



Treball Fi de Grau

Curs 2021-2022

Lògica categorial

Autor: **VICENT NAVARRO ARROYO**

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Índex

1	Introducció	3
2	Preliminars	6
2.1	Categories	6
2.2	Functors	16
2.3	Casos especials: functors, objectes i morfismes	34
3	Transformacions naturals i Lema de Yoneda	50
3.1	Transformacions i isomorfismes naturals	50
3.2	Lema de Yoneda i aplicacions	70
4	Estudi de l'equivalència de categories	94
4.1	Equivalència de categories	94
4.2	Una caracterització d'equivalència de categories	101
5	La dualitat de Lindenbaum-Tarski	108
6	Conclusions	144

1 Introducció

Les matemàtiques constitueixen la ciència de la forma i la quantitat; el raonament matemàtic és simplement lògica aplicada a l'observació de la forma i la quantitat. El gran error està en suposar que fins i tot les veritats del que es denomina àlgebra pura constitueixen veritats abstractes o generals.

La carta robada
Edgar Allan Poe

Es pot definir la Teoria de Categories com aquella teoria matemàtica general d'estructures i sistemes d'estructures que busca les propietats universals de les famílies d'estructures i com aquestes estructures es relacionen [12]. Per exemple, és ben sabut a Topologia Algebraica que els espais topològics estan relacionats amb grups i anells a través d'homologies i homotopies.

No obstant, cap teoria sorgix del no-res i totes partixen d'un determinat context. En concret, la motivació històrica rere la Teoria de Categories ve de la mà d'Eilenberg i MacLane. En 1945, aquests matemàtics van introduir, auxiliament, els conceptes de categories i functors a fi de formalitzar l'ús intuïtiu de *natural* per a referir-se a famílies d'isomorfismes [13].

Tot plegat, l'estructura general d'aquest treball es pot dividir en dos blocs. El primer bloc és una introducció a la Teoria de Categories on es defineixen, primerament, els conceptes de categoria, functor i alguns tipus especials de morfismes, com són els monomorfismes, epimorfismes i isomorfismes. Seguidament, es defineixen les transformacions naturals. Finalment, definim els isomorfismes de categories i les equivalències de categories. Totes aquestes definicions, entre altres, venen acompanyades d'una gran quantitat d'exemples i figures que faciliten la seua comprensió. Per altra banda, el segon bloc

presenta un cas concret del món de la Lògica per a entendre la diferència entre isomorfisme de categories i equivalència de categories. En concret, s'estudiarà la *Dualitat de Lindenbaum-Tarski* des d'una perspectiva categòrica.

Respecte a les seccions del treball, primerament, a la Secció 2 farem una introducció a la Teoria de Categories definint i exemplificant els conceptes més importants. En particular, la idea de categoria i les seues variants, els functors i les proposicions i caracteritzacions més bàsiques. Seguidament, a la Secció 3, expliquem què és una transformació natural i construïm els conceptes i proposicions adequats per a demostrar el *Lema de Yoneda*, que és un dels resultats més importants de la Teoria de Categories. Endemés, a la Secció 4, introduïm la definició d'equivalència de categories i donem una caracterització de l'equivalència de categories. Finalment, a la Secció 5, relacionem aquesta noció amb aspectes de la Lògica Categòrica per a diferenciar, mitjançant un exemple, els isomorfismes de categories i les equivalències de categories. Concretament, presentarem la *Dualitat Lindenbaum-Tarski*, que estableix una correspondència entre sistemes lògics i estructures algebraïques o ordres, des del punt de vista de la Teoria de Categories. Per a fer això, establim el marc teòric necessari per a definir les àlgebres Booleanes completes i atòmiques vistes, per una banda, com estructures algebraïques i vistes, per altra banda, com ordres. Així, demostrarem que ambdues nocions d'àlgebres Booleanes completes i atòmiques són isomorfes i, per tant, indistingibles, però només equivalents al sistema lògic proposicional, que està representat per l'àlgebra Booleana completa i atòmica de les parts d'un conjunt.

Els requisits matemàtics indispensables d'aquest treball són tots els coneixements que un alumne ha pogut obtenir al final de la carrera de Matemàtiques. A saber, Teoria de Conjunts, Teoria de Grups, Teoria d'Anells, Anàlisi Matemàtic, Espais topològics, etc.

En aquest treball, utilitzarem la tipografia amb serifa per a denotar les categories i seran categories $C, D, E, \dots$. Respecte als functors, utilitzarem la tipografia romana per a denotar-los i seran functors $F, G, H, \dots$. Els morfismes i aplicacions seran $f, g, h, \dots$ mentre que les transformacions naturals seran denotades per lletres gregues, $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \dots$. Els conjunts seran denotats per lletres majúscules llatines, $A, B, C, D, \dots$ i les estructures algebraïques, com

grups o anells, es denotaran en negreta, sent aquestes estructures de la forma **G, H, I...**

Les referències bàsiques que es poden consultar respecte a la Teoria de Conjunts es troben en [3] i [4]. Per a la Teoria de Grups i Anells són útils [1] i [10]. Seguidament, per a buscar informació sobre l'Anàlisi Matemàtic es pot veure [2]. Per últim, una bona referència per a l'estudi de la Topologia i els Espais Topològics es troba a [8].

Per altra banda, respecte a la Teoria de Categories, ens hem basat en el manual *Basic Category Theory and Topos Theory* de Van Oosten [17], principalment, així com en *Category Theory in Context* de Riehl [13]. A més a més, altres introduccions interessants a la Teoria de Categories es troben a [9], [11] i [16]. Finalment, per aprofundir a la Teoria de Categories i els seus reptes particulars es recomana començar amb [7] i [14].

Aquest Treball de Fi de Grau sorgí com una elecció personal; una motivació pròpia per connectar les Matemàtiques i la Filosofia. En efecte, malgrat la visió reduïda d'alguns, aquestes dues àrees conviuen, es retroalimenten i es troben lligades pels ideals d'abstracció i argumentació lògica. Un exemple clar d'aquesta relació ve donat per la Teoria de Categories, les conseqüències de la qual suposen un desafiament a la Filosofia de les Matemàtiques. Per exemple, la Teoria de Categories és una candidata alternativa a la Teoria de Conjunts respecte al Problema de la Fonamentació de les Matemàtiques. Per altra banda, aquesta és, ara per ara, l'única teoria que pretén connectar les diverses àrees de les Matemàtiques; mostrar les seues similituds.

D'altra banda, l'absència de continguts referents a aquesta matèria al pla d'estudis del Grau de Matemàtiques de la Universitat de València, ha sigut l'altre motiu perquè ens hem interessat per aquest tema. Així, pretenem aprofundir la nostra formació en aquells elements, per a nosaltres, més cridaners de la disciplina matemàtica i avançar en la nostra formació de cara a un possible futur dins del món acadèmic.

2 Preliminars

En Mathématiques, un ne s'entend
pas les choses, s'acoutume à elles.

John von Neumann

2.1 Categories

Comencem aquest treball definint la noció de *categoria* i donem diversos exemples per a entendre, intuïtivament, aquest concepte. Per altra banda, comentarem, succintament, com la Teoria de Categories supera la Paradoxa de Russell. Finalment, definirem alguns tipus de categories, que seran útils posteriorment, com la categoria oposada, la categoria producte o la subcategoria i demostrarem que són, en efecte, categories.

Definició 2.1 (Categoria). Una categoria $\mathbf{C}$ és una *collecció* (Nota 2.2) d'objectes, denotada per $\mathbf{C}_0$, i una collecció de morfismes ¹, denotada per $\mathbf{C}_1$, tals que

1. Tot morfisme f en $\mathbf{C}_1$ té associat un domini en $\mathbf{C}_0$ i un codomini en $\mathbf{C}_0$. El domini i codomini dels morfismes els escriurem, respectivament, com $\text{sc}(f)$ i $\text{tg}(f)$. A més a més, si $\text{sc}(f) = X$ i $\text{tg}(f) = Y$ escriurem $f : X \rightarrow Y$.
2. Donats dos morfismes $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ tals que $\text{tg}(f) = \text{sc}(g)$ sempre tenim definida la seua composició, que és un morfisme en $\mathbf{C}_1$, denotada per $g \circ f$, del tipus $g \circ f : X \rightarrow Z$. Aquesta composició, on estiga definida, és associativa, és a dir, donats $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ i $h : Z \rightarrow W$ morfismes en $\mathbf{C}$ es té que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

¹Als morfismes també se'ls diuen *fletxes* o *mapes*. Usarem la denominació de morfisme.

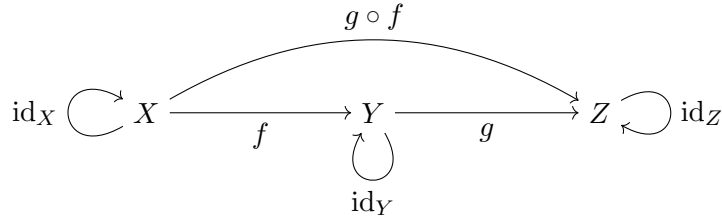


Figura 1: Composició i unitat de morfismes d'una categoria $\mathcal{C}$.

3. Per a cada objecte X de $\mathcal{C}_0$ existeix el *morfisme identitat* $\text{id}_X : X \rightarrow X$ i compleix que, donat l'objecte Y en $\mathcal{C}_0$ i el morfisme $f : X \rightarrow Y$, es té que $f \circ \text{id}_X = f$. Respectivament, $\text{id}_Y \circ f = f$.

Es poden veure les propietats dels morfismes en una categoria $\mathcal{C}$ en l'esquema de la Figura (1).

Nota 2.2. Per qüestions de cardinalitat i seguint a MacLane [7] emprarem la noció de *classe* per a referir-nos a l'agrupació d'objectes $\mathcal{C}_0$. Més avant, introduïrem la diferenciació entre categories *menudes*, on $\mathcal{C}_0$ és un conjunt, i categories *grans*, on $\mathcal{C}_0$ no té perquè ser un conjunt.

Nota 2.3. Per a referir-nos a les categories emprarem la font Sans Serif (`\mathsf`). Per exemple, $\mathcal{C}$ denota un objecte però $\mathbf{C}$ denota una categoria.

Com a exercici inicial a Teoria de Categories anem a demostrar que el morfisme identitat, per a un objecte qualsevol de la categoria, és l'únic amb la propietat de ser neutre per a la composició.

Proposició 2.4. *Per a tot objecte X en $\mathcal{C}$, el morfisme $\text{id}_X : X \rightarrow X$ és l'únic morfisme en $\mathcal{C}$ tal que, per a tot morfisme $f : X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, es té que $f \circ \text{id}_X = f$. Anàlogament, el morfisme $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$ és l'únic morfisme en $\mathcal{C}$ tal que $\text{id}_Y \circ f = f$.*

Demostració. Siga $g : X \rightarrow X$ un morfisme en $\mathcal{C}$ tal que per a tot altre morfisme $f : X \rightarrow Y$ es té que $f \circ g = f$. Aleshores,

$$g = \text{id}_X \circ g \quad (\text{per } \text{id}_X)$$

$$= \text{id}_X. \qquad (f \circ g = f)$$

Açò demostra la Proposició 2.4. ■

Ara que ja tenim definit el concepte de categoria anem a donar exemples. Classifiquem les categories en *categories concretes* i *categories abstractes*.

Exemple 2.5 (Exemples de categories concretes). Una categoria concreta és una categoria on els objectes presenten conjunts subjacents i els morfismes són aplicacions entre els conjunts subjacents.

1. **Categoria trivial**, denotada per 0 , és la categoria sense objectes ni morfismes. Compleix la definició de categoria trivialment.
2. **Categoria unitat**, denotada per 1 , és la categoria formada per un únic objecte i el morfisme identitat sobre ell.
3. **Categoria dels conjunts**, denotada per Set , és la categoria on C_0 és la *classe* de tots els conjunts (Nota 2.7) i els morfismes són les aplicacions entre conjunts.
4. **Categoria dels grups**, denotada per Group , és la categoria on els objectes són grups i els morfismes són homomorfismes de grups.
5. **Categoria dels anells**, denotada per Ring , és la categoria on els objectes són anells i els morfismes són homomorfismes d'anells.
6. **Categoria dels cossos**, denotada per Field , és la categoria on els objectes són cossos i els morfismes són homomorfismes de cossos.
7. **Categoria dels espais topològics**, denotada per Top , és la categoria on els objectes són espais topològics i els morfismes són funcions continues.
8. **Categoria dels espais topològics Hausdorff**, denotada per Haus , és la categoria on els objectes són espais topològics Hausdorff i els morfismes són funcions continues.

9. **Categories dels grafs i dels grafs dirigits**, denotades per $\mathbf{Graph}$ i $\mathbf{DirGraph}$, respectivament, són les categories on els objectes són grafs i grafs dirigits, respectivament, i on els morfismes són homomorfismes de grafs i grafs dirigits, respectivament.
10. **Categoria dels conjunts parcialment ordenats**, denotada per $\mathbf{Poset}$, és la categoria on els objectes són conjunts parcialment ordenats i els morfismes són aplicacions monòtones.
11. **Categoria de les varietats suaus**, denotada per $\mathbf{Man}$, és la categoria on els objectes són varietats topològiques infinitament diferenciables i els morfismes són mapes suaus.

Exemple 2.6 (Exemples de categories abstractes). Una categoria abstracta és una categoria on els morfismes no són aplicacions.

1. **Categoria associada a un preordre.** Un preordre és un parell $(X, \leq)$ donat per un conjunt X i una relació de preordre en X , és a dir, una relació *reflexiva* i *transitiva* en X . Vista com a categoria la denotem per $(X, \leq)$ on els objectes són els elements de X i, per a cada parell $x, y \in X$ tal que $x \leq y$, existeix un únic morfisme $x \rightarrow y$.

Un **ordre** és un preordre $(X, \leq)$ la relació del qual verifica, a més, la propietat *antisimètrica*. Vist com a categoria, un ordre es defineix com la categoria preordre i el denotem per $(X, \leq)$.

2. **Categoria associada a un Monoide.** Un monoide $\mathbf{M}$ és un triplet $(M, \cdot, 1)$ donat per un conjunt, una operació binària en M *associativa* i un *element unitat* $1 \in M$, és a dir, per a tot element $m \in M$, es té que $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$. Vista com a categoria la denotem per $\mathbf{M}$ i és una categoria d'un únic objecte amb morfismes m , per a tot $m \in M$. Representem aquest tipus de categoria a la Figura (2). Notem que un grup $\mathbf{G}$ és, també, un monoide i, per tant, es pot definir la categoria $\mathbf{G}$ com una categoria d'un únic objecte i morfismes g per cada $g \in \mathbf{G}$.
3. **Categoria de les matrius per a un anell unitari.** Donat un anell unitari $\mathbf{R}$, $\mathbf{Mat}_{\mathbf{R}}$ és la categoria que té com a objectes els nombres

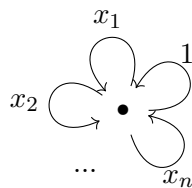


Figura 2: Monoide.

naturals no nuls, i.e., $\mathbb{N}^*$, i on els morfismes de n a m són matrius $m \times n$ amb entrades en $\mathbf{R}$.

4. **Categoria de les homotopies**, denotada per **Htpy**, és la categoria on els objectes són espais topològics i els morfismes són les classes d'homotopia d'aplicacions contínues.

Notem que en els exemples anteriors hi ha categories on els morfismes no eren aplicacions sinó classes, elements, matrius o només assignacions.

Nota 2.7. La paradoxa de Russell estipula que no existeix el conjunt de tots els conjunts. Per aquesta raó s'ha emprat a la Definició (2.1) el concepte *col·lecció*. A més a més, per solucionar el problema teòric que suposa la paradoxa de Russell, es poden distingir conjunts i classes o diferenciar categories grans de categories menudes. Aquesta última solució la introduïm a continuació.

Definició 2.8 (Categoria menuda). Una categoria $\mathbf{C}$ s'anomena *menuda* si $\mathbf{C}_1$ és un conjunt i s'anomena *localment menuda* si, per a tots X, Y en $\mathbf{C}_0$, la col·lecció de morfismes de X a Y , $\mathbf{C}(X, Y)$, és un conjunt. Per contra, una categoria $\mathbf{C}$ s'anomena *gran* si no és menuda.

Anàlogament amb el que es té per a conjunts, donades dos categories podem definir el producte d'elles com una altra categoria.

Definició 2.9 (Categoria producte). Siguen dos categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, aleshores el seu producte, denotat per $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, és la *categoria producte*. Aquesta categoria té com a objectes els parells (C, D) pertanyents a $\mathbf{C}_0 \times \mathbf{D}_0$ i té per morfismes els parells (f, g) pertanyents a $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{D}_1$, on $f : C \rightarrow C'$ i $g : D \rightarrow D'$ són morfismes en $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, respectivament.

En efecte, donades dues categories la seua categoria producte és, de fet, una categoria.

Proposició 2.10. *Siguen dues categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, aleshores $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ és una categoria.*

Demostració. Per definició de categoria producte, tot morfisme (f, g) en $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{D}_1$, per a morfismes f en $\mathbf{C}$ i g en $\mathbf{D}$, té un domini en $\mathbf{C}_0 \times \mathbf{D}_0$ i un codomini en $\mathbf{C}_0 \times \mathbf{D}_0$, doncs f i g són morfismes en les categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, respectivament.

Per altra banda, donats els morfismes $(f, g) : X \times A \rightarrow Y \times B$ i $(h, k) : Y \times B \rightarrow Z \times C$ en $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, on $f : X \rightarrow Y$ i $h : Y \rightarrow Z$ són morfismes en $\mathbf{C}$ i $g : A \rightarrow B$ i $k : B \rightarrow C$ són morfismes en $\mathbf{D}$, observem que (f, g) i (h, k) són componibles perquè $\text{tg}((f, g)) = \text{sc}((h, k))$. Per tant, per a satisfer la definició de categoria, ha d'existir un morfisme composició $(f, g) \circ (h, k) : X \times A \rightarrow Z \times C$ en $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ tal que la composició siga associativa. Proposem com a candidat a composició el següent morfisme.

$$(f, g) \circ (h, k) = (f \circ h, g \circ k).$$

En efecte, $(f \circ h, g \circ k) : X \times A \rightarrow Z \times C$, doncs $f \circ h : X \rightarrow Z$ i $g \circ k : A \rightarrow C$ són composicions definides en $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, respectivament. Demostrem que la composició que hem definit és associativa.

Siguen $(f, g) : X \times A \rightarrow Y \times B$, $(h, k) : Y \times B \rightarrow Z \times D$, $(l, m) : Z \times D \rightarrow W \times E$ morfismes componibles en $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, on $f : X \rightarrow Y$, $h : Y \rightarrow Z$ i $l : Z \rightarrow W$ són morfismes componibles en $\mathbf{C}$ i $g : A \rightarrow B$, $k : B \rightarrow D$ i $m : D \rightarrow E$ són morfismes componibles en $\mathbf{D}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} (l, m) \circ ((h, k) \circ (f, g)) &= (l, m) \circ (h \circ f, k \circ g) && \text{(definició composició)} \\ &= (l \circ (h \circ f), m \circ (k \circ g)) && \text{(definició composició)} \\ &= ((l \circ h) \circ f, (m \circ k) \circ g) && \text{(associativitat)} \\ &= (l \circ h, m \circ k) \circ (f, g) && \text{(definició composició)} \\ &= ((l, m) \circ (h, k)) \circ (f, g). && \text{(definició composició)} \end{aligned}$$

Finalment, per a cada objecte (A, B) en $C_0 \times D_0$, on A és objecte en C_0 i B és objecte en D_0 , existeixen únics morfismes identitat id_A i id_B per ser C i D categories. Doncs, es defineix el morfisme identitat associat a l'objecte (A, B) en la categoria $C \times D$ com $\text{id}_{(A,B)} : A \times B \rightarrow A \times B$ tal que $\text{id}_{(A,B)} = (\text{id}_A, \text{id}_B)$. Aquest morfisme verifica que, donat el morfisme $(f, g) : A \times B \rightarrow C \times D$ en $C \times D$, es té que $(f, g) \circ \text{id}_{(A,B)} = (f, g)$ i $\text{id}_{(C,D)} \circ (f, g) = (f, g)$, respectivament. Notem que

$$\begin{aligned} (f, g) \circ \text{id}_{(A,B)} &= (f, g) \circ (\text{id}_A, \text{id}_B) && \text{(definició de } \text{id}_{(A,B)}) \\ &= (f \circ \text{id}_A, g \circ \text{id}_B) && \text{(composició en } C \times D) \\ &= (f, g). && \text{(morfismes identitat en } C \text{ i } D) \end{aligned}$$

Açò demostra la Proposició (2.10). ■

Continuant amb l'analogia amb els conjunts, donada una categoria, es pot definir la noció de subcategoria.

Definició 2.11 (Subcategoria). Donada una categoria C , direm que D és una *subcategoria* de C si, per una banda, D_0 és una subcol·lecció d'objectes de C_0 i D_1 és una subcol·lecció de C_1 i si, per altra banda, D conté tots els dominis i codominis dels seus morfismes, els morfismes identitat de tots els objectes i la composició de tots els morfismes componibles. Ho denotarem per $D \subset C$.

Una subcategoria $D \subset C$ és *plena* si $D_1 = C_1$.

Nota 2.12. Trivialment es té que la subcategoria d'una categoria és, en sí, una categoria per la mateixa definició anterior.

Il·lustrem la idea de subcategoria amb la Figura (3).

Finalment, si pensem una categoria com un mapa amb objectes i fletxes dirigides que relacionen els objectes, podem qüestionar-nos què ocorre si revertim la direcció de dites fletxes. Amb aquesta qüestió presentem el següent concepte.

Definició 2.13 (Categoria oposada). Siga C una categoria. Definim la *categoria oposada*, denotada per C^{op} , com la categoria que té els mateixos

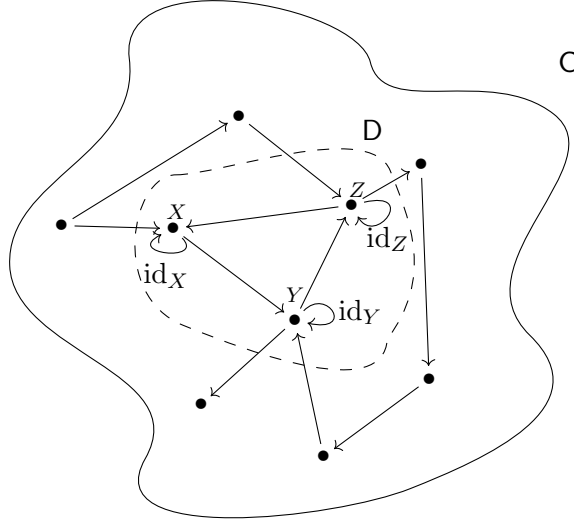


Figura 3: Subcategoria.

objectes que C , però que té morfismes f^{op} , per cada morfisme f en C , tal que el domini de f^{op} és el codomini de f i el codomini de f^{op} és el domini de f . És a dir, si $f : X \rightarrow Y$ és un morfisme en C , aleshores $f^{\text{op}} : Y \rightarrow X$ és un morfisme en C^{op} i viceversa.

En definitiva, la categoria C^{op} té els mateixos objectes que la categoria C , però els morfismes “apunten a la direcció oposada”.

En efecte, C^{op} és una categoria doncs compleix la definició de categoria.

Proposició 2.14. *Donada una categoria C , la seua categoria oposada, C^{op} , és una categoria.*

Demostració. Primerament, per definició de categoria oposada, tot morfisme en C_1^{op} té associat un domini en C_0^{op} i un codomini en C_0^{op} . Per altra banda, notem que dos morfismes f^{op} i g^{op} en C^{op} són componibles si, i només si, els respectius morfismes associats f i g en C són componibles. En efecte, donats $f^{\text{op}} : Y \rightarrow X$ i $g^{\text{op}} : Z \rightarrow Y$ componiblesm definim la composició

de morfismes en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ com $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}$ i, a més, la composició és associativa.

Siguen $f^{\text{op}} : Y \rightarrow X$, $g^{\text{op}} : Z \rightarrow Y$ i $h^{\text{op}} : W \rightarrow Z$ morfismes componibles en $\mathbf{C}^{\text{op}}$, aleshores

$$\begin{aligned}
 h^{\text{op}} \circ (g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}) &= h^{\text{op}} \circ (f \circ g)^{\text{op}} && \text{(definició composició)} \\
 &= ((f \circ g) \circ h)^{\text{op}} && \text{(definició composició)} \\
 &= (f \circ (g \circ h))^{\text{op}} && \text{(composició associativa en } \mathbf{C} \text{)} \\
 &= (g \circ h)^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} && \text{(definició composició)} \\
 &= (h^{\text{op}} \circ g^{\text{op}}) \circ f^{\text{op}}. && \text{(definició composició)}
 \end{aligned}$$

Finalment, per a cada objecte X de $\mathbf{C}_0^{\text{op}}$, com $\mathbf{C}_0^{\text{op}} = \mathbf{C}_0$ i $\mathbf{C}$ és una categoria, existeix un únic morfisme identitat id_X associat a X . Així, es defineix el morfisme identitat associat a un objecte X en la categoria oposada $\mathbf{C}^{\text{op}}$ com $\text{id}_X^{\text{op}} : X \rightarrow X$ tal que $\text{id}_X^{\text{op}} = \text{id}_X$. Aquest morfisme verifica que, donat el morfisme $f^{\text{op}} : Y \rightarrow X$, es té $\text{id}_X^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = f^{\text{op}}$ i, respectivament, $f^{\text{op}} \circ \text{id}_Y^{\text{op}} = f^{\text{op}}$ doncs,

$$\begin{aligned}
 \text{id}_X^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} &= (f \circ \text{id}_X)^{\text{op}} && \text{(definició composició)} \\
 &= f^{\text{op}}. && \text{(morfisme identitat en } \mathbf{C} \text{)}
 \end{aligned}$$

Açò demostra la Proposició (2.14). ■

Nota 2.15. És fàcil notar per la Definició (2.13) que, donada una categoria $\mathbf{C}$ i la seua categoria oposada $\mathbf{C}^{\text{op}}$, aleshores la categoria oposada de la categoria oposada de $\mathbf{C}$ coincideix amb la categoria $\mathbf{C}$.

$$(\mathbf{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathbf{C}.$$

A continuació, donem alguns exemples interessants de categories oposades.

Exemple 2.16. Exemples de categories oposades.

1. Siga la categoria Mat_R per a $\mathbf{R}$ anell unitari, aleshores la seua categoria

oposada es Mat_R^{op} , on els objectes són nombres naturals no nuls i on els morfismes de n a m són matrius $n \times m$ amb entrades en $\mathbf{R}$.

2. La categoria oposada de 0 és $0^{\text{op}} = 0$ i la categoria oposada de 1 és $1^{\text{op}} = 1$.
3. Siga la categoria preordre $(X, \leq)$, aleshores la seua categoria oposada és $(X, \leq)^{\text{op}}$, on els objectes són els elements de X i, per a cada parell $x, y \in X$ tal que $x \leq y$, existeix un únic morfisme $y \rightarrow x$. És a dir, $(X, \leq)^{\text{op}}$ és $(X, \geq)$.

La noció de categoria oposada és crucial per al desenvolupament de la Teoria de Categories i la seua importància rau en el fet que la categoria C i la categoria C^{op} presenten una relació dual: tot el que es pot dir d'una es pot dir de l'altra. En efecte, a la demostració de la Proposició (2.14) tot fet sobre C o C^{op} venia donat, necessàriament i suficientment, per C^{op} o C , respectivament. Així, donat un teorema sobre categories existeix un *teorema dual* en les categories oposades la demostració del qual és la demostració del teorema original, però amb totes les direccions dels morfismes revertides. Per exemple, la naturalesa del concepte de categoria oposada és anàloga a la de negació d'una proposició lògica. Efectivament, si tenim uns enunciats P i Q tals que es compleix el teorema $P \rightarrow Q$, aleshores també és cert que $\neg Q \rightarrow \neg P$. Tanmateix, el fet que es descriu a la Nota (2.15) és equivalent al Principi de la Doble Negació a lògica on, si P és un enunciat, aleshores $P \equiv \neg \neg P$.

En el transcurs d'aquest treball trobarem múltiples exemples de demostracions duals, proposicions duals i, fins i tot, definicions duals de les quals hi ha molts exemples i es tractaran amb major profunditat a la subsecció *Casos especials: functors, objectes i morfismes* (2.3). A més a més, en diversos casos ens estalviarem la demostració d'algunes propietats *per dualitat*, és a dir, aplicant el fet que tot teorema té un dual en la categoria oposada.

2.2 Functors

A continuació, definirem un altre concepte força important de la Teoria de Categories, a saber, els *functors*. A més a més, per a entendre què és un functor, exemplificarem aquest concepte amb alguns functors bàsics i, també, demostrarem que són, de fet, functors. Finalment, mostrarem el potencial de l'aplicació de functors a demostracions matemàtiques en el cas concret del Teorema del punt fix de Brouwer.

Definició 2.17 (Functor). Donades dues categories C i D definim un *functor*, denotat per F , com un parell (F_0, F_1) format per una assignació entre objectes, $F_0 : C_0 \rightarrow D_0$, i per una assignació entre morfismes, $F_1 : C_1 \rightarrow D_1$, tals que si $f : X \rightarrow Y$ és un morfisme en C_1 , aleshores $F_1(f) : F_0(X) \rightarrow F_0(Y)$ és un morfisme en D . A més, F preserva la identitat i la composició. És a dir,²

1. $F_1(\text{id}_X) = \text{id}_{F_0(X)}$, per a tot objecte X en C .
2. $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$ per a tot f i g morfismes componibles en C .

Per comoditat utilitzarem la notació de F , en compte de les components F_0 i F_1 , indistintament per a objectes i morfismes. Es pot veure com actua un functor sobre categories a la Figura (4) i uns esquemes de l'axioma de la identitat i de l'axioma de la composició a les Figures (5) i (6), respectivament.

Donem alguns exemples que il·lustren la noció de functorialitat.

Exemple 2.18. Exemples de functors.

1. Existeix una classe de functors que assignen a qualsevol estructura matemàtica el seu conjunt subjacent. Aquest functor rep el nom de **functor d'oblit** i alguns exemples són $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Group} \rightarrow \text{Set}$, $\text{Ring} \rightarrow \text{Set}$... Notem que només té sentit aquest functor per a categories concretes.

²Ens referirem a aquestes propietats de la definició de functor com *axioma de la identitat de functor* i *axioma de la composició de functor*, respectivament. També ens referirem a ells en general com *axiomes de functor*.

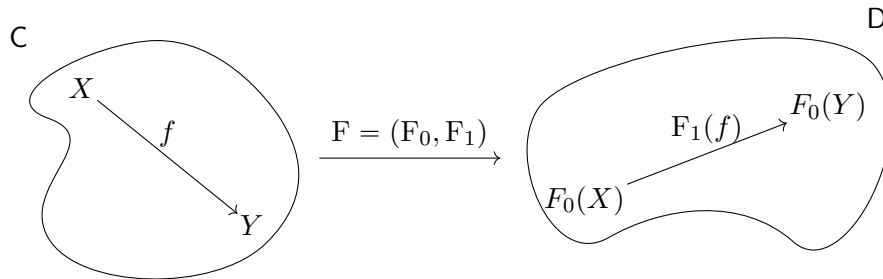


Figura 4: Representació d'un functor entre categories.

$$\begin{array}{ccc}
 F: C & \longrightarrow & D \\
 \begin{array}{c} A \\ \text{id}_A \downarrow \\ A \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} F(A) \\ \text{id}_{F(A)} \downarrow \\ F(A) \end{array}
 \end{array}$$

Figura 5: La transformació de la identitat pel functor F.

$$\begin{array}{ccc}
 F: C & \longrightarrow & D \\
 \begin{array}{c} A \\ f \downarrow \\ B \\ g \downarrow \\ C \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} F(A) \\ F(f) \downarrow \\ F(B) \\ F(g) \downarrow \\ F(C) \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \text{Left side: } g \circ f \text{ is indicated by a curved arrow from } A \text{ to } C. \\ \text{Right side: } F(g \circ f) \text{ is indicated by a curved arrow from } F(A) \text{ to } F(C). \end{array}$$

Figura 6: La transformació d'una composició pel functor F.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1} : \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\
A & & \star \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow \text{id}_\star \\
B & & \star
\end{array}$$

Figura 7: El functor $\mathbf{1}$.

2. Donada una categoria $\mathbf{C}$ i la categoria unitat $\mathbf{1}$, existeix un únic functor $\mathbf{1} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{1}$, anomenat **functor unitat** (Figura (7)), que assigna els objectes de $\mathbf{C}$ a l'únic objecte $\star$ de $\mathbf{1}$ i els morfismes de $\mathbf{C}$ a l'únic morfisme de $\mathbf{1}$, que és $\text{id}_\star$. A més, donada la categoria trivial $\mathbf{0}$, existeix un únic functor $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{C}$ que anomenarem **functor trivial**.
3. Naturalment, com el producte de categories és una categoria, donades les categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, existeixen functors $\pi_0 : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ i $\pi_1 : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ definits de forma natural. Aquests functors són coneguts com **projeccions**.
4. Si $\mathbf{C}$ és una categoria *localment menuda*, aleshores, per a tot objecte C de $\mathbf{C}$, es pot definir un functor $y_C : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ que assigna a cada objecte A de $\mathbf{C}$ el conjunt $\mathbf{C}(C, A)$, que és el conjunt de totes les aplicacions entre C i A . A aquest functor se li diu **functor representable** (Figura (8)).

Efectivament, y_C és un functor si, donat un morfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathbf{C}$, definim $y_C(f)$ com la composició per f amb un element de $\mathbf{C}(C, A)$ per a obtenir un morfisme en $\mathbf{C}(C, B)$. És a dir, si $f : A \rightarrow B$ és un morfisme en $\mathbf{C}$, es defineix

$$y_C(f) = g \circ f, \quad g \in \mathbf{C}(C, A).$$

D'aquesta forma es verifiquen els axiomes de la definició de functor.

5. També hi ha functors on el domini coincideix amb el codomini. Aquests

$$\begin{array}{ccc}
y_C : \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
\\
\begin{array}{ccc}
A & & \mathbf{C}(C, A) \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow y_C(f) \\
B & & \mathbf{C}(C, B)
\end{array}
\end{array}$$

Figura 8: El functor representable.

functors reben el nom d'*endofunctors* i un bon exemple d'ells és el **functor de les parts**. El functor de les parts $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ assigna a cada conjunt A en $\mathbf{Set}$ la seua potència $P(A) = \{A' \mid A' \subseteq A\}$ i a cada morfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathbf{Set}$ el corresponent morfisme $P(f) : P(A) \rightarrow P(B)$, que donat $A' \subset A$ es té que $P(f)(A') = f[A'] \subseteq B$.

6. Alguns functors deixen invariants els objectes quan s'apliquen sobre ells. Per exemple, el functor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Htpy}$ que assigna a cada funció continua en $\mathbf{Top}$ la seua corresponent classe d'homotopia i a cada espai topològic el mateix espai topològic.
7. Un functor molt fàcil de comprendre és el **functor constant**. Donades les categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ i un objecte X en $\mathbf{D}$, es denota el functor constant com $K_X : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. Aquest functor assigna tot objecte en $\mathbf{C}$ a l'objecte X en $\mathbf{D}$ i tot morfisme en $\mathbf{C}$ a id_X .
8. Per a dos monoides $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ les seues categories d'un únic objecte associades a ells són $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$, respectivament. Aleshores, donat un homomorfisme de monoides $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$, es pot definir un functor $F : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$. El functor F assigna l'objecte de $\mathbf{M}$ a l'objecte de $\mathbf{N}$ i un morfisme m en $\mathbf{M}$ al morfisme $f(m)$ en $\mathbf{N}$. Per la definició d'homomorfisme de monoides tenim garantida la functorialitat de F .
9. El següent exemple pot consultar-se a [13].

Considerem un conjunt A i el conjunt A^{-1} format pels elements formals a^{-1} on $a \in A$. Notem que A i A^{-1} són disjunts i estan en

correspondència bijectiva entre ells. Per tant, podem considerar $\tilde{A}$ el conjunt de les cadenes de la forma $a_1 \dots a_n$ constituïdes, en concatenació, pels elements de $A \cup A^{-1}$ tal que, si $a \in A$, aleshores aa^{-1} i $a^{-1}a$ corresponen a la cadena buida.

Anem a definir la multiplicació de les cadenes de $\tilde{A}$. Si considerem $\vec{a} = a_1 \dots a_n$ i $\vec{b} = b_1 \dots b_m$ cadenes de $\tilde{A}$, aleshores definim el producte entre $\vec{a}$ i $\vec{b}$, denotat per $\vec{a} \star \vec{b}$, com la concatenació reduïda de les cadenes $\vec{a}$ i $\vec{b}$, és a dir, $\vec{a} \star \vec{b} = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$, i després s'eliminen de la concatenació les cadenes buides. Per exemple, si $\vec{a} = a_1 a_2 a_3^{-1}$ i $\vec{b} = a_3 b_4 b_5$, aleshores

$$\vec{a} \star \vec{b} = a_1 a_2 b_4 b_5.$$

Notem que el producte $\star$ no és simètric. A més, observem que $(\tilde{A}, \star)$ té estructura de grup i, en concret, de grup no abelià. En efecte, per definició, tenim que, donats dos elements $\vec{a}$ i $\vec{b}$ de $\tilde{A}$, l'operació $\vec{a} \star \vec{b}$ és un element de $\tilde{A}$. Per altra banda, donats $\vec{a} = a_1 \dots a_n$, $\vec{b} = b_1 \dots b_m$ i $\vec{c} = c_1 \dots c_l$ elements de $\tilde{A}$ es verifica la propietat associativa.

$$\begin{aligned} (\vec{a} \star \vec{b}) \star \vec{c} &= (a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m) \star \vec{c} \\ &= a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m c_1 \dots c_l \\ &= (a_1 \dots a_n) \star (b_1 \dots b_m c_1 \dots c_l) \\ &= \vec{a} \star (\vec{b} \star \vec{c}). \end{aligned}$$

Clarament, l'únic element neutre del grup $(\tilde{A}, \star)$ seria la cadena buida i la denotem per $\vec{e}$. Si $\vec{a} = a_1 \dots a_n$ és un element de $\tilde{A}$, aleshores

$$\vec{a} \star \vec{e} = a_1 \dots a_n = \vec{e} \star \vec{a}.$$

Finalment, per a tot element $\vec{a} = a_1 \dots a_n$ de $\tilde{A}$ existeix el seu element invers que denotem per $\vec{a}^{-1}$. En efecte, l'element invers de $\vec{a}$ seria la cadena $\vec{a}^{-1} = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$. Aquest element satisfà que

$$\vec{a} \star \vec{a}^{-1} = (a_1 \dots a_n) \star (a_n^{-1} \dots a_1^{-1})$$

$$\begin{array}{ccc}
F: & \text{Set} & \longrightarrow \text{Group} \\
& A & \xrightarrow{\quad} (\tilde{A}, \star) \\
& f \downarrow & \downarrow F(f) \\
& B & \xrightarrow{\quad} (\tilde{B}, \star)
\end{array}$$

Figura 9: Functor del grup lliure.

$$\begin{aligned}
&= \vec{e} \\
&= (a_n^{-1} \dots a_1^{-1}) \star (a_1 \dots a_n) \\
&= \vec{a}^{-1} \star \vec{a}.
\end{aligned}$$

El grup $(\tilde{A}, \star)$ s'anomena **grup lliure**. Una construcció més exhaustiva dels grups lliures per consultar-se a [1].

A més a més, podem definir el functor $F : \text{Set} \rightarrow \text{Group}$, anomenat **functor del grup lliure**, que assigna a cada conjunt A en **Set** el grup lliure $(\tilde{A}, \star)$ i a cada morfisme $f : A \rightarrow B$ en **Set** l'homomorfisme de grups $F(f)$ entre $(\tilde{A}, \star)$ i $(\tilde{B}, \star)$. L'homomorfisme de grups $F(f)$ assigna a tot element $a_1 \dots a_n$ en $(\tilde{A}, \star)$ l'element $f(a_1) \dots f(a_n)$. En efecte, $F(f)$ és homomorfisme de grups perquè, donats $\vec{a} = a_1 \dots a_n$ i $\vec{b} = b_1 \dots b_m$ en $(\tilde{A}, \star)$, tenim que

$$\begin{aligned}
F(f)(\vec{a} \star \vec{b}) &= F(f)(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m) \\
&= f(a_1) \dots f(a_n) f(b_1) \dots f(b_m) \\
&= (f(a_1) \dots f(a_n)) \star (f(b_1) \dots f(b_m)) \\
&= F(f)(\vec{a}) \star F(f)(\vec{b}).
\end{aligned}$$

Il·lustrem el functor F a la Figura (9). Ara anem a comprovar que, de fet, F és un functor.

1. Axioma de la identitat

Siga A element en **Set** i siga $\text{id}_A : A \rightarrow A$ el morfisme identitat de A .

Aleshores, si $\vec{a} = a_1 \dots a_n$ és element del grup $(\tilde{A}, \star)$, tenim que

$$F(\text{id}_A)(\vec{a}) = \text{id}_A(a_1) \dots \text{id}_A(a_n) = a_1 \dots a_n = \vec{a} = \text{id}_{(\tilde{A}, \star)}(\vec{a}).$$

Com $F(\text{id}_A)$ i $\text{id}_{(\tilde{A}, \star)}$ es comporten igual per a tot element $\vec{a}$ de $(\tilde{A}, \star)$, es té que són, necessàriament, el mateix morfisme. Acabem de demostrar que F verifica l'Axioma de la identitat.

2. Axioma de la composició

Siguen $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ morfismes en **Set**. Aleshores, si $\vec{a} = a_1 \dots a_n$ és element de $(\tilde{A}, \star)$, tenim que

$$\begin{aligned} F(g \circ f)(\vec{a}) &= g(f(a_1)) \dots g(f(a_n)) \\ &= F(g)(f(a_1) \dots f(a_n)) \\ &= F(g)(F(f)(\vec{a})) \\ &= F(g) \circ F(f)(\vec{a}). \end{aligned}$$

Com $F(g \circ f)$ i $F(g) \circ F(f)$ es comporten igual per a tot element $\vec{a}$ de $(\tilde{A}, \star)$, es té que són, necessàriament, el mateix morfisme. Acabem de demostrar que F verifica l'Axioma de la composició.

10. El següent exemple pot consultar-se a [13].

Siga la categoria **Euclid**_{*} que té per objectes els conjunts oberts dels espais euclidians finits i puntejats, denotats per $(\mathbb{R}^n, p)$ (de forma abreujada es denota per $\mathbb{R}^n$), i que té per morfismes funcions diferenciables puntejades, denotades per $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Notem que si p és el punt base de $\mathbb{R}^n$, aleshores $f(p)$ és el punt base de $\mathbb{R}^m$.

Per altra banda, la derivada total de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, avaluada sobre el punt base $p \in \mathbb{R}^n$, és la matriu Jacobiana definida per les derivades direccionals de f avaluades sobre p . Per tant, si $f = (f_1, \dots, f_m)$ on $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, aleshores la posició (i, j) -èssima de la matriu Jacobiana és $\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(p)$. Així, es pot definir el **functor derivada**, denotat per $D : \text{Euclid}_* \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}$, que, per una banda, assigna als objectes de **Euclid**_{*}

$$\begin{array}{ccc}
D: \mathbf{Euclid}_* & \longrightarrow & \mathbf{Mat}_{\mathbb{R}} \\
(\mathbb{R}^n, p) & & n \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(p) \right)_{i,j=1}^{m,n} \\
(\mathbb{R}^m, f(p)) & & m
\end{array}$$

Figura 10: Functor derivada.

la dimensió dels espais euclidians finits i puntejats i, per altra banda, assigna als morfismes $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ d' $\mathbf{Euclid}_*$ la matriu Jacobiana. Representem a la Figura (10) el functor D . Comprovem a continuació que D és, de fet, un functor.

1. Axioma de la identitat

Siga $\text{id}_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, p)$ morfisme identitat en $\mathbf{Euclid}_*$, on el punt p es de la forma $p = (p_1, \dots, p_n)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
D(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\text{id}_{\mathbb{R}^n})_i(p) \right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} p_i \right)_{i,j=1}^n \\
&= (\delta_{i,j})_{i,j=1}^n \quad (\delta_{i,j} \text{ denota la Delta de Kronecker}) \\
&= I_n \\
&= \text{id}_{D(n)}.
\end{aligned}$$

Acabem de demostrar que D verifica l'Axioma de la identitat.

2. Axioma de la composició

Siguen $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, f(p))$ i $g : (\mathbb{R}^m, f(p)) \rightarrow (\mathbb{R}^l, g(f(p)))$ morfismes componibles en $\mathbf{Euclid}_*$ tal que $p = (p_1, \dots, p_n)$. Aleshores,

$$D(g \circ f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (g \circ f)_i(p) \right)_{i,j=1}^{l,n}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(f(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(p) \right)_{i,j=1}^{l,n} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(f(p)) \right)_{i,j=1}^{l,m} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(p) \right)_{i,j=1}^{m,n} \\
&= D(g) \circ D(f).
\end{aligned}$$

Acabem de demostrar que D verifica l'Axioma de la composició i, a més, que D és un functor.

Siga $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ morfisme en Euclid_* que assigna al punt base $f(p)$ de $\mathbb{R}^m$ el punt base $g(f(p))$ en $\mathbb{R}^l$. Aleshores, per l'Axioma de composició que verifica el functor D , el producte de la matriu Jacobiana de f sobre p per la matriu Jacobiana de g sobre $f(p)$ és igual a la matriu Jacobiana de $g \circ f$ sobre p . És a dir, la *Regla de la cadena* multivariable expressa la functorialitat de la derivada.

Així com ocorre amb els morfismes, donats dos functors sobre categories componibles, podem definir el functor composició.

Proposició 2.19 (Functor composició). *Donades les categories $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{E}$ i els functors $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ tals que $\text{tg}(F) = \text{sc}(G)$ ³, es defineix el functor composició (Figura (11)) com un functor, denotat per $G \circ F$, del tipus $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$. A més a més, aquesta composició és associativa.*

Demostració. Necessitem definir el functor composició com un functor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ en base als functors $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. Notem que bastarà definir $(G \circ F)(\cdot) = G(F(\cdot))$ on $\cdot$ denota tant objectes com morfismes en $\mathcal{C}$. En efecte, definida així la composició de functors, tenim que, si X és un objecte en $\mathcal{C}$, aleshores $F(X)$ és un objecte en $\mathcal{D}$ i $G(F(X))$ és un objecte en $\mathcal{E}$. Per altra banda, si f és morfisme en $\mathcal{C}$, aleshores $F(f)$ és morfisme en $\mathcal{D}$ i $G(F(f))$ és morfisme en $\mathcal{E}$. Per tant, definit així, tenim que $G \circ F$ és una assignació del tipus $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$.

Tot plegat, el funcionament del functor composició quedaria com segueix a la Figura (11).

³En un abús de notació anem a indicar que els codominis i dominis dels functors de la mateixa forma que vam fer amb els morfismes.

$$\begin{array}{ccccc}
G \circ F: C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\
\downarrow f & \xrightarrow{F} & \downarrow F(f) & \xrightarrow{G} & \downarrow G(F(f)) \\
A & & F(A) & & G(F(A)) \\
B & & F(B) & & G(F(B))
\end{array}$$

Figura 11: El functor composició.

Comprovem que $G \circ F$ és, de fet, un functor.

1. Axioma de la identitat.

Siga el morfisme identitat id_X en C . Aleshores,

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(\text{id}_X) &= G(F(\text{id}_X)) && \text{(definició de functor composició)} \\
&= G(\text{id}_{F(X)}) && \text{(axioma de la identitat per a } F) \\
&= \text{id}_{G(F(X))} && \text{(axioma de la identitat per a } G) \\
&= \text{id}_{(G \circ F)(X)}. && \text{(definició de functor composició)}
\end{aligned}$$

2. Axioma de la composició.

Siguen $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ morfismes componibles en C . Aleshores,

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) && \text{(definició de functor composició)} \\
&= G(F(g) \circ F(f)) && \text{(axioma de la composició)} \\
&= G(F(g)) \circ G(F(f)) && \text{(axioma de la composició)} \\
&= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f). && \text{(functor composició)}
\end{aligned}$$

Veiem que la composició, tal i com l'hem definida, és associativa.

Siguen C , D i E categories i $F: C \rightarrow D$, $G: D \rightarrow E$ i $H: E \rightarrow F$ functors componibles.

3. Associativitat per a objectes.

Considerem X objecte en $\mathcal{C}$. Per tant,

$$\begin{aligned}
 [H \circ (G \circ F)](X) &= H((G \circ F)(X)) && \text{(def. functor composició)} \\
 &= H(G(F(X))) && \text{(ídem)} \\
 &= (H \circ G)(F(X)) && \text{(ídem)} \\
 &= [(H \circ G) \circ F](X). && \text{(ídem)}
 \end{aligned}$$

4. Associativitat per a morfismes.

Considerem f morfisme en $\mathcal{C}$. Llavors,

$$\begin{aligned}
 [H \circ (G \circ F)](f) &= H((G \circ F)(f)) && \text{(def. functor composició)} \\
 &= H(G(F(f))) && \text{(ídem)} \\
 &= (H \circ G)(F(f)) && \text{(ídem)} \\
 &= [(H \circ G) \circ F](f). && \text{(ídem)}
 \end{aligned}$$

La qual cosa demostra la Proposició (2.19). ■

Nota 2.20. Observem que podem definir un *functor identitat* d'una categoria $\mathcal{C}$ que assigna a tot objecte en $\mathcal{C}$ el mateix objecte i a tot morfisme en $\mathcal{C}$ el mateix morfisme. Aquest functor el denotem⁴ per $\text{Id} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ i, així, pot definir-se la categoria Cat que té per objectes categories i per morfismes functors entre categories.

Il·lustrem amb un esquema visual a la Figura (12) el comportament dels functors composició i identitat.

Continuem donant exemples interessants de functors i presentem ara una categoria i un functor definits per una relació de congruència.

Exemple 2.21 (Categoria quocient i functor quocient). Un altre exemple de categoria seria l'anomenada *categoria quocient* que ve donada per una categoria $\mathcal{C}$ i una relació de congruència sobre $\mathcal{C}$. Aquesta construcció estableix, per a tots X, Y i Z objectes de $\mathcal{C}$, una relació d'equivalència $\sim_{X,Y}$ sobre la classe de morfismes $\mathcal{C}(X, Y)$ i una relació d'equivalència $\sim_{Y,Z}$ sobre

⁴També es pot denotar el functor identitat d'una categoria $\mathcal{C}$ com $1_{\mathcal{C}}$

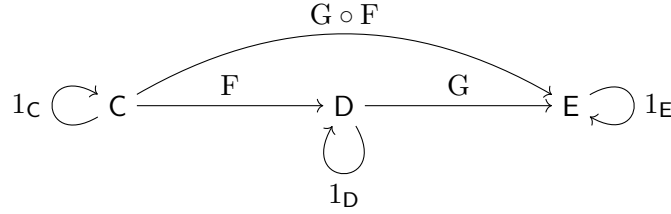


Figura 12: Composició i unitat de functors.

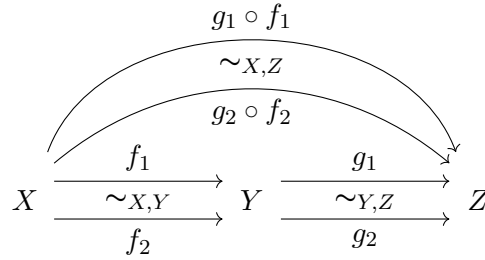


Figura 13: Propietat de la categoria quocient.

la classe de morfismes $\mathcal{C}(Y, Z)$ tals que, si $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ són morfismes en $\mathcal{C}$ que verifiquen $f_1 \sim_{X,Y} f_2$ i si $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ són morfismes en $\mathcal{C}$ que verifiquen $g_1 \sim_{Y,Z} g_2$. aleshores es té que

$$g_1 \circ f_1 \sim_{X,Z} g_2 \circ f_2.$$

on $\sim_{X,Z}$ és relació d'equivalència sobre la classe de morfismes $\mathcal{C}(X, Z)$. Una representació d'aquesta última propietat pot veure's a la Figura (13).

Donada la relació de congruència $\sim$ en $\mathcal{C}$, la categoria quocient $\mathcal{C}/\sim$ té els mateixos objectes que $\mathcal{C}$ i té per morfismes $X \rightarrow Y$ les $\sim_{X,Y}$ -classes d'equivalència dels morfismes $X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$.

A més a més, existeix un functor $\text{Pr}_{\sim} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$, anomenat *functor quocient*, que deixa invariants els objectes i que assigna a cada morfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$ la classe d'equivalència $[f]_{\sim_{A,B}}$.

Comprovem que $\text{Pr}_{\sim}$ és, de fet, un functor.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Pr}_\sim : \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}/\sim \\
\begin{array}{c} A \\ \downarrow f \\ B \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} A \\ \downarrow [f]_{\sim_{A,B}} \\ B \end{array}
\end{array}$$

Figura 14: Functor quotient.

1. Axioma de la identitat.

Siga id_A un morfisme identitat en $\mathbf{C}$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\text{Pr}_\sim(\text{id}_A) &= [\text{id}_A]_{\sim_A} && \text{(definició de } \text{Pr}_\sim) \\
&= \text{id}_{[f]_{\sim_{A,B}}} && ([f]_{\sim_{A,B}} \circ [\text{id}_A]_{\sim_A} = [f \circ \text{id}_A]_{\sim_{A,B}} = [f]_{\sim_{A,B}}) \\
&= \text{id}_{\text{Pr}_\sim(A)}. && \text{(definició de } \text{Pr}_\sim)
\end{aligned}$$

2. Axioma de la composició.

Siguen $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ morfismes componibles en $\mathbf{C}$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\text{Pr}_\sim(g) \circ \text{Pr}_\sim(f) &= [g]_{\sim_{B,C}} \circ [f]_{\sim_{A,B}} && \text{(definició de } \text{Pr}_\sim) \\
&= [g \circ f]_{\sim_{A,C}} && \text{(relació d'equivalència)} \\
&= \text{Pr}_\sim(g \circ f). && \text{(definició de } \text{Pr}_\sim)
\end{aligned}$$

Il·lustrem el functor quotient a la Figura (14).

Tots els functors que hem estudiat ara per ara són classificats com functors *covariants* (Definició 2.17). Així, existeixen altres functors no covariants o *contravariants* que definim a continuació.

Definició 2.22 (Functor contravariant). Donades dos categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, un functor F és *contravariant* si és de la forma $F : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$. En concret, és un functor que assigna a cada objecte X en $\mathbf{C}$ un objecte $F(X)$ en $\mathbf{D}$ i a cada morfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathbf{C}$ un morfisme $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$ de forma que és preserva la identitat i la composició. És a dir:

$$\begin{array}{ccc}
F: \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\
\begin{array}{ccc} A & & F(A) \\ f \downarrow & \longmapsto & \downarrow F(f) \\ B & & F(B) \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
F: \mathbf{C}^{\text{op}} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\
\begin{array}{ccc} A & & F(A) \\ f \downarrow & \longmapsto & \uparrow F(f) \\ B & & F(B) \end{array}
\end{array}$$

Figura 15: Functor covariant i functor contravariant.

1. $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ per a tot objecte X en $\mathbf{C}$.
2. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ per a tot f i g morfismes en $\mathbf{C}$ componibles.

Nota 2.23. Observem que la definició anterior de functor contravariant és coherent amb l'estudi de les categories oposades fet a la Secció (2.1).

Representem a la Figura (15) la diferència entre un functor covariant i un functor contravariant.

Donem un exemple de categoria on els objectes són morfismes i un functor associat a aquesta categoria que assigna categories a objectes i functors a morfismes. Presentem, doncs, la categoria tall i el functor tall per sobre.

Exemple 2.24 (Categoria tall i functor tall per sobre). Donada una categoria $\mathbf{C}$ i un objecte A en $\mathbf{C}$ es defineix la **categoria tall per sobre**, denotada per $\mathbf{C}/A$, com la categoria que té per objectes tots els morfismes amb codomini A tals que, donats dos objectes $g : B \rightarrow A$ i $h : C \rightarrow A$, el morfisme que els relaciona és $k : B \rightarrow C$ en $\mathbf{C}$ tal que $h \circ k = g$. El diagrama que representa aquesta relació se li diu *diagrama commutatiu* (Figura (16)).

Per la forma de la categoria tall per sobre podem definir un functor entre les categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{Cat}$, el qual assigna a cada objecte A en $\mathbf{C}$ la categoria $\mathbf{C}/A$ i a cada morfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathbf{C}$ el functor $\mathbf{C}/f$. Aquest functor $\mathbf{C}/f$ assigna a tot objecte $h : M \rightarrow A$ en $\mathbf{C}/A$ la seua composició per f i assigna a tot morfisme en $\mathbf{C}/A$ el mateix morfisme. Il·lustrem-los amb la Figura (17).

Nota 2.25. Donada una categoria $\mathbf{C}$ i un objecte A en $\mathbf{C}$, tal i com hem definit la categoria tall sobre A , podem definir dualment la categoria tall *sota* A ,

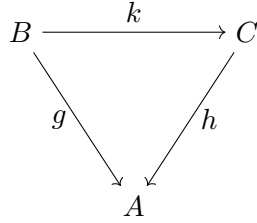


Figura 16: Morfisme en la categoria $\mathbf{C}/A$.

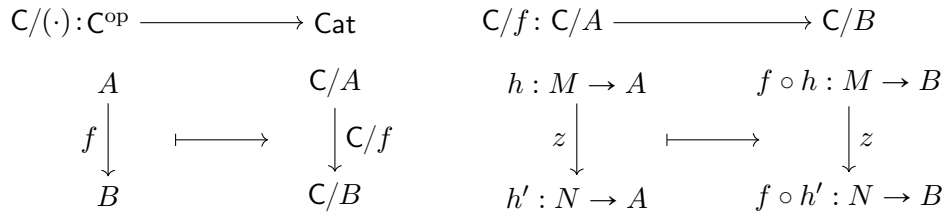


Figura 17: El functor tall per sobre i el functor entre categories.

denotada A/C , com la categoria que té per objectes tots els morfismes de domini A i tal que, donats dos morfismes $g : A \rightarrow B$ i $h : A \rightarrow C$ en $\mathbf{C}$, un morfisme en A/C de g a h és un morfisme $k : B \rightarrow C$ en $\mathbf{C}$ que satisfà $k \circ h = g$. El diagrama commutatiu que mostra aquesta propietat es troba a la Figura (18).

Notem a més que aquesta categoria també dona lloc a un functor contravariant entre $\mathbf{C}$ i $\mathbf{Cat}$ definit de la mateixa forma. Donem l'esquema visual només

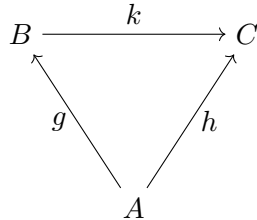


Figura 18: Morfisme en la categoria A/C .

$$\begin{array}{ccc}
(\cdot)/C: C & \longrightarrow & \text{Cat} \\
\begin{array}{ccc} A & & A/C \\ f \downarrow & \longmapsto & \uparrow f/C \\ B & & B/C \end{array} & & \begin{array}{ccc} f/C: B/C & \longrightarrow & A/C \\ h: B \rightarrow M & & h \circ f: A \rightarrow M \\ z \downarrow & \longmapsto & \downarrow z \\ h': B \rightarrow N & & h' \circ f: A \rightarrow N \end{array}
\end{array}$$

Figura 19: El functor tall per sota i el functor entre categories.

amb la Figura (19).

Seguidament, justifiquem teòricament l'existència d'un functor que serà clau en el desenvolupament d'aquest treball, en concret a la Secció 3.2. Aquest functor és el Hom *functor*.

Proposició 2.26. *Siga C una categoria localment menuda. Aleshores, existeix un functor anomenat Hom functor, denotat per $C(-, -) : C^{\text{op}} \times C \rightarrow \text{Set}$, que assigna al parell (A, B) d'objectes de C el conjunt $C(A, B)$.*

Demostració. Primerament notem que, com C és localment menuda, té sentit pensar en un functor que assigna a dos objectes el conjunt de morfismes entre ells en la categoria dels conjunts. Aleshores, donats (A, B) i (C, D) objectes en $C^{\text{op}} \times C$ tals que $g^{\text{op}} : C \rightarrow A$ és morfisme en C^{op} i $f : B \rightarrow D$ és morfisme en C es té que $C(-, -)(A, B) = C(A, B)$ i $C(-, -)(C, D) = C(C, D)$.

Per a definir com actua aquest functor sobre els morfismes notem que necessitem assignar a $k : A \rightarrow B$ element de $C(A, B)$ un element de $C(C, D)$. Ja que $g^{\text{op}} : C \rightarrow A$ i $f : B \rightarrow D$, és natural assignar a $k : A \rightarrow B$ el morfisme composició $C(g^{\text{op}}, f)(k) = f \circ k \circ g^{\text{op}}$ que és, en efecte, element de $C(C, D)$. Comprovem que $C(-, -)$ definit d'aquesta forma és un functor.

1. Axioma de la identitat.

Siga un objecte (A, B) en $C^{\text{op}} \times C$ i siguen el morfisme identitat id_A^{op} en C i el morfisme identitat id_B en C . Considerem $k : A \rightarrow B$ element de $C(A, B)$. Aleshores,

$$C(\text{id}_A^{\text{op}}, \text{id}_B)(k) = \text{id}_B \circ k \circ \text{id}_A^{\text{op}} \quad (\text{definició de Hom functor})$$

$$\begin{array}{ccc}
C(-, -): C^{\text{op}} \times C & \longrightarrow & \text{Set} \\
\begin{array}{ccc}
A \times B & & C(A, B) \\
g^{\text{op}} \uparrow & \downarrow f & \downarrow C(g^{\text{op}}, f) \\
C \times D & & C(C, D)
\end{array} & \longmapsto &
\end{array}$$

Figura 20: Hom functor.

$$\begin{aligned}
&= \text{id}_B \circ k \circ \text{id}_A & (\text{id}_A^{\text{op}} = \text{id}_A) \\
&= k.
\end{aligned}$$

Açò demostra que $C(-, -)$ verifica l'Axioma de la identitat.

2. Axioma de la composició.

Siguen els objectes (A, B) , (C, D) i (E, F) en $C^{\text{op}} \times C$ i siguen els parells de morfismes $(g^{\text{op}}, f) \in C(C, A) \times C(B, D)$ i $(i^{\text{op}}, h) \in C(E, C) \times C(D, F)$ en $C^{\text{op}} \times C$. Doncs,

$$\begin{aligned}
C((g^{\text{op}}, f) \circ (i^{\text{op}}, h))(k) &= C(g^{\text{op}} \circ i^{\text{op}}, h \circ f) & (\text{composició en } C^{\text{op}} \times C) \\
&= C((i \circ g)^{\text{op}}, h \circ f) & (\text{composició en } C^{\text{op}}) \\
&= (h \circ f) \circ k \circ (i \circ g)^{\text{op}} & (\text{def. Hom functor}) \\
&= (h \circ f) \circ k \circ g^{\text{op}} \circ i^{\text{op}} & (\text{composició en } C^{\text{op}}) \\
&= h \circ (f \circ k \circ g^{\text{op}}) \circ i^{\text{op}} & (\text{associativitat}) \\
&= h \circ [C(g^{\text{op}}, f)(k)] \circ i^{\text{op}} & (\text{def. Hom functor}) \\
&= C(i^{\text{op}}, h)(C(g^{\text{op}}, f)(k)) & (\text{def. Hom functor}) \\
&= [C(g^{\text{op}}, f) \circ C(i^{\text{op}}, h)](k).
\end{aligned}$$

I així ja hem demostrat la Proposició (2.26). ■

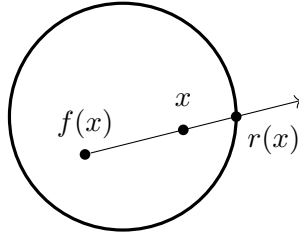
Hem representat el functor Hom a la Figura (20).

Finalitzem aquesta secció mostrant com el concepte de functor i les seues conseqüències tenen aplicacions matemàtiques. De fet, el fet que una assign-

nació entre un tipus d'objecte matemàtic i altre tipus siga functorial pot suposar la simplificació de moltes demostracions, com anem a veure ara.

Teorema 2.27 (Teorema del punt fix de Brouwer [13]). *Tot endomorfisme continu en un disc D^2 de dimensió 2 té un punt fix.*

Demostració. Denotem per $f: D^2 \rightarrow D^2$ a l'endomorfisme i suposem, per reducció a l'absurd, que per a tot $x \in D^2$ es té $f(x) \neq x$. Aleshores, existeix $r: D^2 \rightarrow S^1$ funció continua que assigna a tot punt $x \in D^2$ la intersecció de la frontera del cercle S^1 amb la recta que va des de $f(x)$ a x . Doncs, notem que, com la funció r fixa punts en la frontera S^1 de D^2 , la composició $S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1$, per a i inclusió, és la identitat. En altres paraules, r és una retracció de i . Ho visualitzem al següent gràfic.



Considerem ara l'assignació del grup fonamental, denotada $\pi_1: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Group}$, que és, de fet, un functor (Exemple 2.18). Siga qualsevol punt base de la frontera S^1 i apliquem el functor π_1 a la composició anterior obtenint la composició d'homomorfismes de grups $\pi_1(S^1) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(D^2) \xrightarrow{\pi_1(r)} \pi_1(S^1)$. Ara bé, pels axiomes de functor hem d'obtindre que

$$\pi_1(r) \circ \pi_1(i) = \pi_1(r \circ i) = \pi_1(\text{id}_{S^1}) = \text{id}_{\pi_1(S^1)}.$$

Per altra banda, malgrat que no ho demostrem, és sabut que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ i $\pi_1(D^2) = 0$ (grup trivial). Aleshores, $\pi_1(r) \circ \pi_1(i)$ en $\mathbb{Z}$ ha de ser 0 perquè actua sobre el grup trivial ($\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$), però també és igual a l'homomorfisme identitat. Com la identitat en $\mathbb{Z}$ és 1 es conclou que $0 = 1$ que és una contradicció. Per tant, f té punts fixos. ■

2.3 Casos especials: functors, objectes i morfismes

Els morfismes també són importants a la Teoria de Categories. A aquesta secció no abstraurem més encara els conceptes anteriorment definits sinó que definirem tres tipus de morfismes, a saber, els *monomorfismes*, *epimorfismes* i *isomorfismes*. En concret, els isomorfismes seran cardinals per a l'estudi posterior. A més a més, aprofitarem aquestes entitats per a explicar i exemplificar el *Principi de Dualitat*. Per últim, veurem com es relacionen estos morfismes amb els functors, així com quines condicions han de complir els últims per a *preservar-los* i *reflexar-los*. També introduïrem els objectes *inicials* i *terminals*.

Definició 2.28 (Monomorfismes, Epimorfismes, Isomorfismes). Siga un morfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathbf{C}$.

1. Direm que f és **monomorfisme** si, per a qualsevol objecte C en $\mathbf{C}_0$ i morfismes $g, h : C \rightarrow A$ en $\mathbf{C}_1$, es té que si $f \circ g = f \circ h$, aleshores $g = h$. És a dir, no poden existir dos morfismes distints en $\mathbf{C}$ tals que les respectives composicions *per la dreta* amb f siguin idèntiques.
2. Direm que f és **epimorfisme** si, per a qualsevol objecte C en $\mathbf{C}_0$ i morfismes $g, h : B \rightarrow C$ en $\mathbf{C}_1$, es té que si $g \circ f = h \circ f$, aleshores $g = h$. És a dir, no poden existir dos morfismes distints en $\mathbf{C}$ tals que les respectives composicions *per l'esquerra* amb f siguin idèntiques.
3. Direm que f és **isomorfisme** si existeix $g : B \rightarrow A$ morfisme en $\mathbf{C}_0$ tal que $f \circ g = \text{id}_A$ i $g \circ f = \text{id}_B$. A més, a g l'anomenem *la inversa de f* representada per $g = f^{-1}$ i és única.
 - (a) Si $f : A \rightarrow B$ és isomorfisme direm que A i B són isomòrfics i ho representem com $A \cong B$.
 - (b) Un **grupoide** és una categoria menuda on tots els morfismes són isomorfismes. Direm que la subcategoria $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ és un **grupoide maximal** si conté tots els objectes i només els isomorfismes.
4. Direm que $f : A \rightarrow B$ és un **endomorfisme** si $A = B$.

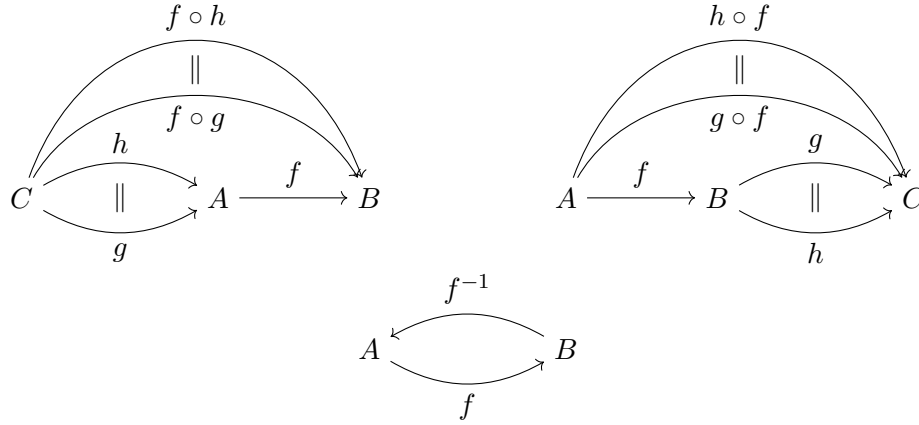


Figura 21: Monomorfisme, Epimorfisme i Isomorfisme.

5. Direm que $f : A \rightarrow B$ és **automorfisme** si és endomorfisme i isomorfisme.

Els mapes dels monomorfismes, epimorfismes i isomorfismes són els explicats a la Figura (21).

Presentem alguns exemples per a il·lustrar els darrers conceptes.

Exemple 2.29. Donem diversos exemples concrets de monomorfismes, epimorfismes, isomorfismes i grupoides.

1. Siga la categoria **Ring** (Exemple 2.5) i siga $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ un morfisme en **Ring**, és a dir, un homomorfisme d'anells. Aleshores, f és un monomorfisme si, i només si, f és injectiu. En efecte, suposem primer que f és monomorfisme però no injectiu. Aleshores, existeixen $a, b \in \mathbf{R}$ distints tals que $f(a) = f(b)$. A continuació, considerem els monomorfismes $g_1 : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbf{R}$ i $g_2 : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbf{R}$ que actuen com $g_1(x) = a$ i $g_2(x) = b$ per a tot $x \in \mathbb{Z}[x]$, respectivament. Notem que es verifica que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, perquè $f(a) = f(b)$, però que $g_1 \neq g_2$, puix $a \neq b$. Per tant, acabem d'arribar a una contradicció perquè f és monomorfisme.

Per altra banda, suposem que $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ és un homomorfisme d'anells injectiu i veiem que f és monomorfisme. Siguen $g : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$ i $h :$

$\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}$ morfismes en **Ring**. Suposem que $f \circ g = f \circ h$, aleshores $f(g(t)) = f(h(t))$, per a tot $t \in \mathbf{T}$. Doncs, com f és injectiu, tenim que $g(t) = h(t)$ per a tot $t \in \mathbf{T}$, és a dir, que $g = h$. En definitiva, f és monomorfisme.

Notem que, com tot cos és un anell, aleshores els homomorfismes de cossos de la categoria **Field** són monomorfismes si, i només si, són injectius.

2. Siga la categoria **Ring**. A diferència de l'apartat anterior, que $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ morfisme en **Ring** siga un epimorfisme no implica que siga suprajectiu. El raonament d'aquest fet es pot trobar a l'Exemple (2.40). Però, si que és cert que si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ és morfisme suprajectiu en **Ring**, aleshores f és epimorfisme. Siguen $g : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$ i $h : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$ morfismes en **Ring** i suposem que $g \circ f = h \circ f$, és a dir, que $g(f(r)) = h(f(r))$, per a tot $r \in \mathbf{R}$. Això vol dir que els morfismes g i h coincidixen sobre la imatge de f . Ara bé, com f és suprajectiva tenim que $\text{Im}(f) = \mathbf{S}$ i, per tant, deduím que g i h coincidixen sobre $\mathbf{S}$ o, anàlogament, que $g = h$.
3. Anem a donar un exemple d'epimorfisme a la categoria **Haus** (Exemple 2.5). En particular, demostrem que si $f : X \rightarrow Y$ és un morfisme en **Haus** la imatge del qual és densa, és a dir, l'adherència de $f[X]$ és $\overline{f[X]} = Y$, aleshores f és un epimorfisme [5]. Considerem morfismes distints en **Haus**, $g : Y \rightarrow Z$ i $h : Y \rightarrow Z$. Aleshores, existeix un element y de l'espai Y tal que $g(y) \neq h(y)$. Per altra banda, com Z és Hausdorff, existeixen dos subconjunts oberts i disjunts, $\mathcal{Z}_1$ i $\mathcal{Z}_2$, de Z tals que $g(y) \in \mathcal{Z}_1$ i $h(y) \in \mathcal{Z}_2$. Doncs, es dedueix que $y \in g^{-1}[\mathcal{Z}_1] \cap h^{-1}[\mathcal{Z}_2]$, però com $Y = \overline{f[X]}$, existeix un element x de l'espai X tal que $f(x) \in g^{-1}[\mathcal{Z}_1] \cap h^{-1}[\mathcal{Z}_2]$. Per tant, com $\mathcal{Z}_1$ i $\mathcal{Z}_2$ són disjunts, deduím que $g \circ f(x) \neq h \circ f(x)$. En conclusió, f és un epimorfisme.
4. Finalment, es pot demostrar també que, donada la categoria **Group**, els epimorfismes de grups són suprajectius [6].

5. A la categoria **Top** (Exemple 2.5) els isomorfismes són els homeomorfismes, és a dir, les funcions contínues i bijectives d'inversa contínua.
6. Hi ha categories on tots els seus morfismes són isomorfismes. Per exemple, considerem la categoria **G** d'un únic objecte, definida a partir d'un grup **G**. Aleshores, tenim que tots els morfismes g en **G** són isomorfismes perquè existeix la inversa de tot element del grup **G**.
7. Altre exemple d'isomorfismes el podem trobar a una categoria ordre $(X, \leq)$ (Exemple 2.6). En efecte, si x i y són objectes en $(X, \leq)$, aleshores, per antisimetria, $x \leq y$ i $y \leq x$ si, i només si, $x = y$. Doncs, els únics isomorfismes d'una categoria preordre són les identitats.
8. Considerem la categoria de les matrius per l'anell unitari $\mathbb{R}$ (Exemple 2.6), és a dir, $\text{Mat}_{\mathbb{R}}$. Aleshores, els únics isomorfismes en $\text{Mat}_{\mathbb{R}}$ són morfismes de la forma $M : n \rightarrow n$, a saber, matrius invertibles.
9. La categoria **Group** és un grupoide d'un únic objecte. Altre exemple de grupoide és el **grupoide d'acció** que ve donat per un grup **G** que actua sobre un conjunt X . El grupoide d'acció, que denotem per $G \ltimes X$, és una categoria que té per objectes els elements de X i que, donats $x, y \in X$, els morfismes de x a y corresponen als elements g de **G** tals que $y = gx$. La composició dels morfismes $g : x \rightarrow y$ i $h : y \rightarrow z$ componibles en $G \ltimes X$ seria $h \circ g : x \rightarrow z$ la qual correspon a $z = (h \cdot g)x$. Finalment, com tot element d'un grup és invertible, si $g : x \rightarrow y$ és morfisme en $G \ltimes X$, que correspon a $y = gx$, el seu morfisme invers seria $g^{-1} : y \rightarrow x$, corresponent a $x = g^{-1}y$. Doncs, tot morfisme en $G \ltimes X$ és isomorfisme i, per tant, la categoria $G \ltimes X$ és un grupoide.

Lema 2.30. *Tota categoria **C** conté un grupoide maximal.*

Demostració. Siga $D \subset C$ subcategoria que conté tots els objectes de **C** i només els isomorfismes en **C**, és a dir, D és un grupoide maximal en **C**. Necessitem demostrar quatre condicions sobre el grupoide maximal.

1. Que conté el domini i el codomini de tots els morfismes en D .

2. Que conté els morfismes identitat de tots els objectes en D .
3. Que conté la composició de qualsevol parella de morfismes en D .
4. Que conté qualsevol altre grupoide de la categoria C .

Trivialment tenim (1) perquè el grupoide maximal conté tots els objectes de la categoria. Respecte a (2), com el morfisme identitat de cada objecte és isomorfisme, la seua inclusió està assegurada. Després, sobre (3), per la Proposició 2.43 tenim que la composició d'isomorfismes és isomorfisme. Finalment, respecte a (4), si $E \subset C$ és un grupoide en C , aleshores tots els objectes de E estan en C i tots els seus morfismes són isomorfismes en C . Com D conté tots els objectes de C i tots els isomorfismes de C es té que $E \subset D$. ■

Nota 2.31. Recordem que, donada una categoria C i un morfisme $f : A \rightarrow B$ en C , es defineix el *morfisme oposat* associat a f en la categoria oposada C^{op} com el morfisme $B \rightarrow A$ i es denota per $f^{\text{op}} : B \rightarrow A$ (Definició 2.13).

Veiem que epimorfisme i monomorfisme són conceptes duals

Proposició 2.32. *Siga un morfisme f en C . Les següents afirmacions són equivalents.*

1. f és epimorfisme en C .
2. f és monomorfisme en C^{op} .

Demostració. Siguen $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ morfismes en C , aleshores la composició és $g \circ f$ mentre que els seus duals $f^{\text{op}} : B \rightarrow A$ i $g^{\text{op}} : C \rightarrow B$ en C^{op} es componen com $f^{\text{op}} \circ g^{\text{op}}$. A més a més, si dos morfismes $g, h : B \rightarrow C$ en C verifiquen $g = h$ és trivial notar que $g^{\text{op}}, h^{\text{op}} : C \rightarrow B$ verifiquen $g^{\text{op}} = h^{\text{op}}$.

Aleshores, si $f : A \rightarrow B$ és epimorfisme, per a totes $g, h : B \rightarrow C$ morfismes en C tals que $g \circ f = h \circ f$ es té $g = h$ i dualment en C^{op} el morfisme oposat $f^{\text{op}} : B \rightarrow A$ compleix que, per a tots $g^{\text{op}}, h^{\text{op}} : C \rightarrow B$ morfismes en C^{op} tals que $f^{\text{op}} \circ g^{\text{op}} = f^{\text{op}} \circ h^{\text{op}}$, doncs $g^{\text{op}} = h^{\text{op}}$. Per tant, f^{op} és monomorfisme en C^{op} . ■

Anem a donar una propietat sobre els epimorfismes i monomorfismes que il·lustra el *Principi de dualitat*.

Proposició 2.33. *Siguen g i f morfismes componibles en $\mathcal{C}$. Si $g \circ f$ és monomorfisme, aleshores f és monomorfisme. Si $g \circ f$ és epimorfisme, aleshores g és epimorfisme.*

Demostració. Suposem que $g \circ f : A \rightarrow B$ és monomorfisme i siguen $h : X \rightarrow A$ i $k : X \rightarrow A$ tals que $f \circ h = f \circ k$. Per composició amb g tenim $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$ i per l'associativitat de la composició tenim $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$. Com $g \circ f$ és monomorfisme, aleshores $h = k$.

Suposem que $g \circ f : A \rightarrow B$ és epimorfisme i siguen $h : B \rightarrow Y$ i $k : B \rightarrow Y$ tals que $h \circ g = k \circ g$. Per composició amb f tenim $(h \circ g) \circ f = (k \circ g) \circ f$ i per l'associativitat de la composició tenim $h \circ (g \circ f) = k \circ (g \circ f)$. Com $g \circ f$ és epimorfisme, aleshores $h = k$. ■

Només cal veure la demostració de l'anterior resultat per a intuir la idea rere el *Principi de Dualitat* on els morfismes canvien de sentit. Si en un cas composàvem a la dreta, a l'altre composàvem a l'esquerra. De fet, és com una *reflexió*, un espill que imita però inverteix una imatge.

Proposició 2.34. *Siga f un morfisme en $\mathbf{Set}$. Les següents afirmacions són equivalents.*

1. f és epimorfisme.
2. f és suprajectiva.

Per dualitat també serien equivalents les següents afirmacions.

1. f és monomorfisme.
2. f és injectiva.

Demostració. Diferenciem el cas on f és epimorfisme i el cas on f és monomorfisme.

CAS 1. f és monomorfisme si, i només si, f és injectiu.

Siga $f : X \rightarrow Y$ monomorfisme en **Set** i siguen $g_1 : 1 \rightarrow X$ i $g_2 : 1 \rightarrow X$ morfismes en **Set** de domini un conjunt d'un únic element, denotat per $1 = \{*\}$. Els morfismes g_1 i g_2 verifiquen que $g_1(*) = x_1$ i $g_2(*) = x_2$ on $x_1, x_2 \in X$. Com f és monomorfisme, si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, aleshores $g_1 = g_2$ i, en particular, $x_1 = g_1(*) = g_2(*) = x_2$. Per tant, f és injectiva.

Per altra banda, suposem que $f : X \rightarrow Y$ és una funció injectiva. Si $g_1 : Z \rightarrow X$ i $g_2 : Z \rightarrow X$ són morfismes en **Set** tals que $f \circ g_1 = f \circ g_2$, aleshores $f(g_1(z)) = f(g_2(z))$ per a tot $z \in Z$. Com f és injectiu es té que $g_1(z) = g_2(z)$, per a tot $z \in Z$, i, per tant, $g_1 = g_2$.

CAS 2. f és epimorfisme si, i només si, f és suprajectiu.

Siga $f : X \rightarrow Y$ epimorfisme en **Set** i suposem, per reducció a l'absurd, que f no és suprajectiu. Considerem $z_1, z_2 \in Z$ tals que $z_1 \neq z_2$ i definim $g_1 : Y \rightarrow Z$ i $g_2 : Y \rightarrow Z$ morfismes en **Set** tals que $g_1(y) = g_2(y)$, per a tot $y \in f[X]$, i $g_1(y) = z_1 \neq z_2 = g_2(y)$, per a tot $y \notin f[X]$. Notem que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ i, com f és epimorfisme, es té que $g_1 = g_2$. Però, açò és una contradicció perquè $g_1(y) \neq g_2(y)$, per a tot $y \notin f[X]$. En definitiva, f és suprajectiu.

Per altra banda, suposem que f és suprajectiu i demostrem que és epimorfisme per contraposició. Considerem $g : Y \rightarrow Z$ i $h : Y \rightarrow Z$ morfismes en **Set** tals que $g \neq h$. Doncs, existeix $y \in Y$ tal que $g(y) \neq h(y)$. Com f és suprajectiu, existeix $x \in X$ tal que $f(x) = y$ i, per tant, $g(f(x)) \neq h(f(x))$. Així, $g \circ f \neq h \circ f$ i es conclou que f és epimorfisme. ■

Hem vist que en la categoria **Set** un morfisme f és monomorfisme (epimorfisme) si, i sols si, f és injectiva (suprajectiva). Similarment es dona a la categoria **Grp**. No obstant, no ocorre el mateix en totes les categories. Vegem-ho.

Exemple 2.35. A la categoria **Mon** el morfisme inclusió $\text{in}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ és epimorfisme però no sobrejectiu.

Siga M objecte de **Mon**, si $g, h : \mathbb{Z} \rightarrow M$ són homomorfismes de monoides i $g \circ \text{in}_{\mathbb{N}} = h \circ \text{in}_{\mathbb{N}}$ veiem que $g = h$.

Siga $z \in \mathbb{Z}$, comprovem que $g(z) = h(z)$. Tenim dos casos:

1. Si $z \in \mathbb{N}$, ja que $g \circ \text{in}_{\mathbb{N}} = h \circ \text{in}_{\mathbb{N}}$, es conclou que $g(z) = h(z)$.
2. Si $z \notin \mathbb{N}$, aleshores $z = -w$ per a $w \in \mathbb{N}$. Per tant,

$$\begin{aligned}
 g(z) &= g(-w) \\
 &= -g(w) \\
 &= -h(w) && \text{(per 1)} \\
 &= h(-w) \\
 &= h(z).
 \end{aligned}$$

Efectivament, $\text{in}_{\mathbb{N}}$ és epimorfisme però, trivialment, no és suprajectiva. A més a més, per dualitat, aquest contraexemple també serveix per al cas dels monomorfismes.

Definició 2.36 (Functor que preserva propietats). Donades les categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ direm que un functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ *preserva* una propietat P si, per a tot objecte o morfisme en $\mathbf{C}$ que complisca P , la imatge per F de dit objecte o morfisme verifica P .

Notem que un functor, en general, no preserva epimorfismes o monomorfismes. Donem un exemple.

Exemple 2.37. Per l'Exemple 2.35 el functor d'oblit $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ no preserva epimorfismes.

Hi ha un tipus de monomorfisme i un tipus d'epimorfisme que a nivell teòric tenen un gran potencial i es relacionen naturalment amb functors i isomorfismes.

Definició 2.38 (Epimorfisme escindit). Un epimorfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathbf{C}$ s'anomena *separat*, *escindit*, *dividit* o *retracció* si existeix $g : B \rightarrow A$ morfisme en $\mathbf{C}$ tal que $f \circ g = \text{id}_B$.

Per dualitat, podem definir el concepte de *monomorfisme escindit* o *secció* com tot $f : A \rightarrow B$ monomorfisme en $\mathbf{C}$ tal que existeix $g : B \rightarrow A$ morfisme en $\mathbf{C}$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$.

Notem que la intuïció rere la idea d'un morfisme escindit és que compleix la meitat de les condicions que compleix un isomorfisme com si haguera sigut “dividit”.

Nota 2.39. Notem que, per la definició d'epimorfisme escindit i monomorfisme escindit, tot isomorfisme és epimorfisme i monomorfisme.

Malgrat que acabem d'observar que tot isomorfisme ha de ser necessàriament epimorfisme i monomorfisme, el recíproc no és cert. Donem un contraexemple.

Exemple 2.40. Considerem la categoria **Ring** que té per objectes els anells i per morfismes els homomorfismes d'anells. Veiem que la inclusió $\text{in}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ és epimorfisme i monomorfisme, però no isomorfisme.

Primerament, està clar que la inclusió és monomorfisme perquè és injectiva i tot morfisme a **Ring** injectiu és monomorfisme per la Proposició (2.34). També és de veres per l'Exemple (2.29).

Siguen $g, h : \mathbb{Q} \rightarrow R$ morfismes en **Ring** on **R** és un objecte de **Ring**, llavors cal demostrar que si $g \circ \text{in}_{\mathbb{Z}} = h \circ \text{in}_{\mathbb{Z}}$, aleshores $g = h$.

Tenim dos casos:

1. Si $q \in \mathbb{Z}$, ja que $g \circ \text{in}_{\mathbb{Z}} = h \circ \text{in}_{\mathbb{Z}}$, es conclou que $g(q) = h(q)$.
2. Si $q \notin \mathbb{Z}$ aleshores $q = \frac{a}{b}$ on $a, b \in \mathbb{Z}$ per a $b \neq 0$. Doncs,

$$\begin{aligned}
 g(q) &= g\left(\frac{a}{b}\right) \\
 &= g(a \cdot b^{-1}) \\
 &= g(a) \cdot g(b)^{-1} && \text{(homomorfismes d'anells)} \\
 &= h(a) \cdot h(b^{-1}) && \text{(per 1)} \\
 &= h(a \cdot b^{-1}) && \text{(homomorfisme d'anells)} \\
 &= h(q).
 \end{aligned}$$

En conclusió, $\text{in}_{\mathbb{Z}}$ és epimorfisme. Per tant, $\text{in}_{\mathbb{Z}}$ és monomorfisme i epimorfisme però, clarament, no és isomorfisme.

Ja que hem presentat el concepte d'un functor que preserva una propietat

sobre els objectes o morfismes on actua, ens preguntem quan un functor preserva isomorfismes.

Proposició 2.41. *Tot functor preserva isomorfismes.*

Demostració. Siga $F : C \rightarrow D$ functor sobre categories i $f : A \rightarrow B$ isomorfisme en C la inversa del qual és $g : B \rightarrow A$. Com que

$$F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)},$$

tenim que $F(g)$ és la inversa per la dreta de $F(f)$. Anàlogament es té que $F(g)$ és la inversa per l'esquerra de $F(f)$. ■

Tal i com passa amb els isomorfismes, i com era d'esperar per la característica dels monomorfismes escindits de “semi-isomorfismes”, els functors preserven monomorfismes escindits.

Proposició 2.42. *Tot functor preserva monomorfismes i epimorfismes escindits.*

Demostració. La demostració la farem només per al cas dels monomorfismes escindits doncs el cas dels epimorfismes escindides és anàleg per dualitat. Efectivament, si $F : C \rightarrow D$ és functor sobre categories i $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow A$ són monomorfismes escindits componibles en C , aleshores

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

Per altra banda, com f i g són monomorfismes escindits en C es té que

$$F(f \circ g) = F(\text{id}_B) = \text{id}_{F(B)}.$$

Doncs, $F(f)$ és una retracció.

Anàlogament, per un raonament similar, $F(g) \circ F(f) = \text{id}_{F(A)}$. ■

Existeix també una propietat dels isomorfismes que és interessant perquè ens dona una caracterització de l'isomorfia mitjançant la composició de morfismes.

Proposició 2.43. *Siguen $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ morfismes en $\mathcal{C}$. Si dos dels morfismes entre f, g i $g \circ f$ són isomorfismes, aleshores el restant també ho és.*

Demostració. Suposem que f i g són isomorfismes, aleshores existeix un únic morfisme $f^{-1} : B \rightarrow A$ en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ i $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ i, respectivament, existeix un únic morfisme $g^{-1} : C \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$ tal que $g \circ g^{-1} = \text{id}_C$ i $g^{-1} \circ g = \text{id}_B$.

Veiem que $g \circ f : A \rightarrow C$ és isomorfisme i per a fer-ho prenem com a candidat a inversa de $g \circ f$ el morfisme $g^{-1} \circ f^{-1} : C \rightarrow A$.

Efectivament,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_C.$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_A.$$

Suposem ara que el morfisme f i la composició $g \circ f$ són isomorfismes i veiem que g ho és.

Si f i $g \circ f$ són isomorfisme, aleshores existeix un únic morfisme $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ i $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ i, respectivament, existeix un únic morfisme $k : C \rightarrow A$ tal que $(g \circ f) \circ k = \text{id}_C$ i $k \circ (g \circ f) = \text{id}_A$.

Prenem com a candidat a inversa de g el morfisme $g^{-1} = f \circ k$. Doncs,

$$g \circ g^{-1} = g \circ f \circ k = (g \circ f) \circ k = \text{id}_C.$$

$$g^{-1} \circ g = f \circ k \circ g = f \circ k \circ g \circ (f \circ f^{-1}) = f \circ (k \circ g \circ f) \circ f^{-1} = f \circ \text{id}_A \circ f^{-1} = \text{id}_B.$$

El cas on g i $g \circ f$ són isomorfisme és anàleg però prenent $f^{-1} = k \circ g$. ■

A més a més, els conceptes d'isomorfisme, monomorfisme, monomorfisme escindit, epimorfisme i epimorfisme escindit estan relacionats. De fet, donen peu a la suficiència d'un isomorfisme.

Proposició 2.44. *Si f és epimorfisme i monomorfisme escindit en $\mathcal{C}$, aleshores f és isomorfisme. Anàlogament, si f és monomorfisme i epimorfisme escindit en $\mathcal{C}$, aleshores f és isomorfisme.*

Demostració. Notem que per dualitat només caldrà demostrar un dels casos. Demostrem que si f és epimorfisme i monomorfisme escindit en $\mathbf{C}$ aleshores f és isomorfisme.

Com $f : A \rightarrow B$ és monomorfisme escindit tenim que existeix $g : B \rightarrow A$ morfisme en $\mathbf{C}$ tal que $g \circ f = \text{id}_A$. Com f és epimorfisme tenim que, per a tots $h : B \rightarrow Y$ i $k : B \rightarrow Y$ morfismes en $\mathbf{C}$ tals que $h \circ f = k \circ f$, es verifica que $h = k$.

Aleshores, $g \circ f = \text{id}_A$ si, i sols si, $f \circ g \circ f = f$ si i, només si, $(f \circ g) \circ f = \text{id}_B \circ f$. Finalment, com f és epimorfisme, tenim que $f \circ g = \text{id}_B$ i, doncs, f és isomorfisme. ■

No obstant, el recíproc no és cert. Veiem un contraexemple.

Exemple 2.45. Considerem en la categoria **Set** els següents morfismes:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} & g : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases} & n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

Doncs, $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ però f no és injectiva.

Definició 2.46 (Functor que reflexa una propietat). Direm que un functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ sobre categories *reflexa* una propietat P si, per a qualsevol imatge per F d'un objecte o morfisme en $\mathbf{C}$ que complisca P , es té que dit objecte o morfisme verifica P .

Nota 2.47. Observem que la Definició 2.36 i l'anterior definició són duals.

Malgrat que els functors preserven isomorfismes no necessàriament els reflecteixen. Ho il·lustrem amb un contraexemple.

Exemple 2.48. Siga $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{1}$ on $\mathbf{1}$ és la categoria unitat i siga $f : A \rightarrow B$ morfisme no isomorfisme en $\mathbf{C}$. Efectivament, $F(f) = \text{id}_\star$ i com tot morfisme identitat és isomorfisme, F no reflexa, necessàriament, els isomorfismes.

Continuem classificant els functors, però aquesta volta respecte a les característiques de l'assignació sobre morfismes del functor.

Definició 2.49 (Functors plens i fidels). Direm que un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sobre categories és **ple** si, per a tot parell d'objectes A i B en $\mathcal{C}$, l'assignació $F_1 : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B))$ és suprajectiva. Direm que un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sobre categories és **fidel** si, per a tot parell d'objectes A i B en $\mathcal{C}$, l'assignació $F_1 : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B))$ és injectiva.

De fet, ser fidel és una característica suficient del functor per tal que reflexe epimorfismes i monomorfismes.

Proposició 2.50. *Un functor fidel reflexa epimorfismes i monomorfismes.*

Demostració. Com sempre, bastarà demostrar el cas dels epimorfismes per a demostrar el dels monomorfismes i viceversa. Assumim que el functor $F : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B))$ és fidel, és a dir, injectiu. Ara considerem $f : A \rightarrow B$ morfisme en $\mathcal{C}$ tal que $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ és monomorfisme en $\mathcal{D}$ i $h, k : X \rightarrow A$ morfismes en $\mathcal{C}$ tals que $f \circ h = f \circ k$. Demostrem que $h = k$. De fet, considerem $F(f) \circ F(h) = F(f) \circ F(k)$. Per l'axioma de composició dels functors i com $F(f)$ és monomorfisme, aleshores $F(h) = F(k)$. Per la injectivitat de F deduïm $h = k$. ■

Amb la següent proposició introduïm la propietat d'alguns functors de *crear* isomorfismes.

Proposició 2.51. *Un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ple i fidel reflexa i crea isomorfismes. És a dir,*

1. *Si f és morfisme en $\mathcal{C}$ tal que $F(f)$ és isomorfisme en $\mathcal{D}$, aleshores f és isomorfisme.*
2. *Si A, B són objectes en $\mathcal{C}$ tal que $F(A) \cong F(B)$ en $\mathcal{D}$, aleshores $A \cong B$ en $\mathcal{C}$.*

Pel Lema (2.41) es tenen els oposats d'aquestes proposicions.

Demostració. Siga $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ple i fidel. Demostrem que F reflexa i crea isomorfismes.

1. Suposem que f és morfisme en $\mathbf{C}$ tal que $F(f)$ és isomorfisme en $\mathbf{D}$. Aleshores, com F és ple i fidel, per a tot $f : A \rightarrow B$, existeix un únic morfisme $g : B \rightarrow A$ tal que $F(g) = (F(f))^{-1}$. Així,

$$\begin{aligned} F(g \circ f) &= (F(f))^{-1} \circ F(f) \\ &= \text{id}_{F(A)} \\ &= F(\text{id}_A). \end{aligned}$$

Per tant, com F és fidel,

$$g \circ f = \text{id}_A.$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned} F(f \circ g) &= F(f) \circ (F(f))^{-1} \\ &= \text{id}_{F(B)} \\ &= F(\text{id}_B). \end{aligned}$$

Consegüentment, com F és fidel

$$f \circ g = \text{id}_B.$$

En definitiva, f és isomorfisme en $\mathbf{C}$.

2. Com F és ple, existeix $f : A \rightarrow B$ morfisme en $\mathbf{C}$ tal que $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ isomorfisme en $\mathbf{D}$. Per l'apartat anterior, $f : A \rightarrow B$ és isomorfisme i així $A \cong B$ en $\mathbf{C}$.

Açò demostra la Proposició (2.51). ■

A algunes categories existeixen uns tipus d'objectes especials. El nostre següent objectiu serà definir-los i demostrar que, d'existir, són únics trets d'isomorfisme.

Definició 2.52 (Objectes terminals i inicials). Siga una categoria $\mathbf{C}$ i X un objecte en $\mathbf{C}$.

1. Direm que X és **terminal** si, per a tot objecte Y en $\mathbf{C}$, existeix un únic f morfisme en $\mathbf{C}$ de la forma $f : Y \rightarrow X$.
2. Direm que X és **inicial** si, per a tot objecte Y en $\mathbf{C}$, existeix un únic morfisme f en $\mathbf{C}$ de la forma $f : X \rightarrow Y$.

Nota 2.53. Notem que els conceptes d'objecte terminal i d'objecte inicial són duals. És a dir, si X és objecte terminal en $\mathbf{C}$, aleshores X és objecte inicial en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ i viceversa.

Exposem alguns exemples elementals d'objectes terminals i inicials.

Exemple 2.54. (Alguns exemples trivials)

1. El conjunt 0 en **Set** és inicial. Per a tot conjunt A l'aplicació buida $\emptyset : 0 \rightarrow A$ és l'única aplicació amb domini 0 .
2. El conjunt 1 en **Set** és terminal. Per a tot conjunt A l'aplicació constant a 0 , $K_0 : A \rightarrow 1$, és l'única aplicació amb codomini 1 .

En efecte, la característica de ser un functor ple i fidel permet preservar, crear i reflexar moltes altres propietats. Per exemple, examinem com es relacionen amb els objectes inicials i terminals.

Proposició 2.55. *Un functor ple i fidel reflexa objectes terminals i inicials.*

Demostració. Considerem $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ functor ple i fidel i siga Z objecte en $\mathbf{C}$ tal que $F(Z)$ és terminal en $\mathbf{D}$. Volem veure que Z és terminal en $\mathbf{C}$.

Siga A objecte en $\mathbf{C}$, aleshores $F(A)$ és objecte en $\mathbf{D}$ i, com $F(Z)$ és terminal, existeix un únic $f_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(Z)$ morfisme en $\mathbf{D}$.

A més a més, ja que $f_{F(A)}$ és morfisme en $\mathbf{D}(F(A), F(Z))$ i F és ple, existeix un morfisme f_A en $\mathbf{C}(A, Z)$ de forma que $F(f_A) = f_{F(A)}$. Així doncs demostrem l'existència de $f_A : A \rightarrow Z$ en $\mathbf{C}$.

Per a la unicitat considerem $g : A \rightarrow Z$ morfisme en $\mathbf{C}$ i comprovem que $g = f_A$. Aplicant el functor F sobre g obtenim el morfisme $F(g) : F(A) \rightarrow F(Z)$ en $\mathbf{D}$ però, com $F(Z)$ és terminal, $F(g) = f_{F(A)}$. Finalment, per la fidelitat de F deduïm que $g = f_A$. ■

Per altra banda, vistes les definicions d'objecte inicial i d'objecte terminal, tota bona intuïció hauria d'assenyalar que seria més que raonable que dos objectes terminals o dos objectes inicials presentaren una relació molt forta. En efecte, és així i es complix que un objecte terminal és isomorf a qualsevol altre objecte terminal en la mateixa categoria. Respectivament, es dona el mateix per a dos objectes inicials.

Proposició 2.56. *Els objectes terminals (inicials) d'una categoria són únics tret d'isomorfisme.*

Demostració. Considerem X, X' objectes terminals a la categoria $\mathbf{C}$. Sabem que existeix un únic $f : X \rightarrow X'$ morfisme en $\mathbf{C}$ i, respectivament, un únic morfisme $g : X' \rightarrow X$ en $\mathbf{C}$. Per composició, $g \circ f : X \rightarrow X$ però $\text{id}_X : X \rightarrow X$ també és un morfisme en $\mathbf{C}$ i, com X és un objecte terminal, es té que $g \circ f = \text{id}_X$.

Per altra banda, $f \circ g : X' \rightarrow X'$ però $\text{id}_{X'} : X' \rightarrow X'$ i, com X' és un objecte terminal, es té que $f \circ g = \text{id}_{X'}$. Ídem per als objectes inicials. ■

Ens interessa ara analitzar el vincle entre les relacions de congruència i els isomorfismes.

Proposició 2.57. *Siga $\mathbf{C}$ una categoria i siga una relació de congruència $\sim_{X,Y}$ i $f : X \rightarrow Y$ $g : X \rightarrow Y$ isomorfismes $\sim_{X,Y}$ -congruents en $\mathbf{C}$, és a dir, $f \sim_{X,Y} g$, aleshores $f^{-1} \sim_{Y,X} g^{-1}$.*

Demostració. Recordem que $f \sim_{X,Y} g$ si, i sols si, per a dos $h : C \rightarrow X$ i $h' : Y \rightarrow D$, es té que $h' \circ f \circ h \sim_{C,D} h' \circ g \circ h$.

Prenint $h = f^{-1}$ i $h' = g^{-1}$ es dedueix que

$$g^{-1} \circ f \circ f^{-1} \sim_{Y,X} g^{-1} \circ g \circ f^{-1} \text{ si, i sols si, } g^{-1} \sim_{Y,X} f^{-1}.$$

Açò demostra la Proposició (2.57). ■

3 Transformacions naturals i Lema de Yoneda

Les matemàtiques poden ser
definides com el tema del qual no
sabem mai el que diem, ni si el
que diem és vertader.

*Recent Work on the Principles of
Mathematics
Bertrand Russell*

3.1 Transformacions i isomorfismes naturals

Anteriorment vam definir les relacions entre els objectes de les categories com a morfismes i, després, havíem definit les relacions entre categories, les quals anomenàrem functors. Doncs, podem donar un pas més enllà i definir relacions entre functors. La relació entre dos functors l'anomenarem *transformació natural* i, a esta secció, definirem formalment aquest concepte donant diversos exemples de transformacions naturals. A més a més, comentarem com es componen les transformacions naturals i estudiarem un cas particular de transformació natural de gran importància per a la Teoria de Categories, a saber, l'*isomorfisme natural*.

Definició 3.1 (Transformació natural). Donats dos functors F i G de la categoria $\mathbf{C}$ a la categoria $\mathbf{D}$ es defineix una **transformació natural de F en G** , denotada per $\alpha : F \Rightarrow G$, com una *collecció* de morfismes en $\mathbf{D}$ indexats, per cada objecte A en $\mathbf{C}$, denotats per α^A , tals que $\alpha^A : F(A) \rightarrow G(A)$. És a dir, $\alpha = (\alpha^A)_{A \in \mathbf{C}_0}$. A més, es verifica que el diagrama de la Figura (22), anomenat diagrama de naturalitat, *commuta*.

Commutar significa que es pot recórrer el diagrama de forma equivalent tant per la dreta com per l'esquerra. És a dir, per a tots objectes A i B en $\mathbf{C}$ i tot morfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathbf{C}$, es verifica la següent igualtat.

$$G(f) \circ \alpha^A = \alpha^B \circ F(f).$$

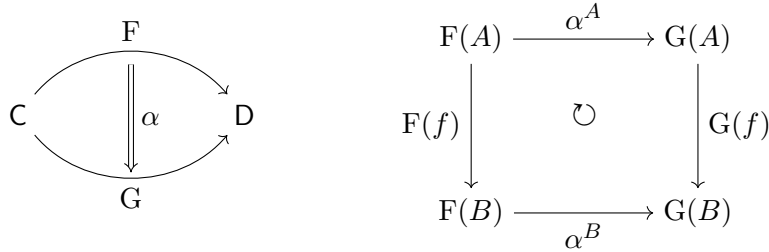


Figura 22: Transformació natural α i el seu diagrama de naturalitat.

Denotarem el fet que un diagram commuta per una fletxa circular al centre del diagrama i recorreguda en sentit antihorari.

La idea que motiva el concepte de transformació natural és passar des de la imatge d'un objecte sobre un functor a la imatge del mateix objecte sobre altre functor, tal que dita transformació siga compatible amb la composició per les imatges dels morfismes.

Aclarim la idea de transformació natural amb un exemple obvi per si mateix que es basa en un dels morfismes més importants, el morfisme identitat.

Exemple 3.2. Un exemple de transformació natural és la transformació natural identitat associada a un functor F de C en D , denotada $\text{id}_F = (\text{id}_F^A)_{A \in C_0}$, on $\text{id}_F^A := \text{id}_{F(A)} : F(A) \rightarrow F(A)$ són morfismes en la categoria D . A la Figura (23) es detalla aquesta transformació natural amb el seu diagrama de naturalitat.

Prosseguim amb els exemples interessants de transformacions naturals.

Exemple 3.3 (Exemples de transformacions naturals). Tractarem exemples de transformacions naturals sobre functors entre les categories de monoides, functors entre categories preordre, functors constants, functors entre categories discretes i indiscretes, functors entre categories grupoides i alguns exemples particulars.

1. Siguen M i N dos categories monoides (Figura 2) tals que $\star$ i $*$ són els únics objectes de M i N , respectivament. Aleshores, notem que

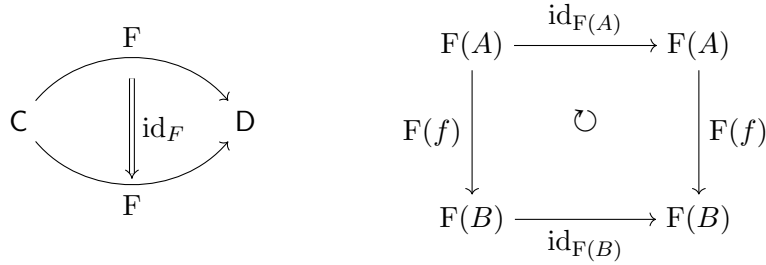


Figura 23: Transformació natural identitat i el seu diagrama de naturalitat.

tot functor de $\mathbf{M}$ en $\mathbf{N}$, és a dir, $F : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$, és un homomorfisme de monoides per definició de functor. En efecte, F preserva els elements neutres dels monoides per l'Axioma de la identitat i, per altra banda, preserva les operacions dels monoides per l'Axioma de la composició.

A més, donats dos functors $F, G : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$, una transformació natural $\mu : F \Rightarrow G$ ve donada per un morfisme n de $\mathbf{N}$ tal que, per a tot morfisme x de $\mathbf{M}$, es té que

$$n \cdot F(x) = G(x) \cdot n.$$

Efectivament, primer notem que si $\star$ és l'objecte de $\mathbf{M}$ i $*$ l'objecte de $\mathbf{N}$ es verifica que

$$F(\star) = * = G(\star).$$

Per tant, donat $x : \star \rightarrow \star$ morfisme en $\mathbf{M}$, tota transformació natural α de F en G de components $n := n^\star : * \rightarrow *$ ha de verificar que el quadrat de naturalitat de la Figura (24) commuta.

És a dir, es compleix que

$$n \circ F(x) = G(x) \circ n.$$

Per la forma de $n : * \rightarrow *$ sabem que n és morfisme de $\mathbf{N}$ i, per tant, element del monoide $\mathbf{N}$. Per altra banda, com la composició entre morfismes en categories monoide equival al producte de dits morfismes

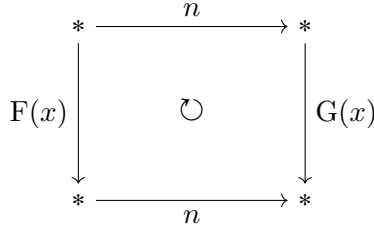


Figura 24: Diagrama de naturalitat de α (Exemple 3.3.1).

vistos com elements de monoides, tenim que⁵

$$n \cdot F(x) = G(x) \cdot n. \quad (1)$$

2. Si P i Q són categories preordre, aleshores tot functor $F : P \rightarrow Q$ és una funció monòtona. Efectivament, si $a \leq b$ ($a \rightarrow b$) són objectes en P , aleshores $F(a) \leq F(b)$ ($F(a) \rightarrow F(b)$). Endemés, si F i G són functors de P en Q tals que $F(x) \leq G(x)$, per a tot objecte x de P , llavors existirà una única transformació natural $\alpha : F \Rightarrow G$.

Certament, si a i b són objectes de P tal que $a \leq b$, anàlogament $a \rightarrow b$, aleshores $F(a) \rightarrow F(b)$ i $G(a) \rightarrow G(b)$. Si α és una transformació natural entre F i G i $x \rightarrow y$, equivalentment $x \leq y$, és un morfisme de P tenim que el diagrama de la Figura (25) commuta.

I, per tant, es verifica que

$$G(\downarrow) \circ \alpha^x = \alpha^y \circ F(\downarrow).$$

⁵Si en compte de treballar amb monoides férem l'exemple anterior amb grups arribaríem a la mateixa conclusió, per a un element n del grup $\mathbf{N}$. No obstant, per la mateixa definició de grup, existeix un invers de n . En definitiva, l'expressió de l'Equació (1) equivaldria a

$$F(x) = n^{-1} \cdot G(x) \cdot n.$$

que és, ni més ni menys, que el conjugat del grup $\mathbf{N}$.

$$\begin{array}{ccc}
F(x) & \xrightarrow{\alpha^x} & G(x) \\
F(\downarrow) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(\downarrow) \\
F(y) & \xrightarrow{\alpha^y} & G(y)
\end{array}$$

Figura 25: Diagrama de naturalitat de α (Exemple 3.3.2).

o equivalentment

$$\begin{aligned}
F(x) &\leq G(x) \leq G(y) \\
F(x) &\leq F(y) \leq G(y).
\end{aligned}$$

Açò és cert per a F i G functors monòtons si, i només si, $F(x) \leq G(x)$, per a tot x de P . Altrament, la transformació natural α és única per la forma de la relació $\leq$.

3. Considerem les categories C i D i un objecte D de D . Aleshores, existeix un functor constant entre C i D , denotat $\Delta_D : C \rightarrow D$, que assigna a tot objecte de C l'objecte D i assigna a tot morfisme en C el morfisme identitat de D , és a dir id_D .⁶

Per tant, si D' és altre objecte en D , tot morfisme $f : D \rightarrow D'$ en D genera una transformació natural entre els functors Δ_D i $\Delta_{D'}$. Aquesta transformació natural la denotem per $\Delta_f : \Delta_D \Rightarrow \Delta_{D'}$ i les seues components són $(\Delta_f)^A = f$, per a tot A objecte de C .

Per comprovar que Δ_f és transformació natural considerem $g : A \rightarrow B$ morfisme en C . Procedim a contrastar que el quadrat de naturalitat de la Figura (26) commuta.

⁶És immediat comprovar que Δ_D és un functor doncs, si id_A és el morfisme identitat d'un objecte A en C , $\Delta_D(\text{id}_A) = \text{id}_D = \text{id}_{\Delta_D(A)}$. Per altre costat, si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ són morfismes componibles en C , $\Delta_D(g \circ f) = \text{id}_D = \text{id}_D \circ \text{id}_D = \Delta_D(g) \circ \Delta_D(f)$.

$$\begin{array}{ccc}
\Delta_D(A) & \xrightarrow{f} & \Delta_{D'}(A) \\
\Delta_D(g) \downarrow & & \downarrow \Delta_{D'}(g) \\
\Delta_D(B) & \xrightarrow{f} & \Delta_{D'}(B)
\end{array}$$

Figura 26: Diagrama de naturalitat de Δ_f (Exemple 3.3.3).

Tenim que

$$\begin{aligned}
\Delta_{D'}(g) \circ f &= \text{id}_{D'} \circ f \\
&= f \\
&= f \circ \text{id}_D \\
&= f \circ \Delta_D(g).
\end{aligned}$$

Acabem de demostrar que Δ_f és transformació natural.

4. Rescatem un exemple paregut als functors de la Figura 44 i la transformació natural de la Figura 45, que veurem a la Secció (3.2). però identificant el functor F amb el functor identitat (Nota 2.20).

En particular, si A i B són objectes en $\mathbf{Set}$, és a dir, conjunts, existeixen functors $1_E(A) : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ i $1_E(B) : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$. Si X és un objecte en $\mathbf{Set}$, aleshores $1_E(A)$ i $1_E(B)$ assignen, respectivament, l'objecte $X \times A$ i $X \times B$ en $\mathbf{Set}$. Per altra banda, si $g : X \rightarrow Y$ és un morfisme en $\mathbf{Set}$, aleshores $1_E(A)$ i $1_E(A)$ assignen, respectivament, els morfismes (g, id_A) i (g, id_B) en $\mathbf{Set}$. A la Figura (27) mostrem un esquema dels functors $1_E(A)$ i $1_E(B)$.

Per tant, per a tot morfisme $f : A \rightarrow B$ en $\mathbf{Set}$, tenim una transformació natural entre $1_E(A)$ i $1_E(B)$, denotada $1_f : 1_E(A) \Rightarrow 1_E(B)$, les components de la qual són $1_f^X = (\text{id}_X, f)$, per a tot X objecte de $\mathbf{Set}$. Concretament, si $g : X \rightarrow Y$ és morfisme en $\mathbf{Set}$, el quadrat de

$$\begin{array}{ccc}
1_E(-): \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
\begin{array}{c} X \\ \downarrow g \\ Y \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} X \times - \\ \downarrow (g, \text{id}_-) \\ Y \times - \end{array}
\end{array}$$

Figura 27: El functor $1_E(-)$ (Exemple 3.3.4).

$$\begin{array}{ccc}
X \times A & \xrightarrow{(\text{id}_X, f)} & X \times B \\
\downarrow (g, \text{id}_B) & & \downarrow (g, \text{id}_A) \\
Y \times A & \xrightarrow{(\text{id}_Y, f)} & Y \times B
\end{array}$$

Figura 28: Diagrama de naturalitat de 1_f (Exemple 3.3.4).

naturalitat de la Figura (28) commuta. Verifiquem que el diagrama de naturalitat de 1_f commuta per a tot X objecte en $\mathbf{Set}$.

$$\begin{aligned}
(g, \text{id}_A) \circ (\text{id}_X, f) &= (g \circ \text{id}_X, \text{id}_A \circ f) \\
&= (g, f) \\
&= (\text{id}_Y \circ g, f \circ \text{id}_B) \\
&= (\text{id}_Y, f) \circ (g, \text{id}_B).
\end{aligned}$$

Acabem de demostrar que 1_f és transformació natural.

5. Siga X un objecte de $\mathbf{Set}$. Primer de tot considerem la categoria $\mathbf{F}(X)$ que té per objectes els elements de X i per morfismes només els morfismes identitat. Per altra banda, considerem la categoria $\mathbf{G}(X)$ amb els mateixos objectes que $\mathbf{F}(X)$ però per morfismes els únics morfismes

$\rightarrow_{x,y}: x \rightarrow y$ per als parells (x, y) d'elements de X .⁷

Comprovem que, efectivament, $F(X)$ i $G(X)$ són categories.

- (a) ($F(X)$ és categoria) Per definició, tot objecte de $F(X)$ té un morfisme identitat associat. L'axioma de composició entre morfismes és trivial perquè els únics morfismes són els morfismes identitat.
- (b) ($G(X)$ és categoria) L'axioma d'identitat ve garantit si considerem l'únic morfisme de x en x objecte de $G(X)$, com $\rightarrow_{x,x} = \text{id}_x$. Respecte a la composició, si $\rightarrow_{x,y}$ i $\rightarrow_{y,z}$ són dos morfismes en $G(X)$, aleshores $\rightarrow_{y,z} \circ \rightarrow_{x,y} = \rightarrow_{x,z}$, per unicitat.

Podem definir functors F i G de **Set** en **Cat** i descriure la transformació natural $\mu : F \Rightarrow G$ definida per a cada component amb la funció identitat sobre objectes.

Definim F i G tals que, donat un objecte X en **Set**, F i G li assignem la categoria $F(X)$ i $G(X)$, respectivament. A més a més, si $f : X \rightarrow Y$ és un morfisme en **Set**, aleshores F li assigna el functor $F(f)$ i G li assigna el functor $G(f)$. A la Figura (29) mostrem els functors F i G .

Per altra banda, donat $f : X \rightarrow Y$ morfisme en **Set**, definim els functors $F(f)$ i $G(f)$. Primerament, definim el functor $F(f)$ tal que, si x és objecte de $F(X)$, aleshores $F(f)$ li assigna l'avaluació de x per f , és a dir, $f(x)$, que és objecte en $F(Y)$. Si $\text{id}_x : x \rightarrow x$ és morfisme en $F(X)$ aleshores, $F(f)$ li assigna el morfisme $\text{id}_{f(x)}$ en $F(Y)$. Seguidament, definim el functor $G(f)$ tal que, si x és objecte en $G(X)$, aleshores $G(f)$ li assigna $f(x)$ que és objecte en $G(Y)$. Així mateix, si $\rightarrow_{x,y}$ és morfisme en $G(X)$, $G(f)$ li assigna el morfisme $\rightarrow_{f(x),f(y)}$ en $G(Y)$. Representem a la Figura (30) els functors $F(f)$ i $G(f)$.

Necessitem verificar primer que $F, F(f), G$ i $G(f)$ són functors. Notem que basta comprovar que $F(f)$ i $G(f)$ ho són.

- (a) ($F(f)$ és functor)

⁷Una categoria de la forma $F(X)$ rep el nom de *discreta* i una categoria de la forma de $G(X)$ rep el nom de *indiscreta*.

$$\begin{array}{ccc}
F: \text{Set} & \longrightarrow & \text{Cat} \\
\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} F(X) \\ \downarrow F(f) \\ F(Y) \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
G: \text{Set} & \longrightarrow & \text{Cat} \\
\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} G(X) \\ \downarrow G(f) \\ G(Y) \end{array}
\end{array}$$

Figura 29: El functor F i el G (Exemple 3.3.5).

$$\begin{array}{ccccc}
F(f): F(X) & \longrightarrow & F(Y) & G(f): G(X) & \longrightarrow & G(Y) \\
\begin{array}{c} x \\ \downarrow \text{id}_x \\ x \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} f(x) \\ \downarrow \text{id}_{f(x)} \\ f(x) \end{array} & \xrightarrow{x,y} & \begin{array}{c} x \\ \downarrow y \\ y \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} f(x) \\ \downarrow \rightarrow f(x), f(y) \\ f(y) \end{array}
\end{array}$$

Figura 30: El functor $F(f)$ i el functor $G(f)$ (Exemple 3.3.5).

1. Axioma de la identitat.

Per definició, com id_x és l'únic morfisme possible, de forma trivial es compleix l'axioma de la identitat. Si x és objecte de $F(X)$, es té que

$$\begin{aligned}
F(f)(\text{id}_x) &= \text{id}_{f(x)} \\
&= \text{id}_{F(f)(x)}.
\end{aligned}$$

Açò demostra que $F(f)$ verifica l'Axioma de la identitat.

2. Axioma de la composició.

Notem que també és trivial perquè l'únic morfisme componible és id_x , per a x objecte de $F(X)$.

(b) ($G(f)$ és functor)

1. Axioma de la identitat.

Considerem x objecte en $G(X)$ i el morfisme identitat id_x , que

coincideix amb $\rightarrow_{x,x}$ en $G(X)$.

$$\begin{aligned} G(\text{id}_x) &= G(\rightarrow_{x,x}) \\ &= \rightarrow_{f(x),f(x)} \\ &= \text{id}_{f(x)} \\ &= \text{id}_{G(X)}. \end{aligned}$$

Açò demostra que $G(f)$ verifica l'Axioma de la identitat.

2. Axioma de la composició.

Siguen x, y, z objectes en $G(X)$ i $\rightarrow_{x,y}, \rightarrow_{y,z}$ morfismes en $G(X)$ componibles.

$$\begin{aligned} G(\rightarrow_{y,z} \circ \rightarrow_{x,y}) &= G(\rightarrow_{x,z}) \\ &= \rightarrow_{f(x),f(z)} \\ &= \rightarrow_{f(y),f(z)} \circ \rightarrow_{f(x),f(y)} \\ &= G(\rightarrow_{y,z}) \circ G(\rightarrow_{x,y}). \end{aligned}$$

Açò demostra que $G(f)$ verifica l'Axioma de la composició.

La transformació natural $\mu : F \Rightarrow G$, denotada $\mu = (\mu^X)_{X \in \text{Set}_0}$, seria la família de functors ⁸ tals que, si X és objecte en **Set**, aleshores $\mu^X : F(X) \rightarrow G(X)$ no modifica els objectes de $F(X)$ i assigna al morfisme id_x en $F(X)$ el morfisme $\rightarrow_{x,x}$ en $G(X)$, que resulta ser idèntic a id_x . La transformació natural μ la il·lustrem a la Figura (31). Comprovem que, de fet, μ és transformació natural verificant que el seu diagrama de naturalitat (Figura 32) commuta. Considerem així el morfisme $f : X \rightarrow Y$ en **Set** i veiem que els functors $G(f) \circ \mu^X$ i $\mu^Y \circ F(f)$ coincideixen, demostrant que actuen igual sobre els mateixos objectes i morfismes. En efecte, considerem x i id_x , objecte i morfisme, respectivament, en $F(X)$.

⁸És trivial el fet que μ^X siga un functor, per a X objecte en **Set**, per definició de μ^X .

$$\begin{array}{ccc}
\mu^X: F(X) & \longrightarrow & G(X) \\
\text{id}_x \downarrow & \longmapsto & \downarrow \rightarrow_{x,x} \text{id}_x \\
x & & x
\end{array}$$

Figura 31: La transformació natural μ i les seues components μ^X (Exemple 3.3.5).

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{\mu^X} & G(X) \\
F(f) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(f) \\
F(Y) & \xrightarrow{\mu^Y} & G(Y)
\end{array}$$

Figura 32: Diagrama de naturalitat de μ (Exemple 3.3.5).

$$\mu_X: X \longrightarrow \text{cod}(\mu_X)$$

Figura 33: Component de la transformació natural μ (Exemple 3.3.6).

Primerament, veiem que $G(f) \circ \mu^X(x) = \mu^Y \circ F(f)(x)$.

$$\begin{aligned} G(f) \circ \mu^X(x) &= G(f)(x) \\ &= f(x) \\ &= \mu^Y(f(x)) \\ &= \mu^Y \circ F(f)(x). \end{aligned}$$

A continuació, veiem que $G(f) \circ \mu^X(\text{id}_x) = \mu^Y \circ F(f)(\text{id}_x)$.

$$\begin{aligned} G(f) \circ \mu^X(\text{id}_x) &= G(f)(\text{id}_{f(x)}) \\ &= \rightarrow_{f(x), f(x)} \\ &= \mu^Y(\rightarrow_{x, x}) \\ &= \mu^Y \circ F(f)(\text{id}_x). \end{aligned}$$

Doncs, com actuen d'igual forma sobre els mateixos objectes i morfismes

$$G(f) \circ \mu^X = \mu^Y \circ F(f).$$

En conclusió, el diagrama commuta i, per tant, μ és transformació natural entre F i G functors.

6. Recordem que una categoria $\mathbf{C}$ s'anomena *grupoid* si tot morfisme en $\mathbf{C}$ és un isomorfisme (Definició 3b). Siga $\mathbf{C}$ grupoid suposem que, per a cada objecte X en $\mathbf{C}$, tenim un morfisme μ_X en $\mathbf{C}$ amb domini X . Així, donat un functor F adequat, definirem la transformació natural $\mu: \text{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow F$, denotada $\mu = (\mu_X)_{X \in \mathbf{C}_0}$, entre els functors identitat en $\mathbf{C}$ i F , com a la Figura (33). Demostrem que existeix un functor $G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ que actua sobre cada objecte X en $\mathbf{C}$ com $G(X) = \text{cod}(\mu_X)$. Bastarà definir el functor G com un functor que assigna a cada X objecte en

$$\begin{array}{ccc}
F: \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\
\\
\begin{array}{ccc}
X & & \text{cod}(\mu_X) \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow \mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \\
Y & & \text{cod}(\mu_Y)
\end{array}
\end{array}$$

Figura 34: Functor F (Exemple 3.3.6).

$\mathcal{C}$ el codomini de μ_X , és a dir, $\text{cod}(\mu_X)$ i a cada morfisme $f : X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ la composició de morfismes $\mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1}$. Mostrem a la Figura (34) el functor F i notem que està ben definit perquè el morfisme μ_X , per a X objecte en $\mathcal{C}$, és isomorfisme i la composició d'isomorfismes és isomorfisme. Veiem primer que tal i com hem definit F és, de fet, un functor.

1. Axioma de la identitat.

Siga X objecte en $\mathcal{C}$ i id_X el morfisme identitat associat a X . Doncs,

$$\begin{aligned}
F(\text{id}_X) &= \mu_X \circ \text{id}_X \circ \mu_X^{-1} \\
&= \text{id}_{\text{cod}(\mu_X)} \\
&= \text{id}_{F(X)}.
\end{aligned}$$

2. Axioma de la composició.

Siguen $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ morfismes componibles en $\mathcal{C}$. Així,

$$\begin{aligned}
F(g \circ f) &= \mu_Z \circ g \circ f \circ \mu_X^{-1} \\
&= \mu_Z \circ g \circ \text{id}_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \\
&= \mu_Z \circ g \circ \mu_Y^{-1} \circ \mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \\
&= F(g) \circ F(f). \quad (\text{associativitat})
\end{aligned}$$

Ara que sabem que F és un functor demostrem que $\mu = (\mu_X)_{X \in \mathcal{C}_0}$ és una transformació natural. Aprofitant la Figura (33) cal demostrar

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\mu_X} & F(X) \\
f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F(f) \\
Y & \xrightarrow{\mu_Y} & F(Y)
\end{array}$$

Figura 35: Diagrama de naturalitat de μ (Exemple 3.3.6).

que, si $f : X \rightarrow Y$ és un morfisme en $\mathbf{C}$, el diagrama de la Figura (35) commuta.

Però, clarament commuta perquè

$$F(f) \circ \mu_X = \mu_Y \circ f \circ \mu_X^{-1} \circ \mu_X = \mu_Y \circ f.$$

Tot plegat, acabem de donar suficients exemples de transformacions naturals. Així, finalitzem l'Exemple 3.3.

Tal i com ocorre amb els functors, les transformacions naturals es poden compondre. No obstant, hi ha dos tipus de composició de transformacions naturals depenent de si *es componen* per objectes de nivell 1, és a dir, functors o si *es componen* per objectes de nivell 0, és a dir, objectes de categories. Aquestes composicions s'anomenen *composició vertical* i *composició horitzontal*, respectivament.

Donem un esquema de la composició vertical amb la Figura (36) i de la composició horitzontal amb la Figura (37).

Evidentment, aquestes definicions de composicions no ens basten. Anem a donar definicions formals de la composició vertical i la composició horitzontal de transformacions naturals. Definim primer la composició vertical de transformacions naturals.

Definició 3.4 (Composició vertical de transformacions naturals). Siguen A un objecte de la categoria $\mathbf{C}$ i F, G i H functors de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Donades dos transformacions naturals $\alpha = (\alpha^A)_{A \in \mathbf{C}_0}$ i $\beta = (\beta^A)_{A \in \mathbf{C}_0}$ on $\alpha^A : F(A) \rightarrow G(A)$



Figura 36: Dues transformacions naturals (a esquerra) i la seua composició vertical (a dreta).

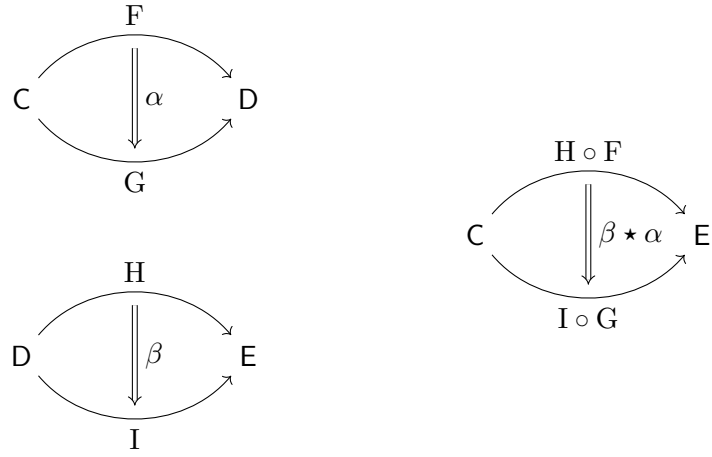


Figura 37: Dues transformacions naturals (a esquerra) i la seua composició horitzontal (a dreta).

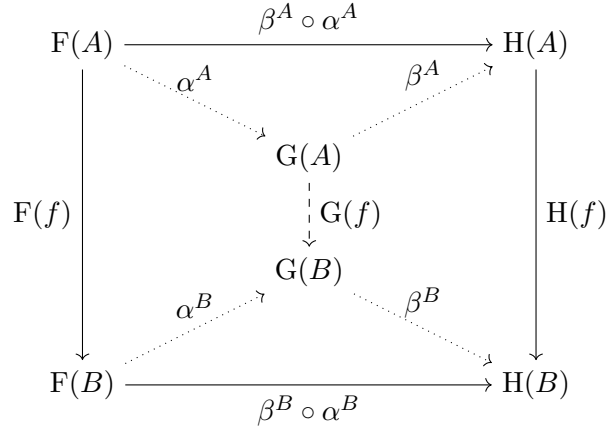


Figura 38: Diagrama de naturalitat de la composició vertical.

i $\beta^A : G(A) \rightarrow H(A)$, definim la **composició vertical de transformacions naturals**, denotada per $\circ$, com la transformació natural $\beta \circ \alpha = (\beta \circ \alpha)_{A \in C_0}^A$, on $(\beta \circ \alpha)^A : F(A) \rightarrow H(A)$ tal que $(\beta \circ \alpha)^A = \beta^A \circ \alpha^A$. Efectivament, $\beta^A \circ \alpha^A$ és transformació natural doncs el diagrama de la Figura (38) commuta perquè els respectius diagrames de naturalitat de α i β commuten.

Comprovem que, en efecte, l'anterior diagrama commuta.

$$\begin{aligned}
 H(f) \circ (\beta^A \circ \alpha^A) &= (H(f) \circ \beta^A) \circ \alpha^A && \text{(associativitat)} \\
 &= (\beta^B \circ G(f)) \circ \alpha^A && (\beta \text{ trans. nat}) \\
 &= \beta^B \circ (G(f) \circ \alpha^A) && \text{(assoc.)} \\
 &= \beta^B \circ (\alpha^B \circ F(f)) && (\alpha \text{ trans. nat}) \\
 &= (\beta^B \circ \alpha^B) \circ F(f). && \text{(assoc.)}
 \end{aligned}$$

Seguidament definim la composició horitzontal de transformacions naturals.

Definició 3.5 (Composició horitzontal de transformacions naturals). Considerem A un objecte de la categoria C . Siguen F i G functors de C en D i H i I functors de D en E . Donades dues transformacions naturals $\alpha = (\alpha^A)_{A \in C_0}$ i

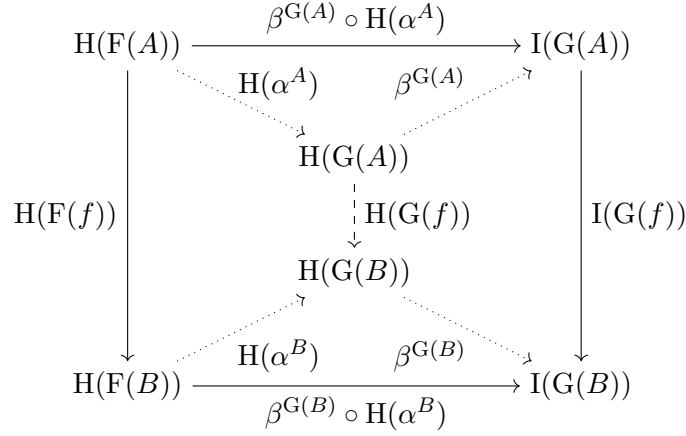


Figura 39: Diagrama de naturalitat de la composició horitzontal.

$\beta = (\beta^B)_{B \in D_0}$ on $\alpha^A : F(A) \rightarrow G(A)$ i $\beta^B : H(B) \rightarrow I(B)$ definim la **composició horitzontal de transformacions naturals**, denotada per $\star$, com la transformació natural $\beta \star \alpha = (\beta \star \alpha)_{A \in C_0}^A$ on $(\beta \star \alpha)^A : H(F(A)) \rightarrow I(G(A))$ tal que $(\beta \star \alpha)^A = \beta^{G(A)} \circ H(\alpha^A)$.

Efectivament, $\beta^{G(A)} \circ H(\alpha^A)$ és transformació natural doncs el diagrama de la Figura (39) commuta perquè els diagrames de naturalitat de α i β commuten.

Comprovem que, en efecte, l'anterior diagrama commuta.

$$\begin{aligned}
I(G(f)) \circ (\beta^{G(A)} \circ H(\alpha^A)) &= (I(G(f)) \circ \beta^{G(A)}) \circ H(\alpha^A) && (\text{assoc.}) \\
&= (\beta^{G(B)} \circ H(G(f))) \circ H(\alpha^A) && (\beta \text{ trans. nat}) \\
&= \beta^{G(B)} \circ (H(G(f)) \circ H(\alpha^A)) && (\text{assoc.}) \\
&= \beta^{G(B)} \circ (H(G(f) \circ \alpha^A)) && (H \text{ functor}) \\
&= \beta^{G(B)} \circ (H(\alpha^B \circ F(f))) && (\alpha \text{ trans. nat}) \\
&= \beta^{G(B)} \circ (H(\alpha^B) \circ H(F(f))) && (H \text{ functor}) \\
&= (\beta^{G(B)} \circ H(\alpha^B)) \circ H(F(f)). && (\text{assoc.})
\end{aligned}$$

Ara que coneixem i tenim definits dos tipus distints de composicions per a

transformacions naturals ens preguntem quina relació hi ha entre elles. La *Llei de Godement* proporciona dita relació.

Proposició 3.6 (Llei de Godement). *Siguen les categories $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$, els functors F, G i H de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ i els functors I, J i K de $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$. Considerem, a més, les transformacions naturals α , de F en G , β de G en H , γ de I en J i δ de J en K . Aleshores, la **Llei de Godement** garanteix que*

$$(\delta \circ \gamma) \star (\beta \circ \alpha) = (\delta \star \beta) \circ (\gamma \star \alpha).$$

Demostració. Per a fer la demostració presentem la Figura (40) que servirà com a demostració visual i intuïtiva doncs la demostració s'escapa a l'objectiu del treball. El lector pot trobar una demostració de la *Llei de Godement*, també coneguda com a Llei d'intercanvi, a [15]. ■

Ja coneixem un tipus de morfismes especials que són els isomorfismes els quals es caracteritzen per tindre un morfisme invers associat i per tindre propietats molts interessants. Així, com les transformacions naturals són col·leccions de morfismes, és natural definir un tipus de transformació natural compost només per isomorfismes.

Definició 3.7 (Isomorfisme natural). Donats dos functors F i G de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ direm que la transformació natural $\alpha : F \Rightarrow G$ és un **isomorfisme natural** si tot morfisme indexat α^X , per a cada X objecte de $\mathbf{C}$, és isomorfisme. En aquest cas, denotem l'isomorfisme natural com $\alpha : F \cong G$.

Naturalment la propietat de l'existència d'inversa que caracteritza als isomorfismes es reflexa en els isomorfismes naturals.

Proposició 3.8. *Donats F i G functors de la categoria $\mathbf{C}$ a la categoria $\mathbf{D}$ si $\alpha : F \Rightarrow G$ és un isomorfisme natural, aleshores existeix una única transformació natural, $\alpha^{-1} : G \Rightarrow F$, les components de la qual són les inverses de les components de α . A més, es verifica que $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}_G$ i que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_F$.*

Demostració. Assumim que $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ i $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. Com $\alpha : F \Rightarrow G$ és isomorfisme natural, tenim que, per a tot objecte X en $\mathbf{C}$, la component

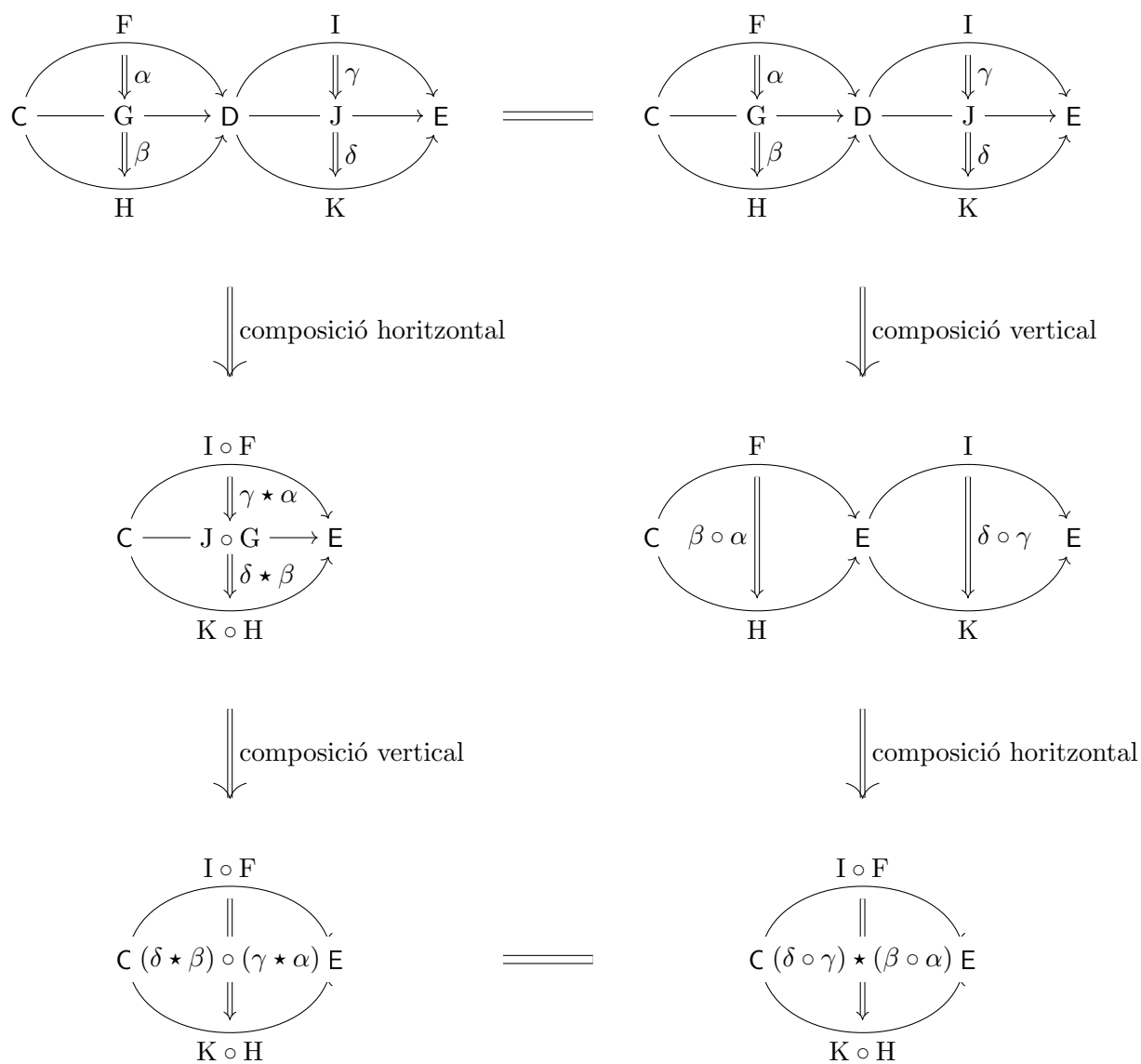


Figura 40: Llei de Godement.

$$\begin{array}{ccc}
F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\
F(g) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(g) \\
F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y)
\end{array}$$

Figura 41: Diagrama de naturalitat de α .

$$\begin{array}{ccc}
G(X) & \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} & F(X) \\
G(g) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F(g) \\
G(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y^{-1}} & F(Y)
\end{array}$$

Figura 42: Diagrama de naturalitat de α^{-1}

associada a X de α , $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$, és isomorfisme i, per tant, existeix un únic morfisme $\alpha_X^{-1} : G(X) \rightarrow F(X)$; inversa de α_X .

Per altra banda, el quadrat de naturalitat de α , il·lustrat a la Figura (41), commuta. En efecte, considerem $g : X \rightarrow Y$ morfisme en $\mathcal{C}$.

Doncs, es verifica que

$$G(g) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ F(g). \quad (2)$$

Comprovem que els morfismes α_X^{-1} formen una transformació natural demostrant que el diagrama de la Figura (42) commuta.

Partim de l'Equació (2) i recordem que α_X i α_Y són isomorfismes.

$$\begin{aligned}
G(g) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ F(g) &\Leftrightarrow \alpha_Y^{-1} \circ G(g) \circ \alpha_X = \text{id}_{F(X)} \circ F(g) \\
&\Leftrightarrow \alpha_Y^{-1} \circ G(g) \circ \text{id}_{G(X)} = F(g) \circ \alpha_X^{-1} \\
&\Leftrightarrow \alpha_Y^{-1} \circ G(g) = F(g) \circ \alpha_X^{-1}.
\end{aligned}$$

Aleshores, acabem de demostrar que el quadrat de naturalitat (Figura 42) commuta.

En conclusió, com la component α_X^{-1} és isomorfisme i única per a tot X en $\mathbf{C}$, en ser inversa de α_X es té que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_F$ i que $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}_G$. Doncs, totes les components de $\alpha^{-1} : G \Rightarrow F$ són isomorfismes i úniques i, per tant, α^{-1} és un isomorfisme natural i únic. ■

3.2 Lema de Yoneda i aplicacions

Presentem a aquesta secció un resultat important de la Teoria de Categories, que és el *Lema de Yoneda*. Donarem les bases i definicions necessàries per a demostrar dit lema i demostrarem la seua importància a través dels corollaris que d'aquest resultat es dedueixen. Per exemple, demostrarem la versió categòrica del Teorema de Cayley i estudiarem com el Lema de Yoneda ens permet donar una condició necessària per a la isomorfia entre functors.

Definició 3.9 (Categoria de functors). Donades dos categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ definim la categoria de functors, denotada $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, com la categoria que té per objectes functors de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ i per morfismes transformacions naturals entre dits functors que es componen verticalment.

Proposició 3.10. *Donades les categories $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ existeix una bijecció*

$$\text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D}) \rightarrow \text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}}).$$

on $\text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D})$ és el conjunt de functors de $\mathbf{E} \times \mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ i $\text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}})$ i $\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ és el conjunt de functors de $\mathbf{E}$ en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Demostració. Anem a fer la demostració pas a pas.

1. Definim una funció del conjunt $\text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D})$ a $\text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}})$.

Definim una aplicació de $\text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D})$ a $\text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}})$, denotada $(\cdot)_E$, com segueix.

$$\begin{array}{ccc} (\cdot)_E : \text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D}) & \longrightarrow & \text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}}) \\ F & \longmapsto & F_E. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F_E: \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{D}^{\mathbf{C}} \\
\begin{array}{c} A \\ \downarrow f \\ B \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} F_E(A) \\ \downarrow F_E(f) \\ F_E(B) \end{array}
\end{array}$$

Figura 43: El functor F_E .

$$\begin{array}{ccc}
F_E(A): \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\
\begin{array}{c} X \\ \downarrow g \\ Y \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} F(A, X) \\ \downarrow F(\text{id}_A, g) \\ F(A, Y) \end{array}
\end{array}$$

Figura 44: El functor $F_E(A)$.

Siga un functor $F: \mathbf{E} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, aleshores es defineix F_E de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ com un functor que assigna a tot objecte A en $\mathbf{C}$ l'objecte $F_E(A)$ en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, és a dir, un functor de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Per altra banda, si $f: A \rightarrow B$ és morfisme en $\mathbf{C}$, aleshores F_E li assigna el morfisme $F_E(f)$ en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, és a dir, una transformació natural entre functors de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ (Figura 43). Donat un objecte A en $\mathbf{C}$, establim el functor $F_E(A)$ com aquell functor que a tot objecte X en $\mathbf{C}$ li assigna l'avaluació $F(A, X)$, que és objecte en $\mathbf{D}$, i a tot morfisme $g: X \rightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ li assigna el morfisme $F(\text{id}_A, g)$, que és morfisme en $\mathbf{D}$. Mostrem aquest functor a la Figura (44) i comprovem que $F_E(A)$ és, de fet, un functor.

2. Axioma de la composició.

Siguen $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ morfismes componibles en $\mathbf{C}$, aleshores

$$\begin{aligned}
F_E(A)(g \circ f) &= F(\text{id}_A, g \circ f) \\
&= F(\text{id}_A, g) \circ F(\text{id}_A, f) && (\text{F functor}) \\
&= F_E(A)(g) \circ F_E(A)(f).
\end{aligned}$$

$$F_E(f)^X : F_E(A)(X) \xrightarrow{F(f, \text{id}_X)} F_E(B)(X)$$

Figura 45: La transformació natural $F_E(f)$.

$$\begin{array}{ccc}
 F_E(A)(X) & \xrightarrow{F_E(f)^X} & F_E(B)(X) \\
 \downarrow F_E(A)(g) & \circlearrowleft & \downarrow F_E(B)(g) \\
 F_E(A)(Y) & \xrightarrow{F_E(f)^Y} & F_E(B)(Y)
 \end{array}$$

Figura 46: Diagrama de naturalitat de $F_E(f)$.

3. Axioma de la identitat.

Siga id_X morfisme identitat en $\mathbf{C}$, aleshores

$$\begin{aligned}
 F_E(A)(\text{id}_X) &= F(\text{id}_A, \text{id}_X) \\
 &= \text{id}_{F(A, X)} && (\text{F functor}) \\
 &= \text{id}_{F_E(A)}.
 \end{aligned}$$

Donats A i B objectes en $\mathbf{C}$, anem a establir la transformació natural $F_E(f) = (F_E(f)^X)_{X \in \mathbf{C}_0}$ entre els functors $F_E(A)$ i $F_E(B)$. Donat X objecte en $\mathbf{C}$, definim el morfisme $F_E(f)^X$ entre $F_E(A)(X)$ i $F_E(B)(X)$ com el morfisme $F(f, \text{id}_X)$. Mostrem a la Figura (45) la forma de les components de $F_E(f)$ i comprovem que és, efectivament, transformació natural. Per a verificar que $F_E(f)$ és transformació natural veiem que, donat $g: X \rightarrow Y$ morfisme en $\mathbf{C}$, el diagrama natural associat a $F_E(f)$ (Figura (46)) commuta. A més a més, observem que, com que

$$F_E(A)(X) = F(A, X) \qquad F_E(A)(g) = F(\text{id}_A, g)$$

$$\begin{array}{ccc}
F(A, X) & \xrightarrow{F(f, \text{id}_X)} & F(B, X) \\
\downarrow F(\text{id}_A, g) & \circlearrowleft & \downarrow F(\text{id}_B, g) \\
F(A, Y) & \xrightarrow{F(f, \text{id}_Y)} & F(B, Y)
\end{array}$$

Figura 47: Diagrama de naturalitat de $F_E(f)$.

$$\begin{array}{ll}
F_E(A)(Y) = F(A, Y) & F_E(B)(g) = F(\text{id}_A, g) \\
F_E(B)(X) = F(B, X) & F_E(f)^X = F(f, \text{id}_X) \\
F_E(B)(Y) = F(B, Y) & F_E(f)^Y = F(f, \text{id}_Y),
\end{array}$$

el diagrama de la Figura (46) equival al diagrama de la Figura (47). En veritat, com F és functor, el diagrama (Figura (47)) commuta.

$$\begin{aligned}
F(\text{id}_B, g) \circ F(f, \text{id}_X) &= F(\text{id}_B \circ f, g \circ \text{id}_X) \\
&= F(f, g) \\
&= F(f \circ \text{id}_A, \text{id}_Y \circ g) \\
&= F(f, \text{id}_Y) \circ F(\text{id}_A, g).
\end{aligned}$$

Per tant, $F_E(f)$ és transformació natural i, així, ja tenim ben definida l'aplicació $(\cdot)_E$ de domini $\text{Cat}(E \times C, D)$ i codomini $\text{Cat}(E, D^C)$.

4. Definim una funció de la categoria $\text{Cat}(E, D^C)$ a $\text{Cat}(E \times C, D)$.

Definim una aplicació de $\text{Cat}(E, D^C)$ a $\text{Cat}(E \times C, D)$, denotada $\tilde{\cdot}$, com segueix.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\cdot}: \text{Cat}(E, D^C) & \rightarrow & \text{Cat}(E \times C, D) \\
G & \mapsto & \tilde{G}.
\end{array}$$

On $G: E \rightarrow D^C$ és un functor tal que, per una banda, assigna a tot objecte A en E l'objecte $G(A)$ en D^C , és a dir, un functor de C en D . Per altra

$$\begin{array}{ccc}
G: E & \longrightarrow & D^C \\
\downarrow f & \longmapsto & \downarrow G(f) \\
A & & G(A) \\
B & & G(B)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
G(A): C & \longrightarrow & D \\
\downarrow g & \longmapsto & \downarrow G(A)(g) \\
X & & G(A)(X) \\
Y & & G(A)(Y)
\end{array}$$

Figura 48: El functor G i el functor $G(A)$.

$$\begin{array}{ccc}
G(A)(X) & \xrightarrow{G(f)^X} & G(B)(X) \\
\downarrow G(A)(g) & \wr & \downarrow G(B)(g) \\
G(A)(Y) & \xrightarrow{G(f)^Y} & G(B)(Y)
\end{array}$$

Figura 49: La transformació natural $G(f)$ i el seu diagrama de naturalitat.

banda, donat un morfisme $f : A \rightarrow B$ en E el functor G li assigna el morfisme $G(f)$ en D^C , és a dir, una transformació natural entre els functors $G(A)$ i $G(B)$ de C en D . Així mateix, donat un objecte A en C definim el functor $G(A) : C \rightarrow D$ com un functor que assigna, per una part, a tot objecte X en C l'objecte $G(A)(X)$ en D i que assigna, per altra part, a tot morfisme $g : X \rightarrow Y$ en C el morfisme $G(A)(g)$ en D . A la Figura (48) mostrem els functors G i $G(A)$ i, a més, mostrem a la Figura (49) la transformació natural $G(f) = (G(f)^X)_{X \in C_0}$ amb el seu diagrama de naturalitat.

Seguidament, el functor $\tilde{G}$ tindrà una estructura tal que, d'una banda, a tot objecte (A, X) en $E \times C$ li assigna un objecte $\tilde{G}(A, X)$ en D i, d'altra banda, a tot morfisme (f, g) en $E \times C$ li assigna un morfisme $\tilde{G}(f, g)$ en D . Però, necessitem definir com actua el functor $\tilde{G}$ sobre els objectes i sobre els morfismes. Així, notem que, donat (A, X) objecte en $E \times C$, podem definir

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{G}: E \times C & \longrightarrow & D \\
(A, X) & & G(A)(X) \\
(f, g) \downarrow & \longmapsto & \downarrow G(B)(g) \circ G(f)^X \\
(B, Y) & & G(B)(Y)
\end{array}$$

Figura 50: El functor $\tilde{G}$.

com actua $\tilde{G}$ sobre els objectes de la forma $\tilde{G}(A, X) = G(A)(X)$ doncs $G(A)(X)$ es troba en D . D'altra banda, donat (f, g) morfisme en $E \times C$ on $f: A \rightarrow B$ i $g: X \rightarrow Y$ són morfismes en E i C , respectivament, definim el morfisme $\tilde{G}(f, g)$ en D . Notem que, per la commutativitat del diagrama de naturalitat de $G(f)$ (Figura (49)), podem definir $\tilde{G}(f, g) = G(B)(g) \circ G(f)^X$ puix aquest és un morfisme de $\tilde{G}(A, X)$ en $\tilde{G}(B, Y)$. Mostrem a la Figura (50) un esquema del functor $\tilde{G}$.

Ara que ja tenim definit correctament l'assignació $\tilde{G}$ comprovem que és, de fet, un functor.

5. Axioma de la composició.

Siguin $(f, g): (A, X) \rightarrow (B, Y)$, $(f', g'): (B, Y) \rightarrow (C, Z)$ morfismes en $E \times C$ componibles, aleshores

$$\begin{aligned}
\tilde{G}((f', g') \circ (f, g)) &= \tilde{G}((f' \circ f, g' \circ g)) \\
&= G(C)(g' \circ g) \circ G(f' \circ f)^X \\
&= G(C)(g') \circ G(C)(g) \circ G(f' \circ f)^X && \text{(Figura 48)} \\
&= G(C)(g') \circ G(C)(g) \circ G(f')^X \circ G(f)^X && \text{(Figura 48)} \\
&= G(C)(g') \circ G(f')^Y \circ G(B)(g) \circ G(f)^X && \text{(Nota 3.11)} \\
&= \tilde{G}(f', g') \circ \tilde{G}(f, g).
\end{aligned}$$

Nota 3.11. Mostrem a la Figura (51) el diagrama de naturalitat de la composició de les transformacions naturals $G(f)$ i $G(f')$, per a f i f' morfismes en E .

$$\begin{array}{ccccc}
G(A)(X) & \xrightarrow{G(f)^X} & G(B)(X) & \xrightarrow{G(f')^X} & G(C)(X) \\
\downarrow G(A)(g) & \circlearrowleft & \downarrow G(B)(g) & \circlearrowleft & \downarrow G(C)(g) \\
G(A)(Y) & \xrightarrow{G(f)^Y} & G(B)(Y) & \xrightarrow{G(f')^Y} & G(C)(Y)
\end{array}$$

Figura 51: Composició dels diagrames de naturalitat de $G(f)$ i $G(f')$.

6. Axioma de la identitat.

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\text{id}_{(A,X)}) &= \tilde{G}(\text{id}_A, \text{id}_X) \\
&= G(A)(\text{id}_X) \circ G(\text{id}_A)^X \\
&= \text{id}_{G(A)(X)} \circ G(\text{id}_A)^X & (G(A)(\text{id}_X) = \text{id}_{G(A)(X)}) \\
&= \text{id}_{G(A)(X)} \circ \text{id}_{G(A)(X)} & (G(\text{id}_A)^X = \text{id}_{G(A)(X)}) \\
&= \text{id}_{G(A)(X)} \\
&= \text{id}_{\tilde{G}(A,X)}.
\end{aligned}$$

Per tant, acabem de demostrar que $\tilde{G}$ és functor. Així ja tenim ben definida l'aplicació $\tilde{\cdot}$ de domini $\text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}})$ i codomini $\text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D})$.

7. Verifiquem que l'aplicació $\tilde{(\cdot)}$ és la inversa de l'aplicació $(\cdot)_E$.

Primer veiem que la composició $\tilde{(\cdot)} \circ (\cdot)_E$ és igual al morfisme identitat $\text{id}_{\text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D})}$. Per a guiar-nos ens fixem en l'esquema següent.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D}) & \longrightarrow & \text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}}) & \longrightarrow & \text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D}) \\
F & \longmapsto & F_E & \longmapsto & \tilde{F}_E
\end{array}$$

Volem comprovar que el functor $\tilde{F}_E$ és igual al functor F veient que actuen igual sobre els mateixos objectes i morfismes.

Efectivament, considerem el morfisme $(f, g) : (A, X) \rightarrow (B, Y)$ en $\mathbf{E} \times \mathbf{C}$. La imatge per F de (f, g) és el morfisme en $\mathbf{D}$ següent.

$$F(A, X) \xrightarrow{F(f, g)} F(B, Y).$$

Estudiem com actua $\tilde{F}_E$ sobre els objectes (A, X) i (B, Y) .

$$\begin{aligned}\tilde{F}_E(A, X) &= F_E(A)(X) = F(A, X) \\ \tilde{F}_E(B, Y) &= F_E(B)(Y) = F(B, Y).\end{aligned}$$

Respecte al morfisme (f, g) , el functor $\tilde{F}_E$ actua d'aquesta forma.

$$\tilde{F}_E(f, g) = F_E(B)(g) \circ F_E(f)^X = F(f, g).$$

Per tant, com F i $\tilde{F}_E$ actuen igual sobre objectes i morfismes són el mateix functor. Així, $(\cdot)_E$ és la inversa per la dreta de $\tilde{(\cdot)}$.

Ara veiem que la composició $(\cdot)_E \circ \tilde{(\cdot)}$ és igual al morfisme identitat $\text{id}_{\text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}})}$. Per a guiar-nos ens fixem en l'esquema següent.

$$\begin{array}{ccccc}\text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}}) & \longrightarrow & \text{Cat}(\mathbf{E} \times \mathbf{C}, \mathbf{D}) & \longrightarrow & \text{Cat}(\mathbf{E}, \mathbf{D}^{\mathbf{C}}) \\ G & \longmapsto & \tilde{G} & \longmapsto & \tilde{G}_E.\end{array}$$

Volem comprovar que el functor $\tilde{G}_E$ és igual al functor G veient que actuen igual sobre els mateixos objectes i morfismes.

Considerem el morfisme $f : A \rightarrow B$ en la categoria $\mathbf{E}$. La imatge per G de f és la següent transformació natural per a $G(A)$ i $G(B)$ functors (Figura (48) i Figura (49)).

$$G(A) \xRightarrow{G(f)} G(B).$$

Estudiem primerament com actua el functor $\tilde{G}_E$ sobre els objectes. Notem que si A és un objecte en $\mathbf{E}$ aleshores $\tilde{G}_E(A)$ i $G(A)$ són functors de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$. Doncs, per a veure que $\tilde{G}_E$ i G actuen igual sobre els objectes de $\mathbf{E}$ hem de comprovar que $G(A)$ i $\tilde{G}_E(A)$ actuen igual sobre els objectes i morfismes en $\mathbf{C}$, per a tot A objecte en $\mathbf{E}$. Aleshores, considerem A un objecte en $\mathbf{E}$ i X

un objecte en $\mathbf{C}$ per a comprovar que $G(A)$ i $\tilde{G}_E(A)$ actuen igual sobre X .

$$\begin{aligned}\tilde{G}_E(A)(X) &= \tilde{G}(A, X) && (\text{actua } (\cdot)_E \text{ sobre } \tilde{G}) \\ &= G(A)(X). && (\text{actua } \widetilde{(\cdot)} \text{ sobre } G)\end{aligned}$$

Per altra banda, considerem $g : X \rightarrow Y$ morfisme en $\mathbf{C}$ i verifiquem que $G(A)$ i $\tilde{G}_E(A)$ actuen igual sobre g .

$$\begin{aligned}\tilde{G}_E(A)(g) &= \tilde{G}(\text{id}_A, g) && (\text{actua } (\cdot)_E \text{ sobre } \tilde{G}) \\ &= G(A)(g) \circ G(\text{id}_A)^X && (\text{actua } \widetilde{(\cdot)} \text{ sobre } G) \\ &= G(A)(g) \circ \text{id}_{G(A)(X)} \\ &= G(A)(g).\end{aligned}$$

Acabem de demostrar que els functors $G(A)$ i $\tilde{G}_E(A)$, que són functors de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$, coincideixen per a tot A objecte en $\mathbf{E}$. Equivalentment, hem demostrat que G i $\tilde{G}_E$ actuen igual sobre els mateixos objectes.

Passem ara a demostrar que G i $\tilde{G}_E$ actuen igual sobre els mateixos morfismes en $\mathbf{E}$. A més a més, notem que si f és un morfisme en $\mathbf{E}$, aleshores $G(f)$ i $\tilde{G}_E(f)$ són morfismes en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, és a dir, transformacions naturals de functors de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Doncs, per a veure que G i $\tilde{G}_E$ actuen igual sobre els mateixos morfismes en $\mathbf{E}$, és necessari demostrar que la transformació natural $\tilde{G}_E(f)$ coincideix amb la transformació natural $G(f)$, per a f morfisme en $\mathbf{E}$, o, equivalentment, que les seues components coincideixen. En definitiva, donat f morfisme en $\mathbf{E}$ i X objecte en $\mathbf{C}$ que indexa les components de $G(f)$ i $\tilde{G}(f)$ comprovem que les components $G(f)^X$ i $\tilde{G}_E(f)^X$ coincideixen.

$$\begin{aligned}\tilde{G}_E(f)^X &= \tilde{G}(f, \text{id}_X) && (\text{actua } (\cdot)_E \text{ sobre } \tilde{G}) \\ &= G(B)(\text{id}_X) \circ G(f)^X && (\text{actua } \widetilde{(\cdot)} \text{ sobre } G) \\ &= \text{id}_{G(B)(X)} \circ G(f)^X && (G(B)(\text{id}_X) = \text{id}_{G(B)(X)}) \\ &= G(f)^X.\end{aligned}$$

Llavors, hem demostrat que les transformacions naturals $G(f)$ i $\tilde{G}(f)$ coinci-

$$\begin{array}{ccc}
C(-, A): C^{\text{op}} & \longrightarrow & \text{Set} \\
\downarrow (f')^{\text{op}} & \longmapsto & \downarrow C(f', A) \\
A' & & C(A', A) \\
B' & & C(B', A)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
C(f', A): C(A', A) & \longrightarrow & C(B', A) \\
g & \longmapsto & g \circ f'
\end{array}$$

Figura 52: El functor $C(-, A)$ i el morfisme $C(f', A)$.

dixen per a tot f morfisme en E . Equivalentment, hem demostrat que G i $\tilde{G}_E$ actuen igual sobre els mateixos morfismes.

Per tant, com G i $\tilde{G}_E$ actuen igual sobre els objectes i morfismes són el mateix functor. Així, $(\cdot)_E$ és la inversa per l'esquerra de $\widetilde{(\cdot)}$.

En conclusió, com $(\cdot)_E$ és la inversa per la dreta i per l'esquerra de $\widetilde{(\cdot)}$ tenim que $(\cdot)_E$ és la inversa de $\widetilde{(\cdot)}$. Doncs, existeix una bijecció entre $\text{Cat}(E \times C, D)$ i $\text{Cat}(E, D^C)$.

Açò demostra la Proposició (3.10). ■

Abans de demostrar el *Lema de Yoneda* necessitem les eines adequades. Primer definim un nou functor tal que, donat un objecte A en C , el denotem per $C(-, A)$ i, a més, va de la categoria C^{op} a la categoria Set . Aquest functor, per una banda, assigna a tot objecte A' en C^{op} el conjunt de tots els morfismes de A' en A , és a dir, $C(A', A)$ i, per altra banda, assigna a tot morfisme $(f')^{\text{op}}: A' \rightarrow B'$ en C^{op} el morfisme $C(f', A): C(A', A) \rightarrow C(B', A)$ en Set el qual, donat g element de $C(A', A)$, assigna la composició $g \circ f'$. Il·lustrem a la Figura (52) el functor $C(-, A)$ i el morfisme $C(f', A)$.

Nota 3.12. Recordem que si $(f')^{\text{op}}: A' \rightarrow B'$ està en C^{op} aleshores el seu dual, $f': B' \rightarrow A'$, està en C .

Nota 3.13. Aquest functor $C(-, A)$ és, essencialment, el functor representable y_A (Exemple 2.18), però definit sobre C^{op} i no sobre C . No obstant, hem optat per aquesta nova notació per comoditat.

Per altra banda, donada una categoria C , considerem un altre functor denotat $C(-, \cdot): C \rightarrow \text{Set}^{C^{\text{op}}}$. Aquest functor assigna a tot objecte A en C el functor

$$\begin{array}{ccc}
C(-, \cdot): C & \longrightarrow & \mathbf{Set}^{C^{op}} \\
\begin{array}{c} A \\ f \downarrow \\ B \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} C(-, A) \\ \downarrow C(-, f) \\ C(-, B) \end{array}
\end{array}$$

Figura 53: El functor $C(-, \cdot)$.

$C(-, A)$ i, per altra banda, donat $f : A \rightarrow B$ morfisme en C , li assigna la transformació natural $C(-, f)$ entre functors de C^{op} en $\mathbf{Set}$ amb components $C(-, f)^{A'}$ per a A' en C^{op} . Donat $g : A' \rightarrow A$ morfisme en C definim les components de $C(-, f)$ com segueix.

$$C(-, f)^{A'}(g) = C(g, f)^{A'} = f \circ g.$$

Mostrem a la Figura (53) el functor $C(-, \cdot)$.

Finalment, si F és morfisme en $\mathbf{Set}^{C^{op}}$, és a dir, un functor de la forma $F : C^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ denotem el següent conjunt de transformacions naturals.

$$\mathbf{Set}^{C^{op}}(C(-, A), F) = \{\alpha \mid \alpha \text{ transformació natural entre } C(-, A) \text{ i } F\}.$$

Definits ja els functors, transformacions naturals i conjunts imprescindibles per a treballar amb el *Lema de Yoneda* procedim a enunciar-lo i posteriorment demostrar-lo. Ens hem basat en la demostració del Lema de Yoneda de [13], però altres demostracions distintes es poden trobar a [11] i [9].

Teorema 3.14 (Lema de Yoneda). *Per a tot functor F , objecte en $\mathbf{Set}^{C^{op}}$, i per a tot objecte A en C existeix una bijecció*

$$\mathcal{Y}_{A, F}: \mathbf{Set}^{C^{op}}(C(-, A), F) \rightarrow F(A),$$

que és natural en A i F . És a dir, donat g en $C(A', A)$ per a A' , objecte en C , i la transformació natural $\mu: F \Rightarrow F'$, morfisme en $\mathbf{Set}^{C^{op}}$, per a F i F' objectes en $\mathbf{Set}^{C^{op}}$, el diagrama següent commuta.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\text{C}(-, A), \text{F}) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{A, \text{F}}} & \text{F}(A) \\
\downarrow \text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(g, \mu) & \wr & \downarrow \mu^{A'} \circ \text{F}(g) = \text{F}'(g) \circ \mu^A \\
\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\text{C}(-, A'), \text{F}) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{A', \text{F}'}} & \text{F}'(A')
\end{array}$$

Nota 3.15. Hi ha diverses formes de demostrar una bijecció. Podem demostrar la injectivitat i la suprajectivitat de l'aplicació⁹ o trobar directament una inversa, per exemple. També es pot veure que tot element del domini determina un únic element del codomini i viceversa.¹⁰

En aquesta demostració hem optat per motivar la definició de l'aplicació inversa i demostrar que efectivament ho és.

Demostració. Fem la demostració per passos.

1. Demostrem que existeix la bijecció $\mathcal{J}_{A, \text{F}}$

Primer hem de definir l'aplicació $\mathcal{J}_{A, \text{F}}: \text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\text{C}(-, A), \text{F}) \rightarrow \text{F}(A)$. Notem que si α és una transformació natural en $\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\text{C}(-, A), \text{F})$, aleshores $\alpha = (\alpha^{A'})_{A' \in \text{C}_0^{\text{op}}}$ on $\alpha^{A'}: \text{C}(A', A) \rightarrow \text{F}(A')$ i el diagrama de naturalitat de α commuta.

Per tal de definir $\mathcal{J}_{A, \text{F}}(\alpha)$ per a que siga un element de $\text{F}(A)$ observem, pel vist abans, que si identifiquem $A = A'$ existeix un morfisme $\alpha^A: \text{C}(A, A) \rightarrow \text{F}(A)$ tal que, composant α^A amb un morfisme de $\text{C}(A, A)$, obtenim un element de $\text{F}(A)$. Triem el morfisme en $\text{C}(A, A)$ més simple, el que sabem segur que existeix, és a dir, el morfisme identitat id_A . Així, $\mathcal{J}_{A, \text{F}}(\alpha) = \alpha^A \circ \text{id}_A$ està ben definit. Representem l'aplicació $\mathcal{J}_{A, \text{F}}$ per a A objecte en C i F functor de C^{op} a Set en l'esquema de la Figura (54).

Per altra banda, si $(f')^{\text{op}}: A' \rightarrow B'$ és morfisme en C^{op} , el diagrama de

⁹Una demostració clara amb aquesta estratègia pot veure's a la pàgina 72 de [11].

¹⁰Una demostració simple de la bijecció seguint aquest camí pot consultar-se a [9].

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{A,F}: \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathcal{C}(-, A), F) & \longrightarrow & F(A) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \circ \text{id}_A \end{array}$$

Figura 54: L'aplicació $\mathcal{Y}_{A,F}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A', A) & \xrightarrow{\alpha^{A'}} & F(A) \\ \downarrow \mathcal{C}(f', A) & \circlearrowleft & \downarrow F(f') \\ \mathcal{C}(B', A) & \xrightarrow{\alpha^{B'}} & F(B') \end{array}$$

Figura 55: Diagrama de naturalitat de α .

naturalitat de α és el descrit a la Figura (55) verificant-se, a més, que

$$F(f') \circ \alpha^{A'} = \alpha^{B'} \circ \mathcal{C}(f', A).$$

Com els elements de $\mathcal{C}(A', A)$ són morfismes de la forma $g: A' \rightarrow A$, aleshores

$$\begin{aligned} F(f') \circ \alpha^{A'}(g) &= \alpha^{B'} \circ \mathcal{C}(f', A)(g) \\ F(f')(\alpha^{A'} \circ g) &= \alpha^{B'}(g \circ f'). \end{aligned} \quad (\text{Figura (52)})$$

Considerant $A' = A$ tenim que $g: A \rightarrow A$. Si triem $g = \text{id}_A$ obtenim la següent igualtat.

$$F(f')(\alpha^A \circ \text{id}_A) = \alpha^{B'}(f'). \quad (3)$$

Observem ara per l'Equació (3) que $\alpha^{B'}(f')$ és l'acció de la component $\alpha^{B'}$ sobre el morfisme f' en $\mathcal{C}(B', A')$ i que està totalment determinat per $\alpha^A \circ \text{id}_A$. A més, recordem que $\alpha^A \circ \text{id}_A$ es troba en $F(A)$.

En conclusió, qualsevol objecte A en $\mathcal{C}$ per a $\alpha^A \circ \text{id}_A$ genera una transformació natural. Com $\alpha^A \circ \text{id}_A$ es troba en $F(A)$, es dedueix que tot element de $F(A)$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{J}_{A,F} : F(A) & \longrightarrow & \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}(\mathbf{C}(-, A), F) \\
x & \longmapsto & \beta_x \\
\\
\beta_x^{B'} : \mathbf{C}(B', A) & \longrightarrow & F(B') \quad \text{per a } B' \in \mathbf{C}_0^{\text{op}} \\
(f')^{\text{op}} & \longmapsto & F(f')(x)
\end{array}$$

Figura 56: L'aplicació $\mathcal{J}_{A,F}$.

definirà alguna transformació natural α en $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}(\mathbf{C}(-, A), F)$.

Sent més específics, podem aprofitar l'Equació (3) per definir una aplicació inversa de $\mathcal{J}_{A,F}$ que denotem per $\mathcal{J}_{A,F}$. Aquesta aplicació inversa li assigna a x element en $F(A)$ la transformació natural $\beta_x = (\beta_x^{B'})_{B' \in \mathbf{C}^{\text{op}}}$, que és element de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}(\mathbf{C}(-, A), F)$. A més a més, la component $\beta_x^{B'}$ de β_x és un morfisme de $\mathbf{C}(B', A)$ en $F(B')$ tal que a tot morfisme $(f')^{\text{op}}$ en $\mathbf{C}(B', A)$ li assigna l'aplicació $F(f')(x)$. Representem l'aplicació $\mathcal{J}_{A,F}$ a la Figura (56).

Notem que, per la Figura (55), tenim garantit que el diagrama de naturalitat de la família de morfismes β_x commuta, per a tot x , element de $F(A)$. En altres paraules, β_x és transformació natural en $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}(\mathbf{C}(-, A), F)$, per a tot x element de $F(A)$.

En efecte, si B' i C' són objectes de $\mathbf{C}^{\text{op}}$, $h' : B' \rightarrow C'$ morfisme en $\mathbf{C}^{\text{op}}$, x element de $F(A)$ i $(f')^{\text{op}}$ és element de $\mathbf{C}(B', A)$ el diagrama de naturalitat de la Figura (57) commuta. Comprovem la commutativitat del diagrama de la Figura (57).

$$\begin{aligned}
F(h') \circ \beta_x^{B'}((f')^{\text{op}}) &= F(h') \circ (F(f')(x)) && \text{(Figura (56))} \\
&= F(h' \circ f')(x) && \text{(F functor)} \\
&= \beta_x^{C'} \circ ((f')^{\text{op}} \circ (h')^{\text{op}}) && \text{(Figura (52))} \\
&= \beta_x^{C'} \circ \mathbf{C}(h', A)((f')^{\text{op}}). && \text{(Figura (56))}
\end{aligned}$$

Aleshores, $F(h') \circ \beta_x^{B'}((f')^{\text{op}}) = \beta_x^{C'} \circ \mathbf{C}(h', A)((f')^{\text{op}})$ i, per tant, β_x és transformació natural en $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}(\mathbf{C}(-, A), F)$, per a tot x element de A .

$$\begin{array}{ccc}
C(B', A) & \xrightarrow{\beta_x^{B'}} & F(B') \\
\downarrow C(h', A) & \circlearrowleft & \downarrow F(h') \\
C(C', A) & \xrightarrow{\beta_x^{C'}} & F(C')
\end{array}$$

Figura 57: Diagrama de naturalitat de β_x .

Comprovem que $\overleftarrow{\mathcal{J}}_{A,F}$ és la inversa de $\mathcal{J}_{A,F}$ per la dreta. Siga x element de $F(A)$, aleshores

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{A,F}(\overleftarrow{\mathcal{J}}_{A,F}(x)) &= \mathcal{J}_{A,F}(\beta_x) && \text{(Figura 56)} \\
&= \beta_x^A \circ \text{id}_A && \text{(Figura 54)} \\
&= F(\text{id}_A)(x) && \text{(Figura 56)} \\
&= x. && \text{(F functor)}
\end{aligned}$$

Acabem de demostrar que l'aplicació $\overleftarrow{\mathcal{J}}_{A,F}$ és la inversa per la dreta de l'aplicació $\mathcal{J}_{A,F}$.

Comprovem que $\overleftarrow{\mathcal{J}}_{A,F}$ és la inversa de $\mathcal{J}_{A,F}$ per l'esquerra. Siga α transformació natural en $\text{Set}^{C^{\text{op}}}(C(-, A), F)$, aleshores

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{\mathcal{J}}_{A,F}(\mathcal{J}_{A,F}(\alpha)) &= \overleftarrow{\mathcal{J}}_{A,F}(\alpha^A \circ \text{id}_A) && \text{(Figura 54)} \\
&= \beta_{(\alpha^A \circ \text{id}_A)}. && \text{(Figura 56)}
\end{aligned}$$

Necessitem demostrar que la transformació natural $\beta_{(\alpha^A \circ \text{id}_A)}$ coincideix amb la transformació natural α . Per tant, cal veure que ambdues transformacions naturals actuen d'igual forma sobre els mateixos morfismes, per a tot objecte sobre el qual estan indexades. Si considerem B' objecte en C^{op} i $(f')^{\text{op}}$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\mathbb{C}(-, A), F) & \xrightarrow{\mathfrak{J}_{A,F}} & F(A) \\
\downarrow \text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(g, \mu) & \circlearrowleft & \downarrow \mu^{A'} \circ F(g) = F'(g) \circ \mu^A \\
\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\mathbb{C}(-, A'), F') & \xrightarrow{\mathfrak{J}_{A',F'}} & F'(A')
\end{array}$$

Figura 58: Diagrama de naturalitat de $\mathfrak{J}$.

morfisme de $\mathbb{C}(B', A)$, aleshores

$$\beta_{(\alpha^A \circ \text{id}_A)}^{B'}((f')^{\text{op}}) = F(f')(\alpha^A \text{id}_A) \quad (\text{Figura (56)})$$

$$= \alpha^{B'}((f')^{\text{op}}). \quad (\text{Equació (3)})$$

Acabem de demostrar que l'aplicació $\mathfrak{T}_{A,F}$ és la inversa per l'esquerra de l'aplicació $\mathfrak{J}_{A,F}$.

En conclusió, $\mathfrak{T}_{A,F}$ és la inversa de $\mathfrak{J}_{A,F}$ i, així, ja tenim demostrat que l'aplicació $\mathfrak{J}_{A,F}$ és una bijecció.

2. Demostrem que la bijecció $\mathfrak{J}_{A,F}$ és natural en A i en F .

Donat el morfisme $g : A' \rightarrow A$ en $\mathbb{A}$ i la transformació natural $\mu : F \Rightarrow F'$ morfisme en $\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}$, per a F i F' functors objecte en $\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}$, hem de demostrar que el diagrama de naturalitat de $\mathfrak{J}$, representat a la Figura (58), commuta. Primer, donat $h' : B' \rightarrow C'$ morfisme en C^{op} , la transformació natural $\mu = (\mu^{B'})_{B' \in \text{C}_0}$ té per components morfismes de $F(B')$ en $F'(B)$. Il·lustrem a la Figura (59) la transformació natural μ i el seu diagrama de naturalitat. A continuació, definim l'aplicació $\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(g, \mu)$ com a la Figura (60).

Comprovem la commutativitat del diagrama de la Figura (58). Siga α una transformació natural en $\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\mathbb{C}(-, A), F)$, aleshores

$$\mathfrak{J}_{A',F'} \circ \text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(g, \mu)(\alpha) = \mathfrak{J}_{A',F'}(\delta) \quad (\text{Figura (60)})$$

$$\begin{array}{ccc}
\mu^{B'}: F(B') & \longrightarrow & F'(B') \\
F(B') & \xrightarrow{\mu^{B'}} & F'(B') \\
\downarrow F(h') & \circlearrowleft & \downarrow F'(h') \\
F(C') & \xrightarrow{\mu^{C'}} & F'(C')
\end{array}$$

Figura 59: La transformació natural μ i el seu diagrama de naturalitat.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(g, \mu): \text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\mathcal{C}(-, A), F) & \longrightarrow & \text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(\mathcal{C}(-, A'), F') \\
\alpha & \longmapsto & \delta \\
\\
\delta^{B'}: \mathcal{C}(B', A') & \longrightarrow & F'(B') \quad \text{per a } B' \in \text{Ob}(\text{C}^{\text{op}}) \\
h & \longmapsto & \mu^{B'}(\alpha^{B'}(g \circ h))
\end{array}$$

Figura 60: L'aplicació $\text{Set}^{\text{C}^{\text{op}}}(g, \mu)$.

$$\begin{aligned}
&= \delta^{A'} \circ \text{id}_{A'} && \text{(Figura 54)} \\
&= \mu^{A'}(\alpha^{A'}(g)) && \text{(Figura 60)} \\
&= \mu^{A'}(F(g)(\alpha^A \circ \text{id}_A)) && \text{(Equació 3)} \\
&= (\mu^{A'} \circ F(g))(\mathcal{J}_{A,F}(\alpha)). && \text{(Figura 54)}
\end{aligned}$$

Per tant, acabem de demostrar que la bijecció $\mathcal{J}_{A,F}$ és natural en A i F .
Açò demostra, finalment, el Lema de Yoneda. ■

Donem un corol·lari pràcticament immediat del Lema de Yoneda.

Corol·lari 3.16. El functor $C(-, \cdot) : C \rightarrow \text{Set}^{C^{\text{op}}}$ (Figura 53) és ple i fidel.

Demostració. $C(-, \cdot)$ serà ple i fidel si, per a dos objectes A i B en C , es té que $C(-, \cdot) : C(A, B) \rightarrow \text{Set}^{C^{\text{op}}}(C(-, A), C(-, B))$ és bijectiva.

Pel Lema de Yoneda (Teorema 3.14), tenim que $\text{Set}^{C^{\text{op}}}(C(-, A), C(-, B))$ està en bijecció amb $C(A, B)$. ■

El functor $C(-, \cdot)$ és conegut com la *Imbibició de Yoneda* i el resultat del Corol·lari (3.16) expressa un resultat molt poderós, a saber, que les transformacions naturals entre els functors representats corresponen a morfismes entre els objectes que representen. A continuació donem alguns resultats com a exemple de l'aplicació i la força del Corol·lari (3.16).

Corol·lari 3.17 (Teorema de Cayley [13]). Tot grup G és isomorf a un subgrup d'un grup de permutació.

Demostració. Assumim G com la categoria d'un únic objecte G puix tot grup és un monoide (Exemple 2.6). Doncs, els endomorfismes de la categoria G sobre el seu únic objecte defineixen el grup G . Per tant, existeix un únic functor contravariant $F : G^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ i un únic functor covariant $G : G \rightarrow \text{Set}$.

1. Els functors de G a Set i els functors de G^{op} a Set

Suposem una categoria C , aleshores un functor $F_X : G \rightarrow C$ assigna l'únic objecte de G , denotat $*$, a un objecte X en C i assigna a cada morfisme g en G l'endomorfisme $g_* : X \rightarrow X$ en C . A més a més, per ser F_X un functor, s'ha de verificar que

1. $h_*g_* = (hg)_*$ per a tot $g, h \in \mathbf{G}$.
2. $e_* = \text{id}_X$ on $e \in \mathbf{G}$ és l'element identitat.

En definitiva, el functor $F_X : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{C}$ defineix una *acció* del grup $\mathbf{G}$ sobre l'objecte X en $\mathbf{C}$. A més, en concret, si $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$, direm que l'objecte X dotat amb l'acció del grup $\mathbf{G}$ és un $\mathbf{G}$ -conjunt. Així, l'acció definida pel functor $F_X : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{C}$ s'anomena *acció a l'esquerra* i l'acció definida pel functor contravariant $F_X^{\text{op}} : \mathbf{G}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$ s'anomena *acció a la dreta*. Si denotem per $g^* : X \rightarrow X$ el morfisme en $\mathbf{C}$ que assigna F_X^{op} a cada morfisme g en $\mathbf{G}$, tenim que les condicions que ha de verificar el functor contravariant F_X^{op} serien

1. $g^*h^* = (hg)^*$ per a tot $g, h \in \mathbf{G}$.
2. $e^* = \text{id}_X$ on $e \in \mathbf{G}$ és l'element identitat.

Observem que, com els functors preserven isomorfismes (Proposició 2.41) i tots els morfismes de $\mathbf{G}$ són isomorfismes (Exemple 5), les imatges dels functors $F_X : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{C}$ i $F_X^{\text{op}} : \mathbf{G}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$ són isomorfismes.

Finalment, ens preguntem com són les transformacions naturals entre els functors $F_X : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{C}$ i $F_Y : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{C}$, per a X i Y objectes en $\mathbf{C}$. Ja que la categoria $\mathbf{G}$ només té un objecte, la transformació natural $\alpha : F_X \Rightarrow F_Y$ només pot consistir d'un únic morfisme $\alpha^{XY} : X \rightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ tal que és $\mathbf{G}$ -equivariant, és a dir, que per a cada $g \in \mathbf{G}$ el següent diagrama commuta.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\
 g_* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g_* \\
 X & \xrightarrow{\alpha} & Y
 \end{array}$$

2. Aplicació del Lema de Yoneda

Tenim que el functor $F : \mathbf{G}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ defineix una acció a la dreta sobre el $\mathbf{G}$ -conjunt $\mathbf{G}$. Per tant, la Imbibició de Yoneda $\mathbf{G}(-, \cdot) : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{G}^{\text{op}}}$ té per objectes a la imatge als $\mathbf{G}$ -conjunts de les accions a la dreta del grup

G. Pel Corollari (3.16), sabem que $G(-, \cdot)$ és ple i fidel i, així, els únics endomorfismes **G**-equivariants del **G**-conjunt **G** són els morfismes definits per composició a l'esquerra d'un element fixe de **G**. Per tant, tot endomorfisme **G**-equivariant de **G** és un automorfisme.

Pel que acabem de demostrar obtenim que la Imbibició de Yoneda $G(-, \cdot)$ defineix un isomorfisme entre **G** i el grup d'automorfismes del **G**-conjunt **G**, que és objecte en $\mathbf{Set}^{G^{op}}$. Composant aquest isomorfisme amb el functor d'oblit i fidel de $\mathbf{Set}^{G^{op}}$ en **Set** s'obté un isomorfisme entre el grup **G** i un subgrup del grup d'automorfismes $\text{Aut}(G)$ del conjunt G .

Açò demostra el Teorema de Cayley. ■

Nota 3.18. A banda del *Lema de Yoneda* existeix un resultat dual conegut com *Co-Yoneda*. Aquest lema anàleg és equivalent, però emprant un functor F morfisme en $\mathbf{Set}^C$ i treballa amb una bijecció natural de $\mathbf{Set}^C(F, C(A, -))$ en $F(A)$ en compte d'una bijecció natural de $\mathbf{Set}^{C^{op}}(C(-, A), F)$ en $F(A)$. A més, la prova és anàloga a la demostració que hem donat del Lema de Yoneda.

Per altra banda, és important remarcar que hi ha autors que consideren el Lema de Yoneda que hem demostrat com el Co-Yoneda i el nostre Co-Yoneda com el Lema de Yoneda. No és pas important, doncs és una qüestió d'elecció, però dites interpretacions amb les respectives demostracions es poden trobar en [13] i [7]. Nosaltres ens hem limitat a seguir el punt de vista de [17].

Donem ara una relació entre la isomorfia entre objectes i la bijecció natural entre conjunts de morfismes.

Proposició 3.19. *Donats A i B objectes en C suposem que, per a tot objecte X en C , existeix una bijecció $\mathcal{J}_X : C(X, A) \rightarrow C(X, B)$ natural en X . Aleshores, A i B són isomorfs.*

Demostració. Com existeix $\mathcal{J}_X : C(X, A) \rightarrow C(X, B)$ bijecció natural en X pel Lema de Yoneda tenim que $C(-, A)$ i $C(-, B)$ són objectes isomorfs en $\mathbf{Set}^{C^{op}}$. Com $C(-, \cdot)$ és ple i fidel, pel Corollari (3.16), es dedueix que A i B són isomorfs. ■

Nota 3.20. Si considerem la bijecció natural $\mathfrak{Y}_X : \mathcal{C}(A, X) \rightarrow \mathcal{C}(B, X)$ tindríem per dualitat un resultat anàleg a la Proposició (3.19).

Nota 3.21. És molt important destacar que el *Lema de Yoneda* representa tot un canvi de paradigma a les Matemàtiques. Efectivament, en moltes àrees de les Matemàtiques s'intenta demostrar la isomorfia de dos *objectes* A i B trobant una bijecció explícita entre ells, però amb *Yoneda* no necessitem trobar un camí bijectiu d' A a B . De fet, només cal saber com anar des dels *camins* que acaben en A i fins als camins que acaben en B mitjançant una bijecció, malgrat no donar cap inversa. La lliçó del *Lema de Yoneda* seria, doncs, *Dis-me amb qui vas i et diré qui ets* (dita popular) o també *Pels seus fruits els coneixereu* (San Mateo 7, 16).

Podem estendre l'argument del *Lema de Yoneda* per estudiar la isomorfia d'objectes. De fet, podem veure que dos functors F i G de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ són isomorfs com a objectes de $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Naturalment, direm que F i G són isomorfs en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ si existeixen dos morfismes en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, és a dir, transformacions naturals de F en G i de G en F tal que la composició és un morfisme identitat en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$. És a dir, existeixen transformacions naturals $\alpha : F \Rightarrow G$ i $\beta : G \Rightarrow F$ tals que les composicions d'ambdues, $\alpha \circ \beta : G \Rightarrow G$ i $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow F$, verifiquen que $\alpha \circ \beta = \text{id}_G$ i $\beta \circ \alpha = \text{id}_F$.

Donem una caracterització de la isomorfia entre objectes de $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ o similarment entre functors de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$.

Proposició 3.22. *Les següents afirmacions són equivalents.*

1. *Els functors F i G , objectes en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, són isomorfs.*
2. *Existeix una transformació natural $\alpha : F \Rightarrow G$ tal que totes les seues components són isomorfismes.*

Demostració. Primerament, veiem que l'afirmació 1 implica l'afirmació 2. Suposem que F i G són functors, objectes en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, isomorfs i siguen $\alpha : F \Rightarrow G$ i $\beta : G \Rightarrow F$ les transformacions naturals que serveixen d'isomorfisme entre F i G . És a dir, es compleix que $\alpha \circ \beta = \text{id}_G$ i $\beta \circ \alpha = \text{id}_F$.

Siga A un objecte en $\mathcal{C}$, aleshores les components de α i β serien de la forma $\alpha^A : F(A) \rightarrow G(A)$ i $\beta^A : G(A) \rightarrow F(A)$. A més, aquestes components serien

componibles i estudiem ara la forma d'aquestes composicions començant per la composició $\beta^A \circ \alpha^A$.

$$\begin{aligned}\beta^A \circ \alpha^A &= (\beta \circ \alpha)^A \\ &= (\text{id}_F)^A \\ &= \text{id}_{F(A)}.\end{aligned}$$

Respecte a la composició $\alpha^A \circ \beta^A$ obtenim el següent resultat.

$$\begin{aligned}\alpha^A \circ \beta^A &= (\alpha \circ \beta)^A \\ &= (\text{id}_G)^A \\ &= \text{id}_{G(A)}.\end{aligned}$$

Per tant, hem demostrat que totes les components de α són isomorfismes. Seguidament, demostrem que l'afirmació 2 implica l'afirmació 1. Suposem ara que existeix $\alpha : F \Longrightarrow G$ transformació natural tal que, per a cada objecte A en $\mathbf{C}$, la component $\alpha^A : F(A) \rightarrow G(A)$ és isomorfisme. Volem veure que els functors F i G són objectes isomorfs en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Com, per a cada objecte A en $\mathbf{C}$, la component α^A és isomorfisme denotem per β^A el morfisme de $G(A)$ a $F(A)$ invers de α^A tal que $\alpha^A \circ \beta^A = \text{id}_{G(A)}$ i $\beta^A \circ \alpha^A = \text{id}_{F(A)}$. La transformació natural de la família dels β^A , per a A objecte en $\mathbf{C}$, seria $\beta = (\beta^A)_{A \in \mathbf{C}_0}$.

Anem a demostrar que $\beta : G \Longrightarrow F$ és transformació natural i, consegüentment, caldrà veure que el seu quadrat de naturalitat commuta.

Sabem que α és transformació natural i, per tant, el diagrama de naturalitat de la Figura (61) commuta per a $f : A \rightarrow B$ morfisme en $\mathbf{C}$. Així doncs, es verifica la següent igualtat.

$$G(f) \circ \alpha^A = \alpha^B \circ F(f). \quad (4)$$

Per altra banda, si $f : A \rightarrow B$ és morfisme en $\mathbf{C}$, el diagrama de naturalitat de β és el diagrama de la Figura (62). Demostrem que, de fet, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\alpha^A} & G(A) \\
 F(f) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(f) \\
 F(B) & \xrightarrow{\alpha^B} & G(B)
 \end{array}$$

Figura 61: Diagrama de naturalitat de α .

$$\begin{array}{ccc}
 G(A) & \xrightarrow{\beta^A} & F(A) \\
 F(f) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(f) \\
 G(B) & \xrightarrow{\beta^B} & F(B)
 \end{array}$$

Figura 62: Diagrama de naturalitat de β .

de β commuta. Donat $f : A \rightarrow B$ morfisme en $\mathbf{C}$, aleshores

$$\begin{aligned}
 F(f) \circ \beta^A &= \text{id}_{F(B)} \circ F(f) \circ \beta^A \\
 &= \beta^B \circ \alpha^B \circ F(f) \circ \beta^A && (\beta^B \circ \alpha^B = \text{id}_{F(B)}) \\
 &= \beta^B \circ G(f) \circ \alpha^A \circ \beta^A && (\text{Equació (4)}) \\
 &= \beta^B \circ G(f). && (\alpha^A \circ \beta^A = \text{id}_{F(A)})
 \end{aligned}$$

Per tant, el diagrama de naturalitat de β commuta i, així, es dedueix que β és transformació natural. A més a més, per definició de les components de les transformacions naturals α i β tenim que $\alpha \circ \beta = \text{id}_G$ i $\beta \circ \alpha = \text{id}_F$. Doncs, acabem de demostrar que existeix un isomorfisme natural entre els functors F i G que equival a dir que F i G són objectes isomorfs en la categoria $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. ■

Suposem ara que es donen les condicions del Lema de Yoneda. És a dir, siguen F i G functors de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ i suposem que, per a tot objecte A de $\mathbf{C}$ i per a tot objecte X de $\mathbf{D}$, existeix una bijecció $\mathbf{D}(X, F(A)) \cong \mathbf{D}(X, G(A))$ natural en X i A . Açò vol dir que els objectes $\mathbf{C}(-, F(A))$ i $\mathbf{C}(-, G(A))$ són isomorfs en $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ per isomorfismes naturals en $\mathbf{C}$. Per la fidelitat i plenitud de la *Imbibició de Yoneda* que és el functor $\mathbf{C}(-, \cdot)$ es té que $F(A)$ i $G(A)$ són isomorfs en $\mathbf{D}$ per isomorfismes naturals en $\mathbf{C}$ (Proposició 2.51) i, per tant, els functors F i G són isomorfs com a objectes de $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ (Proposició 3.22). En definitiva, aquest argument és la demostració del següent corol·lari.

Corol·lari 3.23. Siguen F i G functors de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ tals que, per a tot objecte A en $\mathbf{C}$ i per a tot objecte X en $\mathbf{D}$, existeix una bijecció natural en X i A

$$\mathbf{D}(X, F(A)) \cong \mathbf{D}(X, G(A)).$$

Aleshores, els functors F i G són isomorfs com a objectes en $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

4 Estudi de l'equivalència de categories

La matemàtica és la ciència de
l'ordre i la mesura, de belles
cadenes de raonaments, tots
senzills i fàcils.

René Descartes

4.1 Equivalència de categories

Un dels conceptes més importants de la Teoria de Categories és l'isomorfia, tal i com hem vist anteriorment. Clarament, la igualtat entre objectes és una relació molt forta. Altres relacions més febles, com la isomorfia, permeten també obtindre resultats interessants. Per exemple, ja havíem vist a la Proposició 2.56 que dos objectes terminals són isomorfs, és a dir, que no existeix una forma de distingir-los des del punt de vista de la Teoria de Categories.

Traslladant-nos al món dels functors entre categories és natural intuir, anàlogament, la relació d'isomorfia entre categories.

Definició 4.1 (Isomorfia de categories). Siguen les categories C i D . Aleshores, C i D són *isomorfs* si existeixen $F : C \rightarrow D$ i $G : D \rightarrow C$ functors tals que $F \circ G = \text{id}_D$ i $G \circ F = \text{id}_C$ (Figura (63)).

No obstant, també existeix una relació d'“igualtat” entre categories mitjançant functors que és més feble que l'isomorfia entre categories. però que preserva les bones propietats categòriques. Aquesta relació relaxa la definició d'isomorfia entre categories exigint només que els functors composició $F \circ G$ i $G \circ F$ siguin *isomorfs* al functor id_D en la categoria de functors D^D i al functor id_C en la categoria de functors C^C , respectivament. Així arribem al concepte d'*equivalència de categories*.

Definició 4.2 (Equivalència de categories). Donades dos categories C i D direm que són *equivalents* si existeixen $F : C \rightarrow D$ i $G : D \rightarrow C$ functors i isomorfismes naturals $\mu : \text{id}_C \Rightarrow G \circ F$ i $\nu : F \circ G \Rightarrow \text{id}_D$.

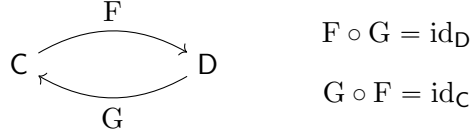


Figura 63: Isomorfisme entre categories.

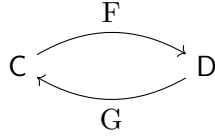


Figura 64: Equivalència entre categories.

A més a més, F i G són *pseudoinversos* entre ells i reben el nom d'*equivalència entre categories*. Per altra banda, una *dualitat entre categories* C i D és una equivalència entre les categories C^{op} i D o, equivalentment, entre C i D^{op} . Il·lustrem el concepte d'equivalència entre categories amb la Figura (64).

Notem que si dos categories són isomorfs aleshores són equivalents, però el recíproc no sempre és cert. Donem un exemple per a il·lustrar-ho.

Exemple 4.3. Siga el preordre P i siga Q el quocient de P sobre la relació d'equivalència denotada $\equiv$. Aquesta relació d'equivalència compleix que, donats dos elements x i y , aquests estan relacionats, denotat $x \equiv y$, si, i només si, $x \leq y$ i $y \leq x$ en P . Per altra banda, siga $\pi : P \rightarrow Q$ l'aplicació quocient definida naturalment tal que, per una banda, assigna a tot objecte x en P la classe d'equivalència de x sobre $\equiv$, per altra banda, donat el morfisme $x \rightarrow y$ en P ($x \leq y$) li assigna el morfisme $[x]_{\equiv} \rightarrow [y]_{\equiv}$ en $P/\equiv$

$([x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv})$, definit per un ordre en $P/\equiv$ (Figura (65)). Si veiem P i Q com a categories, aleshores π és un functor i una equivalència de categories, però no sempre un isomorfisme.

1. El quocient de P admet un ordre ben definit.

Siga $(P, \leq)$ preordre vist com a categoria. Provem ara que $Q = P/\equiv$ admet un ordre. En concret, veiem que, donats x i y elements de P , els següents enuncisats són equivalents.

1. $[x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv}$.
2. $x \leq y$.

En efecte, veiem que l'equivalència anterior defineix un ordre i que està ben definit.

Reflexivitat.

$$[x]_{\equiv} \leq [x]_{\equiv} \text{ perquè } x \leq x.$$

Antisimetria.

$$\begin{aligned} [x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv} & \text{ si, i només si, } x \leq y \\ [y]_{\equiv} \leq [x]_{\equiv} & \text{ si, i només si, } y \leq x. \end{aligned}$$

Aleshores, $x = y$ i per tant $[x]_{\equiv} = [y]_{\equiv}$.

Transitivitat.

$$\begin{aligned} [x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv} & \text{ si, i només si, } x \leq y \leq z \\ & \text{ si, i només si, } x \leq z \\ & \text{ si, i només si, } [x]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv}. \end{aligned}$$

Ben definit.

$$\begin{array}{ccc}
\pi: & \mathbf{P} & \longrightarrow \mathbf{P}/\equiv \\
& \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ x \leq y \\ \downarrow \\ y \end{array} & \longmapsto \begin{array}{c} [x]_{\equiv} \\ \downarrow \\ [x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv} \\ \downarrow \\ [y]_{\equiv} \end{array}
\end{array}$$

Figura 65: L'aplicació quotient π .

Si $x' \in [x]_{\equiv}$, $y' \in [y]_{\equiv}$ i $x \leq y$, veiem que $x' \leq y'$. Efectivament, tenim, per una part, que $x \leq x'$ i que $x' \leq x$ i, per l'altra, que $y \leq y'$ i que $y' \leq y$. Com $x \leq y$, aleshores $x' \leq x \leq y \leq y'$ i, finalment, es té que $x' \leq y'$. Acabem de demostrar que l'equivalència $\equiv$ defineix un ordre.

2. L'aplicació quotient π és un functor i una equivalència de categories però no un isomorfisme.

Considerem ara l'aplicació quotient π i veiem que és un functor.

Axioma de la identitat

Siga x element de $\mathbf{P}$ i considerem $\text{id}_x = x$ morfisme identitat, aleshores

$$\begin{aligned}
\pi(\text{id}_x) &= [x]_{\equiv} \\
&= \text{id}_{[x]_{\equiv}} \\
&= \text{id}_{\pi(x)}.
\end{aligned}$$

Açò demostra que l'aplicació quotient π verifica l'Axioma de la identitat.

Axioma de la composició.

Siguen x, y, z elements de $\mathbf{P}$ tals que existeixen els morfismes $x \rightarrow y$ i $y \rightarrow z$ componibles en $\mathbf{P}$ o, equivalentment, tals que $x \leq y$ i $y \leq z$, aleshores

$$\begin{aligned}
\pi((y \leq z) \circ (x \leq y)) &= \pi(x \leq z) \\
&= [x]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\Pi: \mathbf{P}/\equiv & \longrightarrow & \mathbf{P} \\
\begin{array}{c} [x]_{\equiv} \\ \downarrow \\ [y]_{\equiv} \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} x' \\ \downarrow \\ y' \end{array} \\
[x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv} & & x' \leq y'
\end{array}$$

Figura 66: El functor Π .

$$\begin{aligned}
&= [x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv} && (\text{ordre}) \\
&= ([y]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv}) \circ ([x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv}) \\
&= \pi(y \leq z) \circ \pi(x \leq y).
\end{aligned}$$

Tot plegat, acabem de demostrar que π és un functor. Demostrem que és una equivalència de categories però no necessàriament un isomorfisme. No obstant, primer caldria definir un altre functor, que denotem $\Pi : \mathbf{P}/\equiv \rightarrow \mathbf{P}$, tal que verifiqui ser la pseudoinversa de π però no la seua inversa. Doncs, considerem Π tal que, per una banda, assigna a tota classe d'equivalència $[x]_{\equiv}$ en $\mathbf{P}/\equiv$ un únic element x' de $[x]_{\equiv}$ en $\mathbf{P}$. Notem que si assumim l'Axioma d'Elecció podem triar l'element x' de $[x]_{\equiv}$. Per altra banda, a un morfisme $[x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv}$ en $\mathbf{P}/\equiv$ li assigna el morfisme $x' \leq y'$ en $\mathbf{P}$. En efecte, observem que si $[x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv}$, aleshores existeixen $x'' \in [x]_{\equiv}$ i $y'' \in [y]_{\equiv}$ tals que $x'' \leq y''$. Així, com $x' \in [x]_{\equiv}$ i $y' \in [y]_{\equiv}$, trobem que $x' \leq x'' \leq y'' \leq y'$, és a dir, $x' \leq y'$. Mostrem a la Figura (66) el functor Π . Comprovem que $\Pi : \mathbf{P}/\equiv \rightarrow \mathbf{P}$ és, de fet, un functor.

Axioma de la identitat

Siga $[x]_{\equiv}$ element de $\mathbf{P}/\equiv$ i considerem el morfisme identitat associat a $[x]_{\equiv}$, és a dir, $\text{id}_{[x]_{\equiv}} : [x]_{\equiv} \leq [x]_{\equiv}$. Aleshores,

$$\Pi(\text{id}_{[x]_{\equiv}}) = \Pi([x]_{\equiv}) \leq \Pi([x]_{\equiv}) = x' \leq y' = \text{id}_{\Pi([x]_{\equiv})}.$$

Acabem de demostrar l'Axioma de la identitat per a Π .

Axioma de la composició

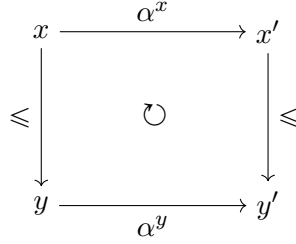


Figura 67: Diagrama de naturalitat de α .

Siguen $[x]_{\equiv}, [y]_{\equiv}$ i $[z]_{\equiv}$ objectes en $\mathbf{P}/\equiv$ tals que els morfismes $[x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv}$ i $[y]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv}$ són componibles en $\mathbf{P}/\equiv$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
 \Pi([y]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv}) \circ ([x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv}) &= \Pi([x]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv}) \\
 &= x' \leq z' \\
 &= x' \leq y' \leq z' && \text{(ordre)} \\
 &= (y' \leq z') \circ (x' \leq y') \\
 &= \Pi([y]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv}) \circ \Pi([x]_{\equiv} \leq [y]_{\equiv}).
 \end{aligned}$$

Acabem de demostrar l'Axioma de la composició per a Π .

D'aquesta manera, hem comprovat que Π és un functor. Veiem que Π és la pseudoinversa de π per a demostrar que les categories $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}/\equiv$ són equivalents. Per tant, considerem la composició de functors $\Pi \circ \pi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ tal que assigna a tot objecte x en $\mathbf{P}$ l'objecte x' en $\mathbf{P}$, que era l'element triat de la classe d'equivalència $[x]_{\equiv}$. Doncs, definim la transformació natural $\alpha : \text{id}_{\mathbf{P}} \Rightarrow \Pi \circ \pi$ de components $(\alpha^x)_{x \in \text{Ob}(\mathbf{P})}$ tal que la component α^x és $\alpha^x : \text{id}(x) \rightarrow \Pi \circ \pi(x)$, és a dir, $\alpha^x : x \rightarrow x'$ o, equivalentment, $x \leq x'$. Notem que, per la propietat d'antisimetria de l'ordre $\leq$, la inversa de la component α^x , és a dir, $x \leq x'$, és $x' \leq x$ i, així, totes les components de α són isomorfismes. Només queda verificar que el diagrama de naturalitat de α (Figura 67) commuta per a demostrar que α és un isomorfisme natural. En efecte, si $x \leq y$ és un morfisme en $\mathbf{P}$ tenim que

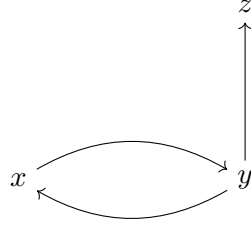


Figura 68: Preordre P.

$$\begin{aligned}
 (x' \leq y') \circ \alpha^x &= (x' \leq y') \circ (x \leq x') \\
 &= x \leq y' \\
 &= (y \leq y') \circ (x \leq y) \\
 &= \alpha^y \circ (x \leq y).
 \end{aligned}$$

En definitiva, $\alpha : \text{id}_P \Rightarrow \Pi \circ \pi$ és isomorfisme natural.

Per altra banda, necessitem definir $\beta : \pi \circ \Pi \Rightarrow \text{id}_{P/\equiv}$ isomorfisme natural.

A més a més, la composició de functors $\pi \circ \Pi : P/\equiv \rightarrow P/\equiv$ assigna a tot objecte $[x]_{\equiv}$ en $P/\equiv$ l'objecte $[x']_{\equiv}$ en $P/\equiv$. Però, per definició de l'element x' , es té que $x \equiv x'$ i, per tant, $[x]_{\equiv} = [x']_{\equiv}$. En resum, la composició $\pi \circ \Pi$ és el functor identitat en $\text{id}_{P/\equiv}$ i, doncs, β és la transformació natural identitat, que és, trivialment, isomorfisme natural.

En definitiva, acabem de demostrar que les categories P i $P/\equiv$ són equivalents.

Veiem amb un exemple particular que no necessàriament han de ser isomorfes.

Per exemple, considerem el preordre P format per tres objectes x, y i z tals que $x \leq y$, $y \leq x$ i $y \leq z$. Il·lustrem a la Figura (68) el preordre P . La imatge per π del preordre P seria el quocient de P sobre $\equiv$, és a dir, $P/\equiv$, i estaria format per les classes d'equivalència $[z]_{\equiv}$ i $[x]_{\equiv}$ les quals verifiquen que $[x]_{\equiv} \leq [z]_{\equiv}$. Il·lustrem aquest fet a la Figura (69). Finalment, suposem, sense pèrdua de generalitat, que $\Pi([x]_{\equiv}) = x$. Doncs, si apliquem el functor Π a $P/\equiv$ obtenim un subconjunt del preordre P format pels objectes z i x tal que $x \leq z$. Clarament, la composició de functors $\Pi \circ \pi$ no és igual al functor identitat sobre P i, per tant, les categories P i $P/\equiv$ no són isomorfes,



Figura 69: Quocient de P sobre $\equiv$.

però si equivalents.

4.2 Una caracterització d'equivalència de categories

Ens proposem ara donar una caracterització dels functors que definixen equivalències entre dos categories. En efecte, un functor serà una equivalència de categories si, i sols si, és fidel, ple i *essencialment sobrejectiu sobre els objectes*. Naturalment, introduïm primer els functors essencialment sobrejectius sobre els objectes.

Definició 4.4 (Functor essencialment sobrejectiu sobre els objectes). Siga $F : C \rightarrow D$ functor direm que és *essencialment sobrejectiu sobre els objectes* si, per a tot D objecte en D , existeix C objecte en C tal que $D \cong F(C)$. És a dir, si existeixen $f : D \rightarrow F(C)$ i $g : F(C) \rightarrow D$ morfismes en D tals que es compleix que $f \circ g = \text{id}_{F(C)}$ i $g \circ f = \text{id}_D$.

A més a més, és necessari presentar i demostrar els següents lemes sobre commutativitat de diagrames.

Lema 4.5. *Siga una categoria C . Siguen un morfisme $f : A \rightarrow B$ en C i els isomorfismes $g : A \rightarrow A'$ i $h : B \rightarrow B'$ en C . Aleshores, tots ells determinen un únic morfisme $f' : A' \rightarrow B'$ en C tal que els següents diagrames (o almenys un d'ells) commuta.*

$$\begin{array}{ccc}
A & \xleftarrow{\cong} & A' \\
\downarrow f & & \downarrow f' \\
B & \xrightarrow{\cong} & B'
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\cong} & A' \\
\downarrow f & & \downarrow f' \\
B & \xrightarrow{\cong} & B'
\end{array}$$

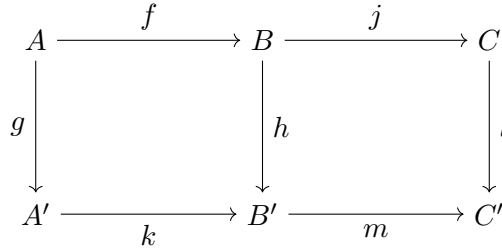
$$\begin{array}{ccc}
A & \xleftarrow{\cong} & A' \\
\downarrow f & & \downarrow f' \\
B & \xleftarrow{\cong} & B'
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\cong} & A' \\
\downarrow f & & \downarrow f' \\
B & \xleftarrow{\cong} & B'
\end{array}$$

Demostració. Primerament, que $g : A \rightarrow A'$ siga un isomorfisme en $\mathcal{C}$ vol dir que existeix un morfisme invers $g^{-1} : A' \rightarrow A$ en $\mathcal{C}$ tal que $g \circ g^{-1} = \text{id}_{A'}$ i $g^{-1} \circ g = \text{id}_A$. Anàlogament, que $h : B \rightarrow B'$ siga un isomorfisme en $\mathcal{C}$ vol dir que existeix un morfisme invers $h^{-1} : B' \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$ tal que $h \circ h^{-1} = \text{id}_{B'}$ i $h^{-1} \circ h = \text{id}_B$.

Definim el morfisme $f' : A' \rightarrow B'$ com $f' = h \circ f \circ g^{-1}$ i notem que, definit f' d'aquesta forma, el primer diagrama commuta. Per altra banda, la definició de f' es dona si, i només si, $f' \circ g = h \circ f$, demostrant-se la commutativitat del segon diagrama. A més, la definició de f' també es dona si, i només si, $h^{-1} \circ f' = f \circ g^{-1}$, que implica la commutativitat del tercer diagrama, si, i només si, $h^{-1} \circ f' \circ g = f$, que demostra la commutativitat del quart diagrama.

Acabem de demostrar l'existència del morfisme f' que implica la commutativitat d'un dels diagrames. A més, hem demostrat que un dels quatre diagrames commuta si, i només si, ho fa la resta. ■

Lema 4.6. *Considerem el següent diagrama sobre la categoria $\mathcal{C}$*



i suposem que el rectangle exterior commuta. Aleshores, el rectangle complet commuta si es verifica algun dels següents enuncisats.

1. el rectangle $BCC'B'$ commuta i el morfisme m és monomorfisme.
2. el rectangle $ABB'A'$ commuta i el morfisme f és epimorfisme.

Demostració. Notem que ambdues proposicions són duals així que bastarà amb demostrar només (1). Per tant, tenim que $m \circ k \circ g = l \circ j \circ f$ i $l \circ j = m \circ h$ per la commutativitat del rectangle exterior i per la commutativitat del rectangle $BCC'B'$, respectivament. En conseqüència, per les igualtats anteriors, es segueix que $m \circ k \circ g = m \circ h \circ f$. Finalment, com m és monomorfisme dedueix que $k \circ g = h \circ f$ i, així, $ABB'A'$ commuta. ■

Ja tenim les eines essencials per a enunciar i demostrar la següent caracterització de les equivalències entre categories.

Teorema 4.7 (Caracterització de l'equivalència de categories). *Donades les categories $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$, un functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ defineix una equivalència entre les categories $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ si, i només si, el functor F és ple, fidel i essencialment sobrejectiu sobre els objectes.*¹¹

Demostració. Siguen les categories $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ i els functors $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ amb els isomorfismes naturals $\alpha : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$, $\beta : F \circ G \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$. Demostrem que F és essencialment sobrejectiu sobre els objectes, fidel i ple.

1. Essencialment sobrejectiu sobre els objectes.

¹¹La part necessària de l'equivalència entre categories per un functor sempre es dona. No obstant, cal suposar l'axioma de l'elecció per a que es done la suficiència del teorema.

Notem que, per a tot D objecte en D , la component $\beta^D : F(G(D)) \rightarrow D$ és isomorfisme. Doncs, per definició, F és essencialment sobrejectiu sobre els objectes.

2. Fidelitat.

Siguen $f : C \rightarrow C'$ i $g : C \rightarrow C'$ morfismes en C . Si $F(f) = F(g)$, aleshores ambdós f i g defineixen diagrames de naturalitat de α . En efecte,

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha^C} & G(F(C)) \\ f \downarrow & & \downarrow G(F(f)) = G(F(g)) \\ C' & \xrightarrow{\alpha^{C'}} & G(F(C')) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha^C} & G(F(C)) \\ g \downarrow & & \downarrow G(F(f)) = G(F(g)) \\ C' & \xrightarrow{\alpha^{C'}} & G(F(C')) \end{array}$$

No obstant, pel Lema (4.5), es dedueix que $f = g$ i, així, F és fidel. Per altra banda, per simetria i per un argument anàleg, tindríem que G també és fidel.

3. Plenitud.

Siga $k : F(C) \rightarrow F(C')$ morfisme en D , per a C i C' objectes en C . Aleshores, pel Lema (4.5), es té que $G(k)$ i els isomorfismes α^C i $\alpha^{C'}$ defineixen un únic $h : C \rightarrow C'$ morfisme en C per al qual, tant $G(k)$ com $G(F(h))$, fan que els següents diagrames commuten.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha^C} & G(F(C)) \\ h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(k) \\ C' & \xrightarrow{\alpha^{C'}} & G(F(C')) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha^C} & G(F(C)) \\ h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G(F(h)) \\ C' & \xrightarrow{\alpha^{C'}} & G(F(C')) \end{array}$$

Aplicant el Lema (4.5) de nou, es té que $G(k) = G(F(h))$. Pel que s'ha vist abans G és fidel i, per tant, $F(h) = k$. Doncs, F és ple.

En conclusió, F és ple, fidel i essencialment sobrejectiu sobre els objectes.

Ara veiem que és suficient que un functor siga ple, fidel i essencialment sobrejectiu sobre els objectes per a que siga una equivalència entre categories. Donades les categories $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ suposem que el functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ és ple, fidel i essencialment sobrejectiu sobre els objectes. Veiem que F és una equivalència entre les categories $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$.

Per l'Axioma de l'Elecció, com F és essencialment sobrejectiu sobre els objectes, triem, per a cada D objecte en $\mathcal{D}$, un objecte $G(D)$ en $\mathcal{C}$ i un isomorfisme $\beta^D : F(G(D)) \rightarrow D$ en $\mathcal{D}$. Per a cada $l : D \rightarrow D'$ morfisme en $\mathcal{D}$, pel Lema (4.5), es defineix un únic morfisme $F(G(D)) \rightarrow F(G(D'))$ fent que el següent diagrama commute.

$$\begin{array}{ccc} F(G(D)) & \xrightarrow{\beta^D} & D \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow l \\ F(G(D')) & \xrightarrow{\beta^{D'}} & D' \end{array}$$

Ja que F és fidel, existeix un únic morfisme $G(D) \rightarrow G(D')$ amb la seua imatge sota F que defineix $G(l)$. Aquesta definició està feta de forma que els isomorfismes escollits s'acoblen a les components de la transformació natural $\beta : F \circ G \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$. Finalment, només cal demostrar que l'assignació $l \mapsto G(l)$ és functorial i definir un isomorfisme natural $\alpha : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$.

4. Functorialitat.

La functorialitat de l'assignació $l \mapsto G(l)$ és conseqüència del Lema (4.5) i la fidelitat de F .

5. Axioma de la identitat.

Els morfismes $F(G(\text{id}_D)) : F(G(D)) \rightarrow F(G(D))$ i $F(\text{id}_{G(D)}) : F(G(D)) \rightarrow F(G(D))$ en $\mathcal{D}$ fan que els següents diagrames commuten.

$$\begin{array}{ccc}
F(G(D)) & \xrightarrow{\beta^D} & D \\
F(G(\text{id}_D)) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{id}_D \\
F(G(D)) & \xrightarrow{\beta^D} & D'
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
F(G(D)) & \xrightarrow{\beta^D} & D \\
F(\text{id}_{G(D)}) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{id}_D \\
F(G(D)) & \xrightarrow{\beta^D} & D'
\end{array}$$

Pel Lema (4.5), tenim que $F(G(\text{id}_D)) = F(\text{id}_{G(D)})$ i, com F és fidel, es conclou que $G(\text{id}_D) = \text{id}_{G(D)}$.

6. Axioma de la composició.

Siguen $l : D \rightarrow D'$ i $l' : D \rightarrow D''$ morfismes en D . Tenim que els morfismes $F(G(l') \circ G(l))$, $F(G(l' \circ l)) : F(G(D)) \rightarrow F(G(D''))$ en D fan que els següents diagrames conmuten.

$$\begin{array}{ccc}
F(G(D)) & \xrightarrow{\beta^D} & D \\
F(G(l') \circ G(l)) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow l' \circ l \\
F(G(D'')) & \xrightarrow{\beta^{D''}} & D''
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
F(G(D)) & \xrightarrow{\beta^D} & D \\
F(G(l' \circ l)) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow l' \circ l \\
F(G(D'')) & \xrightarrow{\beta^{D''}} & D''
\end{array}$$

Pel Lema (4.5), tenim que $F(G(l') \circ G(l)) = F(G(l' \circ l))$ i, com F és fidel, es conclou que $G(l') \circ G(l) = G(l' \circ l)$.

7. Definició de l'isomorfisme natural $\alpha : \text{id}_C \Rightarrow G \circ F$.

Com F és ple i fidel, definim les components $\alpha^C : C \Rightarrow G(F(C))$ especificant isomorfismes (Proposició 2.51) $F \circ \alpha^C : F(C) \rightarrow F[G(F(C))]$.

Definim $F \circ \alpha^C = \beta_{F(C)}^{-1}$. Per tant, per a tot $f : A \rightarrow B$, el diagrama següent commuta.

$$\begin{array}{ccccc}
F(C) & \xrightarrow{F \circ \alpha^C} & F[G(F(C))] & \xrightarrow{\beta^{F(C)}} & F(C) \\
\downarrow F(f) & & \downarrow F[G(F(f))] & & \downarrow F(f) \\
F(C') & \xrightarrow{F \circ \alpha^{C'}} & F[G(F(C'))] & \xrightarrow{\beta^{F(C')}} & F(C')
\end{array}$$

En efecte, l'anterior diagrama commuta ja que el quadrat de la dreta commuta per la naturalitat de β i el de l'esquerra commuta perquè $\beta^{F(C')}$ és isomorfisme (Lema 4.6 i 2.39).

Doncs, com el quadrat de la dreta commuta, per la fidelitat de F es té que $\alpha^{C'} \circ f = G(F(f)) \circ \alpha^C$ i, així, α és un isomorfisme natural.

En conclusió, $F : C \rightarrow D$ defineix una equivalència de categories. ■

5 La dualitat de Lindenbaum-Tarski

La lògica és justament
considerada la base de totes les
demés ciències, encara que només
siga pel fet que en qualsevol
raonament podem emprar
conceptes presos del camp de la
lògica, i que qualsevol inferència
correcta procedix segons les seues
lleis.

*Introduction to Logic: and to the
Methodology of Deductive
Sciences
Alfred Tarski*

Estudiarem en aquesta secció un exemple d'equivalència de categories, en concret, la *Dualitat de Lindenbaum-Tarski*. Per tal de preparar-nos per a examinar la Dualitat de Lindenbaum-Tarski, introduïrem el concepte de *reticle* i anirem exigint al reticle més condicions fins arribar a un *Àlgebra Booleana completa i atòmica*. Seguidament, definirem diverses categories sobre les àlgebres Booleanes completes i atòmiques vistes com a estructures algebàriques, com a ordres o com a parts d'un conjunt, respectivament. Per acabar, demostrarem la Dualitat de Lindenbaum-Tarski, a saber, que dites categories són equivalents entre elles. Necessitarem algunes definicions per a començar a treballar.

Definició 5.1 (Reticle). Un *reticle* és un conjunt parcialment ordenat $(P, \leq)$ on tota parella d'elements x, y té un ínfim, denotat $x \wedge y$ o $\inf(x, y)$, i un suprem, denotat $x \vee y$ o $\sup(x, y)$. A més a més, existeix el major de tots els elements, que denotem per 1, i el menor de tots els elements, que denotem per 0.

Nota 5.2. Si dos elements x i y d'un reticle $(P, \leq)$ verifiquen que $x \wedge y = x$ o $x \vee y = y$ direm que y *majora* a x . Denotarem aquest fet com $x \leq y$.

Nota 5.3 (Lleis d'absorció). Siguen x, y elements d'un reticle $(P, \leq)$, aleshores

$$1. \ x = x \vee (x \wedge y); \qquad 2. \ x = x \wedge (x \vee y).$$

Exigim a un reticle dos condicions perquè siga un àlgebra Booleana com a estructura ordenada.

Definició 5.4 (Àlgebra Booleana com a estructura ordenada). Un reticle $(P, \leq)$ s'anomena *àlgebra Booleana* si

1. Tot element x del reticle té un complementari, és a dir, existeix $\neg x$ element del reticle tal que $x \vee \neg x = 1$ i $x \wedge \neg x = 0$.
2. El reticle és *distributiu*, és a dir, per a tots x, y, z es verifica que

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

En aquest cas, escriurem $(B, \leq)$, en compte de $(P, \leq)$, per a remarcar que el reticle és una àlgebra Booleana.

Definim a continuació un àlgebra Booleana com a estructura algebraica.

Definició 5.5 (Àlgebra Booleana com a estructura algebraica). Siga B un conjunt i siguen les operacions binàries de conjunció i disjunció sobre B , així com l'operació unària de negació sobre B , denotades $\wedge, \vee$ i $\neg$, respectivament. Siguen, a més, 0 i 1 els neutres de la disjunció i la conjunció, respectivament. Direm que la tupla $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ és un *àlgebra Booleana* si verifica els següents axiomes.

1. Axioma de l'associativitat.

Per a tot $a, b, c \in B$,

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c; \qquad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c.$$

2. Axioma del neutre.

Per a tot $a \in B$,

$$a \wedge 1 = a; \qquad a \vee 0 = a.$$

3. Axioma de la commutativitat.

Per a tot $a, b \in B$,

$$a \wedge b = b \wedge a; \qquad a \vee b = b \vee a.$$

4. Axioma del complementari.

Per a tot $a \in B$, existeix $\neg a \in B$ tal que

$$a \wedge \neg a = 0; \qquad a \vee \neg a = 1.$$

5. Axioma de la distribució.

Per a tot $a, b, c \in B$,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Anem a demostrar que la definició d'àlgebra Booleana com a estructura ordenada i la definició d'àlgebra Booleana com a estructura algebraica són equivalents.

Proposició 5.6. *Les definicions d'àlgebra Booleana com a estructura ordenada (Definició 5.4) i d'àlgebra Booleana com a estructura algebraica (Definició 5.5) són equivalents.*

Demostració. Primer demostrem que, donada un àlgebra Booleana com a estructura ordenada, podem construir un àlgebra Booleana com a estructura algebraica. Siga $(B, \leq)$ un àlgebra Booleana com a estructura ordenada, aleshores necessitem definir les operacions de conjunció, disjunció i complementari sobre B , denotades per $\wedge_B, \vee_B$ i $\neg_B$, respectivament. A més a més, cal definir els neutres de la conjunció i la disjunció, denotats 0_B i 1_B , respectivament.

Per una banda, definim la conjunció $\wedge_B$ com una operació tal que, per a tot a i b elements de B , es té que

$$a \wedge_B b = \inf\{a, b\}.$$

D'altra banda, definim la disjunció $\vee_B$ com una operació tal que, per a tot a i b elements de P , es té que

$$a \vee_B b = \sup\{a, b\}.$$

Notem que estes definicions tenen sentit perquè $(B, \leq)$ és un reticle. Ademés, identifiquem el complementari $\neg_B$ amb el complementari en $(B, \leq)$, és a dir, $\neg$. Per tant, per a tot element a de B , es té que

$$\neg_B a = \neg a.$$

Finalment, definim 0_B i 1_B com l'ínfim de B i el suprem de B , respectivament. És a dir,

$$0_B = \inf B, \quad 1_B = \sup B.$$

Demostrem que, sota aquestes definicions, la tupla $(B, \wedge_B, \vee_B, \neg_B, 0_B, 1_B)$ és un àlgebra Booleana.

1. Axioma de l'associativitat

Considerem $a, b, c \in B$. Per una banda, veiem l'associativitat per a $\wedge_B$.

$$a \wedge_B (b \wedge_B c) = \inf\{a, \inf\{b, c\}\} = \inf\{a, b, c\} = \inf\{\inf\{a, b\}, c\} = (a \wedge_B b) \wedge_B c.$$

Per altra banda, veiem l'associativitat per a $\vee_B$.

$$a \vee_B (b \vee_B c) = \sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{a, b, c\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\} = (a \vee_B b) \vee_B c.$$

Acabem de demostrar l'axioma de l'associativitat.

2. Axioma del neutre

Siga $a \in B$. Aleshores, per una banda,

$$a \wedge_B 1_B = \inf\{a, \sup B\} = a.$$

D'altra banda,

$$a \vee_B 0_B = \sup\{a, \inf B\} = a.$$

Acabem de demostrar l'axioma del neutre.

3. Axioma de la commutativitat

Considerem $a, b \in B$. Doncs, per un costat,

$$a \wedge_B b = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\} = b \wedge_B a.$$

Per altre costat,

$$a \vee_B b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b \vee_B a.$$

Acabem de demostrar l'axioma de la commutativitat.

4. Axioma del complementari

Siga $a \in B$. Aleshores,

$$a \wedge_B \neg_B a = \inf\{a, \neg a\} = \inf B = 0_B.$$

A més a més,

$$a \vee_B \neg_B a = \sup\{a, \neg a\} = \sup B = 1_B.$$

5. Axioma de la distribució

Siguen $a, b, c \in B$. Aleshores,

$$\begin{aligned} a \wedge_B (b \vee_B c) &= \inf\{a, \sup\{b, c\}\}. \\ (a \wedge_B b) \vee_B (a \wedge_B c) &= \sup\{\inf\{a, b\}, \inf\{a, c\}\}. \end{aligned}$$

Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $a \leq b \leq c$, és a dir, es verifica que $\inf\{a, b\} = a$, $\inf\{a, c\} = a$ i $\sup\{b, c\} = c$. Per tant,

$$\begin{aligned} a \wedge_B (b \vee_B c) &= \inf\{a, \sup\{b, c\}\} \\ &= \inf\{a, c\} \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup\{a, a\} \\
&= \sup\{\inf\{a, b\}, \inf\{a, c\}\} \\
&= (a \wedge_B b) \vee_B (a \wedge_B c).
\end{aligned}$$

Acabem de demostrar l'axioma de la distribució.

Com la tupla $(B, \wedge_B, \vee_B, \neg_B, 0_B, 1_B)$ verifica els anteriors axiomes podem assegurar que és un àlgebra Booleana *com a estructura algebraica*.

Seguidament, demostrem que, donada un àlgebra Booleana com a estructura algebraica, podem construir un àlgebra Booleana com a estructura ordenada. Siga $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ un àlgebra Booleana com a estructura algebraica, aleshores necessitem definir una operació $\leq_B$ tal que $(B, \leq_B)$ siga un reticle i verifiqui les condicions de les àlgebres Booleanes com a estructures ordenades. Doncs, definim $\leq_B$ com una operació tal que, donats x i y elements de B es té que

$$\begin{aligned}
x \leq_B y &\text{ si, i només si, } x \wedge y = x. \\
&\text{si, i només si, } x \vee y = y.
\end{aligned}$$

Primer, demostrem que, així definit, $(B, \leq_B)$ és un reticle. Observem que, per definició de $\leq_P$, tota parella d'elements x i y de B té suprem i ínfim perquè o bé $x \wedge y = x$, i, per tant, $x \leq_B y$, o bé $x \vee y = y$, i, per tant, $y \leq_B x$. Per altra banda, 0 i 1 són, respectivament, el menor i el major element de B . En efecte, per l'axioma del neutre, per a tot x en B es té que

$$x \wedge 0 = 0; \quad x \vee 1 = 1.$$

Per tant, per a tot x en B , tenim que $0 \leq_B x$ i $x \leq_B 1$.

Acabem de demostrar que $(B, \leq_B)$ és un reticle. Veiem que verifica les condicions per a ser àlgebra Booleana.

1. Per l'axioma del complementari, per a tot x element de B , existeix $\neg x$ element de B tal que

$$x \wedge \neg x = 0, \quad x \vee \neg x = 1.$$

2. Per l'axioma de la distribució, per a tots x, y i z elements de B , tenim que

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Acabem de demostrar que $(B, \leq_B)$ és un àlgebra Booleana *com a estructura ordenada*.

En definitiva, una àlgebra Booleana com a estructura algebraica equival a una àlgebra Booleana com a estructura ordenada i viceversa. ■

Nota 5.7. Per la Proposició (5.6) tenim que les àlgebres Booleanes com a estructures ordenades equivalen a les àlgebres Booleanes com a estructures algebraiques. Doncs, és suficient triar només una de les anteriors definicions. En el nostre cas, d'ara endavant en referirem, indistintament, a les àlgebres Booleanes com a estructures ordenades.

Demostrem que de la definició d'àlgebra Booleana es dedueix la unicitat dels complementaris.

Proposició 5.8. *En un àlgebra Booleana els complementaris són únics.*

Demostració. Suposem que y i z són complementaris de x . Aleshores,

$$\begin{aligned} y &= y \wedge 1 \\ &= y \wedge (x \vee z) \\ &= (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \\ &= 0 \vee (y \wedge z) \\ &= y \wedge z. \end{aligned}$$

Per tant, per la Nota 5.2, tenim que $y \leq z$. Similarment,

$$\begin{aligned} z &= z \wedge 1 \\ &= z \wedge (x \vee y) \\ &= (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\ &= 0 \vee (z \wedge y) \\ &= z \wedge y. \end{aligned}$$

De nou, per la Nota 5.2, es té que $z \leq y$. En conclusió, $y = z$. ■

La definició d'àlgebra Booleana exigeix la distribució del suprem respecte de l'ínfim. Veiem a la Proposició 5.9 que, donada un àlgebra Booleana, tenim necessàriament la distribució de l'ínfim respecte del suprem.

Proposició 5.9 (Llei distributiva de la intersecció respecte de la unió).
Siga un àlgebra Booleana i siguen x, y i z elements de l'àlgebra Booleana. Aleshores,

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Demostració. Considerem x, y i z elements d'un àlgebra Booleana. Llavors,

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) && \text{(Nota 5.3)} \\ &= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) && \text{(associativitat)} \\ &= x \vee (z \wedge (x \vee y)) && \text{(distribució)} \\ &= (x \wedge (x \vee y)) \vee (z \wedge (x \vee y)) && \text{(Nota 5.3)} \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z). && \text{(distribució)} \end{aligned}$$

Queda així demostrada la Proposició (5.9). ■

Nota 5.10. En una àlgebra Booleana, la propietat de la distribució del suprem respecte l'ínfim és, de fet, condició necessària i suficient de la distribució de l'ínfim respecte del suprem.

Clarament, no tots els reticles són àlgebres Booleanes. Donem un exemple d'un reticle que no és un àlgebra Booleana a la Figura (70).

Exemple 5.11. Comprovem que el reticle mostrat a la Figura (70) no és un àlgebra Booleana. En concret, demostrem que no és àlgebra Booleana perquè, malgrat que tot element té un complementari, no és distributiu. En efecte, els complementaris són

$$\begin{aligned} \neg 0 &= 1; & \neg y &= z. \\ \neg x &= z; & \neg z &= x. \end{aligned}$$

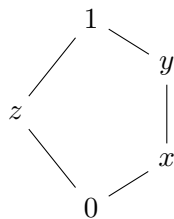


Figura 70: Exemple de reticle que no és àlgebra Booleana.

Veiem que no és un reticle distributiu. Si en fora un es verificaria, per a tota tripla d'elements del reticle, la següent igualtat.

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Però, tenim que

$$x \vee (y \wedge z) = x; \quad (x \vee y) \wedge (x \vee z) = y.$$

Per tant, aquest reticle no pot ser una àlgebra Booleana.

A continuació, definim el concepte de completitud per a àlgebres Booleanes exigint que tot subconjunt de l'àlgebra Booleana tinga suprem i ínfim.

Definició 5.12 (Àlgebra Booleana Completa). Una àlgebra Booleana $(B, \leq)$ s'anomena *completa* si tot subconjunt A de B té un ínfim, denotat per $\bigwedge A$, i un suprem, denotat per $\bigvee A$.

Nota 5.13. Per a tota àlgebra Booleana B es té que el conjunt buit, denotat per $\emptyset$, és subconjunt de B . A més a més, es compleix que $\bigvee \emptyset = 0$ i $\bigwedge \emptyset = 1$.

Com la definició d'àlgebra Booleana i completa requereix la noció de subconjunt, és intuïtiu assumir que existeix un exemple d'àlgebra Booleana completa que té per elements conjunts. En efecte, veiem a continuació que un exemple clàssic d'àlgebra Booleana completa ve donat pel conjunt potència d'un conjunt, denotat $\mathcal{P}(X)$, amb la relació d'ordre donada per la inclusió de conjunts, és a dir, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Exemple 5.14 (Exemple canònic d'àlgebra Booleana completa). Siga X un conjunt. Considerem $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, que és un conjunt parcialment ordenat. En efecte, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ verifica la propietat reflexiva, antisimètrica i transitiva. Primerament, la reflexivitat es dona perquè si A és element de $\mathcal{P}(X)$, aleshores $A \subseteq A$. Seguidament, si A i B són elements de $\mathcal{P}(X)$ tals que $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, aleshores $A = B$, demostrant-se la antisimetria. Finalment, com donats A, B i C elements de $\mathcal{P}(X)$ tals que $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ es té que $A \subseteq C$, obtenim la transitivitat.

Per altra banda, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ és un reticle perquè tot dos elements de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tenen ínfim i suprem, així com existeixen els elements més gran i més menut de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. En efecte, si A i B són elements de $\mathcal{P}(X)$, es té que

$$\begin{aligned} \inf(A, B) &= A \cap B; & \sup(A, B) &= A \cup B. \\ 0 &= \emptyset; & 1 &= X. \end{aligned}$$

A més, és una àlgebra Booleana perquè tot element té un complementari i perquè el reticle és distributiu. Donats A, B i C elements de $\mathcal{P}(X)$, tenim que

$$\neg A = X - A \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Veiem ara que aquesta àlgebra Booleana és completa.

Siga $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Aleshores, $\bigwedge \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$ i $\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$, on

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{A} &= \{x \in X \mid \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\} \\ \bigcup \mathcal{A} &= \{x \in X \mid \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}. \end{aligned}$$

En conclusió, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ és un àlgebra Booleana completa.

Tal i com ocorre amb la matèria física, les àlgebres Booleanes completes estan fonamentades sobre unitats *indivisibles*. Aquestes entitats inseparables les anomenen *àtoms*.

Definició 5.15 (Àtom). Un *àtom* a una àlgebra Booleana completa $(B, \leq)$ és un element x de B tal que $0 < x$ i tal que no existeix cap y de B que

verifica $0 < y < x$. Una àlgebra Booleana completa B es diu *atòmica* si tot element x de B és el suprem dels àtoms que estan sota ell. És a dir,

$$x = \bigvee \{a \mid a \leq x, a \text{ àtom}\}.$$

Donem un exemple concret d'àlgebra Booleana atòmica.

Exemple 5.16. Siga el conjunt $\{1, 2, 3\}$ i l'àlgebra Booleana $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$. La Figura (71) representa aquesta àlgebra Booleana que, a més, és atòmica. Es pot observar que, en aquest cas, els àtoms són els subconjunts amb un únic element.

A continuació, generalitzem l'exemple anterior i demostrem que els únics àtoms de l'àlgebra Booleana $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ són conjunts que tenen un únic element.

Exemple 5.17. Siga X un conjunt i l'àlgebra Booleana $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Veiem que el únics àtoms de $\mathcal{P}(X)$ són els subconjunts d'un únic element.

1. Àtoms de $\mathcal{P}(X)$.

Notem que $\{x\} \neq \emptyset$. Suposem que existeix un conjunt A en $\mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \subset A \subset \{x\}$. Si $\emptyset \subset A$, aleshores $A \neq \emptyset$ i, per tant, existeix $a \in A$. Però, com $A \subset \{x\}$, tenim que $a \in \{x\}$. Així, $a = x$ i $A = \{x\}$ la qual cosa és una contradicció perquè $A \subset \{x\}$.

Acabem de demostrar que els conjunts $\{x\}$ de $\mathcal{P}(X)$ són àtoms.

2. Unicitat dels àtoms de $\mathcal{P}(X)$.

Suposem, per reducció a l'absurd, que existeix $B \in \mathcal{P}(X)$ àtom tal que $B \neq \{x\}$, per a algun $x \in X$. Ja que B és àtom, aleshores $B \neq \emptyset$ i com per a tot $x \in X$, $B \neq \{x\}$. Doncs, B té almenys dos elements, un dels quals ha de ser, necessàriament, x perquè x és àtom. L'altre element l'anomenem y . En aquest cas, $\emptyset \subset \{x\} \subset B$ i, per tant, B no és àtom.

En definitiva,

$$\text{At}(\mathcal{P}(X)) = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

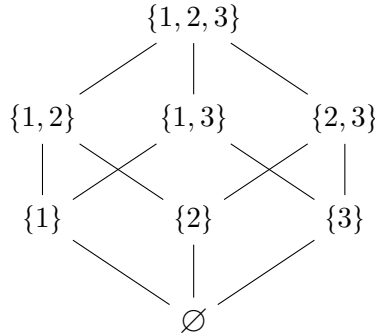


Figura 71: Exemple d'àlgebra Booleana atòmica.

Ara que hem definit finalment les àlgebres Booleanes completes i atòmiques, definim una categoria que tinga per objectes dites àlgebres Booleanes completes i atòmiques. A més a més, ens interessa definir els morfismes d'aquesta categoria de forma que preserven naturalment els suprems, ínfims i complementaris.

Nota 5.18. Per l'Exemple (5.14) sabem que el conjunt parcialment ordenat $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ és un àlgebra Booleana completa. A més, per l'exemple anterior, tenim que, també, és atòmica ja que si $A \in \mathcal{P}(X)$

$$A = \{\{a\} \mid a \in A\}.$$

Vista com a estructura algebraica la denotem per $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ()^c, \emptyset, X)$ on $\cup, \cap, ()^c, \emptyset$ i X denoten l'operació d'intersecció entre conjunts, l'operació d'unió entre conjunts, l'operació del complementari d'un conjunt, el conjunt buit i el conjunt total, respectivament.

Definició 5.19 (Categoria CABool). La categoria CABool és la categoria que té per objectes àlgebres Booleanes atòmiques completes i per morfismes els homomorfismes complets. És a dir, donats dos objectes $(B, \leq)$ i $(C, \leq)$ de CABool, direm que $f : B \rightarrow C$ és un homomorfisme complet si, per a tot

A subconjunt de B , les següents igualtats són vertaderes.

$$f\left(\bigvee A\right) = \bigvee\{f(a) \mid a \in A\}; \quad f\left(\bigwedge A\right) = \bigwedge\{f(a) \mid a \in A\}.$$

Estudiem les característiques dels homomorfismes complets.

Proposició 5.20. *Siguin $(B, \leq)$ i $(C, \leq)$ objectes en $\mathbf{CABool}$. Siga $f : B \rightarrow C$ homomorfisme complet de $\mathbf{CABool}$ i siguin x i y elements de B . Aleshores,*

1. $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
2. $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.
3. Si $x \leq y$ aleshores $f(x) \leq f(y)$.
4. $f(0) = 0$.
5. $f(1) = 1$.
6. $f(\neg x) = \neg f(x)$.

Demostració.

1. Per la definició d'homomorfisme complet,

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= f\left(\bigwedge\{x, y\}\right) \\ &= \bigwedge\{f(x), f(y)\} \\ &= f(x) \wedge f(y). \end{aligned}$$

2. Per la definició d'homomorfisme complet,

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= f\left(\bigvee\{x, y\}\right) \\ &= \bigvee\{f(x), f(y)\} \\ &= f(x) \vee f(y). \end{aligned}$$

3. Com $x \leq y$, aleshores $x = x \wedge y$ i, així, per l'apartat (1),

$$f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

Per tant, $f(x) \leq f(y)$.

4. Notem que

$$\begin{aligned} f(0) &= f\left(\bigvee \emptyset\right) && \text{(Nota 5.13.)} \\ &= \bigvee \{f(a) \mid a \in \emptyset\} \\ &= \bigvee \emptyset \\ &= 0. \end{aligned}$$

5. Notem que

$$\begin{aligned} f(1) &= f\left(\bigwedge \emptyset\right) && \text{(Nota 5.13.)} \\ &= \bigwedge \{f(a) \mid a \in \emptyset\} \\ &= \bigwedge \emptyset \\ &= 1. \end{aligned}$$

6. Necessitem demostrar que $0 = f(x) \wedge f(\neg x)$ i que $1 = f(x) \vee f(\neg x)$. Primerament, per l'apartat (4) i perquè f és homomorfisme complet, tenim que $0 = f(0) = f(x \wedge \neg x) = f(x) \wedge f(\neg x)$.

Per altra banda, per l'apartat (5) i perquè f és homomorfisme complet, tenim que $1 = f(1) = f(x \vee \neg x) = f(x) \vee f(\neg x)$. Com $(C, \leq)$ és un àlgebra Booleana completa i atòmica, és dedueix que $\neg f(x) = f(\neg x)$.

Acabem de demostrar totes les propietats. ■

Tot seguit demostrem més propietats de les àlgebres Booleanes atòmiques i completes. A més d'això, donem una condició suficient dels homomorfismes complets.

Proposició 5.21. *Siga $(B, \leq)$ un àlgebra Booleana completa i atòmica. Siguen x i y elements de B i A un subconjunt de B . Siga $(C, \leq)$ un àlgebra Booleana completa i atòmica i $f : B \rightarrow C$ una aplicació. Aleshores,*

$$1. \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y.$$

2. Els següents fets són equivalents.

$$2.1. \quad x \leq y;$$

$$2.2. \quad \neg y \leq x.$$

$$3. \quad \bigwedge A = \neg \bigvee \{\neg a \mid a \in A\}.$$

4. Si f preserva $\bigvee, 1$ i els complementaris aleshores és un homomorfisme complet.

Demostració. Suposem totes les hipòtesis de l'enunciat.

1. Hem de demostrar primer que $(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = 0$ i després que $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = 1$. En primer lloc,

$$\begin{aligned} (\neg y \wedge \neg x) \vee (x \vee y) &= \\ &= (\neg y \vee (x \vee y)) \wedge (\neg x \vee (x \vee y)) && \text{(Proposició 5.9)} \\ &= (1 \vee x) \wedge (1 \vee y) \\ &= 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

En segon lloc,

$$\begin{aligned} (\neg y \wedge \neg x) \wedge (x \vee y) &= \\ &= ((\neg y \wedge \neg x) \wedge x) \vee ((\neg y \wedge \neg x) \wedge y) && \text{(Proposició 5.9)} \\ &= (0 \wedge \neg y) \vee (0 \wedge \neg x) \\ &= 0 \vee 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Si suposem que $x \leq y$, aleshores $x \wedge y = x$ i $x \vee y = y$.

Per altra banda, per l'apartat anterior, obtenim que

$$\neg y \wedge \neg x = \neg(x \vee y) = \neg y.$$

Aleshores, $\neg y \leq \neg x$.

Si $\neg y \leq \neg x$, per la implicació anterior, tenim que $\neg\neg x \leq \neg\neg y$ i, llavors, per la unicitat dels complementaris, $x \leq y$.

3. Anomenem per Φ el suprem de tots els complementaris dels elements de A , és a dir, $\Phi = \bigvee \{\neg a \mid a \in A\}$. Per tant, $\neg\Phi$ és un element de B tal que $\Phi \vee \neg\Phi = 1$ i $\Phi \wedge \neg\Phi = 0$.

Per a tot $a \in A$ el seu complementari, $\neg a$, és un element de B tal que $a \vee \neg a = 1$ i $a \wedge \neg a = 0$.

Com Φ és $\bigvee \{\neg a \mid a \in A\}$, aleshores, per a tot $a \in A$, es té que $\neg a \leq \Phi$ i, a més a més, si existira un $z \in B$ tal que, per a tot $a \in A$, compleix que $\neg a \leq z$, necessàriament, s'obté que $\Phi \leq z$.

Endemés, per la Proposició (5.21), si per a tot $a \in A$ es té que $\neg a \leq \Phi$, aleshores, per a tot $a \in A$, $\neg\Phi \leq a$. Per tant, $\neg\Phi \leq \bigwedge A$.

Per altra banda, per la Proposició (5.21), demostrar que $\bigwedge A \leq \neg\Phi$ equival a demostrar que $\Phi \leq \neg\bigwedge A$. És a dir, anem a demostrar que $\bigvee \{\neg a \mid a \in A\} \leq \neg\bigwedge A$.

Notem que $\bigwedge A \leq a$, per a tot $a \in A$, i, aleshores, per la Proposició (5.21), tenim que $\neg a \leq \neg\bigwedge A$, per a tot $a \in A$. Doncs, trobem que $\neg\bigwedge A$ és fita superior del conjunt $\{\neg a \mid a \in A\}$.

Per tant, $\bigvee \{\neg a \mid a \in A\} \leq \neg\bigwedge A$ o també $\Phi \leq \neg\bigwedge A$ que, per la Proposició (5.21), és equivalent a $\neg\Phi \leq \bigwedge A$.

En conclusió, $\neg\Phi = \bigwedge A$ i, per tant, $\bigwedge A = \neg\bigvee \{\neg a \mid a \in A\}$.

4. Suposem que f és una funció tal que $f(1) = 1$, $f(\neg x) = \neg f(x)$ i $f(\bigvee A) = \bigvee \{f(a) \mid a \in A\}$, per a tot $A \subset B$ i $x \in B$.

Si $A \neq \emptyset$, aleshores

$$\begin{aligned} f\left(\bigvee A\right) &= f\left(\neg\bigvee \{\neg a \mid a \in A\}\right) \\ &= \neg f\left(\bigvee \{\neg a \mid a \in A\}\right) \\ &= \neg\bigvee \{f(\neg a) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \neg \bigvee \{ \neg f(a) \mid a \in A \} \\
&= \bigwedge f(A). \quad (\text{Apartat (3)})
\end{aligned}$$

Si $A = \emptyset$, aleshores $f(\bigwedge \emptyset) = f(1) = 1 = \bigwedge \emptyset = \bigwedge f(\emptyset)$.

Així, per definició, f és homomorfisme complet.

Acabem de demostrar la Proposició (5.21). ■

Recapitulant, notem que hem estudiat tres estructures.

1. Àlgebra Booleana Atòmica Completa com a estructura algebraica (Definició 5.5), denotada $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$, amb els seus axiomes i homomorfismes complets.

Li associem la categoria $\mathbf{CABoolAlg}$ que té per objectes les Àlgebres Booleanes Atòmiques Completes, com a estructures algebraiques, i per morfismes els homomorfismes complets.

2. Àlgebra Booleana Atòmica Completa com a ordre (Definició 5.4), denotada per $(B, \leq)$, amb els seus axiomes i homomorfismes complets.

Li associem la categoria $\mathbf{CABoolOrd}$ que té per objectes les Àlgebres Booleanes Atòmiques Completes com a ordres i per morfismes els homomorfismes complets.

3. Àlgebra Booleana Atòmica Completa de les parts d'un conjunt (Nota 5.18), denotada per $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ()^c, \emptyset, X)$.

Li associem la categoria oposada $\mathbf{Set}^{\text{op}}$, que té per objectes conjunts i per morfismes les funcions entre conjunts.

D'ara endavant estudiarem com es relacionen les tres anteriors categories.

Teorema 5.22. *Les categories $\mathbf{CABoolAlg}$ i $\mathbf{CABoolOrd}$ són isomorfes.*

Demostració. Primerament, anem a definir els functors entre ambdues categories i que denotem per

$$\Phi : \mathbf{CABoolOrd} \rightarrow \mathbf{CABoolAlg} \quad \Psi : \mathbf{CABoolAlg} \rightarrow \mathbf{CABoolOrd}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\Phi: \mathbf{CABoolOrd} \longrightarrow \mathbf{CABoolAlg} & & \Psi: \mathbf{CABoolAlg} \longrightarrow \mathbf{CABoolOrd} \\
\begin{array}{ccc}
(A, \leq_A) & & \mathbf{A} \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f \\
(B, \leq_B) & & \mathbf{B}
\end{array} & & \begin{array}{ccc}
\mathbf{A} & & (A, \leq) \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f \\
\mathbf{B} & & (B, \leq)
\end{array}
\end{array}$$

Figura 72: El functor Φ i el functor Ψ .

Respecte a Φ , si $(A, \leq_A)$ és objecte de $\mathbf{CABoolOrd}$, on $\leq_A$ denota l'ordre associat a A , aleshores $\Phi((A, \leq_A)) = (A, \wedge_A, \vee_A, \neg_A, 0_A, 1_A)$, on $\wedge_A, \vee_A$ i $\neg_A$ denoten l'operació suprem, l'operació ínfim i l'operació complementari associades a A , respectivament, així com 0_A i 1_A denoten l'element més menut de A i l'element més gran de A , respectivament (Proposició 5.6). Si f és un homomorfisme complet morfisme en $\mathbf{CABoolOrd}$, aleshores $\Phi(f) = f$. Respecte a Ψ , si $(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ és un objecte en $\mathbf{CABoolAlg}$, aleshores $\Psi(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1) = (A, \leq)$ i si f és un homomorfisme complet morfisme en $\mathbf{CABoolAlg}$, aleshores $\Psi(f) = f$.¹² Il·lustrem els functors Φ i Ψ , tal i com els hem definit, a la Figura (72).

Nota 5.23. D'ara endavant denotarem l'àlgebra Booleana atòmica i completa $(A, \wedge_A, \vee_A, \neg_A, 0_A, 1_A)$ per $\mathbf{A} = (\mathbf{A}, F)$, on F resumeix la 5-tupla $(\wedge_A, \vee_A, \neg_A, 0_A, 1_A)$.

Veiem que Φ és la inversa de Ψ . No obstant, per a simplificar la demostració de la inversa, en tots els casos només farem la demostració respecte l'ímfim $\wedge$ perquè per a la resta d'operacions i elements la demostració és equivalent.

1. Φ és la inversa de Ψ per l'esquerra.

Hem de demostrar que $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\mathbf{CABoolAlg}}$. No obstant, notem que per definició de Ψ i Φ només cal demostrar que $\Phi \circ \Psi$ i $\text{id}_{\mathbf{CABoolAlg}}$ actuen igual

¹²És trivial que Φ i Ψ són functors perquè, per una banda, estan ben definits per als objectes, doncs a cada element en $\mathbf{CABoolOrd}$ li correspon un únic element en $\mathbf{CABoolAlg}$ i viceversa (Proposició 5.6). Per altra banda, actuen com el functor identitat sobre morfismes complint, així, l'axioma de la identitat i l'axioma de la composició.

$$\begin{array}{ccc}
\Phi \circ \Psi : \mathbf{CABoolAlg} & \longrightarrow & \mathbf{CABoolAlg} \\
(\mathbf{A}, F) & & (\mathbf{A}, F') \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f \\
(\mathbf{B}, F) & & (\mathbf{B}, F')
\end{array}$$

Figura 73: El functor composició $\Phi \circ \Psi$.

sobre els objectes. Representem el functor composició $\Phi \circ \Psi$ a la Figura (73).

Si $x, y \in A$ denotem per z el suprem de x i y , és a dir, $z = x \vee y$. Aleshores,

$$z \wedge x = x \wedge y \wedge x = x \wedge y = z.$$

$$z \wedge y = x \wedge y \wedge y = x \wedge y = z.$$

Si u fora altre element de A tal que $u \wedge x = u$ i $u \wedge y = u$, aleshores

$$\begin{aligned}
u \wedge z &= u \wedge (x \vee y) \\
&= (u \wedge x) \vee y \\
&= u \vee y \\
&= u.
\end{aligned}$$

Llavors,

$$z = x \vee y = \inf\{x, y\}.$$

Per tant, acabem de demostrar que $\vee = \wedge'$. Si raonarem igual per a l'ínfim i el complementari arribaríem a la mateixa conclusió. En definitiva, hem demostrat que $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\mathbf{CABoolAlg}}$ i, per tant, Φ és la inversa per l'esquerra de Ψ .

2. Φ és la inversa de Ψ per la dreta.

Hem de demostrar que $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\mathbf{CABoolOrd}}$. De la mateixa forma que al cas anterior, per la definició de Ψ i Φ només cal demostrar que els functors

$$\Psi \circ \Phi: \mathbf{CABoolOrd} \longrightarrow \mathbf{CABoolOrd}$$

$$\begin{array}{ccc} (A, \leq) & & (A, \leq') \\ f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f \\ (B, \leq) & & (B, \leq') \end{array}$$

Figura 74: El functor composició $\Psi \circ \Phi$.

$\Psi \circ \Phi$ i $\text{id}_{\mathbf{CABoolOrd}}$ actuen igual sobre els objectes. Representem el functor composició $\Psi \circ \Phi$ a la Figura (74).

Pel que hem vist abans, $\wedge = \wedge'$. Aleshores, si $x, y \in A$ tal que $x \leq y$, per la Nota 5.2, tenim que $x \leq y$ si, i només si, $x \wedge y = x$ si, i només si, $x \wedge' y = x$ si, i només si, $x \leq' y$. En definitiva, $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\mathbf{CABoolOrd}}$. Açò demostra que Φ és la inversa per la dreta de Ψ .

En conclusió, Φ és la inversa de Ψ i viceversa. Acabem de demostrar que les categories $\mathbf{CABoolOrd}$ i $\mathbf{CABoolAlg}$ són isomorfes. ■

Nota 5.24. Com $\mathbf{CABoolAlg}$ i $\mathbf{CABoolOrd}$ són isomorfes emprarem la notació de $\mathbf{CABool}$, indistintament, per a referir-nos a qualsevol d'elles. En definitiva, tant se val una com l'altra.

Ara que acabem de demostrar que les categories $\mathbf{CABoolOrd}$ i $\mathbf{CABoolAlg}$ estan fortament lligades ens interessa descobrir el vincle entre la categoria $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ i $\mathbf{CABool}$. Però, per tal de trobar la relació entre les categories $\mathbf{CABool}$ i $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ necessitem abans uns lemes i resultats previs.

Lema 5.25. *Siga A un objecte en $\mathbf{CABool}$. Denotem per $\text{At}(A)$ el conjunt de tots els àtoms d' A . Aleshores,*

$$1_A = \bigvee \text{At}(A).$$

Demostració. $1_A = \bigvee \{a \mid a \leq 1_A, a \text{ àtom}\} = \bigvee \{a \mid a \text{ àtom}\} = \bigvee \text{At}(A)$. Açò demostra el Lema (5.25). ■

Lema 5.26. *Siguen A i B objectes en CABool i siga $f : A \rightarrow B$ morfisme en CABool , és a dir, un homomorfisme complet. Aleshores,*

$$1_B = \bigvee \{f(a) \mid a \text{ àtom}\}.$$

Demostració. Pel Lema (5.25), com f és homomorfisme complet, tenim que

$$1_B = f(1_A) = f\left(\bigvee \text{At}(A)\right) = \bigvee f(\text{At}(A)) = \bigvee \{f(a) \mid a \text{ àtom}\}.$$

Açò demostra el Lema (5.26). ■

Lema 5.27. *Si A és objecte en CABool i $a, b \in A$, els següents enunciats són equivalents.*

1. $a \wedge b = 0$;
2. $a \leq \neg b$.

Demostració. Suposem que $a \wedge b = 0$. Així, veiem que $a \wedge \neg b = a$.

$$\begin{aligned} a \wedge \neg b &= (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) && \text{(Nota 5.3)} \\ &= a \vee (b \wedge \neg b) \\ &= a \vee 0 \\ &= a. \end{aligned}$$

Aleshores, com $a \wedge \neg b = a$, deduem que $a \leq \neg b$.

Suposem que $a \leq \neg b$ i, per tant, $a \wedge \neg b = a$. Així, veiem que $a \wedge b = 0$.

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a \wedge \neg b) \wedge b \\ &= a \wedge (\neg b \wedge b) \\ &= a \wedge 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Açò demostra el Lema (5.27). ■

Lema 5.28. *Siga A objecte de CABool i siguen $a, c \in A$, on c és àtom. Els*

següents enunciats són equivalents.

1. $c \not\leq a$;
2. $a \leq \neg c$.

Demostració. Suposem que $c \not\leq a$. Per a demostrar la condició necessària suposem, per reducció a l'absurd, que $a \not\leq \neg c$. Notem que pel Lema 5.27 es dedueix que $a \wedge c \neq 0$.

Per altra banda, com A és una àlgebra Booleana completa i atòmica, aleshores

$$a \wedge c = \bigwedge \{z \mid z \leq a \wedge c, z \text{ àtom}\}.$$

Considerem z àtom tal que $z \leq a \wedge c$, aleshores $z \leq c$. Així,

$$\bigvee \{z \mid z \leq a \wedge c, z \text{ àtom}\} \leq c.$$

A més, $\bigvee \{z \mid z \leq a \wedge c, z \text{ àtom}\} \neq 0$ ja que, altrament, tindríem que $a \wedge c = 0$, la qual cosa és una contradicció.

Finalment, com c és àtom, tenim que

$$\bigvee \{z \mid z \leq a \wedge c, z \text{ àtom}\} = c.$$

però això és una contradicció perquè $c \not\leq a$. En conclusió, açò demostra que $a \leq \neg c$.

Suposem que $a \leq \neg c$. Per a demostrar la condició suficient suposem, per reducció a l'absurd, que $c \leq a$.

Pel Lema 5.27, sabem que $a \leq \neg c$ és equivalent a que $a \wedge c = 0$. Però si per hipòtesi $c \leq a$, aleshores $a \wedge c = c$. Doncs, diríem que $a \wedge c = 0$ i $a \wedge c = c$ deduint-se que $c = 0$, la qual cosa és una contradicció perquè c és àtom.

En definitiva, acabem de demostrar que $c \not\leq a$. ■

Lema 5.29. *Siga A objecte en CABool i siguen $a, c \in A$, on c àtom. Doncs,*

$$c \wedge \bigvee A = \bigvee \{c \wedge a \mid a \in A\}.$$

Demostració. Sabem que $a \leq \bigvee A$ i, per tant, $c \wedge a \leq c \wedge \bigvee A$, car

$$(c \wedge a) \wedge \left(c \wedge \bigvee A\right) = (c \wedge c) \wedge \left(a \wedge \bigvee A\right) = c \wedge a.$$

Aleshores, és té que $\bigvee \{c \wedge a \mid a \in A\} \leq c \wedge \bigvee A$.

Per altra banda, notem que $c \wedge a \leq a$ i, així, $\bigvee \{c \wedge a \mid a \in A\} \leq \bigvee A$.

Doncs,

$$\begin{aligned} (c \wedge \bigvee A) \wedge \left(\bigvee \{c \wedge a \mid a \in A\}\right) &= c \wedge \left(\bigvee A \wedge \bigvee \{c \wedge a \mid a \in A\}\right) \\ &= c \wedge \bigvee A. \end{aligned}$$

El que demostra que $c \wedge \bigvee A \leq \bigvee \{c \wedge a \mid a \in A\}$. En conclusió,

$$c \wedge \bigvee A = \bigvee \{c \wedge a \mid a \in A\}.$$

Açò demostra el Lema (5.29). ■

Lema 5.30 (Lema d'existència). *Si B és objecte en $\mathbf{CABool}$, $A \subset B$ i c és un àtom en A tal que $c \leq \bigvee A$, aleshores existeix $a \in A$ tal que $c \leq a$.*

Demostració. Suposem, per reducció a l'absurd, que no existeix $a \in A$ tal que $c \leq a$. Aleshores, si $a \in A$, tenim que $c \not\leq a$ i, pel Lema 5.28, tot $a \in A$ satisfà que $a \leq \neg c$. Així mateix, pel Lema 5.27, tot $a \in A$ satisfà que $a \wedge c = 0$.

Com $c \leq \bigvee A$, aleshores $c \wedge \bigvee A = c$ i, pel Lema 5.29, $c = c \wedge \bigvee A = 0$ la qual cosa és una contradicció perquè c és àtom. ■

Ara que tenim tots els lemes necessaris procedim a demostrar la íntima relació entre les categories $\mathbf{CABool}$ i $\mathbf{Set}^{\text{op}}$. En concret, demostrem que són categories equivalents.

Teorema 5.31. *Les categories $\mathbf{CABool}$ i $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ són equivalents.*

Demostració. Per a demostrar que $\mathbf{CABool}$ i $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ són equivalents hem de trobar un functor de $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ a $\mathbf{CABool}$ i un functor de $\mathbf{CABool}$ a $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ per als que existeixen isomorfismes naturals entre les seues composicions i els functors identitat sobre les respectives categories.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(\cdot) : \mathbf{Set}^{\text{op}} & \longrightarrow & \mathbf{CABool} \\
\\
\begin{array}{ccc}
X & & \mathcal{P}(\mathbf{X}) \\
f^{\text{op}} \downarrow & \longmapsto & \downarrow \mathcal{P}(f) \\
Y & & \mathcal{P}(\mathbf{Y})
\end{array} \\
\\
\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbf{Y}) \\
A & \longmapsto & f^{-1}[A] = \{y \in Y \mid f(y) \in A\}
\end{array}$$

Figura 75: El functor $\mathcal{P}(\cdot)$.

Definim un functor de $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ a $\mathbf{CABool}$ que denotem per $\mathcal{P}(\cdot)$. Donat un objecte X en $\mathbf{Set}^{\text{op}}$, aquest functor assigna al conjunt X l'àlgebra Booleana completa i atòmica, com estructura algebraica, sobre el conjunt potència de X , és a dir,

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}) = (\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ()^c, \emptyset, X).$$

Respecte als morfismes, si $f^{\text{op}} : X \rightarrow Y$ és un morfisme en $\mathbf{Set}^{\text{op}}$, el functor $\mathcal{P}(\cdot)$ assigna a f^{op} el morfisme $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$. Aquest morfisme $\mathcal{P}(f)$ assigna a tot subconjunt A de $\mathcal{P}(X)$ el conjunt antiimatge de f , que denotem per $f^{-1}[A]$, és a dir, el conjunt de tots els elements y en Y tals que la imatge per f de y , i.e., $f(y)$, es troba en A . Representem aquest functor a la Figura (75).

Notem que, per definició, si X és un conjunt, aleshores $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ és un àlgebra Booleana completa i atòmica, que denotem per $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Això vol dir que el functor $\mathcal{P}(\cdot)$ envia objectes a objectes i, per tant, està ben definit per als objectes. Per altra banda, si $f^{\text{op}} : X \rightarrow Y$ és morfisme en $\mathbf{Set}^{\text{op}}$, aleshores $\mathcal{P}(f^{\text{op}}) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ és un homomorfisme complet. En efecte, emprant la Proposició (5.21), basta comprovar que $\mathcal{P}(f^{\text{op}})$ preserva el suprem, el 1, o siga, X , i els complementaris.

1. Preserva els complementaris.

Primer veiem que preserva els complementaris, és a dir, que donat $A \in \mathcal{P}(X)$

es verifica que $\mathcal{P}(f^{\text{op}})(A^c) = [\mathcal{P}(f^{\text{op}})(A)]^c$. Però, clarament, es té que

$$[\mathcal{P}(f^{\text{op}})(A)]^c = \{y \in Y \mid f(y) \notin A\} = \{y \in Y \mid f(y) \in A^c\} = \mathcal{P}(f^{\text{op}})(A^c).$$

2. Preserva l'1.

Per altra banda, veiem que $\mathcal{P}(f^{\text{op}})$ preserva l'element 1 de $\mathcal{P}(X)$, que és X , a saber, que $\mathcal{P}(f^{\text{op}})(X) = Y$. Òbviament, com $f : Y \rightarrow X$, tenim que

$$\mathcal{P}(f^{\text{op}})(X) = \{y \in Y \mid f(y) \in X\} = Y.$$

3. Preserva els suprems.

Finalment, donat $\mathcal{A}$ subconjunt de $\mathcal{P}(X)$ hem de comprovar que es compleix que $\mathcal{P}(f^{\text{op}})(\mathcal{A}) = \bigcup \{\mathcal{P}(f^{\text{op}})(A_i) \mid A_i \in \mathcal{A}\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f^{\text{op}})(\mathcal{A}) &= \{y \in Y \mid f(y) \in \mathcal{A}\} \\ &= \bigcup \{y \in Y \mid f(y) \in A_i\} \\ &= \bigcup \{\mathcal{P}(f^{\text{op}})(A_i) \mid A_i \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

Llavors, acabem de demostrar que, donat f^{op} en $\mathbf{Set}^{\text{op}}$, $\mathcal{P}(f^{\text{op}})$ és homomorfisme complet entre àlgebres Booleanes completes i atòmiques, vistes com a estructura algebraica.

Havent comprovat que $\mathcal{P}(\cdot)$ està ben definit sobre morfismes i objectes, veiem que efectivament és un functor.

1. Axioma de la identitat.

Siga id_X^{op} morfisme identitat en $\mathbf{Set}^{\text{op}}$. Aleshores, $\mathcal{P}(\text{id}_X^{\text{op}})$ és un morfisme de $\mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{P}(X)$ tal que a tot A subconjunt de $\mathcal{P}(X)$ li assigna el conjunt $\text{id}_X^{-1}[A]$. A continuació representem l'assignació functorial que hem descrit i el morfisme $\mathcal{P}(\text{id}_X^{\text{op}})$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}(X) & \mathcal{P}(\text{id}_X^{\text{op}}): \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ \text{id}_X^{\text{op}} \downarrow & \longmapsto & \downarrow \mathcal{P}(\text{id}_X^{\text{op}}) & A \longmapsto \text{id}_X^{-1}[A] \\ X & & \mathcal{P}(X) & \end{array}$$

A més, notem que $\text{id}_X^{-1}[A] = A$.

$$\begin{aligned}\text{id}_X^{-1}[A] &= \{x \in X \mid \text{id}_X(x) \in A\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A\} \\ &= A.\end{aligned}$$

En conclusió, $\mathcal{P}(\text{id}_X^{\text{op}}) = \text{id}_{\mathcal{P}(X)}$ i així demostrem l'axioma de la identitat.

2. Axioma de la composició.

Siguen $f^{\text{op}} : X \rightarrow Y$ i $g^{\text{op}} : Y \rightarrow Z$ morfismes en Set^{op} componibles. Aleshores, $\mathcal{P}(f^{\text{op}})$ és un morfisme que assigna a tot subconjunt A de $\mathcal{P}(X)$ el conjunt $f^{-1}[A]$ i, per altra banda, $\mathcal{P}(g^{\text{op}})$ és un morfisme que assigna a tot subconjunt B de $\mathcal{P}(Y)$ el conjunt $g^{-1}[B]$. Així mateix, la imatge per $\mathcal{P}(\cdot)$ de la composició $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}$, que és $\mathcal{P}(g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$, és un morfisme que assigna a tot subconjunt A de $\mathcal{P}(X)$ el conjunt $(f \circ g)^{-1}[A]$. A continuació representem l'assignació functorial que acabem de descriure i els morfismes $\mathcal{P}(f^{\text{op}})$, $\mathcal{P}(g^{\text{op}})$ i $\mathcal{P}(g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}})$.

$$\begin{array}{ccccc} X & & \mathcal{P}(X) & & \mathcal{P}(f^{\text{op}}) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ f^{\text{op}} \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(f^{\text{op}}) & & A \longmapsto f^{-1}[A] \\ Y & \longmapsto & \mathcal{P}(Y) & & \mathcal{P}(g^{\text{op}}) : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(Z) \\ g^{\text{op}} \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(g^{\text{op}}) & & B \longmapsto g^{-1}[B] \\ Z & & \mathcal{P}(Z) & & \mathcal{P}(g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Z) \\ & & & & A \longmapsto (f \circ g)^{-1}[A] \end{array}$$

Comprovem que $\mathcal{P}(g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}) = \mathcal{P}(g^{\text{op}}) \circ \mathcal{P}(f^{\text{op}})$. Si $A \in \mathcal{P}(X)$, aleshores

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}(g^{\text{op}}) \circ \mathcal{P}(f^{\text{op}}))(A) &= \mathcal{P}(g^{\text{op}})(\mathcal{P}(f^{\text{op}})(A)) \\ &= \mathcal{P}(g^{\text{op}})(\{y \in Y \mid f(y) \in A\}) \\ &= \{z \in Z \mid f(g(z)) \in A\} \\ &= \{z \in Z \mid (f \circ g)(z) \in A\}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{At}(\cdot) : \mathbf{CABool} & \longrightarrow & \mathbf{Set}^{\text{op}} \\
\begin{array}{c} A \\ f \downarrow \\ B \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} \text{At}(A) = \{a \in A \mid a \text{ àtom}\} \\ \uparrow \text{At}(f)^{\text{op}} \\ \text{At}(B) = \{b \in B \mid b \text{ àtom}\} \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{At}(f)^{\text{op}} : \text{At}(B) & \longrightarrow & \text{At}(A) \\
b & \longmapsto & \begin{array}{l} \text{l'únic } a \in \text{At}(A) \\ \text{tal que } b \leq f(a) \end{array}
\end{array}$$

Figura 76: El functor $\text{At}(\cdot)$.

$$= \mathcal{P}(g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}})(A).$$

En conclusió, $\mathcal{P}(g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}) = \mathcal{P}(g^{\text{op}}) \circ \mathcal{P}(f^{\text{op}})$ i, així, demostrem l'axioma de la composició.

D'altra banda, ara que acabem de demostrar l'existència d'un functor de $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ a $\mathbf{CABool}$, cal definir un altre functor de $\mathbf{CABool}$ a $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ que denotem per $\text{At}(\cdot)$. Donat A objecte en $\mathbf{CABool}$, aquest functor assigna a A el conjunt $\text{At}(A)$, que és el conjunt de tots els elements de A que són àtoms. És a dir,

$$\text{At}(A) = \{a \in A \mid a \text{ és àtom}\}.$$

Respecte als morfismes, si $f : A \rightarrow B$ és homomorfisme complet en $\mathbf{CABool}$, el functor $\text{At}(\cdot)$ li assigna el morfisme $\text{At}(f)^{\text{op}} : \text{At}(B) \rightarrow \text{At}(A)$ en $\mathbf{Set}^{\text{op}}$. Aquest morfisme $\text{At}(f)$ assigna a cada element b de $\text{At}(B)$ l'únic element a de $\text{At}(A)$ tal que $b \leq f(a)$. Representem el functor $\text{At}(\cdot)$ a la Figura (76). Notem que, trivialment, $\text{At}(\cdot)$ assigna objectes a objectes i morfismes a morfismes. Comprovem ara que $\text{At}(\cdot)$ és un functor.

3. Axioma de la identitat.

Siga $\text{id}_A : A \rightarrow A$ l'homomorfisme complet identitat en $\mathbf{CABool}$. Aleshores,

$\text{At}(\text{id}_A)^{\text{op}} : \text{At}(A) \rightarrow \text{At}(A)$ és un morfisme en Set^{op} tal que a tot element a de $\text{At}(A)$ li assigna l'únic element a^{op} de forma que $a \leq \text{id}_A(a^{\text{op}})$. Representem, a continuació, l'assignació functorial que acabem de representar i el morfisme $\text{At}(\text{id}_A)$.

$$\begin{array}{ccc} A & \text{At}(A) & \text{At}(\text{id}_A)^{\text{op}} : \text{At}(A) \longrightarrow \text{At}(A) \\ \text{id}_A \downarrow & \longmapsto & \uparrow \text{At}(\text{id}_A)^{\text{op}} \\ A & \text{At}(A) & a \longmapsto a^{\text{op}} \text{ on } a \leq \text{id}_A(a^{\text{op}}) \end{array}$$

Notem que a^{op} és, per definició de $\text{At}(\cdot)$, únic i que $\text{id}_A(a^{\text{op}}) = a^{\text{op}}$. Per tant, $a = a^{\text{op}}$ atès que a és àtom. Així, acabem de demostrar que $\text{At}(\text{id}_A) = \text{id}_{\text{At}(A)}$.

4. Axioma de la composició.

Siguen $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ morfismes componibles en CABool i, per tant, homomorfismes complets. Aleshores, $\text{At}(f) : \text{At}(B) \rightarrow \text{At}(A)$ és un morfisme en Set^{op} que assigna a cada element b de $\text{At}(B)$ l'únic element a en $\text{At}(A)$ tal que $b \leq f(a)$. A més a més, $\text{At}(g) : \text{At}(C) \rightarrow \text{At}(B)$ assigna a cada element c de $\text{At}(C)$ l'únic element b de $\text{At}(B)$ tal que $c \leq g(b)$. Finalment, la imatge per $\text{At}(\cdot)$ de la composició $g \circ f$, que és $\text{At}(g \circ f)^{\text{op}} : \text{At}(C) \rightarrow \text{At}(A)$, assigna a cada element c de $\text{At}(C)$ l'únic element a en $\text{At}(A)$ tal que $c \leq g(f(a))$. A continuació, representem l'assignació functorial que acabem de descriure i els morfismes $\text{At}(f)^{\text{op}}$, $\text{At}(g)^{\text{op}}$ i $\text{At}(g \circ f)^{\text{op}}$.

$$\begin{array}{ccc}
A & & \text{At}(A) \\
f \downarrow & & \uparrow \text{At}(f)^{\text{op}} \\
B & \longmapsto & \text{At}(B) \\
g \downarrow & & \uparrow \text{At}(g)^{\text{op}} \\
C & & \text{At}(C)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{At}(f)^{\text{op}}: \text{At}(B) & \longrightarrow & \text{At}(A) \\
b & \longmapsto & \begin{array}{l} \text{únic } a \in \text{At}(A) \text{ tal} \\ \text{que } b \leq f(a) \end{array} \\
\text{At}(g)^{\text{op}}: \text{At}(C) & \longrightarrow & \text{At}(B) \\
c & \longmapsto & \begin{array}{l} \text{únic } b \in \text{At}(B) \text{ tal} \\ \text{que } c \leq g(b) \end{array} \\
\text{At}(g \circ f)^{\text{op}}: \text{At}(C) & \longrightarrow & \text{At}(A) \\
c & \longmapsto & \begin{array}{l} \text{únic } a \in \text{At}(A) \text{ tal} \\ \text{que } c \leq g(f(a)) \end{array}
\end{array}$$

Per a veure que $\text{At}(f) \circ \text{At}(g) = \text{At}(g \circ f)$ veiem que actuen igual sobre els mateixos objectes. Si c és element de $\text{At}(C)$, es té que

$$\begin{aligned}
(\text{At}(f) \circ \text{At}(g))(c) &= \text{At}(f)(b) && (\text{únic } b \in \text{At}(B) \text{ tal que } c \leq g(b)) \\
&= a. && (\text{únic } a \in \text{At}(A) \text{ tal que } b \leq f(a))
\end{aligned}$$

Per la Proposició 5.20, com f i g són homomorfismes complets, tenim que

$$c \leq g(b) \leq g(f(a)).$$

Per la unicitat de b i a , aleshores

$$\text{At}(g \circ f)(c) = (\text{At}(f) \circ \text{At}(g))(c).$$

Acabem de demostrar l'axioma de la composició. Per tant, amb açò demostrarem que, efectivament, $\text{At}(\cdot)$ és un functor.

$$\begin{array}{ccc}
\alpha^A: & A & \longrightarrow \mathcal{P}(\text{At}(A)) \\
& x & \longmapsto \bigcup \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha^A} & \mathcal{P}(\text{At}(A)) \\
\downarrow f & \circlearrowleft & \downarrow \mathcal{P}(\text{At}(f)) \\
B & \xrightarrow{\alpha^B} & \mathcal{P}(\text{At}(B))
\end{array}$$

Figura 77: La transformació natural α i el seu diagrama de naturalitat.

Per a veure que les categories $\mathbf{CABool}$ i $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ són equivalents veiem que existeixen $\alpha : \text{id}_{\mathbf{CABool}} \Rightarrow \mathcal{P} \circ \text{At}$ i $\beta : \text{id}_{\mathbf{Set}^{\text{op}}} \Rightarrow \text{At} \circ \mathcal{P}$ isomorfismes naturals les components dels quals són isomorfismes.

Siga $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ element de $\mathbf{CABool}$; definim la component de $\alpha = (\alpha^A)_{A \in \mathbf{CABool}_0}$ associada a A com un morfisme $\alpha^A : A \rightarrow \mathcal{P}(\text{At}(A))$ tal que, per a tot x en A , li assigna la unió de tots el elements a en $\text{At}(A)$ tals que $a \leq x$. Representem la transformació natural α i, donat $f : A \rightarrow B$ morfisme en $\mathbf{CABool}$, el seu diagrama de naturalitat a la Figura (77).

No obstant, abans de mostrar que α és isomorfisme natural, primerament, cal comprovar que, per a tot $\mathbf{A}$ en $\mathbf{CABool}$, α^A és un homomorfisme complet. Per a fer açò emprarem la Proposició 5.21.

5. α^A preserva suprema.

Siga X subconjunt de A veiem que

$$\alpha^A \left(\bigvee X \right) = \bigcup \{ \alpha^A(x) \mid x \in X \}.$$

Siga x un element en el conjunt de la dreta, aleshores tenim que $x \leq \bigvee X$. Altrament, si $a \in \text{At}(A)$ i $a \leq x$, llavors $a \leq \bigvee X$. Així, es dedueix que $a \in \alpha^A(\bigvee X)$ ja que, per definició, $\alpha^A(\bigvee X) = \bigcup \{a \mid a \leq \bigvee X, a \in \text{At}(A)\}$.

Per tant, $\alpha^A(x) \subset \alpha^A(\bigvee X)$ i, doncs, $\bigcup\{\alpha^A(x) \mid x \in X\} \subseteq \alpha^A(\bigvee X)$. Siga a un element en el conjunt de l'esquerra, aleshores, si $a \in \alpha^A(\bigvee X)$, tenim que a és àtom i $a \leq \bigvee X$. Pel Lema d'Existència (5.30), existeix $x \in X$ tal que $a \leq x$ i, per tant, $a \in \alpha^A(x)$. Així, $a \in \bigcup\{\alpha^A(x) \mid x \in X\}$, demostrant-se, ergo, aquesta inclusió. Acabem de demostrar que α^A preserva els suprems.

6. α^A preserva A .

Bastarà demostrar que $\alpha^A(A) = \text{At}(A)$, però notem que

$$\alpha^A(A) = \bigcup\{a \mid a \leq A, a \in \text{At}(A)\} = \text{At}(A).$$

7. α^A preserva els complementaris.

Si $x \in A$ cal demostrar que

$$\alpha^A(\neg x) = \neg \alpha^A(x) = \text{At}(A) - \alpha^A(x).$$

Certament,

$$\begin{aligned} \alpha^A(\neg x) &= \bigcup\{a \mid a \leq \neg x, a \in \text{At}(A)\} \\ &= \bigcup\{a \mid \neg \neg x \leq \neg a, a \in \text{At}(A)\} \\ &= \bigcup\{a \mid x \leq \neg a, a \in \text{At}(A)\} \\ &= \bigcup\{a \mid a \not\leq x, a \in \text{At}(A)\} && \text{(Lema 5.28)} \\ &= \text{At}(A) - \alpha^A(x). \end{aligned}$$

Acabem de demostrar que α^A és un homomorfisme complet en virtut de la Proposició (5.21).

Verifiquem ara que α és, en efecte, un isomorfisme natural. Primerament, per a corroborar que α és una transformació natural, veiem que el diagrama de naturalitat de α , definit a la Figura (77), commuta. Siga $x \in A$, estudiem com actuen les composicions $\mathcal{P}(\text{At}(f)) \circ \alpha^A$ i $\alpha^B \circ f$ sobre x . Tot seguit

donem expressions alternatives d'estos morfismes.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}(\text{At}(f)) \circ \alpha^A)(x) &= \mathcal{P}(\text{At}(f)) \left(\bigcup \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\} \right) \\
&= (\text{At}(f))^{-1} \left[\bigcup \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\} \right] \\
&= \{b \in \text{At}(B) \mid \text{At}(f)(b) \in \bigcup \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\}\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha^B \circ f)(x) &= \alpha^B(f(x)) \\
&= \bigcup \{b \mid b \leq f(x), b \in \text{At}(B)\}.
\end{aligned}$$

Hem de comprovar que els conjunts $(\mathcal{P}(\text{At}(f)) \circ \alpha^A)(x)$ i $(\alpha^B \circ f)(x)$ són iguals per a demostrar la commutativitat del diagrama.

Siga b element de $(\mathcal{P}(\text{At}(f)) \circ \alpha^A)(x)$. Així, sabem que $b \in \text{At}(B)$ i que

$$\text{At}(f)(b) \in \bigcup \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\}.$$

Per tant, l'únic $a \in \text{At}(A)$ que satisfà que $b \leq f(a)$ pertany al conjunt $\bigcup \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\}$. Llavors, $a \leq x$ i, per la Proposició (5.20), $f(a) \leq f(x)$. Doncs, $b \leq f(a) \leq f(x)$ i, aleshores, $b \in (\alpha^B \circ f)(x)$.

Siga $b \in (\alpha^B \circ f)(x)$. D'aquesta manera, $b \in \bigcup \{c \in \text{At}(B) \mid c \leq f(x)\}$ i, així, $b \in \text{At}(B)$ i $b \leq f(x)$. Considerem $\text{At}(f)(b) = a$ l'únic $a \in \text{At}(A)$ tal que $b \leq f(a)$. Notem que només ens caldrà comprovar que $a \leq x$ per a demostrar aquesta inclusió.

A més, si $b \leq f(a)$ i $b \leq f(x)$, aleshores $b \leq f(a) \wedge f(x) \leq f(a \wedge x)$. Però, com a és àtom, tenim dues opcions; o $a \wedge x = a$ o $a \wedge x = 0$.

Suposant, per reducció a l'absurd, que $a \wedge x = 0$ tenim que $b \leq f(0) = 0$, per la Proposició (5.20). Açò és una contradicció perquè b és àtom. En definitiva, $a \wedge x = a$, que equival a $a \leq x$ i, per tant, $b \in \bigcup \{b \mid b \leq f(x), b \in \text{At}(B)\}$.

Acabem de demostrar que $\mathcal{P}(\text{At}(f)) \circ \alpha^B = \alpha^B \circ f$. En definitiva, el diagrama de la Figura (77) commuta.

Ara que sabem que existeix $\alpha : \text{id}_{\text{CABool}} \Rightarrow \mathcal{P} \circ \text{At}$ transformació natural, comprovem que les seues components són isomorfismes. Observem que basta amb demostrar que són aplicacions bijectives perquè les components de α

són aplicacions entre conjunts. Considerem la component α^A per a A objecte en CABool.

8. Injectivitat de α^A .

Donats $x, y \in A$ suposem que $\alpha^A(x) = \alpha^A(y)$ i demostrem que $x = y$.
Per hipòtesi, es té que

$$\bigcup \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\} = \bigcup \{a \mid a \leq y, a \in \text{At}(A)\}.$$

Si $a \leq x$, per a $a \in \text{At}(A)$, tenim que

$$a \in \bigcup \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\} = \bigcup \{a \mid a \leq y, a \in \text{At}(A)\}.$$

Per tant, $a \leq y$ i, així, $x = \bigvee \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\} \leq y$.

La desigualtat $y \leq x$ es dona per un argument anàleg a l'anterior.

9. Sobrejectivitat de α^A .

Siga $X \in \mathcal{P}(\text{At}(A))$, aleshores $X = \{a \mid a \in \text{At}(A), a \in X\}$.

Triem $x = \bigvee X$. Llavors,

$$\begin{aligned} \alpha^A(x) &= \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\} \\ &= \{a \mid a \leq \bigvee X, a \in \text{At}(A)\}. \end{aligned}$$

Veiem que $\{a \mid a \leq \bigvee X, a \in \text{At}(A)\} = \{a \mid a \in \text{At}(A), a \in X\} = X$.

Siga a element en el conjunt de la dreta, és a dir, $a \in X$, aleshores, $a \leq \bigvee X$.

Per tant, obtenim que

$$\{a \mid a \in \text{At}(A), a \in X\} \supseteq \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\}.$$

Siga a element en el conjunt de l'esquerra. Si $a \leq \bigvee X$, aleshores, pel Lema (5.30), existeix $b \in X$ tal que $a \leq b$ i, per tant, $a = b$ i $a \in X$. Així,

$$\{a \mid a \in \text{At}(A), a \in X\} \subseteq \{a \mid a \leq x, a \in \text{At}(A)\}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\beta^X: & X & \longrightarrow \text{At}(\mathcal{P}(X)) \\
& x & \longmapsto \{x\} \\
\\
& \begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\beta^X} & \text{At}(\mathcal{P}(X)) \\
\uparrow f & \circlearrowleft & \uparrow \text{At}(\mathcal{P}(f)) \\
Y & \xrightarrow{\beta^Y} & \text{At}(\mathcal{P}(Y))
\end{array}
\end{array}$$

Figura 78: La component β^X de la transformació natural β i el diagrama de naturalitat de β .

Acabem de demostrar que les components α^A són bijectives. Per tant, hem demostrat que α és un isomorfisme natural.

Continuem ara definint $\beta : \text{id}_{\text{Set}^{\text{op}}} \Rightarrow \text{At} \circ \mathcal{P}$, però abans de definir-ho, donat X conjunt en Set^{op} , veiem la forma de $(\text{At} \circ \mathcal{P})(X) = \text{At}(\mathcal{P}(X))$.

Recordem que a l'àlgebra Booleana completa i atòmica $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, ()^c, \emptyset, X)$ els únics àtoms són de la forma $\{x\}$ amb $x \in X$ (Exemple 5.17).

Seguidament, definim les components β^X de la transformació natural $\beta = (\beta^X)_{X \in \text{Set}_0^{\text{op}}}$, per a X objecte en Set^{op} . En efecte, donat x element de X , la component β^X assigna a x el conjunt $\{x\}$, que és àtom en $\mathcal{P}(X)$. Representem a la Figura (78) la component β^X de β i, per a $f^{\text{op}} : Y \rightarrow X$ morfisme en Set^{op} , el diagrama de naturalitat de β .

Recordem que el morfisme $\text{At}(\mathcal{P}(f))$ (Figura 76) en Set^{op} ve donat per

$$\begin{array}{ccc}
\text{At}(\mathcal{P}(f)) : \text{At}(\mathcal{P}(Y)) & \longrightarrow & \text{At}(\mathcal{P}(X)) \\
c & \longmapsto & \begin{array}{l} \text{únic } b \in \text{At}(\mathcal{P}(X)) \\ \text{tal que } c \leq \mathcal{P}(f)(b) \end{array}
\end{array}$$

Definida ja la família de morfismes $\beta = (\beta^X)_{X \in \text{Set}_0^{\text{op}}}$ comprovem que, donat X objecte en Set^{op} , la component β^X és un isomorfisme. Notem que, com

β^X és una aplicació entre conjunts, és suficient demostrar que β^X és una aplicació bijectiva.

12. Injectivitat de β^X .

Donats $x, y \in X$ suposem que $\beta^X(x) = \beta^X(y)$. Aleshores, $\{x\} = \{y\}$ i, doncs, $x = y$.

13. Sobrejectivitat de β^X .

Sabem que $\text{At}(\mathcal{P}(X)) = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Així, si $\{x\} \in \text{At}(\mathcal{P}(X))$, aleshores $\beta^X(x) = \{x\}$.

Acabem de demostrar que les components de β són bijectives.

Per a demostrar que β és una transformació natural verifiquem que el diagrama de naturalitat de β , definit a la Figura (78), commuta.

Siga $y \in Y$ hem de comprovar que

$$(\beta^X \circ f)(y) = (\text{At}(\mathcal{P}(f)) \circ \beta^Y)(y).$$

Per un costat tenim que $(\beta^X \circ f)(y) = \{f(y)\}$. Per altra banda,

$$\begin{aligned} (\text{At}(\mathcal{P}(f)) \circ \beta^Y)(y) &= \text{At}(\mathcal{P}(f))(\{y\}) \\ &= \text{únic } b \in \text{At}(\mathcal{P}(X)) \text{ tal que } \{y\} \subseteq \mathcal{P}(f)(b) \\ &= \text{únic } b \in \text{At}(\mathcal{P}(X)) \text{ tal que } \{y\} \subseteq f^{-1}[b]. \quad (\text{Fig. 75}) \end{aligned}$$

Com $b \in \text{At}(\mathcal{P}(X))$, tenim que $b = \{x\}$, per a algun $x \in X$. Per tant,

$$(\text{At}(\mathcal{P}(f)) \circ \beta^Y)(y) = \text{únic } \{x\} \in \text{At}(\mathcal{P}(X)) \text{ tal que } \{y\} \subseteq f^{-1}[\{x\}].$$

Ara bé, notem que $\{y\} \subseteq f^{-1}[\{f(y)\}]$ i, així, $\{x\} = \{f(y)\}$. Doncs,

$$(\text{At}(\mathcal{P}(f)) \circ \beta^Y)(y) = \{f(y)\}.$$

En definitiva, el diagrama de naturalitat de β commuta i, llavors, β és transformació natural. Amb açò acabem de demostrar que β és un isomorfisme natural.

Finalment, com existeixen $\alpha : \text{id}_{\mathbf{CABool}} \Rightarrow \mathcal{P} \circ \text{At}$ i $\beta : \text{id}_{\mathbf{Set}^{\text{op}}} \Rightarrow \text{At} \circ \mathcal{P}$ isomorfismes naturals, podem concloure que les categories $\mathbf{CABool}$ i $\mathbf{Set}^{\text{op}}$ són equivalents. ■

Nota 5.32. Observem que els functors $\mathcal{P}(\cdot)$ i $\text{At}(\cdot)$ no determinen un isomorfisme. Efectivament, si considerem un conjunt X tenim que

$$\text{At}(\mathcal{P}(X)) = \{\{x\} \mid x \in X\} \neq X.$$

El conjunt dels *singletons* de X , és a dir, els conjunts d'un únic element de X , i el conjunt X són equipotents¹³. No obstant, no són el mateix conjunt i, doncs, els functors $\mathcal{P}(\cdot)$ i $\text{At}(\cdot)$ no determinen un isomorfisme.

¹³Dos conjunts A i B són equipotents si existeix una bijecció entre ells.

6 Conclusions

Com a conclusió anem a valorar l'assoliment dels objectius del treball i el procés d'aprenentatge que ha suposat aquest projecte. Respecte als objectius del treball, hem aconseguit recopilar una introducció a la Teoria de Categories amena, completa i plena d'exemples i figures, la qual podria servir a qualsevol estudiant de grau de Matemàtiques o d'algun màster afí. Però, també cal dir que el propòsit filosòfic inicial de conjuntar les Matemàtiques i la Filosofia s'escapava de l'objectiu i les possibilitats del treball. Doncs, només hem pogut explorar, lacònicament, la Lògica categorial i algebraica, però animem a explorar i reflexionar sobre les implicacions filosòfiques del desenvolupament de la Teoria de Categories.

Envers els coneixements adquirits, hem après els fonaments de la Teoria de Categories, així com nocions bàsiques que lògica proposicional i algebraica, que són temes que s'escapen dels currículums habituals dels graus de Matemàtiques. A més a més, els nostres coneixements de redacció a $\text{\LaTeX}$ s'han ampliat. Per exemple, hem après nous comandaments i a emprar el paquet `tikzcd` de $\text{\LaTeX}$ per a poder dibuixar totes les figures del treball de forma elegant i neta. Finalment, hem après a crear un discurs coherent i adequat als estàndards acadèmics per a transmetre les nostres idees, i a cercar a la bibliografia. Pel que fa al cas concret de la redacció matemàtica, hem assimilat la precisió i formalització del llenguatge, així com el fet de saber expressar els nostres raonaments de forma simple, clara i distinta.

Per últim, com a comentari final, hem de dir que ens ha costat treballar amb el manual principal que hem seguit a aquest escrit, a saber, *Basic Category Theory and Topos Theory* de J. Van Oosten [17]. Així, com a crítica constructiva, suggerim, en primer lloc, que s'haurien d'haver afegit més exemples per a il·lustrar els conceptes del manual. En segon lloc, creiem que l'enfilall conductor dels capítols de [17] no deuria d'haver depés, completament, d'exercicis, sinó que es demostrarem més resultats per a posar en clar al lector com es raona al món de la Teoria de Categories.

Referències

- [1] Paolo Aluffi. *Algebra: Chapter 0*. 1a ed. American Mathematical Society, 2009. ISBN: 9780821847817.
- [2] Tom M. Apostol. *Análisis Matemático*. 2a ed. Editorial Reverté, 1976. ISBN: 978-8429150049.
- [3] Juan Climent Vidal. *Teoria de Conjuntos*. URL: <https://www.uv.es/~jkliment/Documentos/SetTheory.pc.pdf>.
- [4] Karel Hrbacek i Thomas Jech. *Introduction to Set Theory*. 3a ed. Marcel Dekker, Inc, 1999. ISBN: 0824779150. URL: https://www.academia.edu/39191800/Hrbacek_Jech_Introduction_to_set_theory_20190519_52010_rrjqxw.
- [5] Jérôme Lapuyade-Lahorgue. *The epimorphisms of the category Haus are exactly the image-dense morphisms*. 2018. DOI: [10.48550/ARXIV.1810.00778](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1810.00778). URL: <https://arxiv.org/abs/1810.00778>. (accedit: 23/4/2022).
- [6] Carl E. Linderholm. *A Group Epimorphism is Surjective*. A: *The American Mathematical Monthly* 77.2 (1970), pàg. 176-177. DOI: [10.1080/00029890.1970.11992448](https://doi.org/10.1080/00029890.1970.11992448).
- [7] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. New York: Springer-Verlag, 1971. Cap. 6, pàg. 262. ISBN: 0387900357. URL: <http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/2016-2/macLANECAT.pdf>.
- [8] Francisca Mascaró Bonín, Juan Luis Monterde García-Pozuelo, Juan José Nuño Ballesteros i Rafael Sivera Villanueva. *Introducció a la topologia*. 2a ed. Universitat de València, 2011. ISBN: 978-84-370-8127-4.
- [9] Bartosz Milewski. *Category Theory for Programmers*. 2019. ISBN: 9780464825081. URL: <https://unglueit-files.s3.amazonaws.com/ebf/e90890f0a6ea420c9825657d6f3a851d.pdf>.

- [10] Gabriel Navarro Ortega. *Un curso de álgebra*. 2a ed. Universitat de València, 2016. ISBN: 978-84-370-9713-8.
- [11] Paolo Perrone. *Notes on Category Theory with examples from basic mathematics*. 2019. DOI: [10.48550/ARXIV.1912.10642](https://arxiv.org/abs/1912.10642). URL: <https://arxiv.org/abs/1912.10642>.
- [12] Stanford Encyclopedia of Philosophy. *Category Theory*. 2019. URL: <https://plato.stanford.edu/entries/category-theory/>. (accedit: 28/3/2022).
- [13] Emily Riehl. *Category theory in context*. Dover Publications, 2016, pàg. 240. ISBN: 9780486809038. URL: <https://math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf>.
- [14] Michael A. Shulman. *Set theory for category theory*. A: (2008), pàg. 1-5. DOI: [10.48550/ARXIV.0810.1279](https://arxiv.org/abs/10.48550/ARXIV.0810.1279). URL: <https://arxiv.org/abs/0810.1279>.
- [15] David I. Spivak. *Category Theory for the Sciences*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press books, 2014. Cap. 5. ISBN: 978-0-262-02813-4. URL: <https://mitpress.mit.edu/books/category-theory-sciences>.
- [16] Thomas Streicher. *Introduction to Category Theory and Categorical Logic*. A: *Foundations* (2004). ISSN: 00224812. URL: <https://www2.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/CTCL.pdf>.
- [17] Jaap Van Oosten. *Basic Category Theory and Topos Theory*. 2016. URL: <https://webpace.science.uu.nl/~ooste110/syllabi/catsmoeder.pdf>.