que φ està ben definida. Demostrem que A/R és una partició. Observem que $\emptyset$ no pertany a A/R , ja que si a és un element qualsevol d' A , aleshores a pertany a $[a]_R$. Considerem $[a]_R$, $[a']_R$ dos elements de A/R diferents. Aleshores, la intersecció d'aquests dos elements ha de ser buida, ja que, altrament, si existeix un b que pertany a la intersecció, aleshores b pertany a $[a]_R$ i a $[a']_R$, i, per tant, les classes han de ser la mateixa, cosa que no és possible. Per últim, observem que la unió de A/R ens dona A . Siga un x que pertany a la classe $[a]_R$. Aquesta classe pertany a A/R , aleshores x ha de ser necessàriament un element d' A . Per altra banda, si considerem un conjunt a element d' A , aleshores a pertany a la classe $[a]_R$ que és un element de A/R .

Una volta demostrat que està ben definida, aleshores anem a demostrar que és una bijecció. Ho farem donant la seua aplicació inversa.

$$\begin{aligned}\Psi: \text{Part}(A) &\longrightarrow \text{Eqv}(A) \\ \mathcal{P} &\longmapsto R_{\mathcal{P}}\end{aligned}$$

On, siguen a i b dos elements d' A , aleshores, $(a, b) \in R_{\mathcal{P}}$ si, i només si, existeix un conjunt X en $\mathcal{P}$, tal que $a, b \in X$.

Demostrem que, efectivament, $R_{\mathcal{P}}$ és una relació d'equivalència. Comprovem que és reflexiva, simètrica i transitiva.

Demostrem primerament que és reflexiva. Siga a un element d' A , com $\bigcup \mathcal{P} = A$, per la definició de partició, aleshores, existeix un X en $\mathcal{P}$ tal que $a \in X$. Per tant, (a, a) pertany a $R_{\mathcal{P}}$.

Demostrem ara que és simètrica. Siguen a i b dos elements d' A , tals que (a, b) pertany a $R_{\mathcal{P}}$. Aleshores, existeix un conjunt $X \in \mathcal{P}$ tal que a i b són elements de X . Per tant, b i a pertanyen a X , per la definició de la relació $R_{\mathcal{P}}$, aleshores (b, a) pertany a $R_{\mathcal{P}}$.

Per últim demostrem la propietat transitiva. Siguen a, b, c tres conjunts que pertanyen a A , tals que (a, b) i (b, c) són elements de $R_{\mathcal{P}}$. Aleshores, per definició de la relació sabem que existeixen dos conjunts X i X' en $\mathcal{P}$

tal que a i b pertanyen a X i b i c pertanyen a X' . Volem demostrar que (a, c) pertany a la relació, és a dir, volem demostrar que existeix un conjunt en $\mathcal{P}$ que tinga com a elements els conjunts a i c . Observem que $\mathcal{P}$ és una partició i, per tant, els conjunts que la formen són disjunts. Com b pertany a X i a X' , aleshores han de ser el mateix conjunt. Per tant, X compta amb els elements a, b i c . Així, hem trobat el conjunt que volíem.

Ara comprovarem que l'aplicació és la que busquem, és a dir, demostrem que

$$\varphi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Part}(A)}. \quad \Psi \circ \varphi = \text{id}_{\text{Eqv}(A)}.$$

Demostrem primer que $\varphi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Part}(A)}$. Per tant, siga $\mathcal{P}$ un element de $\text{Part}(A)$, aleshores,

$$(\varphi \circ \Psi)(\mathcal{P}) = \varphi(R_{\mathcal{P}}) = A/R_{\mathcal{P}}.$$

Volem veure que $A/R_{\mathcal{P}}$ és igual a $\mathcal{P}$. Demostrem les dues inclusions. Siga X un conjunt que pertany a $\mathcal{P}$. Com $\emptyset$ no pertany a $\mathcal{P}$, aleshores X és un conjunt no buit. Per tant, existeix un x element de X . Aleshores, podem considerar la classe d'aquest element, $[x]_{R_{\mathcal{P}}}$, que és igual a X , per com hem definit la relació d'equivalència. On $[x]_{R_{\mathcal{P}}}$ és un element de $A/R_{\mathcal{P}}$.

Per altra banda, siga $[a]_{R_{\mathcal{P}}}$ un element de $A/R_{\mathcal{P}}$. Recordem la definició de $[a]_{R_{\mathcal{P}}}$:

$$[a]_{R_{\mathcal{P}}} = \{ b \in A \mid \exists X \in \mathcal{P} (a, b \in X) \} = X.$$

Aleshores, a pertany a $[a]_{R_{\mathcal{P}}}$.

Demostrem ara que $\Psi \circ \varphi = \text{id}_{\text{Eqv}(A)}$. Siga R un element de $\text{Eqv}(A)$, aleshores

$$(\Psi \circ \varphi)(R) = \Psi(A/R).$$

Recordem que Ψ ens defineix una relació. Aleshores, siguen a i b dos elements d' A , el parell ordenat (a, b) pertany a $\Psi(A/R)$ si, i només si, existeix un conjunt X que pertany a A/R tal que a, b pertanyen a X . Per tant, comprovem si $\Psi(A/R) = R$. Considerem el parell ordenat $(a, b) \in \Psi(A/R)$, aleshores existeix $[c]_R$ element de A/R . Aleshores, a i b han de pertànyer a R . Ara provem l'altra inclusió, suposem (a, b) element de la relació R . Per tant, a, b pertanyen a $[a]_R$. On $[a]_R$ que pertany a A/R . Per tant, queda demostrada aquesta inclusió.

Així, hem demostrat les dues composicions, i per tant, podem concloure que $\text{Eqv}(A)$ i $\text{Part}(A)$ són bijectius. $\square$

8. Factorització a través de la coimatge

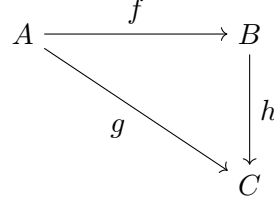
En aquesta secció demostrem l'existència de la factorització d'una aplicació a través d'un conjunt quocient del seu domini. La demostració la podrem dur a terme emprant, entre altres nocions, el concepte de relació d'equivalència.

Demostrem la propietat universal que tenen el conjunts quocients amb les relacions d'equivalència. Aquesta propietat l'emprarem posteriorment

per a demostrar la descomposició d'aplicacions a través de la coimatge en la composició de dues aplicacions, una sobrejectiva i una injectiva.

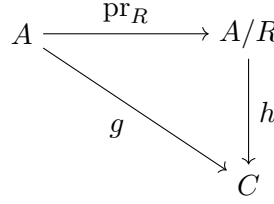
PROPOSICIÓ 4.52. *Siguen A , B i C tres conjunts, $f: A \longrightarrow B$ una aplicació sobrejectiva i $g: A \longrightarrow C$ una aplicació. Aleshores:*

- (1) *Existeix l'aplicació $h: B \longrightarrow C$ tal que el diagrama*



commuta si, i només si, per a cada $x, y \in A$ si $f(x) = f(y)$ aleshores $g(x) = g(y)$.

- (2) *Propietat universal del quocient. Si $R \in \text{Eqv}(A)$, aleshores existeix una aplicació h de A/R en C tal que el diagrama*



commuta si, i només si, per a cada $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$, aleshores $g(x) = g(y)$.

En els dos casos l'aplicació h està unívocament determinada.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Demostrem les dues implicacions. Suposem que el diagrama commuta. Per tant, $h \circ f = g$. Volem demostrar que, per a cada conjunt $x, y \in A$, si $f(x) = f(y)$ aleshores $g(x) = g(y)$. Suposem que $f(x) = f(y)$ aleshores $h(f(x)) = h(f(y))$, que per hipòtesi és igual a g . Per tant, $g(x) = g(y)$.

Per contra suposem que per a tot $x, y \in A$, si $f(x) = f(y)$ aleshores $g(x) = g(y)$. Volem construir una aplicació $h: B \longrightarrow C$ tal que $h \circ f = g$. Siga $b \in B$, com f és sobrejectiva aleshores existeix un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Per tant, definim $h(b)$ com $g(a)$. Notem que si a i a' són elements en A tals que $f(a) = f(a') = b$, aleshores $g(a) = g(a')$. Així, h està ben definida i $h \circ f = g$.

- (2) La demostració de la segona propietat és conseqüència d'1. Notem que $\text{pr}_R(x) = \text{pr}_R(y)$ si, i només si, $(x, y) \in R$.

Queden, així, demostrades les propietats. $\square$

Una volta definida la propietat universal del quocient, podem definir la factorització canònica d'una aplicació a través de la coimatge, on aquesta és essencialment el màxim quocient del domini de l'aplicació.

COROLLARI 4.53. *Considerem f una aplicació d' A en B . Definirem el conjunt $\text{Ker}(f)$ com:*

$$\text{Ker}(f) = \{ (x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \}.$$

Aquest conjunt el denominem el nucli de l'aplicació f .

A més, $\text{Ker}(f)$ és una relació d'equivalència sobre A i existeix una única aplicació injectiva f^i , que anomenem injectivitzada de f , de $A/\text{Ker}(f)$ en B tal que el següent diagrama commuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \text{pr}_{\text{Ker}(f)} & \uparrow f^i \\ & & A/\text{Ker}(f) \end{array}$$

Aquesta és la factorització canònica a través de la coimatge d'una aplicació.

A més, si f és sobrejectiva, aleshores f^i és sobrejectiva, i per tant, bijectiva.

Per altra banda, se satisfà que per a cada conjunt C , qualsevol aplicació sobrejectiva d' A en C i qualsevol aplicació de C en B , si el següent diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g & \uparrow h \\ & & C \end{array}$$

Aleshores existeix un únic epimorfisme t de C en $A/\text{Ker}(f)$ tal que el diagrama següent commuta:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & & \\ & \searrow \text{pr}_{\text{Ker}(f)} & \uparrow f^i & & \\ & & A/\text{Ker}(f) & & \\ & \swarrow g & \uparrow t & \searrow h & \\ & & C & & \end{array}$$

9. Famílies de conjunts i les seues propietats

En aquesta secció enunciem el concepte de família de conjunts i estudiem les propietats de la unió i la intersecció d'aquestes famílies. A més, estudiarem la conducta de les aplicacions respecte a les unions i interseccions de famílies de subconjunts del domini i codomini d'aquestes.

DEFINICIÓ 4.54. Siga $(X_i)_{i \in I}$ una família de conjunts, és a dir, una funció amb domini de definició I , que a cada $i \in I$ li associa un conjunt X_i . Aleshores, la unió de $(X_i)_{i \in I}$ a la que denotem per $\bigcup_{i \in I} X_i$, és $\bigcup \text{Im}((X_i)_{i \in I})$.

A continuació, enumerem algunes propietats relacionades amb la unió de famílies de conjunts.

PROPOSICIÓ 4.55. Siga $(X_i)_{i \in I}$ una família de conjunts. Si J és el conjunt $\{ i \in I \mid X_i = \emptyset \}$, aleshores:

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I - J} X_i.$$

DEMOSTRACIÓ. La demostració és immediata, ja que els índexs que pertanyen a J van associats a conjunts buits. Per tant, en la unió no tenen cap paper. $\square$

PROPOSICIÓ 4.56. Propietat associativa. Considerem $(J_k)_{k \in K}$ i $(X_i)_{i \in I}$ dos famílies de conjunts tals que $I = \bigcup_{k \in K} J_k$. Aleshores:

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{i \in J_k} X_i \right)$$

Definim el concepte d'intersecció d'una família de conjunts.

DEFINICIÓ 4.57. Siga $(X_i)_{i \in I}$ una família de conjunts no buida. Aleshores, la intersecció de $(X_i)_{i \in I}$, a la que denotem per $\bigcap_{i \in I} X_i$, és $\bigcap \text{Im}((X_i)_{i \in I})$.

Enunciem les propietats més importants de la intersecció d'una família de conjunts.

PROPOSICIÓ 4.58. Propietat commutativa. Siga $(X_i)_{i \in I}$ una família no buida de conjunts, i f una permutació d' I . Aleshores:

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} X_{f(i)}.$$

PROPOSICIÓ 4.59. Propietat associativa. Siga $(J_l)_{l \in L}$ una família no buida de conjunts i $(X_i)_{i \in I}$ una família de conjunts tals que $I = \bigcup (J_k \mid k \in K)$. Aleshores:

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{k \in K} \left(\bigcap_{i \in J_k} X_i \right)$$

A continuació, definim el producte de famílies de conjunts.

PROPOSICIÓ 4.60. *Siga $(X_i)_{i \in I}$ una família de conjunts. Aleshores, existeix un parell ordenat $(\prod_{i \in I} X_i, (\text{pr}_i)_{i \in I})$ en el que $\prod_{i \in I} X_i$ és el producte de $(X_i)_{i \in I}$ i on, per a cada $i \in I$, pr_i és la projecció canònica i -èssima del producte, és una aplicació de $\prod_{i \in I} X_i$ en X_i , que té la propietat universal. És a dir, per a cada parell ordenat $(A, (f_i)_{i \in I})$, on A és un conjunt i, per a cada $i \in I$, $f_i: A \rightarrow X_i$ una aplicació, aleshores existeix una única aplicació $\langle f_i \rangle_{i \in I}: A \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ tal que el següent diagrama commuta, per a cada $i \in I$:*

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \langle f_i \rangle_{i \in I} \downarrow & \searrow f_i & \\ \prod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{\text{pr}_i} & X_i \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ. Siga $\prod_{i \in I} X_i$ el conjunt definit com:

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ x \in \text{Fnc} \left(I, \bigcup_{i \in I} X_i \right) \mid \forall i \in I (x_i \in X_i) \right\}.$$

Per a cada i element d' I , pr_i és l'aplicació de $\prod_{i \in I} X_i$ en X_i definida com:

$$\begin{aligned} \text{pr}_i: \prod_{i \in I} X_i &\longrightarrow X_i \\ x &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Aleshores, siga un parell $(A, (f_i)_{i \in I})$ en el que A és un conjunt i, per a cada $i \in I$, $f_i: A \rightarrow X_i$ una aplicació, podem definir $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ l'aplicació d' A en $\prod_{i \in I} X_i$ com:

$$\begin{aligned} \langle f_i \rangle_{i \in I}: A &\longrightarrow \prod_{i \in I} X_i \\ a &\longmapsto (f_i(a))_{i \in I} \end{aligned}$$

És evident que, per a cada i element d' I , aleshores $\text{pr}_i \circ \langle f_i \rangle_{i \in I} = f_i$. Per tant, hem trobat l'aplicació d' A en $\prod_{i \in I} X_i$ amb la propietat indicada.

A continuació demostrem la unicitat. Suposem que existeix una altra aplicació g' que satisfà les mateixes propietats que $\langle f_i \rangle_{i \in I}$. Aleshores, $\text{pr}_i \circ g' = f_i$. Per tant,

$$\text{pr}_i \circ g' = \text{pr}_i \circ \langle f_i \rangle_{i \in I}.$$

Aleshores, g' i $\langle f_i \rangle_{i \in I}$ han de ser la mateixa aplicació. $\square$

Definim a continuació el concepte de coproducte i veurem que satisfà propietats duals a les del producte.

PROPOSICIÓ 4.61. Siga $(X_i)_{i \in I}$ una família de conjunts. Aleshores, existeix un parell ordenat $(\coprod_{i \in I} X_i, (\text{in}_i)_{i \in I})$ en el que $\coprod_{i \in I} X_i$ és el coproducte de $(X_i)_{i \in I}$. És a dir, és un conjunt i, per a cada i element d' I , in_i és la inclusió canònica i -èssima del coproducte. On aquesta és una aplicació de X_i en $\coprod_{i \in I} X_i$, que té la propietat universal. És a dir, per a cada parell ordenat $(A, (f_i)_{i \in I})$ on A és un conjunt i per a cada $i \in I$ $f_i: X_i \rightarrow A$ existeix una única aplicació $[f_i]_{i \in I}: \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow A$ tal que el següent diagrama commuta, per a cada $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\text{in}_i} & \coprod_{i \in I} X_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \text{pr}_i \\ & & A \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ. Siga $\coprod_{i \in I} X_i$ el conjunt definit com

$$\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\}).$$

Per a cada i element d' I , in_i és l'aplicació d' X_i en $\coprod_{i \in I} X_i$ com

$$\begin{aligned} \text{in}_i: X_i &\longrightarrow \coprod_{i \in I} X_i \\ x &\longmapsto (x, i) \end{aligned}$$

Aleshores, siga un parell ordenat $(A, (f_i)_{i \in I})$ en el que A és un conjunt i per a cada $i \in I$, $f_i: X_i \rightarrow A$ una aplicació. Podem definir $[f_i]_{i \in I}$ l'aplicació de $\coprod_{i \in I} X_i$ en A com:

$$\begin{aligned} [f_i]_{i \in I}: \coprod_{i \in I} X_i &\longrightarrow A \\ (x, i) &\longmapsto f_i(x) \end{aligned}$$

És evident que, per a cada i element d' I , es té que, $[f_i]_{i \in I} \circ \text{in}_i = f_i$. Per tant, hem trobat l'aplicació de $\coprod_{i \in I} X_i$ en A amb la propietat indicada.

A continuació demostrem la unicitat. Suposem que existeix una altra aplicació g' que satisfà les mateixes propietats que l'aplicació $[f_i]_{i \in I}$. Aleshores,

$$g' \circ \text{in}_i = f_i = [f_i]_{i \in I} \circ \text{in}_i.$$

Aleshores, g' i $[f_i]_{i \in I}$ han de ser la mateixa aplicació. $\square$

CAPÍTOL 5

Conjunts ordenats

En aquest capítol presentem els conceptes més importants de la teoria de conjunts ordenats. A més, enunciem el lema de Zorn-Kuratowski i la seua equivalència amb l'Axioma d'elecció (9).

DEFINICIÓ 5.1. *Un ordre estricte sobre un conjunt A és una relació binària $\leq$ sobre A que satisfà:*

- (1) *Irreflexivitat, $\forall x \in A (x \not\leq x)$.*
- (2) *Transitivitat, $\forall x, y, z \in A ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$.*

Un conjunt estrictament ordenat és un parell $(A, <)$ en el què A és un conjunt i $<$ un ordre estricte sobre A .

DEFINICIÓ 5.2. *Un ordre sobre un conjunt A és una relació binària $\leq$ sobre A satisfà:*

- (1) *Reflexivitat, $\forall x \in A (x \leq x)$.*
- (2) *Antisimètrica, $\forall x, y \in A ((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y)$.*
- (3) *Transitivitat, $\forall x, y, z \in A ((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$.*

Aleshores, un conjunt ordenat és un parell $(A, \leq)$ en el què A és un conjunt i $\leq$ un ordre sobre A .

DEFINICIÓ 5.3. *Un ordre lineal sobre un conjunt A és una relació binària $<$ sobre A que satisfà:*

- (1) *Irreflexivitat, $\forall x \in A (x \not< x)$.*
- (2) *Disjuntiva, $\forall x, y \in A (x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x))$.*
- (3) *Transitivitat, $\forall x, y, z \in A ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$.*

A continuació, definim els conceptes que formen part dels conjunts ordenats. Aquestes nocions són necessàries per demostrar l'equivalència entre el lema de Zorn-Kuratowski 5.5 i l'Axioma d'elecció (9).

DEFINICIÓ 5.4. *Siga $(A, \leq)$ un conjunt ordenat. Un element a d' A és el màxim de $(A, \leq)$ si és posterior a tots els elements d' A , és a dir, per a cada x membre d' A , $x \leq a$. El mínim es defineix dualment.*

Un element a d' A és maximal en $(A, \leq)$ si, per a cada x membre d' A , si $a \leq x$ aleshores $a = x$. El concepte de minimal es defineix dualment.

Considerem que X és una part d' A , aleshores definim una fita superior de X en $(A, \leq)$ com un $a \in A$ tal que, per a cada $x \in X$, $x \leq a$. Al conjunt de fites superiors de X en $(A, \leq)$ el denotem per $\text{Ub}_{(A, \leq)}(X)$. El concepte de fita inferior es defineix dualment.

El suprem d'un subconjunt X d' A és el mínim del conjunt ordenat $(\text{Ub}_{(A, \leq)}(X), \leq)$, on $\leq$, és la restricció d'ordre sobre A a la part $\text{Ub}_{(A, \leq)}(X)$. El concepte d'ínfim es defineix dualment.

Per últim, una cadena del conjunt ordenat $(A, \leq)$ és un subconjunt C d' A tal que $(C, \leq)$ és un conjunt linealment ordenat, on $\leq$ és la restricció de l'ordre sobre A al subconjunt C .

A partir d'aquestes definicions podem raonar que, si a és el màxim del conjunt ordenat $(A, \leq)$, aleshores a és l'únic element maximal de $(A, \leq)$.

A més, notem que un conjunt ordenat $(A, \leq)$ pot tindre un únic maximal però no tindre cap màxim. Amb els mínims i els minimalis ocorre el mateix, ja que, les definicions dels conceptes són duals, respectivament.

1. El Lema de Zorn-Kuratowski

Enunciem el lema de Zorn-Kuratowski.

LEMA 5.5 (Zorn-Kuratowski). *Siga $(P, \leq)$ un conjunt ordenat, on $P \neq \emptyset$ i tota cadena no buida de $(P, \leq)$ té suprem en $(P, \leq)$, aleshores $(P, \leq)$ té un element maximal.*

A continuació, demostrem l'equivalència entre el Lema de Zorn-Kuratowski 5.5 i l'Axioma d'elecció de Zermelo (9). Per poder demostrar l'equivalència introduïrem en la demostració les definició de conjunts conformes i lemes auxiliars. La demostració de la primera implicació es pot trobar en [Lew91], la segona implicació és una adaptació de [Buk19].

TEOREMA 5.6. *L'Axioma d'Elecció de Zermelo i el Lema de Zorn-Kuratowski són equivalents.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem l'Axioma d'Elecció de Zermelo i demostrem el Lema de Zorn-Kuratowski.

Siga $(P, \leq)$ un conjunt ordenat amb $P \neq \emptyset$ i on tota cadena no buida en $(P, \leq)$ té suprem en $(P, \leq)$. Volem demostrar que $(P, \leq)$ té un element maximal.

Introduïm els següents conjunts auxiliars. Si $\mathcal{C}$ és una cadena no buida en $(P, \leq)$ i x és un element en $\mathcal{C}$, definim el *segment inicial d' x en $\mathcal{C}$* com el conjunt

$$\mathcal{C}_{\downarrow x} = \{y \in \mathcal{C} \mid y < x\}.$$

Notem que si $\mathcal{C}$ és una cadena en $(P, \leq)$ aleshores, per a tot $x \in \mathcal{C}$, el segment inicial d' x en $\mathcal{C}$ també és una cadena.

Per altra banda, si $\mathcal{C}$ és una cadena no buida en $(P, \leq)$, definim el conjunt de les *fites superiors estrictes de $\mathcal{C}$* com el conjunt

$$\text{Upp}(\mathcal{C}) = \{p \in P \mid \forall y \in \mathcal{C} (y < p)\}.$$

Anem a demostrar que $(P, \leq)$ té un element maximal per reducció a l'absurd. Suposem que $(P, \leq)$ no té cap element maximal.

Considerem un primer resultat.

LEMA 5.7 (Lema A). *Si $\mathcal{C}$ és una cadena no buida en $(P, \leq)$, aleshores el conjunt $\text{Upp}(\mathcal{C})$ no és buit.*

DEMOSTRACIÓ. Si suposem que $\text{Upp}(\mathcal{C})$ és buit, això vol dir que per a tot $p \in P$ existeix un $y \in \mathcal{C}$ tal que $p \leq y$. Siga x una fita superior de $\mathcal{C}$, aleshores $y \leq x$ per a tot $y \in \mathcal{C}$. Per la condició anterior concloem que $x \in \mathcal{C}$. Això vol dir que x és un element maximal de $(P, \leq)$, ja que si z és un element en P tal que $x \leq z$, aleshores existeix un y en $\mathcal{C}$ tal que $x \leq z \leq y \leq x$. Per tant $x = z$. Açò ens dona una contradicció amb la suposició de que $(P, \leq)$ no té elements maximals. Per tant $\text{Upp}(\mathcal{C})$ no pot ser buit.

Queda demostrat el Lema A. $\square$

Considerem el conjunt

$$\mathbb{C} = \{ \text{Upp}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \text{ cadena no buida en } (P, \leq) \}.$$

Notem que $\emptyset \notin \mathbb{C}$ pel Lema A. Per a poder emprar l'Axioma d'Elecció de Zermelo necessitem comprovar la condició de que $\mathbb{C}$ siga disjunt però, amb la forma que té $\mathbb{C}$ no sabem si açò és cert. Així, considerem en el seu lloc, el coproducte de $\mathbb{C}$. És a dir,

$$\coprod \mathbb{C} = \coprod_{\mathcal{C}} \text{Upp}(\mathcal{C}) = \bigcup_{\mathcal{C}} (\text{Upp}(\mathcal{C}) \times \{\mathcal{C}\})$$

on, en l'anterior expressió, l'índex $\mathcal{C}$ recorre totes les cadenes no buides en $(P, \leq)$. Pel Lema A $\emptyset \notin \coprod \mathbb{C}$ i, a més, es té que $\text{Dis}(\coprod \mathbb{C})$ ja que cada membre en $\coprod \mathbb{C}$ està etiquetat amb la cadena corresponent.

Apliquem l'Axioma d'Elecció de Zermelo sobre $\coprod \mathbb{C}$. Aleshores existeix una aplicació d'elecció

$$F: \coprod_{\mathcal{C}} \text{Upp}(\mathcal{C}) \longrightarrow \bigcup_{\mathcal{C}} \left(\coprod_{\mathcal{C}} \text{Upp}(\mathcal{C}) \right)$$

on, per a cada $\text{Upp}(\mathcal{C}) \times \{\mathcal{C}\}$ en $\coprod \mathbb{C}$ la seua imatge per F satisfà que

$$F(\text{Upp}(\mathcal{C}) \times \{\mathcal{C}\}) \in \text{Upp}(\mathcal{C}) \times \{\mathcal{C}\}.$$

Aleshores si $\mathcal{C}$ és una cadena no buida en $(P, \leq)$, tenim que $F(\text{Upp}(\mathcal{C}) \times \{\mathcal{C}\})$ és un element de la forma $(H(\text{Upp}(\mathcal{C})), \mathcal{C})$, on $H(\text{Upp}(\mathcal{C}))$ és un element en $\text{Upp}(\mathcal{C})$. En definitiva, per a cada cadena no buida $\mathcal{C}$ en $(P, \leq)$ estem elegint una fita superior estricta $H(\text{Upp}(\mathcal{C}))$ en $\text{Upp}(\mathcal{C})$.

Per a continuar la demostració introduïm el concepte de conjunt conforme en $(P, \leq)$.

DEFINICIÓ 5.8 (Conjunt conforme). *Siga A un subconjunt no buit de P . Direm que A és conforme si*

- (1) *L'ordre $\leq_{\downarrow A \times A}$ és un bon ordre, és a dir, el subconjunt $(A, \leq)$, ordenat per la restricció de $\leq$ a A és tal que tot subconjunt no buit d' A té mínim. Notem, en particular, que A serà una cadena.*
- (2) *Per a tot $x \in A$, $x = H(\text{Upp}(A_{\downarrow x}))$.*

Considerem un lema auxiliar sobre conjunts conformes.

LEMA 5.9 (Lema B). *Si A i B són conjunts conformes i $A \setminus B \neq \emptyset$, aleshores existeix un $x \in A \setminus B$ tal que $B = A_{\downarrow x}$.*

DEMOSTRACIÓ. Com $A \setminus B$ està inclòs en A , $A \setminus B \neq \emptyset$ i $\leq_{\downarrow A \times A}$ és un bon ordre, aleshores podem considerar el següent element

$$x = \min(A \setminus B).$$

Anem a demostrar que $B = A_{\downarrow x}$.

Demostrem la inclusió $A_{\downarrow x} \subseteq B$. Siga y un conjunt en $A_{\downarrow x}$, aleshores $y \in A$ i $y < x$. Si suposem que $y \notin B$, aleshores $y \in A \setminus B$ i $y < x = \min(A \setminus B)$. És a dir, arribem a una contradicció. Per tant $y \in B$. És a dir $A_{\downarrow x} \subseteq B$.

Per a l'altra inclusió, suposem, per reducció a l'absurd, que $B \not\subseteq A_{\downarrow x}$, aleshores $B \setminus A_{\downarrow x}$ no és buit. Com B és conforme, $B \setminus A_{\downarrow x} \subseteq B$ i $B \setminus A_{\downarrow x}$ no és buit, aleshores podem prendre

$$y = \min(B \setminus A_{\downarrow x}).$$

Considerem un lema auxiliar.

LEMA 5.10 (Lema B.1). *Si u és un element en $B_{\downarrow y}$ i v és un element en A tal que $v < u$, aleshores $v \in B_{\downarrow y}$.*

DEMOSTRACIÓ. La condició $v < u < y$ és immediata. Només ens cal demostrar que $v \in B$. Suposem que no és el cas, és a dir, que $v \notin B$. Així, $v \in A \setminus B$. Recordem que $x = \min(A \setminus B)$. Per tant $x \leq v$. Així estem en la situació $x \leq v < u < y$. Com $v \notin B$ i ja hem vist que $A_{\downarrow x} \subseteq B$, aleshores $v \notin A_{\downarrow x}$. Com $v < u$, aleshores u tampoc pot pertànyer a $A_{\downarrow x}$. Així, u pertany a $B \setminus A_{\downarrow x}$. Però com $u < y$ i $y = \min(B \setminus A_{\downarrow x})$, aleshores arribem a una contradicció. Per tant $v \in B$.

Queda, així, demostrat el Lema B.1. $\square$

Continuem amb la demostració del Lema B.

Com $B_{\downarrow y} \subseteq B$, $A \setminus B \neq \emptyset$ i A és conforme, podem definir l'element

$$z = \min(A \setminus B_{\downarrow y}).$$

Considerem un altre lema auxiliar.

LEMA 5.11 (Lema B.2). *Es dona la igualtat $A_{\downarrow z} = B_{\downarrow y}$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dos inclusions.

Siga $w \in A_{\downarrow z}$, així $w \in A$ i $w < z$. Suposem, per reducció a l'absurd, que $w \notin B_{\downarrow y}$. Així, $w \in A \setminus B_{\downarrow y}$ i $w < z = \min(A \setminus B_{\downarrow y})$. Per tant, arribem a una contradicció. Concloem que $w \in B_{\downarrow y}$. És a dir, es dona la inclusió $A_{\downarrow z} \subseteq B_{\downarrow y}$.

Per a l'altra inclusió, siga $t \in B_{\downarrow y}$. Aleshores $t \in B$ i $t < y$. Suposem, per reducció a l'absurd, que $t \notin A$. Per tant $t \in B \setminus A$. Com $A_{\downarrow x}$ és un suconjunt d' A , $B \setminus A \subseteq B \setminus A_{\downarrow x}$. Per tant $t \in B \setminus A_{\downarrow x}$ i $t < y = \min(B \setminus A_{\downarrow x})$. Arribem així a una contradicció. Per tant $t \in A$.

Només ens queda demostrar que $t < z$. Notem que t i z són elements d' A . A més, com A és conforme $\leq_{A \times A}$ és un bon ordre. Així, una de les següents opcions s'ha de donar $t = z$, $z < t$ o $t < z$. Estudiem les diferents possibilitats.

El cas $t = z$ no pot donar-se perquè $z \notin B_{\downarrow y}$ i $t \in B_{\downarrow y}$.

Si suposem que es dona el cas $z < t$, aleshores tenim que $z < t < y$. Notem que $z \in A$ i $t \in B_{\downarrow y}$. Pel Lema B.1, concloem que $z \in B_{\downarrow y}$ i açò és una contradicció. Per tant el cas $z < t$ no pot ocórrer.

Aleshores, necessàriament, $t < z$. És a dir, hem demostrat que $B_{\downarrow y} \subseteq A_{\downarrow z}$.

Concloem que $B_{\downarrow y} = A_{\downarrow z}$. Queda, així, demostrat el Lema B.2. $\square$

Com a conseqüència de la igualtat $B_{\downarrow y} = A_{\downarrow z}$ demostrada en el Lema B.2, del fet que $B_{\downarrow y} \subseteq B$, de que $z \in A$ i de que $x = \min(A \setminus B)$, concloem que $z \leq x$.

Per altra banda, com A i B són conjunts conformes, la segona condició en la Definició 5.8 ens diu que

$$z = H(\text{Upp}(A_{\downarrow z})) = H(\text{Upp}(B_{\downarrow y})) = y.$$

En l'anterior igualtat estem emprant la igualtat $B_{\downarrow y} = A_{\downarrow z}$ del Lema B.2. Com $y \in B$, aleshores $z \neq x$. Així obtenim la desigualtat estricta $z < x$, per tant $y \in A_{\downarrow x}$ i arribem a una contradicció amb la definició de y .

Aquesta contradicció ve de suposar que $B \not\subseteq A_{\downarrow x}$. Per tant, concloem que $B \subseteq A_{\downarrow x}$.

Concloem que $B = A_{\downarrow x}$. Queda, així, demostrat el Lema B. $\square$

Per a continuar amb la demostració del Teorema 5.6, considerem un nou lema auxiliar sobre conjunts conformes. Aquest lema ens diu que la unió arbitrària de conjunts conformes és un conjunt conforme.

LEMA 5.12 (Lema C). *Siga $(A_i)_{i \in I}$ una família de conjunts conformes, aleshores $\bigcup_{i \in I} A_i$ és un conjunt conforme.*

DEMOSTRACIÓ. Notem que la unió no és buida perquè en la Definició 5.8 demanem que els conjunts conformes no siguin buits.

Anem a demostrar que la restricció de l'ordre a $\bigcup_{i \in I} A_i$ és un bon ordre. Siga X un subconjunt no buit de $\bigcup_{i \in I} A_i$, aleshores per a tot $x \in X$, existeix un índex $i_x \in I$ tal que $x \in A_{i_x}$. Siguen x, y elements d' X tals que $x \neq y$. Si $A_{i_x} \neq A_{i_y}$, podem suposar sense pèrdua de generalitat que $A_{i_x} \setminus A_{i_y} \neq \emptyset$, aleshores pel Lema B, existeix un $z \in A_{i_x} \setminus A_{i_y}$ tal que $A_{i_y} = (A_{i_x})_{\downarrow z}$. Per tant

$$y \in A_{i_y} = (A_{i_x})_{\downarrow z} \subseteq A_{i_x}.$$

En definitiva, podem garantir l'existència d'un índex $i \in I$ per al què $X \subseteq A_i$. Com A_i és conforme $X \subseteq A_i$ i X no és buit, aleshores existeix $\min(X)$.

Per al segon ítem en la Definició 5.8 per al conjunt $\bigcup_{i \in I} A_i$, si x és un element en $\bigcup_{i \in I} A_i$, aleshores existeix un $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Com A_i és conforme, aleshores $x = H(\text{Upp}(A_i))$.

Concloem que $\bigcup_{i \in I} A_i$ és un conjunt conforme. Queda demostrat el Lema C. $\square$

Estem en condicions de finalitzar la primera implicació en la demostració del Teorema 5.6. Considerem el major conjunt conforme possible, és a dir,

$$\mathfrak{K} = \bigcup \{ A \mid A \text{ és un conjunt conforme} \}.$$

El Lema C ens garantitza que $\mathfrak{K}$ és conforme. De fet, és el major conjunt conforme possible. En particular $\mathfrak{K}$ és una cadena no buida i podem considerar l'element $H(\text{Upp}(\mathfrak{K}))$, que recordem és un fita superior estricta de $\mathfrak{K}$.

No obstant, el conjunt

$$\mathfrak{K} \cup \{H(\text{Upp}(\mathfrak{K}))\}$$

torna a ser conforme i arribem a una contradicció, ja que hauria d'ocórrer que $H(\text{Upp}(\mathfrak{K}))$ és un element en $\mathfrak{K}$ estrictament major que tots els elements en $\mathfrak{K}$.

Esta contradicció ve de suposar que $(P, \leq)$ no tenia elements maximals. Per tant, concloem que $(P, \leq)$ té almenys un element maximal.

Hem demostrat així, que l'Axioma d'Elecció de Zermelo implica el Lema de Zorn-Kuratowski.

Anem a demostrar l'altra implicació. Suposem el Lema de Zorn-Kuratowski i passem a demostrar l'Axioma d'Elecció de Zermelo. Considerem un conjunt $\mathcal{X}$ tal que $\emptyset$ no hi pertany i tal que $\text{Disj}(\mathcal{X})$. Volem demostrar que existeix una aplicació $F: \mathcal{X} \rightarrow \bigcup \mathcal{X}$ tal que, per a tot $X \in \mathcal{X}$ es tinga que $F[X] \in X$.

Considerem el conjunt

$$P = \left\{ (\mathcal{Y}, G) \in \text{Sub}(\mathcal{X}) \times \text{Hom} \left(\mathcal{Y}, \bigcup \mathcal{Y} \right) \mid \forall Y \in \mathcal{Y} (G[Y] \in Y) \right\}.$$

Sobre aquest conjunt definim l'ordre $(\mathcal{Y}, G) \leq (\mathcal{Z}, H)$ si, i només si, $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ i $H|_{\mathcal{Y}} = G$.

Siga X un element en $\mathcal{X}$, aleshores X no és buit per hipòtesi. Siga $x \in X$. Considerem l'aplicació

$$J: \begin{array}{ccc} \{X\} & \longrightarrow & \bigcup \{X\} \\ X & \longmapsto & x \end{array}.$$

Aleshores $(\{X\}, J)$ és un element en P . Per tant P no és buit. Siga $\mathcal{C}$ una cadena en $(P, \leq)$, anem a demostrar que $\mathcal{C}$ té suprem en $(P, \leq)$. Per a aquesta cadena considerem el conjunt

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{(\mathcal{Y}, G) \in \mathcal{C}} \mathcal{Y}.$$

i l'aplicació

$$\begin{aligned} H: \quad \mathcal{Z} &\longrightarrow \bigcup \mathcal{Z} \\ Z &\longmapsto F[Z], \quad \text{amb } (\mathcal{Y}, F) \in \mathcal{C} \text{ i } Z \in \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

Notem que H està ben definida perquè si Z és un element en $\mathcal{Z}$, en particular $Z \neq \emptyset$. Així, si $z \in Z$, aleshores existeix un element $(\mathcal{Y}, F) \in \mathcal{C}$ i un conjunt $Y \in \mathcal{Y}$ per al què $z \in Y$. Com es té la condició $\text{Disj}(\mathcal{X})$ aleshores $Z = Y$. A més, $F[Z] \in Z$. La condició de cadena i la de compatibilitat de les aplicacions garantida en l'ordre, permet afirmar que si hi haguera un altre $(\mathcal{Y}', F')$ tal que $Z \in \mathcal{Y}'$, aleshores $F'[Z] = F[Z]$.

L'element $(\mathcal{Z}, H)$ pertany a P i és el suprem de la cadena $\mathcal{C}$.

Pel Lema de Zorn-Kuratowski, existeix un element maximal en $(P, \leq)$. Anomenem-lo $(\mathcal{X}', F)$, on $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ i F és una aplicació d'elecció per a $\mathcal{X}$. Anem a demostrar que $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$ per a concloure la demostració.

Suposem, per reducció a l'absurd que no és el cas, així existeix un $X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}'$ però aleshores $X \neq \emptyset$ i podem considerar $x \in X$. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} G: \quad \mathcal{X}' \cup \{X\} &\longrightarrow \bigcup (\mathcal{X}' \cup \{X\}) \\ Z &\longmapsto \begin{cases} F[Z] & \text{si } Z \in \mathcal{X}'; \\ x & \text{si } Z = X \end{cases} \end{aligned}$$

Notem que G està ben definida per la condició de $\text{Disj}(\mathcal{X})$. A més G és una aplicació d'elecció que extén a F , a més, $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X} \cup \{X\}$. Açò contradiu la maximalitat de $\mathcal{X}'$.

Per tant, concloem que $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ i F és una aplicació d'elecció per a $\mathcal{X}$.

Queda, així, demostrat el Teorema 5.6. $\square$

CAPÍTOL 6

Els números naturals

En aquest últim capítol enunciem l'últim axioma de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel-Skolem que ens permetrà estudiar el principi de definició per recursió finita. A més, podrem definir els números naturals i demostrar que aquests estan dotats d'un bon ordre. Una volta definits, demostrarem que aquest bon ordre és compatible amb les operacions aritmètiques usuals, definides a través de la recursió, sobre el conjunt dels números naturals.

1. Axioma de regularitat

En aquesta secció enunciem l'axioma que ens permet afirmar que l'expressió $x \in x$ no és vàlida per a cap conjunt. Amb els conceptes que tenim fins ara definits és possible l'existència de cadenes infinites $\in$ -descendents i els conjunts que donen a lloc seqüències circulars o siguen infinitament $\in$ -descendents. Per tant, enunciem l'Axioma de regularitat que evitarà que aquests conjunts puguin existir.

Axioma de regularitat. Qualsevol conjunt no buit té almenys un element disjunt del conjunt en qüestió, és a dir:

$$\forall A (A \neq \emptyset \rightarrow \exists x (x \in A \wedge x \cap A = \emptyset)). \quad (10)$$

Aquest axioma és equivalent al següent esquema axiomàtic.

Esquema axiomàtic de regularitat. Si en la fórmula $\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})$ no ocorre y , aleshores una condició suficient per a que tots els conjunts tinguin la propietat φ és que un conjunt arbitrari la tinga, quan la tinguin tots els seus membres, és a dir:

$$\forall t_0, \dots, t_{n-1} ((\forall x (\forall y (y \in x \rightarrow \varphi(y, t_0, \dots, t_{n-1}))) \rightarrow \quad (11)$$

$$\varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})) \rightarrow \forall x \varphi(x, t_0, \dots, t_{n-1})). \quad (12)$$

A partir de l'Axioma de regularitat podem demostrar les següents propietats.

PROPOSICIÓ 6.1.

- (1) *No existeix cap conjunt A tal que $A \in A$.*
- (2) *No existeixen dos conjunts A i B tals que $A \in B \in A$.*
- (3) *No existeixen tres conjunts A, B, C tals que $A \in B \in C \in A$.*

- (4) *Siguen A i B dos conjunts. Aleshores existeix un conjunt C i una bijecció $f: B \rightarrow C$ tal que $A \cap C = \emptyset$. És a dir, es poden reetiquetar els elements de B de manera que A i B siguin disjunts. I per últim, en particular, tindrem que per a A existeix un conjunt C i una bijecció $f: A \rightarrow C$ tal que $A \cap C = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la primera propietat per reducció a l'absurd. Suposem que existeix un conjunt A tal que $A \in A$. Per l'Axioma de regularitat (10), aleshores existeix un conjunt $x \in A$ tal que $x \cap A$ és igual al conjunt buit. Però, $x \in A$, i $A \in A$, aleshores la intersecció no pot ser buida. Trobem la nostra contradicció, i, per tant, A no pot pertànyer a ell mateix.

Les demostracions de la segona i la tercera propietat són immediates emprant la primera propietat. És a dir, emprant que no existeix cap conjunt que siga element d'ell mateix.

Per a demostrar l'última propietat considerem que el conjunt C és $B \times \{A\}$. □

DEFINICIÓ 6.2. *Siga A un conjunt, aleshores denotem per A^+ el conjunt $A \cup \{A\}$. De manera que, per a un conjunt x , $x \in A^+$ si $x \in A$ o si $x = A$. Al conjunt A^+ el denominem el conjunt successor d' A .*

COROLLARI 6.3. *Per a cada conjunt A es compleix que:*

- (1) $A \subset A^+$.
- (2) *No existeix cap conjunt X tal que $A \subset X$ i $X \subset A^+$.*

A més, siga B un conjunt tal que $A^+ = B^+$, aleshores $A = B$. Per tant, l'operador $(\cdot)^+$ és injectiu.

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Demostrem $A \subset A^+$. Siga x una conjunt que pertany a A , aleshores $x \in A \cup \{A\} = A^+$. Però, observem que A és un conjunt diferent de $A \cup \{A\}$, ja que $A \notin A$, gràcies a la Proposició 6.1. Per tant, $A \subset A^+$.
- (2) Suposem per reducció a l'absurd que existeix un conjunt X que satisfà l'enunciat. Per tant, $A \subset X$ i $X \subset A^+$, on X i A són conjunts diferents. Prenem un x que pertany a $X \setminus A$, aleshores x tampoc podrà ser el mateix conjunt que A . Per tant, x no pertany a A , i no pot ser A , aleshores x no pertany a A^+ . Per tant X no està inclòs en A^+ . Aquesta és la nostra contradicció, aleshores, podem concloure que no existeix el conjunt X .

Queden, així, demostrades les dues propietats. □

A continuació, enunciem l'Axioma del conjunt infinit que ens assegura l'existència dels conjunts infinits.

Axioma del conjunt infinit. Existeix almenys un conjunt on el buit és un dels seus membres i està tancat baix la operació de formació del successor d'un conjunt:

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \longrightarrow x^+ \in A)). \quad (13)$$

A continuació, definim el concepte d'àlgebra de Dedekind-Peano, que emprarem posteriorment per a definir el principi de definició per recursió.

DEFINICIÓ 6.4. Una àlgebra de Dedekind-Peano és una tripla ordenada $\mathbf{A} = (A, f, e)$ en la què A és un conjunt, f una endoaplicació en A , que anomenarem successor, i e un membre d' A tal que:

- (1) f és injectiva.
- (2) $\text{Im}(f) \cap \{e\} = \emptyset$.
- (3) $\forall X \subseteq A ((f[X] \subseteq X \wedge e \in X) \rightarrow X = A)$.

La segona condició de la definició simplement ens assegura que el conjunt e no serà de la forma $f(a)$ per a un a element d' A qualsevol. La tercera condició que l'únic subconjunt d' A que té les propietats d'estar tancada baix f i contindre l'element e , és el propi conjunt A .

TEOREMA 6.5. Existeix un únic conjunt, el conjunt dels números naturals, denotat per $\mathbb{N}$ que té les següents propietats:

- (1) $\emptyset \in \mathbb{N} \wedge \forall n (n \in \mathbb{N} \rightarrow n^+ \in \mathbb{N})$.
- (2) $\forall B ((\emptyset \in B \wedge \forall y (y \in B \rightarrow y^+ \in B)) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq B)$.

DEMOSTRACIÓ. Demostrem l'existència i la unicitat. Per l'Axioma del conjunt infinit (13) existeix un conjunt A tal que $\emptyset$ pertany a A i que per a cada $x \in A$, aleshores el seu successor també és un element d' A . Siga A un dels conjunts que garanteix l'axioma, arbitrari però fixe. Aleshores definim el conjunt $\mathcal{X}$ com:

$$\mathcal{X} = \{ X \in \text{Sub}(A) \mid \emptyset \in X \wedge \forall x (x \in X \rightarrow x^+ \in X) \}.$$

Es compleix que $\mathcal{X}$ és un conjunt no buit ja que A és un element d'aquest conjunt. Sabem que A és un subconjunt d' A tal que A conté el conjunt buit. A més, si x és un element d' A , aleshores el seu successor també és un element d' A .

Per tant, podem definir $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{X}$. Notem que $\emptyset$ és element de $\mathbb{N}$, perquè per a cada X element de $\mathcal{X}$, $\emptyset$ pertany a X , aleshores $\emptyset \in \mathbb{N}$. A més, per a cada conjunt x que pertany a $\mathbb{N}$ el seu successor x^+ també és un element de $\mathbb{N}$, perquè per a cada X que forma la intersecció se satisfà. Aleshores hem demostrat que satisfà la primera condició de l'enunciat.

Demostrem que $\mathbb{N}$ està inclòs en qualsevol conjunt B que estiga tancat sota la formació del conjunt successor i per al què $\emptyset$ siga un element.

Siga B un conjunt arbitrari però fixe. Aleshores, $A \cap B$ està inclosa en A i $A \cap B$ és tancat sota la formació del conjunt successor i $\emptyset$ és un element de $A \cap B$. Per tant, se satisfà que $A \cap B$ és un element de $\mathcal{X}$. Per tant, $\mathbb{N}$

està inclòs en $A \cap B$. Observem que $A \cap B$ és un subconjunt de B , aleshores $\mathbb{N}$ està inclòs en B .

Demostrem ara la unicitat. Suposem que existeix altre conjunt $\mathbb{N}'$, que satisfà les mateixes propietats que $\mathbb{N}$. Per tant, $\mathbb{N}$ estarà inclòs en $\mathbb{N}'$ i viceversa. Així, $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$. $\square$

DEFINICIÓ 6.6. *Al conjunt buit, quan el considerem un element del conjunt dels números naturals $\mathbb{N}$, el denotem per 0. A més, 1 denota el successor de 0, on $1 = \{0\}$, 2 el successor d'1, on $2 = \{0, 1\}$. Si continuem de la mateixa manera, aleshores 9 serà el successor de 8, on el conjunt 9 és $9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 10 el successor de 9, on $10 = \{0, \dots, 9\}$, etc.*

A continuació, definim la relació binària sobre els naturals.

PROPOSICIÓ 6.7. *La relació binària Sc sobre $\mathbb{N}$ la definim com:*

$$Sc = \{ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n = m^+ \}.$$

On Sc és una endofunció de $\mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓ. Per la definició de Sc podem afirmar que és una relació binària sobre $\mathbb{N}$. A més, per a cada número natural la formació del successor està ben definida. Per últim, recordem que el successor d'un número natural és un altre número natural. $\square$

DEFINICIÓ 6.8. *Denotem per sc l'endoaplicació de $\mathbb{N}$ amb funció subjacent Sc , la denominem aplicació successor de $\mathbb{N}$. A més, denotem el valor de sc en n com n^+ o per $n + 1$, per a cada $n \in \mathbb{N}$. Per últim, denotem per $\mathbf{N}$ la tripla ordenada $(\mathbb{N}, sc, 0)$.*

PROPOSICIÓ 6.9. *Per a cada número natural n , $sc(n) \neq 0$. O el que és equivalent, $\{0\} \cap \text{Im}(sc) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ. Per a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, el successor es defineix com $sc(n) = n \cup \{n\}$. Observem que aquest conjunt no pot ser igual a $\{\emptyset\}$, aleshores la intersecció és buida. I per tant, el conjunt 0 no pot ser mai successor de cap número. $\square$

A continuació, enunciem i demostrem el principi de la demostració per inducció finita.

TEOREMA 6.10 (Principi de la demostració per inducció finita). *Per a cada subconjunt X de $\mathbb{N}$, si $0 \in X$ i $sc[X] \subseteq X$ aleshores $X = \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓ. Siga X un subconjunt de $\mathbb{N}$ tal que el conjunt 0 pertany a X i $sc[X]$ és un subconjunt de X . Aleshores, $\mathbb{N}$ està inclòs en X , perquè $\mathbb{N}$ és el conjunt mínim que satisfà les mateixes propietats que té X . Per hipòtesi, X és un subconjunt de $\mathbb{N}$, aleshores $X = \mathbb{N}$. $\square$

Demostrem que qualsevol número major que 0 és successor d'un altre.

PROPOSICIÓ 6.11. *Si $n \in \mathbb{N} - 1$, aleshores existeix un $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = m^+$, o el que és equivalent, $\mathbb{N} \setminus (\{0\} \cup \text{Im}(\text{sc})) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ. En virtut de la Proposició 6.9, $\{0\} \cap \text{Im}(\text{sc}) = \emptyset$. És a dir, que 0 no és successor de cap número natural. A més, tenint en compte que una de les propietats de $\mathbb{N}$ és que el successor d'un número natural és un número natural, aleshores $\{0\} \cup \text{Im}(\text{sc}) = \mathbb{N}$. Per tant, $\mathbb{N} \setminus (\{0\} \cup \text{Im}(\text{sc})) = \emptyset$ i queda demostrada la proposició. $\square$

Definim a continuació el concepte de $\in$ -transitivitat, que ens ajudarà posteriorment a demostrar que l'aplicació successor és injectiva.

DEFINICIÓ 6.12. *Siga A un conjunt, aleshores A serà $\in$ -transitiu si, per a qualsevol conjunt x , y , si $y \in x$ i $x \in A$, aleshores $y \in A$.*

Enunciem les propietats més importants de la $\in$ -transitivitat.

PROPOSICIÓ 6.13.

- (1) *Si A és $\in$ -transitiu, aleshores A^+ també ho és.*
- (2) *Si A és $\in$ -transitiu aleshores $\bigcup A$ és $\in$ -transitiu.*
- (3) *Si tots els elements d' A són $\in$ -transitius, aleshores $\bigcup A$ és $\in$ -transitiu.*
- (4) *Si A no és buit i tots els seus elements són $\in$ -transitius, aleshores $\bigcap A$ també ho és.*

DEMOSTRACIÓ.

- (1) Recordem que $A^+ = A \cup \{A\}$. Per tant, A està inclòs en A^+ . Com A és $\in$ -transitiu, per a x , y dos conjunts qualsevol tal que $x \in y$ i $y \in A$. Aleshores, x pertany a A . Per tant, x és un element de A^+ . Així, A^+ és $\in$ -transitiu.
- (2) A és $\in$ -transitiu, aleshores siguen x , y dos conjunts qualsevol tals que si $y \in x$ i $x \in A$, aleshores $y \in A$. Recordem la definició d'unió

$$\bigcup A = \{ t \mid \exists X (t \in X \wedge X \in A) \}.$$

Volem demostrar que per a dos conjunts qualsevol x i t , on $x \in t$ i $t \in \bigcup A$, aleshores x pertany a $\bigcup A$.

Que t siga element de $\bigcup A$, significa que existeix un conjunt X tal que $t \in X$ i $X \in A$. Com A és $\in$ -transitiu, aleshores $t \in A$. Per tant, tenim que existeix un conjunt t tal que $x \in t$ i $t \in A$. Aleshores el conjunt x pertany a $\bigcup A$.

- (3) Siga A un conjunt on tots els seus elements són $\in$ -transitius. Per tant, per a tot conjunt X que pertany a A , si x , y són dos conjunts tals que $y \in x$ i $x \in X$, aleshores y pertany a X . Recordem la definició de la unió

$$\bigcup A = \{ t \mid \exists X (t \in X \wedge X \in A) \}.$$

Com X és $\in$ -transitiu, aleshores, el conjunt t també ho serà. Per tant, la unió és $\in$ -transitiva.

- (4) Demostrem que si A és $\in$ -transitiu i no buit, aleshores la intersecció també és $\in$ -transitiu. Recordem la definició de la intersecció.

$$\bigcap A = \{ t \mid \forall X (X \in A \rightarrow t \in X) \}.$$

Siga un conjunt x tal que x pertany al conjunt t i t pertany a $\bigcap A$. Aleshores per la definició d'intersecció tenim que, per a tot X , on X pertany a A , t pertany a X . Aleshores, com X és $\in$ -transitiu x pertany a X , on X pertany a A . Com tots els elements d' A són $\in$ -transitius i x pertany a tots els X que són membres d' A , aleshores, x pertany a $\bigcap A$.

Queden demostrades les propietats relacionades amb la $\in$ -transitivitat. $\square$

Enunciem la condició necessària i suficient per a que un conjunt siga $\in$ -transitiu.

PROPOSICIÓ 6.14. *Un conjunt A és $\in$ -transitiu si, i només si, $\bigcup A^+ = A$.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem les dues implicacions. Suposem que el conjunt A és $\in$ -transitiu. Aleshores, siguen x i y dos conjunts qualsevol on $y \in x$ i $x \in A$, aleshores, y pertany a A . Volem demostrar que $\bigcup A^+ = A$. On $\bigcup A^+$ és el següent conjunt:

$$\bigcup (A \cup \{A\}) = \{ t \mid \exists X (t \in X \wedge X \in (A \cup \{A\})) \}.$$

Siga un conjunt t qualsevol que pertany a $\bigcup (A \cup \{A\})$, aleshores existeix un conjunt X que, o X pertany a A o X és el conjunt A . Si $X = A$, aleshores, $t \in X = A$, és a dir, $t \in A$. Si $X \in A$, tenim que $t \in X$ i $X \in A$, com A és $\in$ -transitiu, aleshores $t \in A$. Per tant, $\bigcup (A \cup \{A\}) = A$.

Suposem que $\bigcup A^+ = A$ i hem de demostrar que A és $\in$ -transitiu.

Siguen x i y dos conjunts qualsevol tal que $y \in x$ i $x \in A$, que, per hipòtesi, és igual a $\bigcup A^+$. Recordem la definició de $\bigcup A^+$:

$$\bigcup A^+ = \{ t \mid \exists X (t \in X \wedge X \in (A \cup \{A\})) \}.$$

Per la definició de la unió, x pertany a A . Queda demostrat que A és $\in$ -transitiu. $\square$

A continuació demostrem que qualsevol número natural és $\in$ -transitiu.

PROPOSICIÓ 6.15. *Siga n un número natural, aleshores n és $\in$ -transitiu.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrem la proposició per inducció. Definim el conjunt

$$T = \{ t \mid n \in \mathbb{N} \mid n \in -transitiu \}.$$

Demostrem que coincideix amb $\mathbb{N}$.

Primerament, observem que 0 pertany a T , perquè $\bigcup 0^+ = 0$. Aleshores, per la Proposició 6.14, 0 és $\in$ -transitiu. Per tant, el cas base es compleix.

Suposem que és cert per a n , és a dir, que n pertany a T . Per tant, n és $\in$ -transitiu, o el que és equivalent, $\bigcup n^+ = n$. Demostrem que la hipòtesi se satisfà per a $n + 1 = n^+$.

$$\begin{aligned} \bigcup (n^+)^+ &= \bigcup (n^+ \cup \{n^+\}) \\ &= \left(\bigcup n^+\right) \cup \left(\bigcup \{n^+\}\right) \\ &= \left(\bigcup n \cup \{n\}\right) \cup \left(\bigcup \{n \cup \{n\}\}\right) \\ &= n \cup (n \cup \{n\}) \\ &= n^+. \end{aligned}$$

Aleshores, hem demostrat que és cert per a $n + 1$. Per tant, $T = \mathbb{N}$. $\square$

Per últim, demostrem $(\mathbb{N}, \text{sc}, 0)$ és una àlgebra de Dedekind-Peano.

TEOREMA 6.16. *La tripla ordenada $(\mathbb{N}, \text{sc}, 0)$ és una àlgebra de Dedekind-Peano.*

DEMOSTRACIÓ. Demostrarem que $(\mathbb{N}, \text{sc}, 0)$ és una àlgebra de Dedekind-Peano demostrant que satisfà les condicions de la definició 6.4.

Primerament, la funció de formació del successor, sc , és injectiva. Suposem que, per a tot n i m números naturals, aleshores, $n^+ = m^+$. Per tant, $\bigcup n^+ = \bigcup m^+$. Per la Proposició 6.15 sabem que tant n com m han de ser $\in$ -transitius i, per tant, emprant la Proposició 6.14, les unions anteriors són respectivament iguals a n i a m . Obtenim $n = m$, i, per tant és injectiva.

Ara hem de demostrar que $\text{Im}(\text{sc}) \cap \{0\} = \emptyset$. Recordem que el conjunt 0 no és successor de cap número natural. Per tant $\text{Im}(\text{sc}) \cap \{0\} = \emptyset$.

Per últim, hem de demostrar que per a tot X conjunt en $\mathbb{N}$, si $\text{sc}[X]$ és un subconjunt de $\mathbb{N}$ i 0 pertany a X , aleshores, $X = \mathbb{N}$.

Observem que satisfà que si X és un subconjunt de $\mathbb{N}$, el conjunt buit pertany a X . A més, per a tot conjunt y , tal que y és un subconjunt de X , aleshores, el successor d' y també és un subconjunt de X . Per tant, tenim que $X = \mathbb{N}$.

Acabem de demostrar que la tripla $(\mathbb{N}, \text{sc}, 0)$ és una àlgebra de Dedekind-Peano. $\square$

2. El principi de definició per recursió finita

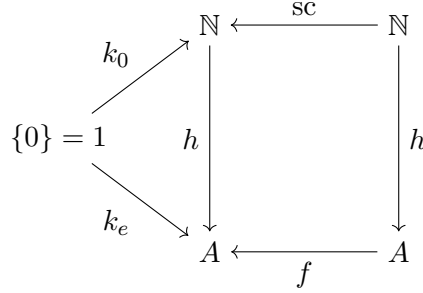
En aquesta secció demostrem el principi de definició per recursió finita introduït per Dedekind. A més, en virtut d'aquest principi demostrem que l'àlgebra de Dedekind-Peano $(\mathbb{N}, \text{sc}, 0)$ és única.

Per finalitzar el capítol definim altres principis de definició per recursió, com per exemple les operacions de suma o producte de números naturals.

TEOREMA 6.17 (Principi de definició per recursió finita). *Siga A un conjunt, e un element d' A i $f: A \rightarrow A$ una endoaplicació d' A . Llavors existeix una única aplicació,*

$$\exists! h: \mathbb{N} \rightarrow A$$

que fa commutatiu el següent diagrama.



És a dir, tal que

$$(1) \ h(0) = e.$$

$$(2) \ \forall n \in \mathbb{N} \ h(\text{sc}(n)) = f(h(n)).$$

On k_0 i k_e són les aplicacions constant a 0 i constant a e , respectivament.

DEMOSTRACIÓ. Denotem $f = (A, F, A)$ i $h = (\mathbb{N}, H, A)$. Aleshores, per demostrar el teorema hem de trobar una aplicació h única que fa commutatiu el diagrama anterior. Definim h per la corresponent funció H . Definim H a partir dels següents conjunts.

Definim $G_0 = \{(0, e)\}$, així

$$G_0(0) = e, \quad \text{Dom}(G_0) = 1.$$

$$G_1 = \{(0, e), (1, F(e))\}$$

$$G_1(0) = e, \quad G_1(1) = F(e), \quad \text{Dom}(G_1) = 2.$$

Observem que $G_0 \subseteq G_1$.

Així, seguint aquest procediment definirem:

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n.$$

Definim també la següent aplicació parcial G de $\mathbb{N}$ a A ,

$$G: \mathbb{N} \rightarrow A.$$

On G ha de satisfer que 0 pertany a $\text{Dom}(G)$ i $G(0) = e$. A més, per a tot n número natural, si $\text{sc}(n)$ pertany a $\text{Dom}(G)$, aleshores n pertany a $\text{Dom}(G)$ i $G(\text{sc}(n)) = F(G(n))$. Per últim, ha de satisfer que siga equivalent a

$$G \subseteq \mathbb{N} \times A \wedge \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x, y \in A \ ((n, x) \in G \wedge (n, y) \in G) \rightarrow y = x.$$

Si una aplicació parcial compleix aquestes condicions direm que és (e, f) -acceptable. A continuació, definim el següent conjunt.

$$\mathcal{G} = \{ G \in \text{Pfn}(\mathbb{N}, A) \mid G \text{ és } (e, f)\text{-acceptable} \}.$$

Notem que com $H = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$, aleshores H pertany a $\text{Pfn}(\mathbb{N}, A)$, H és (e, f) -acceptable. A més, $\text{Dom}(H) = \mathbb{N}$. Per tant, si demostrarem que les propietats que hem afirmat que G i H compleixen són certes, aleshores haurem trobat l'aplicació que busquem.

Demostrem que $H = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ és una funció parcial de $\mathbb{N}$ en A .

Per com hem definit H i per la definició de $\mathcal{G}$, aleshores, un element $G \in \mathcal{G}$ és una funció parcial de $\mathbb{N}$ en A . A més, H és un subconjunt de $\mathbb{N} \times A$, per tant H és una relació de $\mathbb{N}$ en A .

Falta demostrar que, per a cada $n \in \mathbb{N}$ i per a cada y, z elements d' A si $(n, y), (n, z)$ pertanyen a la relació H , aleshores $y = z$. Serà suficient demostrar per inducció que el conjunt

$$T = \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall y, z \in A \ ((n, y) \in H \wedge (n, z) \in H \rightarrow y = z) \}$$

és igual a $\mathbb{N}$.

El nostre cas base és el conjunt 0. Siguen dos conjunts y i z que pertanyen a A , aleshores, $(0, y)$ i $(0, z)$ pertanyen a H . Recordem que $H = \bigcup \mathcal{G}$, aleshores existeix un $G_y \in \mathcal{G}$ tal que $(0, y)$ pertany a G_y i existeix un $G_z \in \mathcal{G}$ tal que $(0, z)$ pertany a G_z . Per tant, 0 pertany a $\text{Dom}(G_y)$ i a $\text{Dom}(G_z)$. A més, com G_z, G_y són (e, f) -acceptables, aleshores $G_y(0) = e = G_z(0)$. Per definició $G_y(0) = y$ i $G_z(0) = z$ aleshores $y = e = z$. Per tant, $y = z$ i podem concloure que 0 pertany a T .

Hem demostrat que és cert per al cas base. Ara suposem que se satisfà per a n i ho demostrarem per al seu successor. Aleshores, n pertany a T , és a dir per a dos conjunts y i z que pertanyen a A , $(\text{sc}(n), y)$ i $(\text{sc}(n), z)$ pertanyen a H . Com $H = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ aleshores existeixen G_y i G_z elements d' H tal que $(\text{sc}(n), y) \in G_y$ i $(\text{sc}(n), z) \in G_z$. Ara bé, recordem que per la definició de $\mathcal{G}$ G_y i G_z són (e, f) -acceptables. Per tant, n pertany al domini de G_y i $G_y(\text{sc}(n)) = F(G_y(n)) = y$. A més, n també pertany al domini de G_z i $G_z(\text{sc}(n)) = F(G_z(n)) = z$. Però, la nostra hipòtesi d'inducció és $G_z(n) = G_y(n)$ aleshores $F(G_y(n)) = F(G_z(n))$. Per tant, $y = z$. Aleshores el successor de n pertany a T .

Així hem demostrat per inducció que $T = \mathbb{N}$. Aleshores, H és una funció parcial de $\mathbb{N}$ en A .

A continuació, demostrarem que H és (e, f) -acceptable. Per tant, ha de satisfer que el conjunt 0 és un element del domini d' H i que la imatge de 0 a través d' H és igual a e . També haurà de complir que, per a tot n número natural, el seu successor pertany al domini d' H . Per últim, H ha de ser equivalent a

$$H \subseteq \mathbb{N} \times A \wedge \forall n \in \mathbb{N} \forall x, y \in A \ ((n, x) \in H \wedge (n, y) \in H) \rightarrow y = x.$$

Recordem la definició d' $H = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$. Com tots els G són (e, f) -acceptables, aleshores existeix un G que pertany a $\mathcal{G}$, tal que 0 pertany al domini de G i a més $G(e) = 0$. És a dir, $(0, e)$ pertany a G . Com G està inclòs en H , aleshores, $(0, e)$ i 0 pertanyen a H i $H(0) = e$.

Siga n un número natural, suposem $\text{sc}(n)$ pertany a $\text{Dom}(H)$ aleshores per com hem definit H , ha d'existir un G que pertany a $\mathcal{G}$ tal que $\text{sc}(n)$ siga membre de G . Com G és (e, f) - acceptable, aleshores n pertany a $\text{Dom}(G)$ i $G(\text{sc}(n)) = F(G(n))$. Com G està contingut en H , $\text{Dom}(G)$ també està contingut en $\text{Dom}(H)$ i, aleshores, n és un element de $\text{Dom}(H)$. A més, $H(n) = G(n)$ i com el parell ordenat $(\text{sc}(n), F(G(n)))$ pertany a G i G està contingut en H , aquest parell pertany a H . Obtenim $H(\text{sc}(n)) = F(G(n))$ i, per tant, $H(\text{sc}(n)) = F(G(n)) = F(H(n))$.

Demostrem ara que H és una funció de $\mathbb{N}$ en A . Emprem la demostració per inducció, on obtenim que el conjunt

$$T = \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists y \in A \ ((n, y) \in H) \},$$

és el mateix conjunt que $\mathbb{N}$. Aleshores, comprovem que 0 pertany a T . Sabem que $\{(0, e)\}$ és un element de $\mathcal{G}$ per com hem definit aquest conjunt. Aleshores, com $H = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$, aleshores 0 és un element de T .

Suposem que és cert per a n , és a dir n pertany a T . Anem a demostrar que el successor també pertany. Suposem per reducció a l'absurd que $\text{sc}(n)$ no pertany a T . Definim la relació $G = H \cup \{ (\text{sc}(n), F(H(n))) \}$ que és una funció parcial de $\mathbb{N}$ en A , és acceptable i, a més, conté estrictament a H . Aleshores, pel que hem demostrar sobre H trobem una contradicció. Per tant, $n^+ \in T$.

Tenint en compte que per definició G és una funció parcial de $\mathbb{N}$ en A i és acceptable, aleshores prenent $h = (\mathbb{N}, H, A)$ demostrem la existència.

Ens manca demostrar la unicitat. Suposem que existeix una altra aplicació h' que satisfà les mateixes propietats que h i definim:

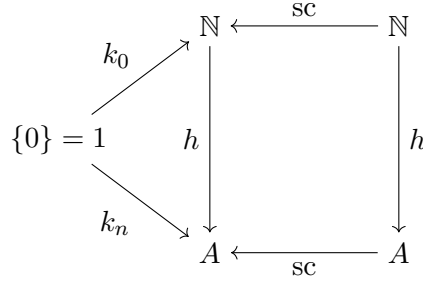
$$\text{Eq}(h, h') = \{ n \in \mathbb{N} \mid h(n) = h'(n) \}.$$

Notem que $\text{Eq}(h, h')$ és un subconjunt de $\mathbb{N}$ i que 0 pertany a $\text{Eq}(h, h')$. A més, per a tot x que pertany a $\text{Eq}(h, h')$ el seu successor també pertany a $\text{Eq}(h, h')$. Aleshores, $\mathbb{N}$ està inclòs en $\text{Eq}(h, h')$. Per com hem definit $\text{Eq}(h, h')$, aquest està inclòs en $\mathbb{N}$, aleshores, podem concloure que $\text{Eq}(h, h') = \mathbb{N}$. Per tant, $h = h'$.

□

Finalitzem aquest capítol emprant el principi de definició per recursió per a definir les operacions habituals de suma i producte de naturals.

Definim l'operació suma emprant el principi de definició per recursió finita. Aleshores, considerem L'àlgebra de Dedekind-Peano $(\mathbb{N}, \text{sc}, 0)$, fixem un $n \in \mathbb{N}$ i considerem sc l'endoaplicació de l'enunciat. Aleshores existeix una única aplicació $h: \mathbb{N} \rightarrow N$ tal que el següent diagrama commuta.



És a dir, existeix una aplicació h tal que $h(0) = n$ i $h(\text{sc}(n)) = \text{sc}(h(n))$.
Observem que com $h(0) = n$, aleshores

$$h(1) = h(\text{sc}(0)) = \text{sc}(h(0)) = \text{sc}(n) = n + 1,$$

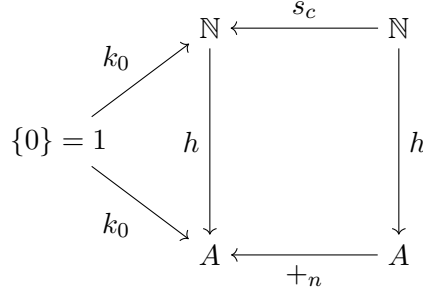
aleshores $h(1) = n + 1$. Observem que obtenim per a 2,

$$h(2) = h(\text{sc}(1)) = \text{sc}(h(1)) = n + 1 + 1 = n + 2.$$

Aleshores, observem que l'aplicació h suma n , és a dir $h = +_n$,

$$\begin{aligned}
+_n: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
m &\longmapsto m + n.
\end{aligned}$$

Definim a continuació l'operació producte emprant el principi de definició per recursió finita. Aleshores, considerem L'àlgebra de Dedekind-Peano $(\mathbb{N}, \text{sc}, 0)$, fixem un $n \in \mathbb{N}$ i considerem $+_n$ l'endoaplicació de l'enunciat. Aleshores existeix una única aplicació $h: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que el següent diagrama commuta.



És a dir, existeix una aplicació h tal que $h(0) = 0$ i $h(\text{sc}(n)) = +_n(h(n))$.
Aleshores, com $h(0) = 0$, calculem $h(1)$,

$$h(1) = h(\text{sc}(0)) = +_n(h(0)) = +_n(0) = n$$

Calculem ara $h(2)$,

$$h(2) = h(\text{sc}(1)) = +_n(h(1)) = +_n(n) = n + n = 2n$$

Si prosseguim calculant les imatges de h ens adonem que l'aplicació h és el producte de n per un número natural, és a dir

$$\begin{aligned}
\cdot_n: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
m &\longmapsto m \cdot n.
\end{aligned}$$

CAPÍTOL 7

Conclusions

En aquest treball hem enunciat els axiomes de Zermelo-Fraenkel-Skolem de la teoria de conjunts i hem estudiat la formació dels conjunts amb la formalitat que requereix aquesta teoria. A més, en virtut d'aquests axiomes hem demostrat l'existència i unicitat dels diferents conjunts i operacions bàsiques. A partir d'aquesta axiomàtica hem introduït els conceptes de funció i aplicació i hem trobat una classificació per a aquestes nocions d'acord a les definicions d'injectivitat, secció, monomorfisme, sobrejectivitat, retracció i epimorfisme. Durant aquest treball hem estudiat diverses descomposicions de les aplicacions com la factorització a través de la imatge i la coimatge.

Posteriorment, hem enunciat l'axioma d'elecció, obtenint l'equivalència d'aquest amb el fet que tot epimorfisme és una retracció, i també la seua equivalència amb el lema de Zorn-Kuratowski. Per últim, hem introduït els números naturals i les operacions usuals de la suma i el producte en virtut del principi de definició per recursió, com un apropament a l'aritmètica des de la teoria de conjunts.

També voldria ressaltar la sorpresa que m'ha suposat, durant la realització del treball, comprovar la quantitat de conceptes i resultats que podem obtindre a partir de la teoria axiomàtica de conjunts i la seua ubiqüitat en totes les àrees de les matemàtiques.

Per últim, com ja hem comentat a l'inici d'aquest treball, les construccions conjuntistes no es limiten a les presentades en aquest treball. Si alguna construcció no hi apareix és perquè no hem volgut allargar-lo en excés. No obstant, hem intentat presentar el que, per a nosaltres, són els resultats més importants d'aquesta teoria.

Bibliografía

- [Buk19] B. Bukh. Math Studies Algebra: Axiom of Choice. April 2019.
- [CV10] J. Climent Vidal. Teoría de conjuntos. Disponible en línea, 2010.
- [Lew91] J.W. Lewin. A simple proof of Zorn's lemma. *The American mathematical monthly*, 98(4):353, 1991.
- [LG18] V. López González. El sistema de axiomas de ZFC. *TEMat: Divulgación de trabajos de estudiantes de matemáticas*, 2:45–52, 2018.
- [Lin17] Ø. Linnebo. *Philosophy of mathematics*. Princeton University Press, 2017.
- [Sup72] P. Suppes. *Axiomatic set theory*. Courier Corporation, 1972.