Treball Fi de Grau - Curs 2021/2022

Lógica proposicional

Autora: **BLANCA GIMENO ARNANDIS**

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Facultat de Matemàtiques Grau en Matemàtiques

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La lógica es la disposición que tenemos los seres humanos para pensar de forma coherente, por ejemplo, si no supiésemos nadar, utilizando la lógica, no nos meteríamos en el agua si nos cubre. O si vamos a cruzar la calle, por lógica sabemos que antes de hacerlo, debemos mirar si va a pasar algún coche.

La lógica proposicional se entiende como la ciencia que estudia los procedimientos para poder distinguir si un razonamiento es correcto o si es incorrecto. Esta recibe este nombre porque, entre otras cosas, vamos a hablar de las proposiciones, también llamadas enunciados, lo que se define como una oración que puede ser verdadera o falsa, y por tanto si la formulamos en forma de pregunta podemos responder con un sí o un no. En el lenguaje de la lógica proposicional utilizamos letras mayúsculas para denotar estas proposiciones. Las más comunes son P, Q y R, y unos conectores lógicos para establecer las conexiones entre las proposiciones.

A lo largo de este trabajo vamos a ver diferentes secciones en las que vamos a hablar sobre las proposiciones y su forma de ser conectadas, vamos a ver dos tipos de operadores de consecuencia, el operador de la consecuencia semántica y el de la consecuencia sintáctica, explicaremos como funcionan viendo diferentes propiedades que estos tienen y como se utilizan. Daremos fin al trabajo viendo los teoremas de corrección y completitud que establecen que los operadores de consecuencia semántica y consecuencia sintáctica son equivalentes.

Cabe destacar que en este trabajo hemos utilizado para la parte sintáctica el verificador de demostraciones matemáticas LEAN. Este es un lenguaje de programación funcional que se encarga de verificar que las derivaciones sintácticas que se utilizan en las demostraciones lógicas son correctas. Estas demostraciones estan disponibles para consulta en el siguiente repositorio virtual.

Pasamos a detallar el contenido de cada sección.

En la segunda sección se define el lenguaje de la lógica proposicional, como las proposiciones y los conectores, para poder empezar a entender los conceptos básicos. En la tercera sección se definen las operaciones y las tablas de verdad. Se definen también algunos conceptos como la consecuencia semántica y la equivalencia lógica junto con algunas proposiciones que permiten avanzar en la comprensión de las definiciones dadas. La cuarta sección trata sobre la sustitución, definida de forma recursiva, y sobre la sustitución simultánea de las variables proposicionales en las fórmulas. También se enuncia un resultado donde se unen los conceptos de sustitución y la consecuencia semántica, mencionada y definida en el capítulo anterior. En la sección quinta se trata la representabilidad de los conectores sobre conjuntos de otros conectores y trabajamos el concepto de completitud funcional. También aparecen dos tipos de aplicación, la transformaciones de fórmulas, la fórmula estrella y la fórmula dual de una proposición dada y describimos sus relaciones con el operador de consecuencia semántica. En la sexta sección se definen las leyes algebraicas, la forma normal conjuntiva (FNC) y la disjuntiva (FND), y se da un resultado que relaciona la equivalencia lógica con la FNC y la FND. En la séptima sección se introduce el operador de consecuencia sintáctica, se explican las reglas formales de derivación y se comprueba, mediante el verificador formal LEAN, que todas las demostraciones hechas utilizando el operador de consecuencia semántica se pueden recuperar sintácticamente. Para finalizar, en la última sección, se relacionan los conceptos de consecuencia semántica y sintáctica. Demostramos el teorema de corrección, que establece que si una fórmula se deriva sintácticamente de un conjunto de hipótesis, entonces se tiene la misma consecuencia semántica. Finalmente, el teorema de completitud, nos demostrará la implicación contraria, esto es, que si una fórmula se deriva semánticamente de un conjunto de hipótesis, entonces también se puede derivar sintácticamente.

A la hora de tomar la decisión de elegir el tema para mi Trabajo de Final de Grado, el tutor me planteó varias opciones, pero el único tema que me llamó la atención fue el de la lógica proposicional, ya que era el tema con el que mas familiarizada me sentía, y por tanto, el que más iba a disfrutar.

Capítulo 2

Estructura del lenguaje e inducción

A continuación introducimos el lenguaje de la lógica proposicional.

Definición 2.1 (Alfabeto). *El alfabeto de la lógica proposicional está compuesto por los siguientes elementos*

1. *Las* variables proposicionales *es un conjunto infinito numerable, denotado por* VAR*, de variables que denotarán proposiciones. Este viene dado por* $\mathrm{VAR} = \{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. *Los* conectores*, que serán las operaciones lógicas de nuestro lenguaje, en este caso*
   $\perp$ *el* absurdo*, será una constante.*
   $\neg$ *la* negación*, será una operación unaria.*
   $\wedge$ *la* conjunción*, será una operación binaria.*
   $\vee$ *la* disjunción*, será una operación binaria.*
   $\to$ *la* implicación*, será una operación binaria.*
   $\leftrightarrow$ *la* doble implicación*, será una operación binaria.*
3. *Los símbolos auxiliares* (,)*, de paréntesis y comas.*

A continuación presentamos la definición del conjunto de las fórmulas proposicionales, pero primero explicaremos alguna cuestión de notación.

Nota 2.2. *El símbolo* $\circ$ *representará a todos los conectores binarios citados en la definición anterior.*

Definición 2.3 (Fórmulas proposicionales). *Se define el conjunto* PROP *como el menor conjunto que verifica*

- *Para todo natural* n *se tiene que* $P_n \in \mathrm{PROP}, \perp \in \mathrm{PROP}$*, es decir,* PROP *contiene las variables y el absurdo.*
- *Si* $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$*, entonces* $(\phi \circ \psi) \in \mathrm{PROP}$.
- *Si* $\phi \in \mathrm{PROP}$*, entonces* $(\neg\phi) \in \mathrm{PROP}$.

  Las variables proposicionales y el falso también se denominan fórmulas atómicas o átomos, y se escribe

$$\mathrm{ATM} = \mathrm{VAR} \cup \{\perp\}.$$

CONVENCIÓN 2.4. *Para evitar escribir paréntesis que no sean necesarios, se ha creado un convenio en el que queda recogido el orden de las operaciones:*

- *Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que se deben omitir los paréntesis exteriores.*
- *En segundo lugar, la operación que tiene prioridad es la negación* $(\neg)$.
- *Lo siguiente con más influencia son la conjunción* $(\wedge)$ *y la disjunción* $(\vee)$. *Seguidos de estas dos, irán el condicional* $(\rightarrow)$ *y el bicondicional* $(\leftrightarrow)$.

NOTA 2.5. *A partir de ahora utilizaremos el símbolo* $\doteq$ *para la igualdad sintáctica de fórmulas, es decir, para relacionar aquellas fórmulas que son iguales por los criterios introducidos en la convención 2.4.*

Veamos un ejemplo de fórmulas sintácticamente iguales y otro que no se recoge en la convención anterior.

- $(\neg P) \doteq \neg P$.
- $(P_0 \wedge P_0) \wedge P_0 \not\doteq P_0 \wedge (P_0 \wedge P_0)$.

DEFINICIÓN 2.6. *El conjunto* PROP *admite una estructura de álgebra del tipo* $(\mathrm{PROP}, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$, *denotaremos esta estructura por* **PROP**.

Vamos a introducir el principio de inducción.

PROPOSICIÓN 2.7 (Principio de inducción). *Si tenemos un conjunto* $S \subseteq \mathrm{PROP}$ *que cumple*

- *Para todo natural* n, *la variable* P_n *y el absurdo están en* S.
- *Si* $\phi, \psi \in S$ *entonces* $\phi \circ \psi \in S$ *y* $\neg\phi \in S$, *es decir,* S *es cerrado para las operaciones.*

Entonces se tiene que $S = \mathrm{PROP}$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de esta proposición se sigue directamente de que $S \subseteq \mathrm{PROP}$ y del hecho que PROP se ha definido como el menor conjunto que satisface las propiedades de S, por tanto $\mathrm{PROP} \subseteq S$. □

Vamos a recordar el principio de inducción para los naturales, que nos servirá de ejemplo para demostrar el principio de inducción para fórmulas.

EJEMPLO 2.8. *El conjunto de los naturales* $\mathbb{N}$ *es el menor conjunto que satisface:*

- $0 \in \mathbb{N}$.
- *Si* n *está en* $\mathbb{N}$, *entonces su sucesor también.*

TEOREMA 2.9. *Sea P una afirmación tal que $P(0)$ es cierta y si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ también. Entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos $X = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\text{es cierta}\}$. Es obvio que X es un subconjunto de los naturales, es decir, $X \subseteq \mathbb{N}$.

Sabemos por el enunciado que P es una afirmación tal que $P(0)$ es cierta y que, si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ también. Como hemos dicho en el ejemplo 2.8, el conjunto de los naturales es el menor conjunto que verifica esto, y por tanto $\mathbb{N} \subseteq X$.

Entonces podemos afirmar que $\mathbb{N} = X$. □

Veamos ahora como el principio de inducción para fórmulas es equivalente al principio de inducción para los naturales.

TEOREMA 2.10. *Sea A una propiedad que verifica lo siguiente:*

- *Para todo natural n, $A(P_n)$ y $A(\perp)$, es decir, todas las variables proposicionales y el absurdo satisfacen la propiedad A.*
- *Si $A(\phi)$ y $A(\psi)$, entonces $A(\phi \circ \psi)$, es decir, si ϕ, ψ satisfacen la propiedad A, entonces $\phi \circ \psi$ también.*
- *Si $A(\phi)$, entonces se cumple que $A(\neg\phi)$, es decir, si ϕ satisface la propiedad A, entonces $\neg\phi$ también.*

Entonces se verifica $A(\phi)$ para toda fórmula $\phi \in \text{PROP}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el conjunto

$$X = \{\phi \in \text{PROP} : A(\phi)\}$$

y por tanto, X es un subconjunto de PROP, es decir, $X \subseteq \text{PROP}$.

Ahora se tiene que para todo natural se cumple que las variables de proposición y el absurdo estan en X. También se cumple que si $\phi, \psi \in X$ entonces $(\phi \circ \psi) \in X$ y $(\neg\phi) \in X$. Recordamos que PROP es el menor conjunto que verifica esto, por tanto $\text{PROP} \subseteq X$, y entonces $X = \text{PROP}$. □

EJEMPLO 2.11. *Siguiendo el principio de inducción, queremos demostrar que: Para cada fórmula $\phi \in \text{PROP}$, se tiene que hay un número par de paréntesis en ϕ.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a hacer la demostración por inducción sobre la fórmula ϕ.

Caso base.

- $(\perp)$: En el absurdo hay 0 paréntesis. Así que la afirmación para el caso de $\perp$ es correcta.

- (P_n): Para cada variable proposicional P_n $(n \in \mathbb{N})$ pasa lo mismo que antes. Por tanto, la afirmación es correcta para todas las variables.

Asi concluye el caso base.

Hipótesis inductiva.

Supongamos que la afirmación es cierta para $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$. Entonces, en ϕ tendríamos un número de paréntesis $2n$ y para ψ, $2m$, para algunos naturales $n, m \in \mathbb{N}$.

- $(\phi \circ \psi)$: La fórmula $(\phi \circ \psi)$ tiene entonces $2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$ paréntesis. Por tanto, el número de paréntesis es par y la afirmación es correcta para $(\phi \circ \psi)$.
- $(\neg\phi)$: La fórmula $(\neg\phi)$ tiene entonces $2n+2 = 2(n+1)$ paréntesis. Por tanto, el número de paréntesis también es par y la afirmación es correcta para $(\neg\phi)$.

Acabamos de ver que esta afirmación se verifica para todas las fórmulas $\phi \in \mathrm{PROP}$. □

A continuación introducimos el concepto de secuencia de formación.

DEFINICIÓN 2.12. *(Secuencia de formación) Una secuencia de formación para una fórmula ϕ es una secuencia de fórmulas $\phi_0, \phi_1, .., \phi_n$ que cumple que $\phi_n \doteq \phi$, de modo que, para cada $0 \leq i \leq n$, se cumple uno de los siguientes casos:*

- *ϕ_i es atómica, es decir, el absurdo o una variable proposicional.*
- *$\phi_i \doteq (\phi_k \circ \phi_l)$ para algunas fórmulas ϕ_k, ϕ_l en la secuencia en índices $0 \leq k, l \leq i$ anteriores a i.*
- *$\phi \doteq \neg\phi$ para alguna fórmula ϕ_k en la secuencia en un índice $0 \leq k < i$ anterior a i.*

NOTA 2.13. *En una secuencia de formación, podemos añadir fórmulas atómicas arbitrarias y seguirá siendo una secuencia de formación.*

Cada subsecuencia inicial de una secuencia de formación también es una secuencia de formación.

Si unimos dos secuencias de formación una detrás de la otra, el resultado también es una secuencia de formación.

A continuación vemos que toda fórmula admite una secuencia de formación.

TEOREMA 2.14. *Si $\phi \in \mathrm{PROP}$ entonces ϕ admite secuencia de formación.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a hacerlo por inducción sobre la estructura de ϕ. Empezaremos por el caso base.

Caso base.

- ($\perp$): En este caso
$$\perp$$
es una secuencia de formación para $\perp$.
- (P_n): donde P_n es una variable proposicional. En este caso
$$P_n$$
es una secuencia de formación para P_n.

Esto termina el caso base.

Hipótesis inductiva.

Suponemos el enunciado cierto para fórmulas ϕ y ψ, esto es, ϕ y ψ admiten una secuencia de formación, del tipo
$$\phi_0, \cdots, \phi_n \doteq \phi, \qquad \psi_0, \cdots, \psi_m \doteq \psi.$$

Pasamos a demostrar el teorema para los siguientes casos

- ($\phi \circ \psi$): donde $\circ$ és un símbolo lógico binario en $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. En este caso,
$$\phi_0, \cdots, \phi_n, \psi_0, \cdots, \psi_m, \phi \circ \psi$$
es una secuencia de formación para $\phi \circ \psi$.
- ($\neg\phi$): En este caso,
$$\phi_0, \cdots, \phi_n, \neg\phi$$
es una secuencia de formación para $\neg\phi$.

Esto concluye la demostración del Teorema 2.14. □

A continuación presentamos uno de los resultados más importantes del conjunto de proposiciones, su propiedad universal. Este resultado afirma que en si tenemos una aplicación de las variables proposicionales en un conjunto donde hay operaciones definidas para cada uno de los conectores de la lógica proposicional, entonces esta aplicación se puede extender a un homomorfismo del conjunto de proposiciones a este conjunto en cuestión.

Teorema 2.15 (Propiedad Universal). *Sea M un conjunto no vacío donde hay definidas operaciones del tipo:*
$$\perp\colon M^0 \longrightarrow M, \qquad \neg\colon M \longrightarrow M, \qquad \wedge\colon M \times M \longrightarrow M,$$
$$\vee\colon M \times M \longrightarrow M, \qquad \to\colon M \times M \longrightarrow M, \qquad \leftrightarrow\colon M \times M \longrightarrow M.$$

Escribimos esto como $\mathbf{M} = (M, \perp, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$.

Sea $f : \mathrm{VAR} \to \mathrm{M}$ *una aplicación, entonces existe un único homomorfismo*
$$f^{\#} : \mathbf{PROP} \to \mathbf{M}$$

que coincide con f sobre el conjunto de variables, esto es, una aplicación

$$f^{\#} : \mathrm{PROP} \to M$$

tal que

$$f^{\#}(\bot) = \bot, \qquad f^{\#}(P_n) = f(P_n),$$
$$f^{\#}(\neg\phi) = \neg f^{\#}(\phi), \qquad f^{\#}(\phi \circ \psi) = f^{\#}(\phi) \circ f^{\#}(\psi).$$

Demostración. Definimos $f^{\#}$ por recursión sobre la estructura de $\phi \in \mathrm{PROP}$.

- Si $\phi = P_n$ entonces $f^{\#}(P_n) = f(P_n)$.
- Si $\phi = \bot$ entonces $f^{\#}(\bot) = \bot$.

Supongamos que la aplicación $f^{\#}$ está definida en las proposiciones ϕ y ψ, es decir, conocemos $f^{\#}(\phi)$ y $f^{\#}(\psi)$. Entonces definimos

- $f^{\#}(\phi \circ \psi) = f^{\#}(\phi) \circ f^{\#}(\psi)$.
- $f^{\#}(\neg\phi) = \neg f^{\#}(\phi)$.

Así tenemos definida $f^{\#} : \mathbf{PROP} \to \mathbf{M}$. Se comprueba fácilmente que cumple todas las condiciones.

Ahora tenemos que mirar la unicidad y lo haremos suponiendo que existe $g : \mathbf{PROP} \to \mathbf{M}$ una aplicación que satisface

$$g(\bot) = f(\bot), \qquad g(P_k) = f(P_k),$$
$$g(\phi \circ \psi) = g(\phi) \circ g(\psi), \qquad g(\neg\phi) = \neg g(\phi)$$

Y teniendo esto, vamos a demostrar que $g = f^{\#}$ por inducción sobre la fórmula ϕ.

Caso base.

- $(\bot)$: Se verifica que $g(\bot) = \bot = f^{\#}(\bot)$.
- (P_n): Se verifica que $g(P_n) = f(P_n) = f^{\#}(P_n)$.

Hipótesis inductiva.

Suponemos que el enunciado es cierto para ϕ y ψ, es decir, $g(\phi) = f^{\#}(\phi)$ y $g(\psi) = f^{\#}(\psi)$, y vamos a demostrarlo para los casos siguientes

- $(\phi \circ \psi)$: Se verifica que

$$g(\phi \circ \psi) = g(\phi) \circ (\psi) = f^{\#}(\phi) \circ f^{\#}(\psi) = f^{\#}(\phi \circ \psi).$$

- $(\neg\phi)$: Se verifica que

$$g(\neg\phi) = \neg g(\phi) = \neg f^{\#}(\phi) = f^{\#}(\neg\phi).$$

Así, el enunciado es cierto para toda ϕ en PROP, es decir, $g = f^{\#}$. □

Veamos un ejemplo de aplicación de la propiedad universal.

EJEMPLO 2.16. *Sea $2 = \{0, 1\}$, donde definimos $\perp = 0$, y las siguientes operaciones:*

$\neg$	*1*	*0*
	0	*1*

$\wedge$	*0*	*1*
0	*0*	*0*
1	*0*	*1*

$\vee$	*0*	*1*
0	*0*	*1*
1	*1*	*1*

$\rightarrow$	*0*	*1*
0	*1*	*1*
1	*0*	*1*

$\leftrightarrow$	*0*	*1*
0	*1*	*0*
1	*0*	*1*

Entonces, para cada $v\colon \mathrm{VAR} \longrightarrow M$ existe un único homomorfismo $v^{\#}\colon \mathbf{PROP} \longrightarrow \mathbf{2}$ que extiende a v. Esta aplicación se llamará evaluación de fórmulas en función de la valoración v.

Veamos un ejemplo concreto. Si fijamos una valoración de las variables proposicionales, por ejemplo,

$$\begin{array}{rccc} v\colon & \mathrm{VAR} & \longrightarrow & 2 \\ & P & \longmapsto & 0 \\ & Q & \longmapsto & 1 \\ & R & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Entonces la evaluación de la fórmula $P \vee Q \rightarrow R$ en función de la valoración v viene dada por

$$\begin{aligned} v^{\#}(P \vee Q \rightarrow R) &= v^{\#}(P \vee Q) \rightarrow v^{\#}(R) \\ &= (v^{\#}(P) \vee v^{\#}(Q)) \rightarrow v^{\#}(R) \\ &= (v(P) \vee v(Q)) \rightarrow v(R) \\ &= (0 \vee 1) \rightarrow 1 \\ &= 1 \rightarrow 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

A continuación presentamos la definición recursiva del árbol de estructura de una fórmula.

DEFINICIÓN 2.17 (Árbol de estructura). *Para $\phi \in \mathrm{PROP}$, se define su árbol de estructura $\mathrm{T}(\phi)$ de forma recursiva como sigue*

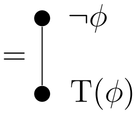
Caso base.

($\phi \in \mathrm{ATM}$): *Si ϕ es una fórmula atómica, definimos su árbol de estructura como el árbol que sólo contiene un vértice etiquetado por ϕ.*

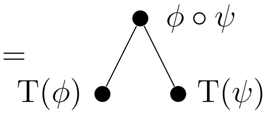
$$\mathrm{T}(\phi) = \bullet\ \phi$$

Recursión. Suponemos definido el árbol de estructura para ϕ y ψ, esto es, conocemos $\mathrm{T}(\phi)$ y $\mathrm{T}(\psi)$.

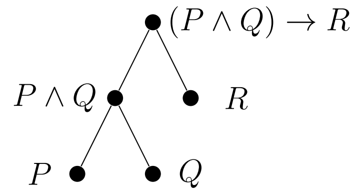
($\neg\phi$) : *Si tenemos una fórmula del tipo $\neg\phi$, para una fórmula ϕ para la que ya hemos definido su árbol de estructura, entonces definimos el árbol de estructura para $\neg\phi$ como el árbol que tiene un vértice superior etiquetado con $\neg\phi$ que enlaza con el respectivo árbol para ϕ, esto es,*

$\mathrm{T}(\neg\phi) =$ 

$(\phi \circ \psi)$: *Si tenemos una fórmula del tipo $\phi \circ \psi$, con fórmulas ϕ y ψ para las que ya hemos definido su árbol de estructura, entonces definimos el árbol de estructura para $\phi \circ \psi$ como el árbol que tiene un vértice superior etiquetado con $\phi \circ \psi$ que enlaza con los respectivos árboles para ϕ y ψ, esto es,*

$\mathrm{T}(\phi \circ \psi) =$ 

Ejemplo 2.18. *Se considera la fórmula $\phi \doteqdot (P \wedge Q) \to R$ en* PROP*, entonces su árbol de estructura viene dado por*

$\mathrm{T}(\phi) =$ 

A continuación definimos la altura de una fórmula.

Definición 2.19 (Altura). *Consideramos el álgebra dada por la tupla $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \perp)$, donde las operaciones vienen definidas como sigue.*

Las operaciones $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\leftrightarrow$ se interpretan de la misma forma, siendo esta la siguiente

$$\begin{array}{rrcl} \circ\colon & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (n, m) & \longmapsto & \max(n, m) + 1 \end{array}$$

La operación de negación viene dada por

$$\begin{array}{rrcl} \neg\colon & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & n + 1 \end{array}$$

Finalmente, la constante $\perp$ se identifica con el 0*, esto es*

$$\begin{array}{rrcl} \perp\colon & \mathbb{N}^0 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & * & \longmapsto & \mathit{0} \end{array}$$

Consideramos la asignación que a cada variable proposicional le asigna la constante 0*, esto es*

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{a}\colon & \mathrm{VAR} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & P_n & \longmapsto & \mathit{0} \end{array}$$

Entonces, por propiedad universal, sabemos que existe una única aplicación de **PROP** *en* $\mathbb{N}$*, que extiende a la aplicación anterior, esta aplicación se llamará aplicación altura, denotada por* alt

$$\mathrm{alt}\colon \quad \mathbf{PROP} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Ejemplo 2.20. *Veamos cómo funciona la aplicación altura sobre un ejemplo concreto. Para la proposición*

$$\varphi = P \wedge Q \to R,$$

se tiene que su altura viene dada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{alt}(\varphi) &= \mathrm{alt}(P \wedge Q \to R) \\
&= \mathrm{alt}(P \wedge Q) \to \mathrm{alt}(R) \\
&= (\mathrm{alt}(P) \wedge \mathrm{alt}(Q)) \to \mathrm{alt}(R) \\
&= (\mathrm{a}(P) \wedge \mathrm{a}(Q)) \to \mathrm{a}(R) \\
&= (0 \wedge 0) \to 0 \\
&= 1 \to 0 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Definimos a continuación la noción de subfórmula.

Definición 2.21 (Subfórmulas). *Consideramos el conjunto dado por el producto cartesiano de* PROP *con el conjunto de sus partes,*

$$\mathrm{M} = \mathrm{PROP} \times \mathcal{P}\,(\mathrm{PROP}) = \{(\psi, X) \mid \psi \in \mathrm{PROP}, X \subseteq \mathrm{PROP}\}$$

Sobre este conjunto definimos la siguiente estructura algebraica

$$\mathbf{M} = (M, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \perp)$$

Donde, las operaciones $\wedge$, $\vee$, $\to$ *y* $\leftrightarrow$ *se interpretan de la misma forma, siendo esta la siguiente*

$$\begin{array}{rccc}
\circ\colon & \mathrm{M} \times \mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{M} \\
& ((\psi, X), (\phi, Y)) & \longmapsto & (\psi \circ \phi, \{\psi \circ \phi\} \cup X \cup Y)
\end{array}$$

Esto es, dados los pares (ψ, X) *y* (ϕ, Y)*, devuelve el par formado por la correspondiente fórmula* $\psi \circ \phi$*, siendo* $\circ$ *respectivamente* $\wedge$, $\vee$, $\to$ *y* $\leftrightarrow$ *en cada caso, y como conjunto,* $\{\psi \circ \phi\} \cup X \cup Y$*.*

La operación $\neg$ *sigue el mismo esquema, esto es,*

$$\begin{array}{rccc}
\neg\colon & \mathrm{M} & \longrightarrow & \mathrm{M} \\
& (\psi, X) & \longmapsto & (\neg\psi, \{\neg\psi\} \cup X)
\end{array}$$

Finalmente la constante $\perp$*, viene dada por*

$$\begin{array}{rccc}
\perp\colon & \mathrm{M}^0 & \longrightarrow & \mathrm{M} \\
& * & \longmapsto & (\perp, \{\perp\})
\end{array}$$

Para la asignación que a cada variable proposicional le asigna el par formado por la variable y el conjunto formado por esta única variable, esto es,

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathrm{VAR} & \longrightarrow & \mathrm{M} \\ & P_n & \longmapsto & (P_n, \{P_n\}) \end{array}$$

Se tiene, por Propiedad Universal, la existencia de un único homomorfismo que extiende a f, este homomorfismo se llamará el homomorfismo de subfórmulas y se denotará por Sub, *esto es,*

$$\mathrm{Sub}\colon \quad \mathbf{PROP} \longrightarrow \mathbf{M}$$

Ejemplo 2.22. *Veamos un ejemplo de aplicación del homomorfismo subfórmula sobre la fórmula $P \wedge Q \to R$*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}(P \wedge Q \to R) &= \mathrm{Sub}(P \wedge Q) \to \mathrm{Sub}(R) \\ &= (\mathrm{Sub}(P) \wedge \mathrm{Sub}(Q)) \to \mathrm{Sub}(R) \\ &= (f(P) \wedge f(Q)) \to f(R) \\ &= ((P, \{P\}) \wedge (Q, \{Q\})) \to (R, \{R\}) \\ &= (P \wedge Q, \{P, Q, P \wedge Q\}) \to (R, \{R\}) \\ &= (P \wedge Q \to R, \{P, Q, R, P \wedge Q, P \wedge Q \to R\}). \end{aligned}$$

Una fórmula φ se llama subfórmula de ϕ si φ aparece en el conjunto de subfórmulas de ϕ, y en este caso, escribimos $\varphi \leq \phi$.

Proposición 2.23. *Si φ y ϕ son fórmulas en* PROP *y $\varphi \leq \phi$, entonces* $\mathrm{Sub}(\varphi) \subseteq \mathrm{Sub}(\phi)$.

Demostración. Lo haremos por inducción sobre la altura de las fórmulas.

Caso base.

Fórmula de altura 0. La única posibilidad de que $\varphi \leq \phi$ con $\mathrm{alt}(\psi) = \mathrm{alt}(\phi) = 0$ es que $\varphi = \psi$. Este caso se cumple directamente.

Hipótesis inductiva.

Suponemos que se cumple para fórmulas de altura n y lo demostraremos para fórmulas de altura $n + 1$.

Es decir, tenemos que $\varphi \leq \phi$ con $\mathrm{alt}(\phi) = n + 1$.

Las únicas posibilidades para ϕ son

$(\phi \doteq \neg\psi)$: En este caso tenemos que

$$\mathrm{Sub}(\phi) = \mathrm{Sub}(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup \mathrm{Sub}(\varphi).$$

$(\phi \doteq \psi \circ \eta)$: En este caso tenemos que

$$\mathrm{Sub}(\phi) = \mathrm{Sub}(\psi \circ \eta) = \{\psi \wedge \eta\} \cup \mathrm{Sub}(\psi) \cup \mathrm{Sub}(\eta).$$

En cualquier caso se tiene que, para que $\varphi \leq \phi$, o bien $\varphi \doteq \phi$ o bien $\varphi \leq \psi$ (en el caso de la negación) o bien $\varphi \leq \psi$ o $\varphi \leq \eta$ (en el caso de un conector binario). Si $\varphi \doteq \phi$, entonces el resultado se obtiene directamente. En los otros dos casos, el resultado se obtiene por inducción. □

Como acabamos de ver, el resultado anterior lo hemos demostrado por inducción sobre la altura de la fórmula. Esto es consecuencia del principio de recursión, como veremos a continuación.

TEOREMA 2.24. *Sea A una proposición sobre fórmulas proposicionales que satisface que*

- *A es cierta para toda fórmula ϕ con $\mathrm{alt}(\phi) = 0$.*
- *Si A es cierta para toda fórmula ϕ y ψ con $\mathrm{alt}(\phi), \mathrm{alt}(\psi) < n$, entonces A es cierta para toda fórmula φ con $alt(\varphi) = n$.*

Entonces A es cierta para toda fórmula.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el conjunto

$$X = \{\in \mathrm{PROP}\colon A(\varphi)\}.$$

Se comprueba fácilmente que las fórmulas atómicas estan en X porque son fórmulas de altura 0. También si ϕ y ψ estan en X, entonces $\neg\phi$ y $\phi \circ \psi$ estan en X porque la altura de estas últimas fórmulas es, como mucho, $1 + \mathrm{alt}(\phi)$, en el caso de la negación, o $1 + \mathrm{máx}(\mathrm{alt}(\phi), \mathrm{alt}(\psi))$, en el caso del conector binario.

El resultado se sigue del Teorema 2.10. □

Capítulo 3

Semántica

En esta sección se introduce la semántica del lenguaje formal de la lógica proposicional, se introducen conceptos como el de tautología y consecuencia semántica. En primer lugar recuperamos la noción de evaluación de una fórmula que hemos presentado en el Ejemplo 2.16 para estudiarla con más detalle.

DEFINICIÓN 3.1 (Tabla de verdad). *El conjunto* $2 = \{0, 1\}$ *tiene estructura de álgebra para las operaciones* $\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ *definidas como sigue*

$\bot$: $f_\bot = 0$;
$\neg$: $f_\neg(x) = 1 - x$;
$\wedge$: $f_\wedge(x, y) = \text{mín}\{x, y\} = xy$;
$\vee$: $f_\vee(x, y) = \text{máx}\{x, y\} = x + y - xy$;
$\rightarrow$: $f_\rightarrow(x, y) = 1 - x + xy$;
$\leftrightarrow$: $f_\leftrightarrow(x, y) = 1 - |x - y|$.

Estas operaciones se pueden representar en esta tabla.

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Una asignación es un aplicación del tipo

$$v : \text{VAR} \rightarrow 2$$

Si $v(P_n) = 0$ *entonces diremos que* P_n *es falsa para* v. *Si* $v(P_n) = 1$ *entonces diremos que* P_n *es verdadera para* v.

Por Propiedad Universal, sabemos que existe la aplicación:

$$v^\# : \mathbf{PROP} \rightarrow \mathbf{2}.$$

Esta aplicación se llamará aplicación evaluación de acuerdo a v.

EJEMPLO 3.2. *Vamos a ver un caso concreto. Sean P,Q y R nuestras variables proposicionales, consideramos la asignación*

$$\begin{array}{cccc} v: & \text{VAR} & \longrightarrow & 2 \\ & P & \longmapsto & 0 \\ & Q & \longmapsto & 0 \\ & R & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Entonces, por Propiedad Universal sabemos que existe

$$v^{\#} : \mathbf{PROP} \to \mathbf{2}$$

Si tuviésemos la fórmula

$$\phi = ((P \wedge Q) \vee R) \to R,$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} v^{\#}(\phi) &= ((v^{\#}(P) \wedge v^{\#}(Q)) \vee v^{\#}(R)) \to v^{\#}(P) \\ &= ((0 \wedge 0) \vee 1 \to 0) \\ &= ((0 \vee 1) \to 0 \\ &= 1 \to 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vamos a ver todas las posibles asignaciones que se le pueden dar a estas variables proposicionales, esto queda representado en la siguiente tabla de la verdad para la fórmula $\phi = (P \wedge Q) \vee R \to R$. En este caso usaremos una tabla de verdad, encabezada por una secuencia de formación para la fórmula $\phi = (P \wedge Q) \vee R \to R$, para llevar control de todas las posibles evaluaciones.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$(P \wedge Q) \vee R \to R$
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

El siguiente resultado nos dice que si dos evaluaciones coinciden sobre las variables proposicionales, entonces coinciden sobre toda fórmula.

LEMA 3.3 (De coincidencia). *Sean v y w dos asignaciones que cumplen que para toda variable proposicional P_n en* VAR *se tiene que $v(P_n) = w(P_n)$, entonces se cumple que, para toda fórmula $\phi \in$* PROP, *se tiene que*

$$v^{\#}(\phi) = w^{\#}(\phi).$$

Demostración. Se sigue de la unicidad de la extensión de v y a w, respectivamente, demostrada en el Teorema 2.15. $\square$

Una utilidad directa del resultado anterior es que no es necesario que las evaluaciones coincidan en todas las variables proposicionales, si no, que coincidan en las variables proposicionales que utiliza una fórmula dada para garantizar que la evaluación de la fórmula es idéntica.

Ejemplo 3.4. *Consideramos las asignaciones siguientes*

$$\begin{array}{rccc} v\colon & \mathrm{VAR} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & P & \longmapsto & 0 \\ & Q & \longmapsto & 0 \\ & R & \longmapsto & 1 \\ & S & \longmapsto & 0 \\ & T & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} w\colon & \mathrm{VAR} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & P & \longmapsto & 0 \\ & Q & \longmapsto & 0 \\ & R & \longmapsto & 1 \\ & S & \longmapsto & 0 \\ & T & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Notamos que $v(T) \neq w(T)$. No obstante, si consideramos la fórmula $\phi = ((P \wedge Q) \vee R) \to S$. Entonces

$$v^{\#}(\phi) = 0 = w^{\#}(\phi).$$

Esto se debe, en última instancia, a que el valor de verdad de la variable proposicional T no afecta al valor de verdad de la fórmula ϕ.

A continuación introducimos algunas nociones.

Definición 3.5. *Sea ϕ una fórmula en* PROP*, diremos que ϕ es*

- *una tautología si, para toda asignación $v : \mathrm{VAR} \to 2$, se tiene que $v^{\#}(\phi) = 1$.*
- *una contradicción si, para toda asignación $v : \mathrm{VAR} \to 2$, se tiene que $v^{\#}(\phi) = 0$.*
- *una contingencia si existen dos asignaciones $v : \mathrm{VAR} \to 2$ y $w : \mathrm{VAR} \to 2$ tales que $v^{\#}(\phi) = 0$ y $w^{\#}(\phi) = 1$.*
- *una fórmula satisfacible si existe una asignación $v : \mathrm{VAR} \to 2$ que cumple $v^{\#}(\phi) = 1$.*

Ejemplo 3.6. *Vamos a ver diferentes ejemplos de los conceptos que acabamos de introducir.*

$P \vee \neg P$ *es tautología.*

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
0	1	1
1	0	1

$P \wedge \neg P$ *es contradicción.*

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
0	1	0
1	0	0

$P \to Q$ *es contingente y satisfacible.*

P	Q	$P \to Q$
0	*0*	*1*
0	*1*	*1*
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*

A continuación introducimos uno de los conceptos fundamentales de este trabajo, la noción de consecuencia semántica.

DEFINICIÓN 3.7 (Consecuencia semántica). *Dada* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *y* $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$*, un conjunto de fórmulas que llamaremos conjunto de hipótesis. Diremos que* ϕ *es consecuencia semántica de* Γ*, y lo denotaremos por* $\Gamma \vDash \phi$*, si para toda valoración* $v : \mathrm{VAR} \to 2$ *tal que* $v^{\#}$ *hace verdaderas todas las fórmulas de* Γ*, es decir* $v^{\#}(\psi) = 1$ *para toda fórmula* ψ *en* Γ*, entonces se tiene que* $v^{\#}(\phi)$ *es verdadera, es decir* $v^{\#}(\phi) = 1$*.*

Notamos que ϕ *es una tautología si, y solo si,* ϕ *es consecuencia semántica del vacío, esto lo denotaremos por* $\vDash \phi$*.*

Escribiremos $\Gamma \nvDash \phi$*, si* ϕ *no es consecuencia semántica de* Γ*.*

Utilizaremos $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vDash \phi$ *en lugar de* $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\} \vDash \phi$*. También utilizaremos* $\Gamma, \Delta \vDash \phi$ *en lugar de* $\Gamma \cup \Delta \vDash \phi$*.*

Notemos que, generalmente, $\Gamma \nvDash \phi$ *no significará* $\Gamma \vDash \neg\phi$*.*

EJEMPLO 3.8. *Vamos a ver ejemplos de consecuencia semántica.*

- $P, Q \vDash P \wedge Q$*. Esto lo demostramos mediante la tabla de verdad.*

P	Q	$P \wedge Q$
0	*0*	*0*
0	*1*	*0*
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*

  En esta tabla de verdad hemos listado todas las posibles valoraciones para P *y* Q*. Notamos que para todas las valoraciones que hacen ciertas las hipótesis* P *y* Q*, se tiene que la tesis* $P \wedge Q$ *también es cierta. Esto solo se da cuando* P *y* Q *son ciertas a la vez. Por tanto esta fórmula es consecuencia semántica de* P *y* Q*, esto es* $P, Q \vDash P \wedge Q$*.*
- $P, P \to Q \vDash Q$

P	Q	$P \to Q$
0	*0*	*0*
0	*1*	*1*
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*

Siempre que las hipótesis P y $P \to Q$ son ciertas, tenemos que la tesis Q también es cierta, y por tanto es consecuencia semántica.

- $P \vee Q \not\models P$

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

En la segunda fila, podemos ver que $P \vee Q$ es cierta, pero P no lo es, entonces no es consecuencia semántica.

- $\models \neg\neg P \leftrightarrow P$

P	$\neg P$	$\neg\neg P$	$\neg\neg P \leftrightarrow P$
0	1	0	1
1	0	1	1

Siempre se cumple $\neg\neg P \leftrightarrow P$, y se deduce semánticamente del vacío, es decir, no importa cuales sean las hipótesis.

A continuación introducimos la noción de ser lógicamente equivalente.

Definición 3.9 (Lógicamente equivalente). *Si $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$, diremos que ϕ y ψ son lógicamente equivalentes si $\psi \models \phi$ y $\phi \models \psi$ y lo escribimos $\phi \dashv\models \psi$.*

Proposición 3.10. *Para todas las fórmulas $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ son equivalentes:*

- *ϕ y ψ son lógicamente equivalentes.*
- *Para toda valoración $v : \mathrm{VAR} \to 2$ se verifica que*
$$v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi).$$
- *$\models \phi \leftrightarrow \psi$.*

Demostración. Suponemos que ϕ y ψ son lógicamente equivalentes, y tenemos que demostrar que para toda valoración $v : \mathrm{VAR} \to 2$ se verifica que $v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi)$.

Si ϕ y ψ son lógicamente equivalentes entonces $\phi \models \psi$ y $\psi \models \phi$. Sea
$$v : \mathrm{VAR} \to 2$$
una valoración.

Entonces existen dos opciones, o bien $v^{\#}(\phi) = 0$, o $v^{\#}(\phi) = 1$.

- Notamos que si $v^{\#}(\phi) = 0$, entonces $v^{\#}(\psi) = 0$ también, ya que en caso contrario no se cumpliría que $\psi \models \phi$.

- Por otra parte, si $v^{\#}(\phi) = 1$, entonces $v^{\#}(\psi) = 1$ por la misma razón que el caso anterior.

Suponemos que para toda valoración $v : \text{VAR} \to 2$ se verifica que $v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi)$ y tenemos que ver que $\vDash \phi \leftrightarrow \psi$.

Si v es una valoración, tenemos que $v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi)$. Por la tabla de verdad, sabemos que $\leftrightarrow$ solo es verdadera cuando $v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi) = 0$ o cuando $v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi) = 1$. Por tanto $\vDash \phi \leftrightarrow \psi$.

Suponemos que $\vDash \phi \leftrightarrow \psi$ y tenemos que llegar a que ϕ y ψ son lógicamente equivalentes.

Sea v una valoración tal que $v^{\#}(\phi) = 1$, como $\vDash \phi \leftrightarrow \psi$ tenemos que $v^{\#}(\phi \leftrightarrow \psi) = 1$. Así obtenemos que $v^{\#}(\psi) = 1$.

Por otro lado, si $v^{\#}(\phi) = 0$, como $\vDash \phi \leftrightarrow \psi$ tenemos que $v^{\#}(\phi \leftrightarrow \psi) = 0$. Por tanto $v^{\#}(\psi) = 0$. □

A continuación comprobamos que el concepto de ser lógicamente equivalente es una relación de equivalencia en PROP.

LEMA 3.11 (Equivalencia lógica). *La equivalencia lógica es una relación de equivalencia en* PROP. *Esto se cumple para todas las fórmulas* $\phi, \psi, \sigma \in \text{PROP}$.

- *(Reflexividad)* $\phi \dashv\vDash \phi$.
- *(Simetría) Si* $\phi \dashv\vDash \psi$ *entonces* $\psi \dashv\vDash \phi$.
- *(Transitividad) Si* $\phi \dashv\vDash \psi$ *y* $\psi \dashv\vDash \sigma$, *entonces* $\phi \dashv\vDash \sigma$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de los dos primeros es trivial.

Vamos a ver la tercera. Como $\phi \dashv\vDash \psi$, eso significa que $\phi \vDash \psi$, es decir, siempre que se cumpla ϕ lo hará ψ y que $\psi \vDash \phi$, y por tanto cada vez que ψ sea verdadera, también lo será ϕ.

Lo mismo pasa con $\psi \dashv\vDash \sigma$, $\psi \vDash \sigma$ y $\sigma \vDash \psi$ y por tanto, siempre que una sea verdadera, la otra también lo será.

Por tanto,cuando ϕ se cumpla, lo hará ψ, y por tanto σ. Cuando σ sea verdadera, lo será ψ y entonces también ϕ. Así,$\phi \dashv \vDash \sigma$. □

Vamos a ver algunas propiedades del operador de consecuencia semántica.

LEMA 3.12. *Sean* $\phi, \psi \in \text{PROP}$. *Entonces se cumple que:*

- *Si* $\phi \vDash \psi$, *entonces* $\phi \wedge \psi \dashv \vDash \phi$.
- *Si* $\phi \vDash \psi$, *entonces* $\phi \vee \psi \dashv\vDash \psi$.
- *Si* $\vDash \phi$, *entonces* $\phi \wedge \psi \dashv\vDash \psi$.
- *Si* $\vDash \phi$, *entonces* $\neg\phi \vee \psi \dashv\vDash \psi$.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que $\phi \vDash \psi$ tenemos que demostrar que $\phi \wedge \psi \vDash \phi$ y que $\phi \vDash \phi \wedge \psi$.

Sea $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración. Suponemos que $v^{\#}(\phi \wedge \psi) = 1$, y esto pasa cuando $v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi) = 1$, en particular, $v^{\#}(\phi) = 1$.

Por tanto $\phi \wedge \psi \vDash \phi$.

Por otro lado, sea v una valoración $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ tal que $v^{\#}(\phi) = 1$. Como $\phi \vDash \psi$ y $v^{\#}(\phi) = 1$, tenemos que $v^{\#}(\psi) = 1$. Por tanto $v^{\#}(\phi \wedge \psi) = 1$, y por tanto $\phi \vDash \phi \wedge \psi$.

Suponemos que $\phi \vDash \psi$, tenemos que demostrar que $\phi \vee \psi \vDash \psi$ y que $\psi \vDash \phi \vee \psi$.

Sea $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración tal que $v^{\#}(\phi \vee \psi) = 1$, y esto es posible siempre y cuando alguna de ellas, o las dos, sean verdaderas. Como sabemos que $\phi \vDash \psi$, implica que $v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi) = 1$. Por tanto tenemos que $\phi \vee \psi \vDash \psi$.

Por otro lado tenemos $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración tal que $v^{\#}(\phi) = 1$,y como $\phi \vDash \psi$, entonces $v^{\#}(\psi) = 1$, y por tanto $v^{\#}(\phi \vee \psi) = 1$.

Suponemos $\vDash \phi$ y tenemos que ver que $\phi \wedge \psi \vDash \psi$ y que $\psi \vDash \phi \wedge \psi$.

Sea $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración tal que $v^{\#}(\phi \wedge \psi) = 1$, y esto solo puede pasar cuando $v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi) = 1$, por tanto, se cumple que $\phi \wedge \psi \vDash \psi$.

Por otro lado, sea $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración tal que $v^{\#}(\psi) = 1$, y como sabemos por el enunciado, $v^{\#}(\phi) = 1$, y por tanto $v^{\#}(\phi \wedge \psi) = 1$ $\rightarrow \psi \vDash \phi \wedge \psi$.

Suponemos que $\vDash \phi$ y tenemos que ver que $\neg\phi \vee \psi \vDash \psi$ y que $\psi \vDash \neg\phi \vee \psi$.

Suponemos $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración tal que $v^{\#}(\neg\phi \vee \psi) = 1$. Como $v^{\#}(\phi) = 1$, implica que $v^{\#}(\neg\phi) = 0$, y para que $v^{\#}(\neg\phi \vee \psi) = 1$, alguna tiene que ser verdadera $\rightarrow v^{\#}(\psi) = 1$,por tanto $\neg\phi \vee \psi \vDash \psi$.

Por último, suponemos $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración tal que $v^{\#}(\psi) = 1$, es inmediato que $v^{\#}(\neg\phi \vee \psi) = 1$, entonces $\psi \vDash \neg\phi \vee \psi$. $\square$

El siguiente lema, llamado de importación-exportación, nos permite ver la relación entre las hipótesis y la demostración de implicaciones.

Lema 3.13 (Importación-exportación). *Sean $\phi_1, \phi_2, .., \phi_n, \psi$ fórmulas en* PROP. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- $\phi_1, \cdots, \phi_n \vDash \psi$;
- $\vDash (\phi_1 \wedge (\cdots \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \rightarrow \psi$.

Demostración. Suponemos que $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$ es una valoración que hace que cuando $\phi_1, ..., \phi_n$ es verdadera, también lo sea ψ. Queremos ver que $\vDash (\phi_1 \wedge (... \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \rightarrow \psi$.

Sea $v : \text{VAR} \longrightarrow 2$. Así $v^{\#}(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) = 0$ o $v^{\#}(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) = 1$. Si $v^{\#}(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) = 0$, entonces $v^{\#}((\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \psi) = 1$.

Por otro lado, si $v^{\#}(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) = 1$ es porque $v^{\#}(\phi_k) = 1$ para $1 \leq k \leq n$. Por hipótesis, sabemos que cuando $\phi_1, ..., \phi_n$ es verdadera, hace que también lo sea ψ, por tanto $v^{\#}((\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \to \psi) = 1$.

Por otro lado, si suponemos que existe $v : \mathrm{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración tal que hace que $\vDash (\phi_1 \wedge (... \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \to \psi$, queremos probar que $\phi_1, ..., \phi_n \vDash \psi$.

Si se cumple que $(\phi_1 \wedge (... \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \to \psi$ existen 3 posibilidades:

- $v^{\#}(\phi_1 \wedge (... \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) = 0$ y por tanto $v^{\#}(\psi) = 0$.
- $v^{\#}(\phi_1 \wedge (... \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) = 0$ y por tanto $v^{\#}(\psi) = 1$.
- $v^{\#}(\phi_1 \wedge (... \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) = 1$ y por tanto $v^{\#}(\psi) = 1$.

Por tanto, se cumple que $\phi_1, ..., \phi_n \vDash \psi$. $\square$

Capítulo 4

Sustitución

En este capítulo vamos a introducir la operación de sustitución de variables en proposiciones. Definiremos la sustitución de manera recursiva y demostraremos la cláusula de sustitución, esto es, el resultado que nos garantiza que sustituir fórmulas lógicamente equivalentes nos devuelve fórmulas lógicamente equivalentes.

Definición 4.1 (Sustitución). *Sean ϕ y ψ dos fórmulas en* PROP *y sea P una variable proposicional en* VAR. *Definimos la fórmula $\phi[\psi/P]$, como el resultado de reemplazar todas las apariciones de la variable P en la fórmula ϕ por la fórmula ψ.*

La sustitución se define de forma recursiva como sigue.

Caso base.

$\phi \doteq \bot$ *Como la constante $\bot$ no contiene ninguna subfórmula P, la sustitución de P en $\bot$ por ψ nos deja $\bot$ invariante.*

$$\bot[\psi/P] \doteq \bot.$$

$\phi \doteq P_n$ *La sustitución de P en una variable proposicional dependerá de la variable en la que sustituímos, si esta es P nos devuelve ψ, en otro caso nos deja la variable invariante.*

$$P_n[\psi/P] \doteq \begin{cases} P_n & si\ P \not\doteq P_n \\ \psi & si\ P \doteq P_n \end{cases}$$

Paso recursivo.

Dadas las fórmulas ϕ_1 y ϕ_2 en PROP, *suponemos definidas las sustituciones $\phi_1[\psi/P]$ y $\phi_2[\psi/P]$, entonces consideramos los siguientes casos.*

$\phi \doteq \neg\phi_1$ *En este caso la sustitución sólo afectará al subtérmino ϕ_1 manteniendo la negación, esto es*

$$\phi[\psi/P] \doteq \neg\left(\phi_1[\psi/P]\right).$$

$\phi \doteq \phi_1 \circ \phi_2$ *En este caso la sustitución sólo afectará a los subtérminos ϕ_1 y ϕ_2 manteniendo el conector $\circ$, esto es*

$$\phi[\psi/P] \doteq \left(\phi_1[\psi/P]\right) \circ \left(\phi_2[\psi/P]\right).$$

Esto concluye la definición recursiva de la sustitución.

EJEMPLO 4.2. *Consideramos algunos ejemplos de sustituciones*

$$((P \to Q) \wedge P)[Q \vee P/R] \doteq (P \to Q) \wedge P).$$

$$((P \to Q) \wedge P)[Q \vee P/P] \doteq ((Q \vee P) \to Q) \wedge (Q \vee P).$$

A continuación introducimos el operador de sustitución simultánea.

DEFINICIÓN 4.3 (Sustitución simultánea). *Sean* $\phi, \psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathrm{PROP}$ *y sean* $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{VAR}$. *Se define la fórmula*

$$\phi[\psi_1/P_1, \ldots, \psi_n/P_n]$$

como el resultado de la sustitución simultánea de todas las variables P_l, *para* $1 \leq l \leq n$, *por la correspondiente fórmula* ϕ_l *en la fórmula* ψ.

También podemos utilizar la notación

$$\phi[\psi_1, \ldots, \psi_n/P_1, \ldots, P_n].$$

NOTA 4.4. *Distinguimos entre la sustitución secuencial, esto es, la sustitución sobre un término ya sustituído, respecto de la sustitución simultánea, ya que, generalmente, no son la misma operación. Como ejemplo, considérese la siguientes sustituciones, primero una sustitución secuencial y luego una sustitución simultánea.*

$$(P \wedge Q)[P/Q][Q/P] \doteq (P \wedge P)[Q/P] \doteq (Q \wedge Q).$$

$$(P \wedge Q)[P/Q, Q/P] \doteq (Q \wedge P).$$

Presentamos el resultado fundamental de este capítulo, la cláusula de sustitución, que nos permite relacionar la sustitución y la equivalencia lógica.

TEOREMA 4.5 (Cláusula de sustitución). *Sean* $\psi_1, \psi_2, \phi \in \mathrm{PROP}$ *y* $P \in \mathrm{VAR}$. *Si las proposiciones* ψ_1 *y* ψ_2 *son lógicamente equivalentes, esto es* $\psi_1 \Dashv\vDash \psi_2$, *entonces*

$$\phi[\psi_1/P] \Dashv\vDash \phi[\psi_2/P].$$

DEMOSTRACIÓN. Haremos la demostración por inducción sobre ϕ.

Caso base.

$\phi \doteq \bot$ Recordamos que la sustitución sobre el absurdo no modifica esta constante, por tanto

$$\bot[\psi_1/P] \doteq \bot \Dashv\vDash \bot \doteq \bot[\psi_2/P].$$

$\phi \doteq P_n$ En este caso, debemos distinguir si $P \doteq P_n$ o $P \not\doteq P_n$.

En el primer caso, esto es, $P \doteq P_n$, se tiene lo siguiente

$$P[\psi_1/P] \doteq \psi_1 \Dashv\vDash \psi_2 \doteq P[\psi_2/P].$$

En el segundo caso, esto es, $P \neq P_n$, se tiene lo siguiente

$$P_n[\psi_1/P] \doteq P_n \dashv\vDash P_n \doteq P_n[\psi_2/P].$$

En cualquiera de los casos se obtiene el resultado.

Hipótesis inductiva.

Suponemos la afirmación cierta para ϕ_1 y ϕ_2. Es decir, las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes

$$\phi_1[\psi_1/P] \dashv\vDash \phi_1[\psi_2/P]; \qquad \phi_2[\psi_1/P] \dashv\vDash \phi_2[\psi_2/P].$$

Esto es, para toda valoración $v\colon \mathrm{VAR} \longrightarrow 2$ se tiene que

$$v^{\#}\left(\phi_1[\psi_1/P]\right) = v^{\#}\left(\phi_1[\psi_2/P]\right); \quad v^{\#}\left(\phi_2[\psi_1/P]\right) = v^{\#}\left(\phi_2[\psi_2/P]\right).$$

$\phi \doteq \neg\phi_1$ En este caso, obtenemos que

$$\phi[\psi_1/P] \doteq \neg\left(\phi_1[\psi_1/P]\right); \qquad \phi[\psi_2/P] \doteq \neg\left(\phi_2[\psi_2/P]\right);$$

Así, si $v\colon \mathrm{VAR} \longrightarrow 2$ es una valoración se tiene que

$$v^{\#}\left(\phi[\psi_1/P]\right) = 1 - v^{\#}\left(\phi_1[\psi_1/P]\right) = 1 - v^{\#}\left(\phi_2[\psi_2/P]\right) = v^{\#}\left(\phi[\psi_2/P]\right).$$

Como las dos fórmulas resultantes de la sustitución siempre tienen la misma valoración, sea cual sea esta, entonces tenemos que son lógicamente equivalente, esto es,

$$\phi[\psi_1/P] \dashv\vDash \phi[\psi_2/P].$$

$\phi \doteq \phi_1 \circ \phi_2$ En este caso, obtenemos que

$$\phi[\psi_1/P] \doteq \left(\phi_1[\psi_1/P]\right) \circ \left(\phi_2[\psi_1/P]\right);$$
$$\phi[\psi_2/P] \doteq \left(\phi_1[\psi_2/P]\right) \circ \left(\phi_2[\psi_2/P]\right).$$

Así, si $v\colon \mathrm{VAR} \longrightarrow 2$ es una valoración se tiene que

$$\begin{aligned} v^{\#}\left(\phi[\psi_1/P]\right) &= f_\circ\left(v^{\#}\left(\phi_1[\psi_1/P]\right), v^{\#}\left(\phi_2[\psi_1/P]\right)\right) \\ &= f_\circ\left(v^{\#}\left(\phi_1[\psi_2/P]\right), v^{\#}\left(\phi_2[\psi_2/P]\right)\right) \\ &= v^{\#}\left(\phi[\psi_2/P]\right) \end{aligned}$$

Como las dos fórmulas resultantes de la sustitución siempre tienen la misma valoración, sea cual sea esta, entonces tenemos que son lógicamente equivalente, esto es,

$$\phi[\psi_1/P] \dashv\vDash \phi[\psi_2/P].$$

Esto concluye la demostración del resultado.

□

Capítulo 5

Completitud funcional y dualidad

En esta sección vamos a definir el concepto de completitud funcional de conjuntos de conectores, definiendo primero lo que es un conector. Luego daremos la definición de dos tipos de aplicación, la aplicación $*$, y la aplicación dual $^{\delta}$.

Definición 5.1 (Conector). *Sea n un natural, se define conector n-ário, representado genéricamente con la letra sigma (σ), a cualquier operación lógica n-ária, es decir, cualquier proposición que depende de n variables proposicionales. Notemos que todo conector n-ário tendrá asociado una tabla de verdad.*

Esto define una función de verdad n-ária

$$f_\sigma : 2^n \longrightarrow 2$$

y esto significa que para cada fórmula $\sigma(\phi_1, \cdots, \phi_n)$, existe una valoración v que verifica

$$v^{\#}(\sigma(\phi_1, \cdots, \phi_n)) = f_\sigma(v^{\#}(\phi_1), \cdots, v^{\#}(\phi_n))$$

Definición 5.2 (Completitud funcional). *Sea K un conjunto de conectores, decimos que un conector n-ário σ es representable sobre K si existe una fórmula τ, definida a partir de operaciones definidas en K, en la que aparecen n variables proposicionales $P_1, \cdots, P_n$ y se verifica*

$$\tau \dashv\models \sigma(P_1, \cdots, P_n)$$

Decimos que K es completamente funcional, si se verifica que para todo n natural, σ se puede representar en K.

Ejemplo 5.3. *El conjunto $K = \{\neg, \vee\}$ es suficiente para representar $\rightarrow$, es decir, $\rightarrow$ es representable sobre K. Para ello comprobaremos que $P \rightarrow Q \dashv\models \neg P \vee Q$ y que, por tanto, podremos escribir $\rightarrow$ en función de $\neg$ y $\vee$. Vamos a verlo mediante una tabla de verdad.*

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Nota 5.4.
- *Como* $\bot, \neg\bot$ *son operaciones 0-árias, es decir, son constantes (como ya definimos en el primer capítulo), para poder representarlas sobre un conjunto K, al menos una de ellas tiene que estar incluida en dicho conjunto.*
- *Sea* τ *una fórmula y* σ *un conector representable sobre K. Por la cláusula de sustitución se verifica que para todas las fórmulas* $\phi_1, \cdots, \phi_n \in \mathrm{PROP}$ *se cumple que*

$$\tau[\phi_1/P_1, \cdots, \phi_n/P_n] \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \sigma(\phi_1, \cdots, \phi_n)$$

A continuación se presentan algunos ejemplos más de representabilidad.

Teorema 5.5. *Algunos conectores individuales pueden definirse a partir de otros conectores. Para todo* $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ *se tiene que*

1. $\phi \leftrightarrow \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$*, es decir,* $\leftrightarrow$ *es representable sobre* $\{\to, \wedge\}$.
2. $\phi \to \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\neg\phi \vee \psi)$*, es decir, como hemos visto en el ejemplo 5.3,* $\to$ *es representable sobre* $\{\neg, \vee\}$.
3. $\phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg\phi \to \psi$*, es decir,* $\vee$ *es representable sobre el conjunto* $\{\neg, \to\}$.
4. $\phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$*, es decir, el conector* $\vee$ *es representable sobre el conjunto* $\{\neg, \wedge\}$.
5. $\phi \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$*, al contrario que el apartado anterior, el conector* $\wedge$ *es representable sobre* $\{\neg, \vee\}$.
6. $\neg\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi \to \bot$*, es decir,* $\neg$ *es representable sobre* $\{\to, \bot\}$.
7. $\bot \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi \wedge \neg\phi$*, esta afirmación será lógicamente equivalente pero no será representable, ya que en la definición de representable las dos fórmulas tenían que tener la misma aridad, y nos damos cuenta de que* $\bot$ *es* $0-$*ária y* $\phi \wedge \neg\phi$ *es* $1-$*ária.*

Demostración. Vamos a hacer una tabla de la verdad con cada una de estas equivalencias lógicas para demostrar que se cumplen.

1. $\phi \leftrightarrow \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

ϕ	ψ	$\phi \to \psi$	$\psi \to \phi$	$(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$	$\phi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

2. $\phi \to \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\neg\phi \vee \psi)$

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\phi \vee \psi$	$\phi \to \psi$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

3. $\phi \vee \psi \dashv\vDash \neg\phi \to \psi$

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\phi \to \psi$	$\phi \vee \psi$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

4. $\phi \vee \psi \dashv\vDash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$	$\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$	$\phi \vee \psi$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

5. $\phi \wedge \psi \dashv\vDash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \vee \neg\psi$	$\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$	$\phi \wedge \psi$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

6. $\neg\phi \dashv\vDash \phi \to \bot$

ϕ	$\bot$	$\neg\phi$	$\phi \to \bot$
1	0	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1
0	0	1	1

7. $\bot \dashv\vDash \phi \wedge \neg\phi$

ϕ	$\bot$	$\neg\phi$	$\phi \wedge \neg\phi$
1	0	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	1	0

Así concluye la demostración del Teorema 5.5 $\square$

EJEMPLO 5.6. *Vamos a expresar $\wedge$ en función de $\to$ y $\bot$, siguiendo el teorema que acabamos de ver, partiendo de la fórmula $\phi \wedge \psi$.*

Vamos a utilizar el apartado 5 del teorema anterior, y por tanto

$$\phi \wedge \psi \dashv\models \neg(\neg\phi \vee \neg\psi).$$

Utilizando ahora el apartado 6, $\neg\phi \dashv\models \phi \to \bot$*, tendríamos*

$$\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \dashv\models ((\neg\phi) \vee (\psi \to \bot)) \to \bot.$$

Nos fijamos en que hemos aplicado la propiedad 6 dos veces, pero no lo hemos hecho con ϕ *porque así podemos utilizar la propiedad 2,* $\phi \to \psi \dashv\models (\neg\phi \vee \psi)$

Y entonces el resultado sería

$$((\neg\phi) \vee (\psi \to \bot)) \to \bot \dashv\models (\phi \to (\psi \to \bot)) \to \bot$$

Expresando así $\wedge$ *en función de* $\{\to, \bot\}$

A continuación presentamos el teorema de integridad funcional, que nos dice que el conjunto que consta de la conjunción, la disjunción, la negación y el absurdo es completamente funcional.

TEOREMA 5.7 (Integridad funcional). *Sea* $K = \{\wedge, \vee, \neg, \bot\}$*. Para cada conector n-ario* σ *existe una fórmula* τ*, que contiene las variables proposicionales* $P_1, \cdots, P_n$ *y solo utiliza las operaciones de* K *que verifica*

$$\tau \dashv\models \sigma(P_1, \cdots, P_n).$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a hacerlo por inducción sobre el número de parámetros de σ.

Caso base.

Si $n = 0$ (σ es un conector 0-ario)

- $\sigma \doteq \bot$, es trivial porque $\bot$ está en K.
- $\sigma \not\doteq \bot$, entonces σ es la constante a 1, es decir, $f_\sigma = f_\top = 1 - f_\bot$. Entonces consideramos $\tau \doteq \neg\bot$.

Por tanto. vemos que se cumple el caso base.

Hipótesis inductiva.

Suponemos que se verifican las hipótesis para los conectores n-ários. Sea σ un conector $n+1$-ário, definido por su función de verdad f_σ.

Definimos los siguientes dos conectores que dependen de n parámetros σ_0 y σ_1 definidas en función de f_σ como sigue

$$f_{\sigma_0}(X_1, \cdots, X_n) = f_\sigma(X_1, \cdots, X_n, 0);$$
$$f_{\sigma_1}(X_1, \cdots, X_n) = f_\sigma(X_1, \cdots, X_n, 1).$$

Sea v una valoración. Distinguimos dos casos

- si $v(P_{n+1}) = 0$.

Entonces se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} v^{\#}(\sigma(P_1, \cdots, P_{n+1})) &= v^{\#}(\sigma(P_1, \cdots, \bot)) \\ &= v^{\#}(\sigma_0(P_1, \cdots, P_n)) \\ &= v^{\#}(\neg P_{n+1} \wedge \sigma_0(P_1, \cdots, P_n)). \end{aligned}$$

- si $v(P_{n+1}) = 1$.

Entonces se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} v^{\#}(\sigma(P_1, \cdots, P_{n+1})) &= v^{\#}(\sigma(P_1, \cdots, \top)) \\ &= v^{\#}(\sigma_1(P_1, \cdots, P_n)) \\ &= v^{\#}(P_{n+1} \wedge \sigma_1(P_1, \cdots, P_n)). \end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos la siguente equivalencia lógica.

$$\sigma(P_1, \cdots, P_{n+1}) \dashv\vDash (\neg P_{n+1} \wedge \sigma_0(P_1, \cdots, P_n)) \vee (P_{n+1} \wedge \sigma_1(P_1, \cdots, P_n)).$$

Por la hipótesis inductiva sabemos que existen fórmulas τ_0, τ_1, que contienen n variables proposicionales y conectores de K, tales que

$$\tau_0 \dashv\vDash \sigma_0(P_1, \cdots, P_n); \qquad \tau_1 \dashv\vDash \sigma_1(P_1, \cdots, P_n).$$

Ahora aplicamos la cláusula de sustitución para τ.

$$\tau \doteq (\neg P_{n+1} \wedge \tau_0) \vee (P_{n+1} \wedge \tau_1).$$

Donde τ verifica las condiciones exigidas. □

Ejemplo 5.8. *Vamos a ver un ejemplo de un conector cualquiera binario dado por su tabla de verdad.*

ϕ_1	ϕ_2	$\sigma(\phi_1, \phi_2)$
0	*0*	*0*
0	*1*	*1*
1	*0*	*0*
1	*1*	*0*

La fórmula necesaria para escribir nuestro conector de acuerdo al teorema que acabamos de ver, es

$$\sigma(\phi_1, \phi_2) \dashv\vDash (\neg\phi_2 \wedge \neg\phi_1 \wedge \bot) \vee (\neg\phi_2 \wedge \phi_1 \wedge (\neg\bot)) \vee (\phi_2 \wedge \phi_1 \wedge \bot) \vee (\phi_2 \wedge \phi_1 \wedge \bot).$$

Corolario 5.9. *Los siguientes conjuntos de conectores son completamente funcionales.*

$$\{\to, \bot\}, \{\neg, \to\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}$$

Demostración. Vamos a expresar los elementos que no pertenezcan a estos conjuntos, pero si a $K = \{\wedge, \vee, \neg, \bot\}$, conjunto citado previamente en el Teorema 5.7, en función de los elementos de los respectivos conjuntos.

- $M_1 = \{\to, \bot\}$ Por el Teorema 5.7 de integridad funcional sabemos que el conjunto $K = \{\wedge, \vee, \neg, \bot\}$ es completamente funcional, por tanto, nos damos cuenta de que este conjunto contiene tres elementos que no pertenecen a M_1, vamos a escribirlos en funcion de los elementos de M_1.
  1. $\neg P \dashv\models P \to \bot$.
  2. $P_1 \vee P_2 \dashv\models \neg P_1 \to P_2 \dashv\models (P_1 \to \bot) \to P_2$.
  3. $p_1 \wedge P_2 \dashv\models \neg(\neg P_1 \vee \neg P_2) \dashv\models ((P_1 \to \bot) \vee ((P_2 \to \bot)) \to \bot$.
- $M_2 = \{\neg, \to\}$ Vamos a seguir el procedimiento del apartado anterior, pero en este caso, tendríamos que expresar $\vee, \wedge, \bot$ en función de $\{\neg, \to\}$
  1. $P_1 \vee P_2 \dashv\models \neg P_1 \to P_2$.
  2. $P_1 \wedge P_2 \dashv\models \neg(\neg P_1 \vee \neg P_2) \dashv\models \neg(\neg\neg P_1 \to \neg P_2)$.
  3. $\bot \dashv\models P_1 \wedge \neg P_1 \dashv\models \neg(\neg\neg P_1 \to \neg\neg P_2)$.
- $M_3 = \{\neg, \vee\}$ En este apartado expresamos $\wedge, \bot$ en función de $\{\vee, \neg\}$
  1. $P_1 \wedge P_2 \dashv\models \neg(\neg P_1 \vee \neg P_2)$.
  2. $\bot \dashv\models P_1 \wedge \neg P_1 \dashv\models \neg(\neg P_1 \vee \neg\neg P_2)$.
- $M_4 = \{\neg, \wedge\}$ Y por último, vemos que en este apartado tendríamos que expresar $\bot, \vee$ en función de $\{\neg, \wedge\}$ y nos damos cuenta de que la sustitución es directa.
  1. $\bot \dashv\models P_1 \wedge \neg P_1$.
  2. $P_1 \vee P_2 \dashv\models \neg(\neg P_1 \wedge \neg P_2)$.

Para las equivalencias en cada caso, hemos utilizado las propiedades vistas en el Teorema 5.5. □

NOTA 5.10. *La noción de completitud funcional también nos permite simplificar las demostraciones y las definiciones. A partir de ahora para las definiciones que vienen vamos a considerar que tenemos únicamente el siguiente conjunto de conectores $K = \{\neg, \wedge, \vee, \bot\}$.*

Ahora vamos a definir la fórmula $*$ de una fórmula dada.

DEFINICIÓN 5.11 (Aplicación $*$). *La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} *: & \mathrm{PROP} & \longrightarrow & \mathrm{PROP} \\ & \phi & \longmapsto & \phi^* \end{array}$$

Se define de forma recursiva sobre ϕ como sigue

Caso base.

$(\bot)$: *Se define $\bot^* \triangleq \neg\bot$.*
(P_n) : *Se define $P_n^* \triangleq \neg P_n$.*

Hipótesis inductiva.

Suponemos definida la aplicación estrella sobre las fórmulas ϕ y ψ.

$(\neg\phi)$: *Se define* $(\neg\phi)^* \doteq \neg\phi^*$.
$(\phi \wedge \psi)$: *Se define* $(\phi \wedge \psi)^* \doteq \phi^* \vee \psi^*$.
$(\phi \vee \psi)$: *Se define* $(\phi \vee \psi)^* \doteq \phi^* \wedge \psi^*$.

Notamos que la aplicación estrella únicamente intercambia las fórmulas atómicas por su negación, no altera la negación e intercambia los conectores $\vee$ y $\wedge$. Vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo 5.12. *Para la fórmula* $\phi = (P \vee Q) \to (P \wedge R)$, *vamos a obtener* ϕ^*.

Nos damos cuenta de que nuestra fórmula esta formada por un conector que no hemos incluído en nuestro conjunto $K = \{\neg, \wedge, \vee, \perp\}$, *y que, por tanto, vamos a tener que reescribir en función de los conectores que sí estan en* K *haciendo uso del segundo apartado del Teorema 5.5.*

$$\phi = (P \vee Q) \to (P \wedge R) \dashv\models \neg(P \vee Q) \vee (P \wedge R)$$

$$\begin{aligned}
\phi^* &= (\neg(P \vee Q) \vee (P \wedge R))^* \\
&\doteq (\neg(P \vee Q))^* \wedge (P \wedge R)^* \\
&\doteq \neg(P \vee Q)^* \wedge (P^* \vee R^*) \\
&\doteq \neg(P^* \wedge Q^*) \wedge (P^* \vee R^*) \\
&\doteq \neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R).
\end{aligned}$$

A continuación vamos a enunciar un lema que relaciona la aplicación $*$ de una fórmula con su negación.

Lema 5.13. *Par toda fórmula* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *y para toda valoración* $v\colon \mathrm{VAR} \longrightarrow 2$, *se tiene que*

$$v^{\#}(\phi^*) = 1 - v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\neg\phi).$$

Demostración. Lo haremos por inducción sobre ϕ.

Sea $v\colon \mathrm{VAR} \longrightarrow 2$ una valoración arbitraria, donde se tiene en cuenta que solo se pueden considerar fórmulas sobre K.

Caso base

$\phi \in \mathrm{ATM}$ Si ϕ es una fórmula átomica y v una valoración, se tiene

$$v^{\#}(\phi^*) = v^{\#}(\neg\phi) = 1 - v^{\#}(\phi).$$

Hipótesis inductiva

Suponemos que se verifica el enunciado para las fórmulas ϕ, ψ.

Primero lo probaremos para la fórmula $\neg\phi$.

$$\begin{aligned} v^{\#}(\neg\phi)^* &= \neg v^{\#}(\phi^*) \\ &= 1 - v^{\#}(\phi^*) \\ &= v^{\#}(\neg\phi) && \text{(HI)} \\ &= v^{\#}(\neg(\neg\phi)). \end{aligned}$$

Lo siguiente que probaremos será la conjunción $\phi \wedge \psi$.

$$\begin{aligned} v^{\#}((\phi \wedge \psi)^*) &= v^{\#}(\phi^* \vee \psi^*) && \text{(Def } \star\text{)} \\ &= \text{máx}(v^{\#}(\phi^*), v^{\#}(\psi^*)) \\ &= \text{máx}(1 - v^{\#}(\psi), 1 - v^{\#}(\sigma)). && \text{(HI)} \end{aligned}$$

Notamos que $v^{\#}((\phi \wedge \psi)^*) = 0$ o $v^{\#}((\phi \wedge \psi)^*) = 1$
Vemos el primer caso:

$$\begin{aligned} v^{\#}((\phi \wedge \psi)^*) = 0 &\leftrightarrow \text{máx}(1 - v^{\#}(\phi), 1 - v^{\#}(\psi)) = 0 \\ &\leftrightarrow 1 - v^{\#}(\phi) = 0 \text{ y } 1 - v^{\#}(\psi) = 0 \\ &\leftrightarrow v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi) = 1 \\ &\leftrightarrow v^{\#}(\phi \wedge \psi) = 1. \end{aligned}$$

El hecho de tener $\leftrightarrow$ en la demostración, nos deja demostrado el segundo caso, ya que si no es 0, será 1.

Por último, lo probaremos para la disjunción $\phi \vee \psi$.

$$\begin{aligned} v^{\#}((\phi \vee \psi)^*) &= v^{\#}(\phi^* \wedge \psi^*) && \text{(Def } \star\text{)} \\ &= \text{mín}(v^{\#}(\phi^*), v^{\#}(\psi^*)) \\ &= \text{mín}(1 - v^{\#}(\phi), 1 - v^{\#}(\psi)). && \text{(HI)} \end{aligned}$$

Notamos que $v^{\#}((\psi \vee \sigma)^*) = 0$ o $v^{\#}((\psi \vee \sigma)^*) = 1$
Vemos el primer caso:

$$\begin{aligned} v^{\#}((\phi \vee \psi)^*) = 0 &\leftrightarrow \text{mín}(1 - v^{\#}(\phi), 1 - v^{\#}(\psi)) = 0 \\ &\leftrightarrow 1 - v^{\#}(\psi) = 0 \text{ y } 1 - v^{\#}(\sigma) = 0 \\ &\leftrightarrow v^{\#}(\phi) = v^{\#}(\psi) = 1 \\ &\leftrightarrow v^{\#}(\psi \vee \sigma) = 1. \end{aligned}$$

El hecho de tener $\leftrightarrow$ en la demostración, nos deja demostrado el segundo caso, ya que si no es 0, será 1.

Esto completa la demostración del Lema 5.13. $\square$

COROLARIO 5.14. *Para toda fórmula* $\phi \in \text{PROP}$ *se tiene*

$$\phi^* \dashv\vDash \neg\phi$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es directa del Lema 5.13 . □

A continuación definiremos la fórmula dual de una fórmula dada.

DEFINICIÓN 5.15 (Dual). *La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} ^{\delta}: & \mathrm{PROP} & \longrightarrow & \mathrm{PROP} \\ & \phi & \longmapsto & \phi^{\delta} \end{array}$$

asigna a cada fórmula ϕ su dual ϕ^{δ}.

Se define de forma recursiva sobre ϕ como sigue

Caso base.

$(\bot)$: *Se define $\bot^{\delta} \doteq \bot$.*

(P_n) : *Se define $P_n^{\delta} \doteq P_n$.*

Hipótesis inductiva.

Suponemos definida la aplicación dual sobre las fórmulas ϕ y ψ.

$(\neg\phi)$: *Se define $(\neg\phi)^{\delta} \doteq \neg\phi^{\delta}$.*

$(\phi \wedge \psi)$: *Se define $(\phi \wedge \psi)^{\delta} \doteq \phi^{\delta} \vee \psi^{\delta}$.*

$(\phi \vee \psi)$: *Se define $(\phi \vee \psi)^{\delta} \doteq \phi^{\delta} \wedge \psi^{\delta}$.*

Notamos que la aplicación dual únicamente intercambia los conectores $\vee$ y $\wedge$. Con esto es fácil ver que $(\phi^{\delta})^{\delta} \doteq \phi$, para toda fórmula ϕ. Vamos a ver un ejemplo.

EJEMPLO 5.16. *Para la fórmula*

$$\phi \doteq (P \to Q) \vee R \dashv\vDash (\neg P \vee Q) \vee (\neg R).$$

Su fórmula dual viene dada por

$$\begin{aligned} \phi^{\delta} &\doteq ((\neg P \vee Q) \vee (\neg R))^{\delta} \\ &\doteq (\neg P \vee Q)^{\delta} \wedge (\neg R)^{\delta} \\ &\doteq \big((\neg P)^{\delta} \wedge (Q)^{\delta}\big) \wedge (\neg R)^{\delta} \\ &\doteq \big(\neg(P)^{\delta} \wedge Q\big) \wedge \neg(R)^{\delta} \\ &\doteq (\neg P \wedge Q) \wedge \neg R. \end{aligned}$$

La fórmula dual de la fórmula dual recupera la fórmula original, esto es,

$$(\phi^{\delta})^{\delta} \doteq \phi.$$

En el siguiente resultado demostraremos como la equivalencia lógica de dos fórmulas es equivalente a la equivalencia lógica de sus fórmulas duales.

TEOREMA 5.17 (Dualidad). *Sean* $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$, *entonces se tiene*

$$\phi \dashv\vDash \psi \leftrightarrow \phi^\delta \dashv\vDash \psi^\delta$$

Es decir, dos fórmulas son lógicamente equivalentes si y solo si sus duales también lo son.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos $\phi \dashv\vDash \psi$,queremos ver que $\phi^\delta \dashv\vDash \psi^\delta$.

Como hemos supuesto que $\phi \dashv\vDash \psi$ entonces tenemos que $\neg\phi \dashv\vDash \neg\psi$.

Por el Corolario 5.14 tenemos que

$$\phi^* \dashv\vDash \neg\phi \dashv\vDash \neg\psi \dashv\vDash \psi^*.$$

Sea n el número de variables proposicionales que ocurren en ϕ y ψ, es decir $\mathrm{At}(\phi) \cup \mathrm{At}(\psi) = \{P_1, \cdots, P_n\}$.

Por el Teorema 4.5 de sustitución, tenemos que

$$\phi^*[\neg P_1, \cdots, \neg P_n/P_1, \cdots, P_n] \dashv\vDash \psi^*[\neg P_1, \cdots, \neg P_n/P_1, \cdots, P_n].$$

Notamos que

$$\phi^*[\neg P_1, \cdots, \neg P_n/P_1, \cdots, P_n] \doteq \phi^\delta[\neg\neg P_1, \cdots, \neg\neg P_n/P_1, \cdots, P_n]$$
$$\psi^*[\neg P_1, \cdots, \neg P_n/P_1, \cdots, P_n] \doteq \psi^\delta[\neg\neg P_1, \cdots, \neg\neg P_n/P_1, \cdots, P_n]$$

También notamos que

$$\neg\neg P_i \dashv\vDash P_i.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\phi^*[\neg P_1, \cdots, \neg P_n/P_1, \cdots, P_n] &\doteq \phi^\delta[\neg\neg P_1, \cdots, \neg\neg P_n/P_1, \cdots, P_n]\\ &\dashv\vDash \psi^\delta[\neg\neg P_1, \cdots, \neg\neg P_n/P_1, \cdots, P_n]\\ &\doteq \psi^*[\neg P_1, \cdots, \neg P_n/P_1, \cdots, P_n]\end{aligned}$$

Y otra vez, por el Teorema 4.5 de sustitución, tenemos que

$$\phi^\delta = \phi^\delta[\neg\neg P_1, \cdots, \neg\neg P_n/P_1, \cdots, P_n] \dashv\vDash \psi^\delta[\neg\neg P_1, \cdots, \neg\neg P_n/P_1, \cdots, p_n] = \psi^\delta$$

Suponemos ahora que $\phi^\delta \dashv\vDash \psi^\delta$, y tenemos que ver que $\phi \dashv\vDash \psi$

Tenemos $\phi^\delta \dashv\vDash \psi^\delta$,entonces $(\phi^\delta)^\delta \dashv\vDash (\psi^\delta)^\delta$.

Como sabemos que $(\phi^\delta)^\delta \dashv\vDash \phi$, se tiene que $\phi \dashv\vDash \psi$.

Esto concluye la demostración del Teorema 5.17. $\square$

Capítulo 6

Leyes algebraicas y forma normal

En esta sección vamos a ver algunas leyes algebraicas, y gracias al Teorema 5.17, introduciremos la forma normal de una proposición lógica.

Teorema 6.1 (Leyes algebraicas). *Dadas $\phi, \psi, \sigma \in$ PROP, se cumplen las siguientes equivalencias lógicas*

1. *Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$.*

$$(\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \dashv\vDash \phi \wedge (\psi \wedge \sigma); \qquad (\phi \vee \psi) \vee \sigma \dashv\vDash \phi \vee (\psi \vee \sigma).$$

2. *Existencia de elementos neutros para $\wedge$ y $\vee$.*

$$\phi \wedge \neg\bot \dashv\vDash \phi; \qquad \phi \vee \bot \dashv\vDash \phi.$$

3. *Conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$.*

$$\phi \wedge \psi \dashv\vDash \psi \wedge \phi; \qquad \phi \vee \psi \dashv\vDash \psi \vee \phi.$$

4. *Distributividad de $\wedge$ y $\vee$.*

$$\phi \vee (\psi \wedge \sigma) \dashv\vDash (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma); \quad \phi \wedge (\psi \vee \sigma) \dashv\vDash (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)$$

5. *Leyes de De Morgan.*

$$\neg(\phi \wedge \psi) \dashv\vDash (\neg\phi \vee \neg\psi); \qquad \neg(\phi \vee \psi) \dashv\vDash (\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

6. *Idempotencia de $\wedge$ y $\vee$.*

$$\phi \wedge \phi \dashv\vDash \phi; \qquad \phi \vee \phi \dashv\vDash \phi.$$

7. *Doble negación.*

$$\neg\neg\phi \dashv\vDash \phi.$$

Demostración. Vamos a hacer una tabla de verdad para cada una de estas equivalencias.

- Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$.

ϕ	ψ	σ	$\phi \wedge \psi$	$(\phi \wedge \psi) \wedge \sigma$	$\psi \wedge \sigma$	$\phi \wedge (\psi \wedge \sigma)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

ϕ	ψ	σ	$\phi \vee \psi$	$(\phi \vee \psi) \vee \sigma$	$\psi \vee \sigma$	$\phi \vee (\psi \vee \sigma)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

- Existencia de elementos neutros para $\wedge$ y $\vee$.

ϕ	$\neg\perp$	$\phi \wedge \neg\perp$
0	1	0
1	1	1

ϕ	$\perp$	$\phi \vee \perp$
0	0	0
1	0	1

- Conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$.

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\psi \wedge \phi$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\psi \vee \phi$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- Distributividad de $\wedge$ y $\vee$.

ϕ	ψ	σ	$\psi \wedge \sigma$	$\phi \vee (\psi \wedge \sigma)$	$\phi \vee \psi$	$\phi \vee \sigma$	$(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ϕ	ψ	σ	$\psi \vee \sigma$	$\phi \wedge (\psi \vee \sigma)$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \wedge \sigma$	$(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

- Leyes de De Morgan.

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\neg(\phi \wedge \psi)$	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \vee \neg\psi$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\neg(\phi \vee \psi)$	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

- Idempotencia de $\wedge$ y $\vee$.

ϕ	$\phi \wedge \phi$
0	0
1	1

ϕ	$\phi \vee \phi$
0	0
1	1

- Doble negación.

ϕ	$\neg\phi$	$\neg\neg\phi$
0	1	0
1	0	1

Esto concluye la demostración del Teorema 6.1. $\square$

TEOREMA 6.2 (Ley de implicación). *Sean $\phi, \psi, \sigma \in$ PROP, entonces se cumplen las siguientes implicaciones:*

1. *Exportación e importación.*
$$\phi \to (\psi \to \sigma) \dashv\vDash \psi \wedge \psi \to \sigma.$$
2. *Contraposición.*
$$\phi \to \psi \dashv\vDash \neg\psi \to \neg\phi.$$
3. *Implicación de una disjuntiva.*
$$(\phi \vee \psi) \to \sigma \dashv\vDash (\phi \to \sigma) \wedge (\psi \to \sigma).$$

4. *Implicación a una conjuntiva.*

$$\sigma \to (\phi \wedge \psi) \dashv\models (\sigma \to \phi) \wedge (\sigma \to \psi).$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a hacer la demostración mediante una tabla de verdad para cada equivalencia.

- Exportación importación.

ϕ	ψ	σ	$\psi \to \sigma$	$\phi \to (\psi \to \sigma)$	$\phi \wedge \psi$	$(\phi \wedge \psi) \to \sigma$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

- Contraposición

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\neg\psi$	$\phi \to \psi$	$\neg\psi \to \neg\phi$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

- Implicación de una disjuntiva

ϕ	ψ	σ	$\phi \vee \psi$	$(\phi \vee \psi) \to \sigma$	$\phi \to \sigma$	$\psi \to \sigma$	$(\phi \to \sigma) \wedge (\psi \to \sigma)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

- Implicación a una conjuntiva.

ϕ	ψ	σ	$\phi \wedge \psi$	$\sigma \to (\phi \wedge \psi)$	$\sigma \to \phi$	$\sigma \to \psi$	$(\sigma \to \phi) \wedge (\sigma \to \psi)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Esto concluye la demostración del Teorema 6.2. □

A continuación definimos la generalización de la disjunción y la conjunción.

DEFINICIÓN 6.3 (Disjunción y conjunción de una família). *Sea $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ una família de fórmulas en* PROP, *entonces se define la conjunción de la família $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ recursivamente como sigue*

Caso base. Se define la conjunción de una família vacía como

$$\bigwedge_{k<0} \phi_k \doteq \neg\bot.$$

Hipótesis recursiva. Suponemos definida la conjunción de una família de n proposiciones, esto es, suponemos definida

$$\bigwedge_{k\leq 0} \phi_k.$$

Ahora, si $\{\phi_k\}_{k=1}^{n+1}$ es una família de $n+1$ proposiciones, se define su conjunción como sigue

$$\bigwedge_{k\leq n+1} \phi_k \doteq \left(\bigwedge_{k\leq n} \phi_k\right) \wedge \phi_{n+1}.$$

Pasamos ahora a definir la disjunción de la família $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ recursivamente como sigue

Caso base. Se define la disjunción de una família vacía como

$$\bigvee_{k<0} \phi_k \doteq \bot.$$

Hipótesis recursiva. Suponemos definida la disjunción de una família de n proposiciones, esto es, suponemos definida

$$\bigvee_{k\leq 0} \phi_k.$$

Ahora, si $\{\phi_k\}_{k=1}^{n+1}$ *es una família de* $n+1$ *proposiciones, se define su disjunción como sigue*

$$\bigvee_{k\leq n+1} \phi_k \doteq \left(\bigvee_{k\leq n} \phi_k\right) \vee \phi_{n+1}.$$

LEMA 6.4 (Generalización). *Las leyes algebraicas conocidas que se cumplen para* $\wedge$ *y* $\vee$ *también se verifican para su generalización*

1. $\neg \bigwedge_{k\leq n} \phi_k \dashv\vDash \bigvee_{k\leq n} \neg\phi_k$.
2. $\neg \bigvee_{k\leq n} \phi_k \dashv\vDash \bigwedge_{k\leq n} \neg\phi_k$.
3. $\neg(\bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} \phi_{k,l}) \dashv\vDash \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} (\neg\phi_{k,l})$.
4. $\neg(\bigvee_{k\leq n} \bigwedge_{l\leq m} \phi_{k,l}) \dashv\vDash \bigvee_{k\leq n} \bigwedge_{l\leq m} (\neg\phi_{k,l})$.
5. $(\bigwedge_{k\leq n} \phi_k) \vee \psi \dashv\vDash \bigwedge_{k\leq n} (\phi_k \vee \psi)$.
6. $(\bigvee_{k\leq n} \phi_k) \wedge \psi \dashv\vDash \bigvee_{k\leq n} (\phi_k \wedge \psi)$.
7. $(\bigwedge_{k\leq n} \phi_k) \vee (\bigwedge_{l\leq m} \psi_l) \dashv\vDash \bigwedge_{k\leq n, l\leq m} (\phi_k \vee \psi_l)$.
8. $(\bigvee_{k\leq n} \phi_k) \wedge (\bigvee_{l\leq m} \psi_l) \dashv\vDash \bigvee_{k\leq n, l\leq m} (\phi_k \wedge \psi_l)$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es equivalente a la demostración del Teorema 6.1. En este caso habría que razonar por inducción, siendo el caso base las equivalencias demostradas en el Teorema 6.1. □

A continuación introducimos los conceptos de fórmula literal y formas normales conjuntivas y disjuntivas de una fórmula.

DEFINICIÓN 6.5. *Sea* $\phi \in \mathrm{PROP}$*, entonces:*

1. ϕ *es* literal *si* $\phi \doteq P_n$ *o* $\phi \doteq \neg P_n$*, para algún* $n \in \mathbb{N}$*, o* $\phi \doteq \bot$ *o* $\phi \doteq \neg\bot$.
2. ϕ *se llama* forma normal conjuntiva (FNC) *si* ϕ *es una conjunción de disjunciones de literales, es decir,*
$$\phi \doteq \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} \phi_{k,l}.$$
3. ϕ *se llama* forma normal disjuntiva (FND) *si* ϕ *es una disjunción de conjunciones de literales, es decir,*
$$\phi \doteq \bigvee_{k\leq n} \bigwedge_{l\leq m} \phi_{k,l}.$$

NOTA 6.6. *Si tenemos $P_1 \wedge \neg P_2$ y $P_1 \vee \neg P_2$, estas fórmulas se pueden ver a la vez como forma normal conjuntiva (FNC) y como forma normal disjuntiva (FND).*

El siguiente teorema nos asegura la existencia de una forma normal conjuntiva (FNC) que es lógicamente equivalente a una fórmula dada. Seguimos haciendo uso de el mismo conjunto completamente funcional $K = \{\wedge, \vee, \neg, \perp\}$ visto en el Teorema 5.7. La FNC y la FND nos permiten reconstruir la tabla de verdad de dicha fórmula.

TEOREMA 6.7. *Toda proposición es lógicamente equivalente a una FNC y a una FND, es decir,*

$$\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi^c \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi^d.$$

Siendo ϕ^d la forma normal disjuntiva de ϕ y ϕ^c la forma normal conjuntiva de ϕ.

DEMOSTRACIÓN. Lo haremos por induccion sobre ϕ.

Caso Base.

(P_n) : Si ϕ es una variable proposicional, definimos $P_n^d \doteqdot P_n^c \doteqdot P_n$, por tanto,

$$P_n \mathrel{=\!\!|\!\models} P_n^d \mathrel{=\!\!|\!\models} P_n^c.$$

$(\perp)$: Si ϕ es el absurdo, definimos $\perp^d \doteqdot \perp^c \doteqdot \perp$, y siguiendo el procedimiento anterior:

$$\perp \mathrel{=\!\!|\!\models} \perp^d \mathrel{=\!\!|\!\models} \perp^c.$$

Hipótesis inductiva Suponemos que el enunciado se verifica para ϕ, ψ, es decir, se cumple

$$\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi^c \doteqdot \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} \delta_{k,l}; \qquad \psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^c \doteqdot \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} \mu_{k,l}.$$

$$\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi^d \doteqdot \bigvee_{k\leq n} \bigwedge_{l\leq m} \lambda_{k,l}; \qquad \psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^d \doteqdot \bigvee_{k\leq n} \bigwedge_{l\leq m} \kappa_{k,l}.$$

$(\neg\phi)$: Definimos la forma normal conjuntiva y disjuntiva de $\neg\phi$, respectivamente, como

$$(\neg\phi)^c \doteqdot \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} (\neg\lambda_{k,l})\,; \qquad (\neg\phi)^d \doteqdot \bigvee_{k\leq n} \bigwedge_{l\leq m} (\neg\delta_{k,l})\,.$$

Notamos la siguente cadena de equivalencias.

$$\begin{aligned}
(\neg\phi)^c &\doteq \bigwedge_{k\leq n}\bigvee_{l\leq m}(\neg\lambda_{k,l}) \\
&\dashv\models \neg\left(\bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{l\leq m}\lambda_{k,l}\right) && \text{(Lema 6.4)} \\
&\doteq \neg\phi^d \\
&\dashv\models \neg\phi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\neg\phi)^d &\doteq \bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{l\leq m}(\neg\delta_{k,l}) \\
&\dashv\models \neg\left(\bigwedge_{k\leq n}\bigvee_{l\leq m}\delta k, l\right) && \text{(Lema 6.4)} \\
&\doteq \neg\phi^c \\
&\dashv\models \neg\phi.
\end{aligned}$$

$(\phi \wedge \psi)$: Está claro que $\phi\wedge\psi \dashv\models \phi^c\wedge\psi^c$. Además la conjunción de formas normales conjuntivas es una forma normal conjuntiva. Por tanto definimos

$$(\phi \wedge \psi)^c \doteq \phi^c \wedge \psi^c.$$

Vamos a ver la disjuntiva. En este caso definimos

$$(\phi \wedge \psi)^d \doteq \bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{l\leq m}(\lambda_{k,l} \wedge \kappa_{k,l}).$$

Notamos la siguiente cadena de equivalencias

$$\begin{aligned}
(\phi \wedge \psi)^d &\doteq \bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{l\leq m}(\lambda_{k,l} \wedge \kappa_{k,l}) \\
&\dashv\models \bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{l\leq m}(\lambda_{k,l}) \wedge \bigvee_{k\leq n}\bigwedge_{l\leq m}(\kappa_{k,l}) && \text{(Lema 6.4)} \\
&\dashv\models \phi^d \wedge \psi^d \\
&\dashv\models \phi \wedge \psi.
\end{aligned}$$

$(\phi \vee \psi)$: Está claro que $\phi\vee\psi \dashv\models \phi^d\vee\psi^d$. Además la disjunción de formas normales disjuntivas es una forma normal disjuntiva. Por tanto definimos

$$(\phi \wedge \psi)^d \doteq \phi^d \vee \psi^d.$$

Vamos a ver la conjuntiva. En este caso definimos

$$(\phi \vee \psi)^c \doteq \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} (\delta_{k,l} \vee \mu_{k,l}) \,.$$

Notamos la siguiente cadena de equivalencias

$$\begin{aligned}
(\phi \vee \psi)^c &\doteq \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} (\delta_{k,l} \vee \mu_{k,l}) \\
&\mathrel{=\joinrel|}\models \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} (\delta_{k,l}) \vee \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} (\mu_{k,l}) && \text{(Lema 6.4)} \\
&\mathrel{=\joinrel|}\models \phi^c \vee \psi^c \\
&\mathrel{=\joinrel|}\models \phi \vee \psi.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del Teorema 6.7. □

Capítulo 7

Cálculo de deducción natural

En esta unidad vamos a definir el concepto de consecuencia sintáctica, y para ello primero tenemos que dar la definición de la notación que vamos a utilizar.

CONVENCIÓN 7.1. *Necesitaremos primero introducir las siguientes convenciones para la notación.*

- $\vdots$ *Estos puntos pueden representar cualquier derivación, es decir, es una forma de denotar un proceso deductivo sin mencionarlo explícitamente.*
- $\mathcal{D}$ *Denota una derivación, esto es, una demostración en la que se utilizan las reglas de derivación que luego presentaremos.*
- $\frac{\mathcal{D}}{\phi}$ *Indica una derivación que tiene como conclusión la fórmula ϕ.*
- $[\phi]$ *Utilizaremos este símbolo cuando la fórmula ϕ sea una suposición, y no una hipótesis o una fórmula previamente demostrada.*

DEFINICIÓN 7.2 (Reglas finales). *Las reglas finales determinan la transición desde las premisas hasta la conclusión, permiten la introducción y eliminación de conectores lógicos, algunas reglas también permiten suprimir suposiciones abiertas. La identificación de la regla que vamos a usar para la derivación se escribe entre paréntesis al lado del guión final.*

Como complemento a este capítulo, en el repositorio virtual demostramos, utilizando el verificador formal LEAN, que utiliza las reglas de cálculo presentadas en este capítulo, todas las proposiciones y teoremas que se han demostrado en los anteriores capítulos mediante tablas de verdad.

Las reglas del cálculo de deducción natural son las siguientes

- *Empezaremos por el absurdo ($\perp$). Solo tenemos una regla de eliminación para el absurdo, la cual nos dice que si tenemos el falso podemos conseguir cualquier fórmula.*

$$\frac{\perp}{P}\ \textit{(false.elim)}$$

- *La tautología ($\top$). Nos pasa lo contrario que con el absurdo, en este caso sin hipótesis, podemos deducir la verdad.*

$$\frac{}{\top}\ \textit{(true.intro)}$$

- *Negación ($\neg$). La negación tiene una regla de introducción y otra de eliminación. Para introducir la negación, tenemos la regla de reducción al absurdo. Si suponemos una hipótesis y llegamos al absurdo, entonces podemos negar la hipótesis.*

$$\begin{array}{c} [P] \\ \vdots \\ \bot \\ \hline \neg P \end{array}\ \textit{(by\_contradiction)}$$

Para eliminar la negación tenemos la regla de la doble negación. Todo número par de negaciones se simplifica.

$$\frac{\neg\neg P}{P}\,\textit{(double\_negation)}$$

- *Conjunción ($\wedge$). En este caso tenemos tres reglas, dos de eliminación y una de introducción. Empezaremos por las reglas de eliminación, en este caso a izquierda y a derecha.*

$$\frac{P \wedge Q}{P}\,\textit{(and.elim\_left)} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}\,\textit{(and.elim\_right)}$$

Y ahora vemos la de introducción

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}\ \textit{(and.intro)}$$

- *Disjunción ($\vee$). También tenemos tres reglas, dos de introducción y una de eliminación. Vemos primero las de introducción, a izquierda y a derecha, respectivamente.*

$$\frac{P}{P \vee Q}\ \textit{(or.inl)} \qquad\qquad \frac{Q}{P \vee Q}\ \textit{(or.inr)}$$

Para realizar la eliminación de la disjunción, hacemos casos. Si suponemos la proposición de la izquierda y llegamos a una fórmula R y ocurre los mismo con la proposición de la derecha, entonces podemos descargar la disjunción y quedarnos con R.

$$\frac{P \vee Q \qquad \begin{matrix}[P]\\ \vdots \\ R\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[Q]\\ \vdots \\ R\end{matrix}}{R}\ \textit{(by\_cases)}$$

- *Implicación (→). Tenemos dos reglas para la implicación, una de introducción y una de eliminación. Para la regla de introducción, lo que hacemos es asumir la hipótesis e intentar derivar la tesis. Esto nos permite introducir la fórmula de la implicación.*

$$\frac{\begin{matrix}[P]\\ \vdots \\ Q\end{matrix}}{P \to Q}\ \textit{(assume)}$$

Para la eliminación de una implicación, se tiene que dar la hipótesis y podemos descargar la implicación para quedarnos con la tesis. Esta regla lleva el nombre de modus ponens.

$$\frac{P \to Q \qquad P}{Q}\ \textit{(modus.ponens)}$$

- *Doble implicación (↔). Para la doble implicación tenemos dos reglas de eliminación y una de introducción. Para la regla de introducción de una doble implicación se necesitaran las dos implicaciones respectivas, de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.*

$$\frac{P \to Q \quad Q \to P}{P \leftrightarrow Q}\ \textit{(split)}$$

Para la eliminación de la doble implicación tenemos dos reglas, una que devuelve la implicación de izquierda a derecha y otra que devuelve la implicación de derecha a izquierda.

$$\frac{P \leftrightarrow Q}{P \to Q}\ \textit{(iff.elim\_left)} \qquad\qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \to R}\ \textit{(iff.elim\_right)}$$

Definición 7.3 (Derivación). *A continuación se da la definición de derivación.*

- *Una derivación puede ser una fórmula $\mathcal{D} \doteq \phi$.*
- *Dadas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ derivaciones, los siguientes árboles también son derivaciones*

- $(\wedge)$

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \psi\end{matrix}}{\phi \wedge \psi} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi \wedge \psi\end{matrix}}{\phi} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi \wedge \psi\end{matrix}}{\psi}$$

- $(\vee)$

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi \vee \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\phi] \\ \mathcal{D}_2 \\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \mathcal{D}_3 \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \psi\end{matrix}}{\psi \vee \phi} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi\end{matrix}}{\phi \vee \psi}$$

- $(\to)$

$$\frac{\begin{matrix}[\phi] \\ \mathcal{D}_1 \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \phi \to \psi\end{matrix}}{\psi}$$

- $(\leftrightarrow)$

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi \to \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \psi \to \phi\end{matrix}}{\phi \leftrightarrow \psi} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi \leftrightarrow \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi} \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi \leftrightarrow \psi\end{matrix}}{\psi \to \phi}$$

Definición 7.4 (Demostración). *De un conjunto de fórmulas Γ se deduce la fórmula ϕ y lo escribimos $\Gamma \vdash \phi$, si existe una secuencia de derivación formal que concluye en ϕ y utiliza las reglas anteriormente descritas sobre las proposiciones en Γ.*

Vamos a dar un ejemplo de derivación sintáctica.

Ejemplo 7.5. *Vamos a demostrar que $\neg P \vee Q \vdash P \to Q$.*

$$\cfrac{[P] \qquad \neg P \vee Q \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg P]}{\perp}\textit{(modus.ponens)}}{Q}\textit{(false.elim)} \quad [Q]}{Q}\textit{(by\_cases)}}{P \to Q}\textit{(assume)}$$

Definición 7.6 (Conjunto de hipótesis). *Para cada derivación $\mathcal{D}$, definimos el conjunto*

$$\mathrm{Hip}(\mathcal{D}) = \{\phi \in \mathrm{PROP} : \phi \textit{ es una hipótesis de } \mathcal{D}\},$$

Es decir, el conjunto de hipótesis necesarias para obtener $\mathcal{D}$.

Definición 7.7 (Consecuencia sintáctica). *Podemos escribir $\Delta \vdash \phi$ y diremos que ϕ es consecuencia sintáctica de Δ si existe una derivación ($\mathcal{D}$) que tiene como conclusión la fórmula ϕ y tal que las hipótesis de esa derivación estén en Δ, es decir,* $\mathrm{Hip}(\mathcal{D}) \subseteq \Delta$. *Ahora vamos a ver la notación*

- *Si para demostrar ϕ necesitamos como hipótesis $\phi_1, ..\phi_n$, escribimos todos los elementos del conjunto uno a uno.*
$$\phi_1, ..., \phi_n \vdash \phi$$
- *Si Γ es un conjunto de hipótesis y ϕ es una hipótesis que queremos destacar, escribimos*
$$\Gamma, \phi \vdash \psi$$
- *Si Γ y Δ son dos conjuntos de hipótesis que necesitamos para demostrar una fórmula, escribimos*
$$\Gamma, \Delta \vdash \phi.$$

Proposición 7.8. *Sea* $\Delta \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{PROP}$ *un subconjunto de proposiciones (no necesariamente finito). Si $\Delta \vdash \phi$, entonces existe un subconjunto finito $\Delta_{fin} \subseteq \Delta$ tal que $\Delta_{fin} \vdash \phi$, es decir, en una demostración nunca vamos a necesitar una cantidad infinita de hipótesis.*

Demostración. Para llegar desde Δ hasta ϕ, hemos necesitado una derivación, que es una aplicación de una cantidad finita de reglas, donde cada regla necesita una cantidad finita de hipótesis para poder usar esa regla, si recogemos ese conjunto de hipótesis, nos damos cuenta de que es un conjunto finito. Entonces en esa demostración lo único que vamos a necesitar es una cantidad finita de hipótesis para poder llegar a la conclusión. □

Nota 7.9. *El mismo resultado que acabamos de ver también lo tendremos para la derivación semántica, lo que pasa que su demostración no es trivial, y lo podremos demostrar cuando veamos el tema siguiente.*

Proposición 7.10 (Reglas estructurales). *Si tenemos dos proposiciones* $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ *y dos conjuntos de fórmulas Δ, Γ entonces se satisfacen las siguientes condiciones*

- *Identidad: $\phi \vdash \phi$*
- *Dilución: Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma, \Delta \vdash \phi$*
- *Corte: Si $\Gamma \vdash \phi$ y $\Delta, \phi \vdash \psi$, entonces $\Gamma, \Delta \vdash \psi$*

Demostración. Vamos a hacer la demostración utilizando el lenguaje que hemos presentado en este capítulo.

- Identidad: Teniendo ϕ de hipótesis, podemos volver a utilizar esta hipótesis cuando queramos

$$\frac{\phi}{\phi}$$

- Dilución: Si tenemos como hipótesis Γ y una derivación del tipo

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_1\end{array}}{\phi}$$

Entonces, si añadimos ahora otras hipótesis Δ, seguimos teniendo como conclusión ϕ sobre el conjunto de hipótesis $\Gamma \cup \Delta$. Simplemente podemos repetir la derivación anterior.

$$\frac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Delta\\ \mathcal{D}_1 & \end{array}}{\phi}$$

- Corte: Si tenemos dos derivaciones del tipo,

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_1\end{array}}{\phi} \qquad \frac{\begin{array}{c}\Delta, \phi\\ \mathcal{D}_2\end{array}}{\phi}$$

entonces podemos considerar la siguiente derivación que tiene como hipótesis a $\Gamma \cup \Delta$.

$$\frac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \mathcal{D}_1\end{array}}{\phi} \quad \Delta\\ \mathcal{D}_2\end{array}}{\psi}$$

Esto concluye la demostración de la Proposición 7.10. $\square$

Capítulo 8

Corrección y completitud

En este trabajo hemos introducido dos conceptos de consecuencia en la lógica proposicional, la derivación semántica ($\models$) *y la derivación sintáctica* ($\vdash$). *En este capítulo vamos a demostrar que estos operadores de consecuencia són equivalentes. Vamos a definir primero los conceptos de corrección y completitud.*

DEFINICIÓN 8.1. *Un resultado de* corrección *es aquel en el que, dada una derivación sintáctica, nos permite obtener una derivación semántica, esto es, si* $\Gamma \vdash \phi$*, entonces* $\Gamma \models \phi$*.*

Un resultado de completitud *es aquel en el que, dada una derivación semántica, nos permite obtener una derivación sintáctica, esto es, si* $\Gamma \models \phi$*, entonces* $\Gamma \vdash \phi$*.*

TEOREMA 8.2 (Corrección). *Si* $\Gamma \vdash \phi$*, entonces* $\Gamma \models \phi$*.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre la longitud de la derivación formal. Cuando escribimos $\Gamma \vdash \phi$ se entiende que, partiendo de un conjunto de hipótesis Γ, podemos deducir ϕ mediante una derivación, la cual tiene una longitud, dependiendo del número de reglas que hayamos utilizado para llegar a ϕ.

Caso base. la longitud de la derivación es 1, lo que quiere decir que hemos utilizado solo una regla. Vamos a recorrer todas las reglas de derivación sintática (explicadas anteriormente) y comprobar que el teorema es cierto para estas reglas. Lo haremos con las tablas de verdad, recordando que se cumplía la derivación semántica si, en las tablas, siempre que se verificaban todas las hipótesis, la fórmula consecuencia de éstas también. En algunos casos concretos, como la demostración requiere de hipótesis, razonaremos mediante el uso de valoraciones.

- (false.elim) $\perp \models P$

$\perp$	P
0	1
0	0

- (true.intro) $\models \top$

$\top$
1

- (by_contradiction) Si $P \vDash \bot$, entonces $\vDash \neg P$
  Sea v una valoración. Si v hace verdadera a P, como $P \vDash \bot$, entonces la valoración hará verdadera a $\bot$, lo cual es una contradicción. Por tanto, se tiene que v no hace verdadera a P, esto nos lleva a que $\vDash \neg P$.
- (double.negation) $\neg\neg P \vDash P$.

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
1	0	1
0	1	0

- (and.elim_left) $P \wedge Q \vDash P$ y (and.elim_right) $P \wedge Q \vDash Q$.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- (and.intro) $P, Q \vDash P \wedge Q$.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- (or.inl) $P \vDash P \vee Q$ y (or.inr) $Q \vDash P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- (by_cases) Si $P \vDash R$ y $P \vDash Q$, entonces $P \vee Q \vDash R$.
  Sea v una valoración que hace verdadera $P \vee Q$, entonces la valoración hace verdadera a P o a Q. Si hace verdadera a P, como $P \vDash R$, entonces la valoración hará verdadera a R. Si, por contra la valoración hace verdadera a Q, como $Q \vDash R$, entonces la valoración hará veradadera a R. En cualquier caso, toda valoración que haga verdadera a $P \vee Q$ hará verdadera a R.
- (assume) Si $P \vDash Q$, entonces $\vDash P \to Q$.
  Sea v cualquier valoración. Como $P \vDash Q$, si la valoración hace verdadera a P, entonces hará verdadera a Q, por tanto, se tiene que $\vDash P \to Q$.

- (modus.ponens) $P, P \to Q \vDash Q$.

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- (split) $P \to Q, Q \to P \vDash P \leftrightarrow Q$.

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

- (iff.elim_left) $P \leftrightarrow Q \vDash P \to Q$.

P	Q	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

- (iff.elim_right) $P \leftrightarrow Q \vDash Q \to P$.

P	Q	$Q \to P$	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1

Tenemos demostrado el caso base.

Hipótesis inductiva. Suponemos el enunciado cierto para derivaciones de longitud n y lo demostramos para derivaciones de longitud $n+1$.

Sea $\Gamma \vdash \phi$ una derivación sintáctica de longitud $n+1$, esto es, para derivar ϕ hemos tenido que utilizar una serie de reglas, $\mathcal{D}$, de longitud $n+1$.

Como la derivación $\mathcal{D}$ tiene longitud $n+1$, podemos deducir Γ', una serie de hipótesis intermedias partiendo de Γ mediante una derivación $\mathcal{D}'$ de longuitud n y, finalmente, aplicar una última derivación para conseguir ϕ. Es decir, $\Gamma \vdash \Gamma'$ se consigue mediante una derivación sintáctica $\mathcal{D}'$ de longitud n y, finalmente, $\Gamma' \vdash \phi$ se consigue mediante la aplicación de una única regla de derivación sintáctica.

Por Hipótesis inductiva, tendríamos que $\Gamma \vDash \Gamma'$ y también que $\Gamma' \vDash \phi$. Con todo ello, tenemos finalmente que $\Gamma \vDash \phi$. $\square$

Ahora introduciremos el concepto de consistencia.

DEFINICIÓN 8.3 (Consistencia). *Un conjunto de fórmulas* $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *(eventualmente infinito) es consistente si* $\Gamma \nvdash \perp$.

En el caso de que si que podamos llegar al absurdo mediante una derivación sintáctica, es decir, si $\Gamma \vdash \perp$, *entonces diremos que* Γ *es inconsistente.*

EJEMPLO 8.4. $\Gamma = \{P, \neg P\}$ *es inconsistente. En cambio* $\Gamma = \{P\}$ *es consistente.*

LEMA 8.5 (Equivalencia de la consistencia). *Si tenemos un conjunto de fórmulas* Γ *las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- Γ *es consistente.*
- *No hay ninguna* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *tal que* $\Gamma \vdash \phi$ *y* $\Gamma \vdash \neg\phi$.
- *Existe* $\phi \in \mathrm{PROP}$ *tal que* $\Gamma \nvdash \phi$.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos Γ consistente y queremos ver que no hay ninguna $\phi \in \mathrm{PROP}$ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$. Si Γ es consistente, por reducción al absurdo, supondremos que existe una fórmula ϕ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$, entonces aplicando Modus Ponens, tendríamos $\Gamma \vdash \perp$. Hemos llegado a una contradicción con el hecho de que Γ sea consistente, ya que si fuese consistente, por su definición, no podríamos llegar al absurdo mediante una derivación sintáctica.

Suponemos ahora que no hay ninguna $\phi \in \mathrm{PROP}$ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$, y queremos ver que existe $\phi \in \mathrm{PROP}$ tal que $\Gamma \nvdash \phi$. Sea $\psi \in \mathrm{PROP}$ una fórmula cualquiera. Por hipótesis sabemos que o $\Gamma \nvdash \psi$ o $\Gamma \nvdash \psi$ y en cualquiera de los dos casos, hemos encontrado una fórmula ϕ que no podemos deducir desde Γ.

Por último, suponemos que existe $\phi \in \mathrm{PROP}$ tal que $\Gamma \nvdash \phi$ y queremos ver que Γ es consistente. Suponemos por reducción al absurdo que Γ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \perp$. Utilizando la regla false.elim, desde Γ podemos deducir cualquier proposición, por ejemplo $\Gamma \vdash \phi$. Esto nos da una contradicción. Por tanto Γ es consistente. $\square$

LEMA 8.6. *Si* $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *es un conjunto de fórmulas para el que existe una valoración*

$$v\colon \quad \mathrm{VAR} \longrightarrow 2$$

que hace verdaderas todas las fórmulas en Γ, *es decir,* $v^{\#}(\psi) = 1$, *para toda* $\psi \in \Gamma$, *entonces* Γ *es consistente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$v\colon \quad \mathrm{VAR} \longrightarrow 2$$

una valoración que hace verdaderas todas las fórmulas de Γ. Suponemos, por reducción al absurdo, que Γ es inconsistente. Por el lema anterior, sabemos que existirá una fórmula $\phi \in \mathrm{PROP}$ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$, entonces por el Teorema de Corrección 8.2, también tendremos $\Gamma \vDash \phi$ y $\Gamma \vDash \neg\phi$.

Si tenemos $\Gamma \vDash \phi$, entonces toda valoración que haga verdadera Γ, hará que también sea verdadera ϕ. Por tanto $v^{\#}(\phi) = 1$. Pero lo mismo nos pasa con $\Gamma \vDash \neg\phi$ y, por tanto, $v^{\#}(\neg\phi) = 1$, pero sabemos que $v^{\#}(\neg\phi) = \neg v^{\#}(\phi) = 0$. Por tanto llegamos a una contradicción, ya que hemos supuesto que Γ es inconsistente. Por tanto Γ es consistente. $\square$

Ejemplo 8.7. *Vamos a demostrar el ejemplo anterior utilizando el lema que acabamos de ver que nos dice que, si para un conjunto de fórmulas encontramos una valoración que las haga todas verdaderas, entonces ese conjunto es consistente.*

Sea $\Gamma = \{P\}$. Como nuestro conjunto solo contiene P, podemos elegir la valoración

$$\begin{array}{rccc} v\colon & \mathrm{VAR} & \longrightarrow & 2 \\ & P & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Esta valoración hace que Γ sea verdadera, entonces por el lema anterior podemos decir que Γ es consistente.

A continuación presentamos el concepto de conjunto de fórmulas consistente maximal.

Definición 8.8 (Consistente maximal). *Un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ se llama consistente maximal, si*

- *Γ es consistente.*
- *Para cada conjunto consistente Γ' tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, entonces $\Gamma = \Gamma'$, es decir, Γ no puede tener ninguna extensión consistente propia.*

A continuación demostraremos que el conjunto de proposiciones es numerable, y esto nos servirá para definir un conjunto consistente maximal por recursión, ya que solo tendremos una cantidad numerable de fórmulas. Este resultado nos servirá para un lema que vendrá mas tarde.

Proposición 8.9 (Numerabilidad de PROP). *El conjunto* PROP *es numerable, lo que quiere decir que $|\mathrm{PROP}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, es decir, el conjunto de proposiciones* PROP *es equipotente con el conjunto de números naturales.*

Demostración. Para ver que dos conjuntos tienen el mismo cardinal, primero tenemos que ver que $|\mathbb{N}| \leq |\mathrm{PROP}|$ y luego que $|\mathrm{PROP}| \leq |\mathbb{N}|$.

Para ver $|\mathbb{N}| \leq |\text{PROP}|$ vamos a definir una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{N} & \longrightarrow & \text{PROP} \\ & n & \longmapsto & P_n \end{array}$$

que es inyectiva, ya que a cada número natural le corresponde una única variable proposicional.

Ahora vamos a construir una aplicación inyectiva en sentido opuesto. Vamos a codificar cada proposición como un número natural, es decir, vamos a asignar a cada símbolo de la lógica proposicional un número natural.

α	(	)	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\neg$	$\perp$	$\leftrightarrow$	P_0	P_1	$\cdots$
$N(\alpha)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$

A partir de cierto punto, se empiezan a contar las variables proposicionales,conjunto que hemos visto que es numerable, en nuestra tabla empieza con el 9.

Para ver $|\text{PROP}| \leq |\mathbb{N}|$, vamos a definir una aplicación

$$\begin{array}{rccc} K\colon & \text{PROP} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & \phi \doteq \alpha_0\alpha_1...\alpha_n & \longmapsto & \prod_{k=0}^{n} \pi_k^{N(\alpha_k)} \end{array}$$

donde $\alpha_0\alpha_1...\alpha_n$ es la secuencia de símbolos que utilizamos en la fórmula ϕ y π_k es el $k-\textit{ésimo}$ número primo. Esta aplicación también es inyectiva, por tanto $|\text{PROP}| \leq |\mathbb{N}|$, y entonces $|\text{PROP}| = |\mathbb{N}|$ $\square$

Vamos a ver cómo se utiliza la aplicación K que hemos definido en la demostración del resultado anterior en un ejemplo concreto.

Ejemplo 8.10. *Tenemos*

α	(	)	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\neg$	$\perp$	$\leftrightarrow$	P	Q	R	$\cdots$
$N(\alpha)$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	$\cdots$

Y tenemos la fórmula $\phi \doteq (\neg P \wedge Q) \rightarrow R$. A cada uno de los símbolos que aparecen en la fórmula, le asignamos un número primo.

Primero, al paréntesis le asignamos el número 2, a $\neg$ el 3, a P el 5, a $\wedge$ el 7, a Q el 11, al segundo paréntesis el 13, a $\rightarrow$ el 17 y a R el 19. Cada número primero lo elevamos al número que le corresponde en la tabla, y hacemos el producto de todos estos números, que quedaría así:

$$2^1 * 3^6 * 5^9 * 7^3 * 11^{10} * 13^2 * 17^5 * 19^{11} = K(\phi).$$

Por tanto a cada fórmula tiene un número natural asignado, solo con que en alguna posición hayamos cambiado un símbolo, la fórmula ya no tendrá el mismo número natural asignado, lo que quiere decir que si $\phi \neq \psi$ entonces $K(\phi) \neq K(\psi)$. Por tanto K es inyectiva.

Además la factorización de un número natural en factores primos es única, por tanto nunca podrán coincidir $K(\phi)$ y $K(\psi)$ si ϕ y ψ no son iguales.

El siguiente teorema nos permite extender todo conjunto consistente de fórmulas a un conjunto de fórmulas consistente maximal.

TEOREMA 8.11 (Extensión consistente maximal). *Si Γ es consistente, entonces existe Γ' extensión consistente maximal de Γ, es decir, Γ' es un subconjunto de fórmulas en* PROP *que cumple*

1. $\Gamma \subseteq \Gamma'$*;*
2. Γ' *es consistente;*
3. Γ' *es maximal para esta propiedad, esto es, si $\Gamma \subseteq \Delta$ y Δ es consistente, entonces $\Delta = \Gamma'$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de PROP. Definimos $\Gamma_0 = \Gamma$ y

$$\Gamma_{n+1} :\risingdotseq \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ es inconsistente.} \end{cases}$$

Por construcción Γ_n es consistente para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$. Definimos

$$\Gamma' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n.$$

Se tienen las siguientes propiedades.

1. $\Gamma \subseteq \Gamma'$, ya que $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma'$.
2. Γ' es consistente, porque la hemos definido así.
3. Γ' es maximal, porque hemos ido recorriendo todas las fórmulas posibles comprobando que el conjunto resultante sea consistente, por lo que no hay posibilidad de haber dejado alguna fórmula fuera.

Esto demuestra el Teorema 8.11. □

LEMA 8.12. *Sea $\Gamma \subseteq$ PROP un conjunto de fórmulas y $\phi \in$ PROP entonces se tiene que*

- *Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \phi$.*
- *Si $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \neg\phi$.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la primera afirmación, suponemos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente. Por la definición de consistente, sabemos que esto implica que existe una derivación que nos hace llegar a $\perp$.

Queremos demostrar $\Gamma \vdash \phi$. Asumimos $\neg\phi$. Como tenemos Γ de hipótesis y suponemos $\neg\phi$, utilizando la derivación que hemos mencionado, podemos llegar a $\perp$, y ahora utilizamos la regla *by_contradiction*, ya que en esta regla suponemos lo contrario a lo que queremos demostrar, y llegamos a ϕ. Por tanto $\Gamma \vdash \phi$.

Para demostrar la segunda afirmación, suponemos que $\Gamma \cup \{\phi\}$ inconsistente. Por el mismo razonamiento anterior, sabemos que existe una derivación que nos hace llegar a $\bot$.

Queremos demostrar que $\Gamma \vdash \neg\phi$. Tenemos Γ y suponemos ϕ, sabemos que tenemos una derivación que nos hace llegar a $\bot$. Utilizamos la regla *assume* y obtenemos $\phi \to \bot$. Y sabemos que $\phi \to \bot \doteq \neg\phi$, por tanto $\Gamma \vdash \neg\phi$. $\square$

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos que un conjunto de fórmulas consistente maximal contiene todas sus derivaciones sintácticas.

COROLARIO 8.13. *Si* $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *es consistente maximal, entonces* Γ *está cerrado bajo derivaciones, es decir, cuando* $\Gamma \vdash \phi$ *es porque* $\phi \in \Gamma$.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos que $\Gamma \vdash \phi$. Suponemos por reducción al absurdo que $\phi \notin \Gamma$, entonces como $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\phi\}$, por la maximalidad de Γ, tendríamos que $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente. Que Γ sea maximal implica que Γ es consistente, y que si existiese otro Γ' consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ entonces $\Gamma = \Gamma'$.

Entonces por el Lema 8.12, $\Gamma \vdash \neg\phi$, pero también teníamos como hipótesis que $\Gamma \vdash \phi$, y aplicando *modus.ponens* tenemos que $\Gamma \vdash \bot$, y llegamos a una contradicción con el hecho de que Γ es consistente. Por tanto, llegamos a que $\phi \in \Gamma$. $\square$

A continuación investigamos algunas propiedades de los conjuntos consistentes maximales.

LEMA 8.14 (Propiedades de conjuntos consistentes maximales). *Si* $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ *es consistente maximal, para cada* $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ *se tiene que*

- $\phi \in \Gamma$ *o* $\neg\phi \in \Gamma$.
- $\phi \to \psi \in \Gamma$ *si, y solo si, siempre que* $\phi \in \Gamma$ *entonces* $\psi \in \Gamma$.
- $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ *si, y solo si,* $\phi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma$

DEMOSTRACIÓN. Por la consistencia de Γ, no puede ocurrir a la vez que $\phi \in \Gamma$ y $\neg\phi \in \Gamma$. Suponemos que $\phi \notin \Gamma$, por el Corolario 8.13, obtenemos que $\Gamma \nvdash \phi$.

Suponemos por reducción al absurdo que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente, entonces por el Lema 8.12 sabemos que $\Gamma \vdash \phi$, y llegamos a una contradicción con el hecho de que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ sea inconsistente. Por tanto $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente.

Como $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\neg\phi\}$ y este último conjunto es consistente, por la maximalidad de Γ tenemos que $\Gamma = \Gamma \cup \{\neg\phi\}$. Por tanto $\neg\phi \in \Gamma$.

Ahora suponemos que $\neg\phi \notin \Gamma$, por el Corolario 8.13, obtenemos que $\Gamma \nvdash \neg\phi$.

Suponemos ahora por reducción al absurdo que $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente, entonces por el Lema 8.12 sabemos que $\Gamma \vdash \neg\phi$, y llegamos a una contradicción con el hecho de que $\Gamma \cup \{\phi\}$ sea inconsistente. Por tanto $\Gamma \cup \{\phi\}$ es consistente.

Como $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\phi\}$ y este último conjunto es consistente, por la maximalidad de Γ tenemos que $\Gamma = \Gamma \cup \{\phi\}$. Por tanto $\phi \in \Gamma$.

Suponemos que $\phi \to \psi \in \Gamma$. Vamos a demostrar que si $\phi \in \Gamma$ entonces $\psi \in \Gamma$. Suponemos que $\phi \in \Gamma$, por tanto $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. Aplicamos la regla Modus Ponens y tenemos que $\Gamma \vdash \psi$. Por el Corolario 8.13 tenemos que $\psi \in \Gamma$. Queda demostrada la primera afirmación.

Suponemos que si $\phi \in \Gamma$ entonces $\psi \in \Gamma$, y queremos demostrar que $\phi \to \psi \in \Gamma$. Consideramos dos casos

- Suponemos que $\phi \in \Gamma$, entonces por lo que acabamos de suponer, $\psi \in \Gamma$, y por tanto $\Gamma \vdash \phi \to \psi$
- Suponemos que $\phi \notin \Gamma$, entonces por el primer apartado del Lema 8.14, tendríamos que $\neg\phi \in \Gamma$. Consideramos la siguiente derivación

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma}{\neg\phi}\quad [\phi]}{\bot}\,(\text{Modus.ponens})}{\psi}\,(\text{False.elim})}{\phi \to \psi}\,(\text{Assume})$$

  Como podemos observar, suponemos ϕ y sabemos que de Γ se deduce $\neg\phi$, entonces al aplicar la regla de Modus Ponens, obtendriamos el absurdo. Ahora aplicamos la regla de false.elim y podemos deducir la fórmula ψ. Como inicialmente hemos supuesto ϕ y hemos llegado a ψ, aplicando la regla assume, obtendríamos $\phi \to \psi$. Por tanto $\Gamma \vdash \phi \to \psi$, y por el Corolario 8.13, $\phi \to \psi \in \Gamma$. Queda demostrada la segunda afirmación.

Para demostrar la última afirmación, suponemos que $\phi \wedge \psi \in \Gamma$, vamos a demostrar que $\phi \in \Gamma$ y $\psi \in \Gamma$. Consideramos la siguiente derivación

$$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\,(\text{and.elim\_left})$$

Como $\Gamma \vdash \phi$, por el Corolario 8.13 , $\phi \in \Gamma$.

Tenemos $\phi \wedge \psi$ y utilizando *and.elim_right* nos queda ψ, y como $\Gamma \vdash \psi$, por el Corolario 8.13 , $\psi \in \Gamma$.

Ahora suponemos que $\phi \in \Gamma$ y que $\psi \in \Gamma$ entonces, consideramos la siguiente derivación

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \text{ (and.intro)}$$

Por tanto, tendremos que $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$, y por el corolario 8.13 , $\phi \wedge \psi \in \Gamma$

Esto concluye la demostración del Lema 8.14. □

A continuación presentamos un resultado muy importante para finalizar el capítulo. El siguiente resultado nos dice que todo conjunto de fórmulas consistente es satisfacible, esto es, podemos encontrar una valoración que hace veraderas todas las fórmulas del conjunto.

Lema 8.15 (Satisfacibilidad de los conjuntos consistentes). *Si* $\Gamma \in$ PROP *consistente, entonces existe una valoración*

$$v : \text{VAR} \to 2$$

que satisface que, para cada fórmula $\phi \in \Gamma$*, se tiene que* $v^{\#}(\phi) = 1$.

Demostración. Sea Γ' un conjunto consistente maximal que contiene a Γ, es decir, $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Este conjunto se puede obtener como resultado del Teorema 8.11.

Sea v la valoración definida como sigue

$$\begin{array}{rccl} v: & \text{VAR} & \longrightarrow & 2 \\ & P & \longmapsto & \begin{cases} 1 \; si \; P \in \Gamma' \\ 0 \; si \; P \notin \Gamma' \end{cases} \end{array}$$

Vamos a demostrar que para cada fórmula $\phi \in$ PROP se tiene que la valoración $v^{\#}(\phi) = 1$ si, y solo si, $\phi \in \Gamma'$.

Lo haremos por inducción sobre la estructura de ϕ.

Caso base.

$(\bot)$: En este caso, $v^{\#}(\bot) = 0$ y $\bot \notin \Gamma'$, ya que Γ' es consistente.

(P_n) : En este caso, $v^{\#}(P_n) = 1$ si, y solo si, $P_n \in \Gamma$ (por la definición que hemos hecho de la valoración v).

Hipótesis inductiva Suponemos cierto el enunciado para fórmulas ϕ y ψ. Pasamos a demostrarlo ahora para los situientes casos.

$(\neg\phi)$: Para el caso de la negación, $v^{\#}(\neg\phi) = 1$ si, y solo si, $v^{\#}(\phi) = 0$ si, y solo si, $\phi \notin \Gamma'$ por la hipótesis inductiva, y por el primer apartado del lema 8.14, sabemos que si $\phi \notin \Gamma'$ (donde Γ' es consistente maximal), es porque $\neg\phi \in \Gamma'$.

$(\phi \to \psi)$: Si consideramos la implicación, si $v^{\#}(\phi \to \psi) = 0$ es porque $v^{\#}(\phi) = 1$ y $v^{\#}(\psi) = 0$ si, y solo si, $\phi \in \Gamma'$ y $\psi \notin \Gamma'$ si, y solo si, $\phi \to \psi \notin \Gamma'$.
En el caso de que $v^{\#}(\phi \to \psi) = 1$ es porque $\phi \to \psi \in \Gamma'$.

Como el conjunto de conectores $\{\neg, \to\}$ es completamente funcional por el Corolario 5.7, entonces no hace falta que demostremos el resto de conectores. □

Como consecuencia del último resultado obtenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 8.16. *Sea* $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ *y* $\phi \in \text{PROP}$ *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- $\Gamma \nvdash \phi$.
- *Existe una valoración* $v : \text{VAR} \to 2$ *tal que para cada fórmula* $\psi \in \text{PROP}$ *se tiene que* $v^{\#}(\psi) = 1$*, para cada* $\psi \in \Gamma$*, y* $v^{\#}(\phi) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Notamos que por el Lema 8.12 $\Gamma \nvdash \phi$ si, y solo si, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente.

Por otro lado, por el Lema 8.15 sabemos que si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente, es porque existe una valoración

$$v^{\#} : \text{VAR} \to 2$$

tal que, para cada fórmula $\psi \in \Gamma$ se tiene que $v^{\#}(\psi) = 1$. En particular, $v^{\#}(\neg\phi) = 1$, ya que $\psi = \neg\phi$, esto implicará que $v^{\#}(\phi) = 0$. □

Estamos ya en condición de presentar el Teorema de Completitud de la Lógica Proposicional.

TEOREMA 8.17 (Teorema de Completitud). *Si* $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ *y* $\phi \in \text{PROP}$*, entonces si tenemos que* $\Gamma \vDash \phi$ *también se cumplirá que* $\Gamma \vdash \phi$.

DEMOSTRACIÓN. Suponemos por reducción al absurdo que $\Gamma \nvdash \phi$, entonces por el Lema 8.12 tendremos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente, es decir, $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \nvdash \bot$. Por tanto $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es satisfacible , entonces por el Corolario 8.16, existe una valoración $v : \text{VAR} \to 2$ tal que para cada $\psi \in \Gamma$ tenemos que $v^{\#}(\psi) = 1$ y $v^{\#}(\phi) = 0$, entonces $\Gamma \nvDash \phi$. □

Finalizamos este capítulo obteniendo un resultado de finitud para la derivación semántica.

COROLARIO 8.18. *Sea* $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ *y* $\phi \in \text{PROP}$. *Si* $\Gamma \vDash \phi$*, entonces existe un subconjunto finito* $\Delta \subseteq \Gamma$ *para el que* $\Delta \vDash \phi$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Teorema de Completitud 8.17 y la la Proposición 7.8. □

Bibliografía

[1] R. Cori, D. Lascar, *Mathematical Logic: A Course with Exercises* Parts I & II. Oxford University Press, 2001.

[2] R. Gazzari, *Mathematische Logik* Parts I & II. Lecture notes, Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 2009.

[3] R. Zach, *Sets, Logic, Computation: An Open Introduction to Metalogic*. Open Logic Project, 2021.