



Treball Fi de Grau - Curs 2022/2023

Formes bilineals

Autor: OCTAVIO CALATAYUD VAÑÓ

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Índex

Capítol 1. Introducció	3
Capítol 2. Preliminars	5
1. Matrius: Definicions i propietats bàsiques.	5
2. Espais vectorials	6
3. Coordenades	9
4. Aplicacions lineals	10
Capítol 3. Espai dual	19
1. Elements de l'espai dual	19
2. Espai bidual	24
Capítol 4. Formes bilineals	27
1. Representació matricial de les formes bilineals	29
2. Formes bilineals simètriques, antisimètriques i alternades.	37
3. Ortogonalitat.	44
4. Formes bilineals no degenerades	49
Capítol 5. Relació entre les formes bilineals i l'espai dual.	51
1. Formes bilineals no degenerades i l'espai dual.	54
Capítol 6. Conclusions	59
Bibliografia	61

CAPÍTOL 1

Introducció

L'àlgebra lineal és la branca de les matemàtiques que tracta les propietats comunes dels espais vectorials. En aquest treball tractem les formes bilineals, que són un cas particular de funcions multilineals amb diverses aplicacions.

Les formes bilineals han establert un paper important en molts aspectes de les Matemàtiques, així com també tenen importància en diferents camps com en Enginyeria o Biologia.

L'objectiu d'aquest treball de fi de grau és aprofundir en alguns aspectes bàsics de les formes bilineals, les seues principals aplicacions així com la relació entre aquestes i l'espai dual.

En el capítol de preliminars presentarem alguns resultats sobre les matrius (definicions, característiques i propietats bàsiques), recordarem el concepte d'espai vectorial, amb nocions bàsiques com els subespais vectorials, la suma directa de subespais vectorials o la base d'un espai vectorial. També definirem i caracteritzarem el concepte de coordenades d'un vector en un espai vectorial. Per tancar aquest capítol, parlarem de les aplicacions lineals, les classificarem i definirem conceptes bàsics com són el nucli o la imatge d'una aplicació lineal. També caracteritzarem aquestes aplicacions a partir d'una sèrie de resultats que trobarem demostrats majoritàriament en algunes referències de la bibliografia.

En el següent capítol parlarem de l'espai dual. Definirem els principals elements d'aquest espai dual, com puga ser la base dual o l'aplicació dual, i el caracteritzarem amb una sèrie de resultats. A més, en la segona secció d'aquest capítol presentarem i desenvoluparem breument el concepte d'espai bidual.

En el capítol 4, aprofundirem sobre les formes bilineals. Definirem inicialment què és una forma bilineal, introduirem el concepte d'espai bilineal i desenvoluparem les principals propietats d'aquestes formes bilineals. Seguidament relacionarem dos conceptes claus: les matrius coordenades i les formes bilineals. Ho desenvoluparem en la secció de representació matricial de les formes bilineals, on presentarem una

sèrie de resultats i exemples importants. A més, aquesta relació entre formes bilineals i matrius ens portarà a definir i donar forma a conceptes com el de la congruència de matrius. En la següent secció d'aquest capítol classifiquem les formes bilineals en formes bilineals simètriques, antisimètriques i alternades. Definirem aquests termes i presentarem una sèrie d'exemples i aplicacions. Posteriorment mitjançant alguns teoremes i proposicions relacionarem les formes bilineals simètriques, antisimètriques i alternades amb les matrius simètriques o antisimètriques. Introduïrem en la posterior secció la noció d'ortogonalitat (vectors ortogonals, base ortogonal, espai ortogonal entre altres conceptes) i presentarem l'espai bilineal anomenat suma directa ortogonal. Per últim, en la última secció introduïrem el concepte de formes bilineals no degenerades que serà desenvolupat sobretot a l'últim capítol.

El darrer capítol tractarà de relacionar els dos principals temes desenvolupats en el treball, l'espai dual i les formes bilineals. Definirem i treballarem aplicacions entre els espais vectorials i els seus duals que fixen elements per la dreta i per l'esquerra, ho relacionarem amb les representacions matricials d'aquestes aplicacions. En la última secció relacionarem l'espai dual amb les formes bilineals no degenerades, presentades al Capítol 4. La presentació d'aquest treball de fi de grau girarà entorn a aquest capítol, principalment per la importància de relacionar dos temes importants en la branca de l'Àlgebra Lineal com són les formes bilineals i l'espai dual, els quals són introduïts en cursos anteriors d'Àlgebra al grau de Matemàtiques.

CAPÍTOL 2

Preliminars

1. Matrius: Definicions i propietats bàsiques.

En aquesta secció anem a presentar un concepte bàsic per a l'Àlgebra Lineal com són les matrius. Presentarem una sèrie de definicions i conceptes que utilitzarem posteriorment, així com una sèrie de proposicions i teoremes que ens serviran per caracteritzar les matrius.

DEFINICIÓ 2.1. *Donats $m, n \in \mathbb{N}$, una **matriu de m files i n columnnes** sobre $\mathbb{K}$ és una taula de $m \times n$ elements en $\mathbb{K}$ disposada com segueix:*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

En forma compacta podem expressar-ho com $A = (\alpha_{ij})$. Anomenarem $M_{mn}(\mathbb{K})$ al conjunt de matrius de tamany $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Particularment direm que una matriu és **quadrada** si $m = n$. Anomenarem $M_n(\mathbb{K})$ al conjunt de les matrius quadrades de tamany n .

Per altra banda, direm que una matriu $A = (\alpha_{ij})$ és:

- (1) **Diagonal:** Si $\alpha_{ij} = 0$ quan $i \neq j$.
- (2) **Diagonal superior:** Si $\alpha_{ij} = 0$ si $i > j$.
- (3) **Diagonal inferior:** Si $\alpha_{ij} = 0$ si $j > i$.

Relacionant-ho amb les anteriors definicions, diem que una matriu A és **esglaonada per files** si:

- (1) Totes les files nul·les d' A es troben baix del tot.
- (2) Els pivots (primer element de la fila no nul) de cada fila no nul·la valen 1.
- (3) Els pivots de cada fila no nul·la es troben a la dreta dels situats en les files anteriors.

Diem que una matriu A és **esglaonada reduïda per files** si:

- (1) A és esglaonada.
- (2) Dalt de cada pivot trobem una columna de zeros.

EXEMPLE 2.2. Podem veure que les següents matrius són esglaonades reduïdes per files.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓ 2.3. Siga $\mathbb{K}$ un cos, siga una matriu $A = (\alpha_{ij})$ en $M_{mn}(\mathbb{K})$, definim la seua **matriu transposada**, denotada per A^t , com a la matriu de tamany $n \times m$ sobre $\mathbb{K}$ donada per

$$A^t = (\alpha_{ji}) .$$

PROPOSICIÓ 2.4 (Gauss-Jordan). [Nic21, Theorem 1.2.1, p. 11] Donada una matriu A sobre un cos $\mathbb{K}$ existix una seqüència finita d'operacions elementals per fila que transformen A en una matriu esglaonada reduïda per files. A més, aquesta matriu esglaonada reduïda per files és única.

DEFINICIÓ 2.5. Anomenem **rang** d'una matriu A al nombre de pivots que té la matriu esglaonada reduïda per files que obtenim pel mètode de Gauss-Jordan.

A continuació definim el concepte de matriu invertible.

DEFINICIÓ 2.6. Direm que una matriu quadrada A d'ordre n és **invertible** o **no singular** si existeix una altra matriu quadrada d'ordre n denotada per A^{-1} cumplint que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n .$$

on I_n és la matriu identitat d'ordre n .

Una matriu quadrada A no invertible és diu que és **singular** o **degenerada**.

2. Espais vectorials

Anem a recordar a continuació alguns conceptes bàsics sobre els espais vectorials a partir d'una sèrie de definicions, proposicions i teoremes que ens seran útils quan comencem a tractar les formes bilineals.

DEFINICIÓ 2.7. Siga $\mathbb{K}$ un cos. Un **espai vectorial** sobre $\mathbb{K}$ és una tupla $(V, +, \cdot, 0)$ on V és un conjunt, els elements del qual s'anomenen vectors; $+$: $V \times V \longrightarrow V$ és una operació binària que satisfà les lleis associativa i commutativa; $0 \in V$ és un vector que fa de neutre per a la suma; tot element de V té invers per a la suma; $i \cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ és una operació que satisfà que, per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$

- $$\begin{aligned}
(1) \quad & (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, & (3) \quad & \lambda(uv) = (\lambda u)v, \\
(2) \quad & \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, & (4) \quad & 1v = v.
\end{aligned}$$

DEFINICIÓ 2.8. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i W un subconjunt de V . Direm que W és un **subespai vectorial** de V si:

- (1) $0 \in W$
- (2) W és tancat per a la suma.
- (3) W és tancat per a la multiplicació per escalars.

o, el que és el mateix, si $w_1, w_2 \in W$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ aleshores $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$. Ho denotarem per $W \leq V$ i denotarem per $\text{Sub}_{\mathbb{K}}(V)$ al conjunt de subespais vectorials de V .

PROPOSICIÓ 2.9. [Nic21, Proposition 5.1.22, p. 283] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguen W_1, W_2 subespais vectorials de V . Aleshores

$$\begin{aligned}
W_1 \cap W_2 &= \{v \in V \mid v \in W_1 \wedge v \in W_2\} \\
W_1 + W_2 &= \{w_1 + w_2 \in V \mid w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\}
\end{aligned}$$

són subespais vectorials de V .

DEFINICIÓ 2.10. Donats dos subespais W_1 i W_2 d'un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V , es diu que la suma $W_1 + W_2$ és **directa** si es verifica que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. En aquest cas ho denotarem per $W_1 \oplus W_2$.

PROPOSICIÓ 2.11. [Nic21, Theorem 9.3.5, p. 529] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguen W_1, W_2 subespais vectorials de V . Les següents afirmacions són equivalents

- (1) $W_1 \oplus W_2$, és a dir, la suma $W_1 + W_2$ és directa.
- (2) Per a tot $w_1 \in W_1$ i per a tot $w_2 \in W_2$, si $w_1 + w_2 = 0$ aleshores $w_1 = w_2 = 0$.
- (3) Tot vector de $W_1 + W_2$ s'escriu de forma única.

DEFINICIÓ 2.12. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Un conjunt de vectors $S \subseteq V$ és **linealment independent** si tota combinació lineal del tipus

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n = 0$$

amb $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ i $s_1, \dots, s_n \in S$, implica que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

DEFINICIÓ 2.13. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $S \subseteq V$, definim el **subespai vectorial generat** per S com

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \mid n \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i \leq n (\lambda_i \in \mathbb{K}, s_i \in S) \right\}$$

Es pot comprovar que $\langle S \rangle \leq V$ i que $\langle S \rangle$ és el mínim subespai vectorial que conté a S .

DEFINICIÓ 2.14. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Direm que S és un **sistema generador** de V si $\langle S \rangle = V$. Particularment direm que V és finitament generat si existix un subconjunt finit $S \subseteq V$ tal que $\langle S \rangle = V$.

A continuació definim la noció de base que està estretament relacionada amb les dues definicions anteriors.

DEFINICIÓ 2.15. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Una **base** $\mathcal{B}$ d'un espai vectorial V sobre un cos $\mathbb{K}$ és un subconjunt de V que és linealment independent i sistema generador.

PROPOSICIÓ 2.16. [A⁺03, Theorem 7, p. 181] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $\mathcal{B}$ un subconjunt de V , $\mathcal{B} \subseteq V$, les següents afirmacions són equivalents

- (1) $\mathcal{B}$ és una base.
- (2) $\mathcal{B}$ és un sistema generador minimal.
- (3) $\mathcal{B}$ és un conjunt de vectors linealment independents maximal.

TEOREMA 2.17. [Nic21, Theorem 6.4.1, p. 370] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Siga $\mathcal{B}$ una base de V i siga $\{v_1, \dots, v_k\}$, per algun $k \in \mathbb{N}$, un conjunt de vectors linealment independent.

Aleshores podem substituir k vectors de $\mathcal{B}$ pels vectors $v_1, \dots, v_k$ de forma que el conjunt resultant siga una base de V .

TEOREMA 2.18. [Nic21, Theorem 6.4.3, p. 373] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat, aleshores V admet una base.

TEOREMA 2.19. [A⁺03, Theorem 8, p. 182] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Aleshores totes les bases de V tenen el mateix cardinal.

DEFINICIÓ 2.20. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Definim la **dimensió** de V com el nombre de vectors que formen una base $\mathcal{B}$. Ho denotarem per $\dim_{\mathbb{K}}(V)$.

PROPOSICIÓ 2.21. [Nic21, Theorem 6.4.3, p. 372] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Siga $L \subseteq V$ un conjunt de vectors linealment independents i siga $G \subseteq V$ un sistema generador, aleshores $|L| \leq |G|$.

TEOREMA 2.22. [A⁺03, Theorem 9, p. 184] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Si $\mathcal{B} \subseteq V$ amb $|\mathcal{B}| = n$. Aleshores són equivalents

- (1) $\mathcal{B}$ és base.

- (2) $\mathcal{B}$ és linealment independent.
- (3) $\mathcal{B}$ és sistema generador.

PROPOSICIÓ 2.23. [Nic21, Theorem 6.4.5, p. 374] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Siguen $U, W \leq V$, aleshores

$$\dim_{\mathbb{K}}(W + U) = \dim_{\mathbb{K}}(W) + \dim_{\mathbb{K}}(U) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W).$$

COROLLARI 2.24. [Nic21, Theorem 9.3.6, p. 530] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siguen U, W dos subespais vectorials. Són equivalents

- (1) $U \oplus W$, és a dir, la suma és directa.
- (2) $\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

3. Coordenades

En aquesta secció recordarem el concepte de coordenades d'un vector respecte d'una base enunciant una sèrie de resultats relacionats.

DEFINICIÓ 2.25. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Anomenem **coordenades** del vector v en la base $\mathcal{B}$ a la matriu de tamany $n \times 1$ sobre $\mathbb{K}$ que conté els únics escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ que satisfan l'equació $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Així la matriu de coordenades del vector v en $\mathcal{B}$ és la matriu columna

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{K}).$$

DEFINICIÓ 2.26. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siguen $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$ dues bases de V .

Anomenem **matriu canvi de base** de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ a la matriu $A \in M_n(\mathbb{K})$ que té, per a cada $1 \leq i \leq n$, com a columna i -èssima les coordenades del vector e_i en la base $\overline{\mathcal{B}}$.

PROPOSICIÓ 2.27. [Nic21, Theorem 9.1.2, p. 505] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat, siguen $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$ dues bases de V . Siga P la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$. Aleshores P és l'única matriu en $M_n(\mathbb{K})$ que, per a cada vector $v \in V$ de coordenades X i $\overline{X}$ en $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$, respectivament, satisfà l'equació $PX = \overline{X}$.

PROPOSICIÓ 2.28. [Nic21, Theorem 9.1.3, p. 507] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguen $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{B}}$ i $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$ tres bases de V . Siga P la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ i Q la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$. Aleshores la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$ és QP .

PROPOSICIÓ 2.29. [Nic21, Theorem 9.1.4, p. 507] *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat, siguen $\mathcal{B}$ i $\overline{\mathcal{B}}$ dues bases de V . Siga P la matriu canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$, aleshores P és invertible i la seua inversa és la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$.*

4. Aplicacions lineals

En aquesta secció anem a tractar les aplicacions lineals, presentant alguns conceptes com la imatge o el nucli d'una aplicació.

DEFINICIÓ 2.30. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació, direm que f és una aplicació lineal si per a tot $u, v \in V_1$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ es té que*

$$f(\alpha v + \beta u) = \alpha f(v) + \beta f(u).$$

*Les aplicacions lineals també s'anomenen **homomorfismes**. Anomenem $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ al conjunt de totes les aplicacions lineals de V_1 a V_2 . Podem escriure-ho com*

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2) = \{f : V_1 \longrightarrow V_2 \mid f \text{ és aplicació lineal}\}.$$

*Direm que una aplicació lineal $f : V_1 \longrightarrow V_2$ és un **monomorfisme** si f és injectiva; **epimorfisme** si f és sobrejectiva; **isomorfisme** si f és bijectiva; **endomorfisme** si $V_1 = V_2$ i **automorfisme** si $V_1 = V_2$ i f és bijectiva.*

EXEMPLE 2.31. *Siguen V_1, V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, aleshores l'aplicació nul·la*

$$\begin{array}{ccc} 0: & V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ & v & \longmapsto & 0 \end{array}$$

és aplicació lineal ja que cumplix que donats $u, v \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, aleshores

$$0(\lambda u + \mu v) = 0 = \lambda 0 + \mu 0 = \lambda 0(u) + \mu 0(v).$$

Per altra banda, tenim que si V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $W \leq V$, aleshores l'aplicació inclusió

$$\begin{array}{ccc} \text{in}_W: & W & \longrightarrow & V \\ & w & \longmapsto & w \end{array}$$

és aplicació lineal ja que donats $w_1, w_2 \in W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ aleshores

$$\text{in}_W(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda \text{in}_W(w_1) + \mu \text{in}_W(w_2).$$

En particular quan $W = V$ parlem de l'aplicació identitat.

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_V: & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$$

PROPOSICIÓ 2.32. [Nic21, Theorem 7.3.4, p. 411] *Siguen V_1, V_2, V_3 tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f : V_1 \longrightarrow V_2$, $g : V_2 \longrightarrow V_3$ dues aplicacions lineals. Aleshores $g \circ f : V_1 \longrightarrow V_3$ és aplicació lineal.*

PROPOSICIÓ 2.33. [Nic21, Theorem 7.1.1, p. 391] *Siguen V_1, V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Aleshores:*

- (1) $f(0) = 0$.
- (2) $f(-v) = -f(v)$, per a tot $v \in V_1$.
- (3) $f[W_1] \leq V_2$, per a tot $W_1 \leq V_1$.
- (4) $f^{-1}[W_2] \leq V_1$, per a tot $W_2 \leq V_2$.

A continuació definim dos conceptes fonamentals dins de l'Àlgebra Lineal com són la imatge i el nucli d'una aplicació lineal.

DEFINICIÓ 2.34. *Siga $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal entre els $\mathbb{K}$ -espais vectorials V_1 i V_2 . Definim el conjunt imatge de f com el conjunt*

$$\text{Im}(f) = \{f(v) \in V_2 \mid v \in V_1\}.$$

Definim el nucli de f denotat per $\text{Ker}(f)$ com el conjunt

$$\text{Ker}(f) = \{v \in V_1 \mid f(v) = 0\}.$$

PROPOSICIÓ 2.35. [Nic21, Theorem 7.2.1, p. 397] *Siga $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal entre els $\mathbb{K}$ -espais vectorials V_1 i V_2 aleshores $\text{Im}(f) \leq V_2$ i $\text{Ker}(f) \leq V_1$.*

PROPOSICIÓ 2.36. [Nic21, Theorem 7.2.2, p. 399]

Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Les següents afirmacions són equivalents:

- (1) f és epimorfisme.
- (2) $\text{Im}(f) = V_2$.

I també són equivalents les següents afirmacions:

- (1) f és monomorfisme.
- (2) $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

PROPOSICIÓ 2.37. [Nic21, Theorem 7.1.3, p. 393] *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal i $S \subseteq V_1$ aleshores:*

$$\langle f[S] \rangle = f[\langle S \rangle].$$

PROPOSICIÓ 2.38. [Rom06, Theorem 6.2.083, p. 156] *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Aleshores:*

- (1) f és monomorfisme si, i només si, per a tot $L_1 \subseteq V_1$ conjunt de vectors linealment independent en V_1 es té que $f[L_1]$ és linealment independent en V_2 .
- (2) f és epimorfisme si, i només si, per a tot $G_1 \subseteq V_1$ sistema generador de V_1 es té que $f[G_1]$ és sistema generador de V_2 .

COROLLARI 2.39. *Siguen V_1 i V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f : V_1 \rightarrow V_2$ una aplicació lineal. Aleshores f és isomorfisme si, i només si, per a tota base $\mathcal{B}_1$ de V_1 es té que $f[\mathcal{B}_1]$ és base de V_2 .*

DEMOSTRACIÓ. Conseqüència directa de la Proposició 2.38. $\square$

DEFINICIÓ 2.40. *Siguen V_1 , V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, direm que V_1 i V_2 són **isomorfs**, denotat per $V_1 \cong V_2$, si existix un isomorfisme $f : V_1 \rightarrow V_2$.*

NOTA 2.41. *La relació $\cong$ és una relació d'equivalència.*

PROPOSICIÓ 2.42 (Propietat Universal). *Siguen V_1, V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, siga $\mathcal{B}_1$ una base de V_1 i $f : \mathcal{B}_1 \rightarrow V_2$ una aplicació de $\mathcal{B}_1$ a V_2 . Aleshores existeix una única aplicació lineal $f^\# : V_1 \rightarrow V_2$ que satisfà $f^\# \circ \text{in}_{\mathcal{B}_1} = f$, on $\text{in}_{\mathcal{B}_1} : \mathcal{B}_1 \rightarrow V_1$ és l'aplicació inclusió de $\mathcal{B}_1$ en V_1 .*

DEMOSTRACIÓ. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i siga $v \in V_1$. Considerem l'expressió coordinada de v en $\mathcal{B}$, és a dir

$$v = \mathbf{X}^t(e_i).$$

Definim $f^\#$ com segueix

$$f^\#(v) = f^\#(\mathbf{X}^t(e_i)) = \mathbf{X}^t(f(e_i)).$$

Anem a provar que $f^\#$ és una aplicació lineal, que $f^\# \circ \text{in}_{\mathcal{B}_1} = f$ i que és la única aplicació amb aquestes característiques.

Vegem primer que $f^\#$ és lineal. Siguen $v, w \in V_1$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, aleshores si

$\mathbf{X}$ són les coordenades de v en $\mathcal{B}_1$,

$\mathbf{Y}$ són les coordenades de w en $\mathcal{B}_2$

les coordenades $\lambda v + \mu w$ en la base $\mathcal{B}_1$ són $\lambda \mathbf{X} + \mu \mathbf{Y}$. Per tant

$$\begin{aligned} f^\#(\lambda v + \mu w) &= f^\#((\lambda \mathbf{X} + \mu \mathbf{Y})(e_i)) \\ &= (\lambda \mathbf{X} + \mu \mathbf{Y})^t(f(e_i)) \\ &= \lambda \mathbf{X}^t(f(e_i)) + \mu \mathbf{Y}^t(f(e_i)) \\ &= \lambda f^\#(v) + \mu f^\#(w). \end{aligned}$$

Siga $e_i \in \mathcal{B}_1$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, aleshores

$$f^\# \circ \text{in}_{\mathcal{B}_1}(e_i) = f^\#(e_i) = f^\# \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^t (e_i) \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^t (f(e_i)) = f(e_i)$$

Vegem ara l'unicitat. Siga una altra aplicació lineal $g: V_1 \longrightarrow V_2$ que satisfà que $g \circ \text{in}_{\mathcal{B}_1} = f$. Aleshores, si $v \in V_1$, es té que $g(v) = g(\mathbf{X}^t(e_i))$ on $\mathbf{X}$ són les coordenades de v en $\mathcal{B}_1$.

Com g és lineal, es té que

$$g(\mathbf{X}^t(e_i)) = \mathbf{X}^t(g(e_i)) = \mathbf{X}^t(g \circ \text{in}_{\mathcal{B}_1}(e_i)) = \mathbf{X}^t(f(e_i)) = f^\#(v).$$

Queda així demostrada la Propietat Universal. $\square$

TEOREMA 2.43. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat de dimensió n , aleshores $V \cong \mathbb{K}^n$.*

DEMOSTRACIÓ. Siga $\mathcal{B} = \{c_1, \dots, c_n\}$ una base de V , siga $\mathcal{B}_c^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canònica de $\mathbb{K}^n$. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ c_i &\longmapsto e_i \end{aligned}$$

Per la Propietat Universal, extenem f a una aplicació lineal de la forma $f^\#: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ que satisfà que $f^\# \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = f$.

Aquesta aplicació lineal satisfà:

$$f^\#[\mathcal{B}] = \{f^\#(c_1), \dots, f^\#(c_n)\} = \{e_1, \dots, e_n\} = \mathcal{B}_c^n.$$

Pel Corol·lari 2.39, com que hem demostrat abans que si una aplicació lineal transforma bases en bases aleshores és un isomorfisme, tenim així demostrada la proposició. $\square$

COROLLARI 2.44. *Siguen V_1, V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, les següents afirmacions són equivalents:*

- (1) $V_1 \cong V_2$.
- (2) $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = \dim_{\mathbb{K}}(V_2)$.

DEMOSTRACIÓ. Conseqüència directa del Teorema 2.43. $\square$

DEFINICIÓ 2.45. *Siguen V_1, V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Siguen $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de V_1 , $\mathcal{B}_2 = \{d_1, \dots, d_m\}$ base de V_2 . Siga $f: V_1 \longrightarrow V_2$ una aplicació lineal. Definim la **matriu coordinada** de f de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ com la matriu $\mathbf{A} = (\alpha_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{K})$ que té per, a cada $1 \leq i \leq n$, com a columna i -èssima les coordenades de $f(e_i)$ en la base $\mathcal{B}_2$.*

A continuació presentem una proposició que caracteritza la matriu coordenada d'una aplicació lineal.

PROPOSICIÓ 2.46. *Siguen V_1, V_2 dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = m$. Siguen $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de V_1 , $\mathcal{B}_2 = \{d_1, \dots, d_m\}$ base de V_2 , siga $f : V_1 \rightarrow V_2$ aplicació lineal i siga $A = (\alpha_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{K})$ matriu coordenada de f de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$. Siga $v \in V_1$, siguen X les coordenades de v en $\mathcal{B}_1$ i siguen Y les coordenades de $f(v)$ en $\mathcal{B}_2$. Aleshores tindrem que A és la única matriu que satisfà l'equació $AX = Y$.*

DEMOSTRACIÓ. Siga $v \in V_1$ i siguen

X les coordenades de v en $\mathcal{B}_1$,

Y les coordenades de $f(v)$ en $\mathcal{B}_2$

Aleshores $v = X^t(e_j)$ i $f(v) = Y^t(d_i)$.

Notem que si

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

aleshores

$$f(e_1) = \alpha_{11}d_1 + \cdots + \alpha_{m1}d_m$$

$$\vdots$$

$$f(e_n) = \alpha_{1n}d_1 + \cdots + \alpha_{mn}d_m$$

de forma que $f(e_j) = A^t(d_i)$. Aleshores $f(v) = f(X^t(e_j)) = X^t A^t(d_i)$.

Les coordenades d' $f(v)$ en $\mathcal{B}_2$ són úniques, aleshores

$$Y^t = X^t A^t,$$

o el que és el mateix, $AX = Y$.

Ara vegem l'unicitat. Suposem que A' és una matriu en $M_{mn}(\mathbb{K})$ que satisfà que per a tot $v \in V_1$, si

X les coordenades de v en $\mathcal{B}_1$,

Y les coordenades de $f(v)$ en $\mathcal{B}_2$

aleshores $A'X = Y$. Anem a veure que $A' = A$.

Com l'equació és certa per a tot vector, anem a considerar-la per als vectors de la base $\mathcal{B}_1$.

Si $e_j \in \mathcal{B}_1$ per a $j \in \{1, \dots, n\}$, aleshores si

X_j les coordenades d' e_j en $\mathcal{B}_1$,

Y_j les coordenades d' $f(e_j)$ en $\mathcal{B}_2$

es té que $A'X_j = Y_j$ per a tot $j \in \{1, \dots, n\}$, on $A'X_j$ és la columna j de la matriu A' i Y_j és la columna j de la matriu A . Aleshores $A' = A$. $\square$

A continuació vorem les propietats de l'espai vectorial de les aplicacions lineals a partir de les dos següents proposicions.

PROPOSICIÓ 2.47. [Her91, Lemma 4.3.1, p. 185] *Siguen V, W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Considerem $\text{Hom}_{\mathbb{K}} = \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ aplicació lineal}\}$. Considerem la tupla $(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), +, \cdot, 0)$, on:*

(1) 0 és l'aplicació nul·la

$$\begin{aligned} 0: \quad V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

(2) $+$ és l'operació suma

$$\begin{aligned} +: \quad \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ (f, g) &\longmapsto f + g \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} f + g: \quad V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto f(v) + g(v). \end{aligned}$$

(3) $\cdot$ és l'operació producte per escalar

$$\begin{aligned} \cdot: \quad \mathbb{K} \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda f: \quad \begin{aligned} V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto \lambda(f(v)). \end{aligned} \end{aligned}$$

Aleshores $(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), +, \cdot, 0)$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

PROPOSICIÓ 2.48. *Siguen V, W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$. Aleshores*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = mn.$$

DEMOSTRACIÓ. Siguen $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de V i $\overline{\mathcal{B}} = \{d_1, \dots, d_m\}$ base de W . Per a cada $i \in \{1, \dots, m\}$ i per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$ considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \delta_{ij}: \quad \mathcal{B} &\longrightarrow W \\ e_k &\longmapsto \begin{cases} d_i & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{altre cas.} \end{cases} \end{aligned}$$

Per la Propietat Universal extenem δ_{ij} a una aplicació lineal $\delta_{ij}^{\sharp}: V \longrightarrow W$ i que satisfà $\delta_{ij}^{\sharp} \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = \delta_{ij}$.

Notem que si $v \in V$, aleshores podem trobar $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tals que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ i així

$$\delta_{ij}^\#(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 \delta_{ij}^\#(e_1) + \dots + \lambda_n \delta_{ij}^\#(e_n) = \lambda_j \delta_{ij}^\#(e_j) = \lambda_j d_i.$$

Considerem

$$\mathcal{B}' = \{\delta_{ij}^\# \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W).$$

Notem que $|\mathcal{B}'| = mn$. Anem a demostrar que $\mathcal{B}'$ és base d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

En primer lloc veurem que és **sistema generador**. Siga $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Anem a comprovar que f s'escriu com a combinació lineal dels elements en $\mathcal{B}$. Siga $v \in V$, aleshores podem trobar $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ de forma que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Així

$$f(v) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n). \quad (1)$$

Notem que per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_j)$ és un vector en W . Com $\overline{\mathcal{B}}$ és base de W , podem trobar escalars $\mu_{1j}, \dots, \mu_{mj} \in \mathbb{K}$ de forma que

$$\begin{aligned} f(e_j) &= \mu_{1j} d_1 + \dots + \mu_{mj} d_m \\ &= \mu_{1j} \delta_{1j}^\#(e_j) + \dots + \mu_{mj} \delta_{mj}^\#(e_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_{ij} \delta_{ij}^\#(e_j). \end{aligned}$$

Aleshores, en (1),

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) \\ &= \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^m \mu_{i1} \delta_{i1}^\#(e_1) \right) + \dots + \lambda_n \left(\sum_{i=1}^m \mu_{in} \delta_{in}^\#(e_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_{i1} \delta_{i1}^\#(v) + \dots + \sum_{i=1}^m \mu_{in} \delta_{in}^\#(v) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mu_{ij} \delta_{ij}^\# \right) (v). \end{aligned}$$

És a dir, $f = \sum_{ij} \mu_{ij} \delta_{ij}^\#$ i per tant $\mathcal{B}'$ és sistema generador.

Ara anem a veure que és linealment independent. Considerem una combinació lineal dels elements en $\mathcal{B}'$ igualada a 0,

$$\mu_{11} \delta_{11}^\# + \dots + \mu_{m1} \delta_{m1}^\# + \dots + \mu_{1n} \delta_{1n}^\# + \dots + \mu_{mn} \delta_{mn}^\# = 0.$$

Volem veure que $\mu_{ij} = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$ i per a tot $j \in \{1, \dots, n\}$. Així, per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, es té que

$$0 = 0(e_j) = (\sum_{ij} \mu_{ij} \delta_{ij}^\#)(e_k) = \sum_{ij} \mu_{ij} \delta_{ij}^\#(e_k) = \mu_{1k} d_1 + \cdots + \mu_{mk} d_m.$$

Trobem així una combinació lineal dels vectors en $\overline{\mathcal{B}}$ igualada a 0. Com que $\overline{\mathcal{B}}$ és base, es té que:

$$\mu_{1k} = \cdots = \mu_{mk} = 0,$$

i açò és cert per a cada $1 \leq k \leq n$. És a dir, $\mu_{ij} = 0$ per a tot $1 \leq i \leq m$ i per a tot $1 \leq j \leq n$. Concloem que $\mathcal{B}'$ és base d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Com a conseqüència, $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = mn$. $\square$

CAPÍTOL 3

Espai dual

Al capítol anterior hem vist que, donats dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials V i W i donades bases en V i en W , existeix un isomorfisme entre $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ i $M_{mn}(\mathbb{K})$ i també hem demostrat que $\dim(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = nm$. En aquest tema anem a estudiar un cas particular, anem a considerar $W = \mathbb{K}$, és a dir, estudiarem l'espai vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$.

1. Elements de l'espai dual

Anem a presentar en primer lloc la definició de l'espai dual.

DEFINICIÓ 3.1. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. S'anomena **espai dual de V** i es denota per V^* al $\mathbb{K}$ -espai vectorial

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = \{f: V \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ és lineal}\}$$

Notem que si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ aleshores $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = n$ i, per tant, $V \cong V^*$ pel Corol·lari 2.44.

Ara anem a veure com, una vegada tenim fixada una base de qualsevol espai vectorial V de dimensió finita, podem trobar una base de V^* a partir de la següent proposició.

PROPOSICIÓ 3.2. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial de dimensió n i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Aleshores existeix una base $\mathcal{B}^*$ de V^* que podem construir a partir de $\mathcal{B}$. A aquesta base l'anomenarem **base dual de V^* associada a $\mathcal{B}$** .

DEMOSTRACIÓ. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Per a cada $1 \leq j \leq n$ definim l'aplicació

$$\begin{aligned} \delta_j: \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ e_k &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{altre cas.} \end{cases} \end{aligned}$$

Per la Propietat Universal, existeix una única aplicació lineal

$$\delta_j^\sharp: V \longrightarrow \mathbb{K}$$

que satisfà $\delta_j^\sharp \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = \delta_j$.

Per convenció denotarem per e_j^* a l'aplicació lineal $\delta_j^\#$. Anem a demostrar que el conjunt $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ és base de V^* . Com sabem que $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = n$, pel Corol·lari 2.22, és suficient demostrar que el conjunt $\mathcal{B}^*$ és linealment independent.

Siga una combinació lineal del tipus

$$\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0 \quad (2)$$

amb $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Volem veure que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Si fem actuar les dues aplicacions en (2) sobre el vector k -èssim de $\mathcal{B}$, per a $1 \leq k \leq n$, es té que

$$0 = 0(e_k) = (\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*)(e_k) = \lambda_1 e_1^*(e_k) + \dots + \lambda_n e_n^*(e_k) = \lambda_k.$$

Açò és cert per a tot $1 \leq k \leq n$. Per tant, $\mathcal{B}^*$ és base de V^* . $\square$

NOTA 3.3. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de V . Considerem la base dual $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de V^* . Siga $v \in V$ amb $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ per a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.*

Per a cada $1 \leq j \leq n$ l'aplicació lineal e_j^ actuant sobre v ens torna la j -èssima coordenada de v en la base $\mathcal{B}$. Açò es comprova fàcilment:*

$$e_j^*(v) = e_j^*(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 e_j^*(e_1) + \dots + \lambda_n e_j^*(e_n) = \lambda_j.$$

Com sabem que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V^*)$ i ja coneixem una base de V^* , anem a establir un isomorfisme de V a V^* de forma explícita.

PROPOSICIÓ 3.4. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, aleshores $V \cong V^*$.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem les bases $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V i $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ base de V^* . Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} [\cdot]^*: \mathcal{B} &\longrightarrow V^* \\ e_j &\longmapsto e_j^* \end{aligned}$$

Per la Propietat Universal podem estendre $[\cdot]^*$ a una aplicació lineal. Per a simplificar la notació escriurem $[\cdot]^*$ en compte de $([\cdot]^*)^\#$. Així trobem una aplicació lineal $[\cdot]^*: V \longrightarrow V^*$ que satisfà que

$$([\cdot]^*)^\# \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = [\cdot]^*.$$

Notem que si v és un vector $v \in V$ amb $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ es té que

$$\begin{aligned} [\cdot]^*(v) &= [\cdot]^*(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*. \end{aligned}$$

Al resultat d'aplicar $[\cdot]^*$ en v ho denotarem per v^* . Així:

$$\begin{aligned} [\cdot]^*: V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto v^* \end{aligned}$$

Notem que $[\cdot]^*$ és un isomorfisme ja que:

$$[\cdot]^*[\mathcal{B}] = [\cdot]^*({e_1, \dots, e_n}) = \{e_1^*, \dots, e_n^*\} = \mathcal{B}^*.$$

Com $[\cdot]^*$ transforma una base en una base, pel Corol·lari 2.44 es té que $[\cdot]^*$ és un isomorfisme. $\square$

A continuació descriurem per a cada $v \in V$ l'aplicació v^* en V^* .

NOTA 3.5. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Siguen $u, v \in V$. Com $\mathcal{B}$ és una base de V es té que*

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \quad u = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n.$$

amb $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$.

Notem que $v^ = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*$.*

Així, v^ és una aplicació lineal que en actuar sobre u ens dona el següent resultat*

$$\begin{aligned} v^*(u) &= (\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^*)(u) \\ &= \lambda_1 (e_1^*)(u) + \dots + \lambda_n (e_n^*)(u) = \\ &= \lambda_1 (e_1^*)(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) + \dots + \lambda_n (e_n^*)(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) \\ &= \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n. \end{aligned}$$

Notem la linealitat tant en la banda de les aplicacions com en la banda dels vectors:

(1) *Si $v_1, v_2 \in V$, $u \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, aleshores*

$$(\lambda v_1 + \mu v_2)^*(u) = \lambda v_1^*(u) + \mu v_2^*(u).$$

(2) *Si $v \in V$ i $u_1, u_2 \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, aleshores*

$$v^*(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda v^*(u_1) + \mu v^*(u_2).$$

Este concepte és el que després generalitzarem per a parlar de formes bilineals.

A continuació, relacionat amb el que acabem de veure, introduïrem la noció d'aplicació dual o transposta i desenvoluparem les principals propietats d'aquestes aplicacions.

DEFINICIÓ 3.6. *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siguen V^* i W^* els respectius espais duals. Siga $f: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Anomenem **aplicació dual** d' f , denotada per f^* , a l'aplicació $f^*: W^* \rightarrow V^*$ definida com següix*

$$\begin{aligned} f^*: W^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

NOTA 3.7. *Notem que, com la composició d'aplicacions lineals és lineal, $\varphi \circ f$ és un element de V^* .*

Per altra banda, tenim que es donen les següents propietats.

PROPOSICIÓ 3.8. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i l'aplicació identitat $\text{id}^V : V \longrightarrow V$. Aleshores $(\text{id}^V)^* = \text{id}^{(V^*)}$.*

DEMOSTRACIÓ. Notem que

$$\begin{aligned} (\text{id}^V)^* : V^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ \text{id}^V \end{aligned}$$

Com que $\varphi \circ \text{id}^V = \varphi$ es té que $(\text{id}^V)^* = \text{id}^{(V^*)}$. $\square$

PROPOSICIÓ 3.9. *Siguen V, W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siguen $f : V \longrightarrow W$ i $g : V \longrightarrow W$ dues aplicacions lineals. Siguen $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Aleshores per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*

$$(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^* \text{ per a tot } f, g \in V^*.$$

DEMOSTRACIÓ. Siga φ una aplicació lineal en W^* . Així

$$(\lambda f + \mu g)^*(\varphi) = \varphi \circ (\lambda f + \mu g).$$

Per altra banda.

$$\begin{aligned} (\lambda f^* + \mu g^*)(\varphi) &= \lambda f^*(\varphi) + \mu g^*(\varphi) \\ &= \lambda(\varphi \circ f) + \mu(\varphi \circ g). \end{aligned}$$

Per a vore que són iguals, vorem que actuen igual sobre un $w \in W$ qualsevol.

$$\begin{aligned} \varphi \circ (\lambda f + \mu g)(w) &= \varphi((\lambda f + \mu g)(w)) \\ &= \varphi(\lambda f(w) + \mu g(w)) = \lambda(\varphi \circ f)(w) + \mu(\varphi \circ g)(w) \\ &= (\lambda(\varphi \circ f) + \mu(\varphi \circ g))(w). \end{aligned}$$

Així, $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$. $\square$

PROPOSICIÓ 3.10. *Siguen V, W i U tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siguen $f : V \longrightarrow W$ i $g : W \longrightarrow U$ dues aplicacions lineals. Aleshores*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

DEMOSTRACIÓ. Siga $\varphi \in U^*$. Es donen les següents igualtats.

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*(\varphi) &= \varphi \circ (g \circ f) \\ &= (\varphi \circ g) \circ f \\ &= f^*(\varphi \circ g) \\ &= f^*(g^*(\varphi)) \\ &= (f^* \circ g^*)(\varphi). \end{aligned}$$

Per tant, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. $\square$

A continuació tenim un teorema que relaciona dos espais vectorials V i W a partir de dues aplicacions lineals f i f^* i les corresponents matrius coordenades d'una aplicació i l'altra.

TEOREMA 3.11. *Siguen V i W dos espais vectorials, amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$. Siguen $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\overline{\mathcal{B}} = \{d_1, \dots, d_m\}$ bases de V i W , respectivament. Siga $f: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Siga A matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ i siga B la matriu coordenada d' f^* de $(\overline{\mathcal{B}})^*$ a $\mathcal{B}^*$. Aleshores $B = A^t$.*

DEMOSTRACIÓ. Notem que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mj} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{K}).$$

Per a cada $1 \leq j \leq n$ la columna j -èssima d' A són les coordenades d' $f(e_j)$ en la base $\overline{\mathcal{B}}$.

Per altra banda

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1i} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{ni} & \cdots & \beta_{nm} \end{bmatrix} \in M_{nm}(\mathbb{K}).$$

Per a cada $1 \leq i \leq m$ la columna i -èssima de B són les coordenades d' $f^*(d_i^*)$ en la base $\mathcal{B}^*$. Així,

$$f(e_j) = \alpha_{1j}d_1 + \cdots + \alpha_{mj}d_m$$

$$f^*(d_i^*) = \beta_{1i}e_1^* + \cdots + \beta_{ni}e_n^*.$$

Notem que $f^*(d_i^*) = d_i^* \circ f$. A més, per a cada $1 \leq j \leq n$, es té que

$$\begin{aligned} (d_i^* \circ f)(e_j) &= d_i^*(f(e_j)) \\ &= d_i^*(\alpha_{1j}d_1 + \cdots + \alpha_{mj}d_m) \\ &= \alpha_{1j}d_i^*(d_1) + \cdots + \alpha_{mj}d_i^*(d_m) \\ &= \alpha_{ij}. \end{aligned}$$

A més, per a cada $1 \leq j \leq n$, es té que

$$\begin{aligned} (d_i^* \circ f)(e_j) &= (f^* \circ d_i^*)(e_j) \\ &= (\beta_{1i}e_1^* + \cdots + \beta_{ni}e_n^*)(e_j) \\ &= \beta_{1i}e_1^*(e_j) + \cdots + \beta_{ni}e_n^*(e_j) \\ &= \beta_{ji}. \end{aligned}$$

Aleshores concloem que per a cada $1 \leq j \leq n$ i $1 \leq i \leq m$, $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$. Aleshores, $B = A^t$. $\square$

Com a conseqüència d'este resultat podem obtindre el següent corollari.

COROLLARI 3.12. *Siguen $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in M_{pn}(\mathbb{K})$. Aleshores*

$$(BA)^t = A^t B^t.$$

DEMOSTRACIÓ. Siguen V, U i W tres espais vectorials, amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}(U) = p$ i $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$. Siguen $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\overline{\mathcal{B}} = \{d_1, \dots, d_m\}$ i $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$ bases de V, W i U , respectivament. Siguen $f: V \rightarrow W$ i $g: W \rightarrow U$. Siga A matriu coordenada d' f de $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ i siga B la matriu coordenada de g de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$. Siga BA la matriu coordenada de $g \circ f: V \rightarrow U$ de $\mathcal{B}$ a $\overline{\overline{\mathcal{B}}}$.

Per altra banda, siga l'aplicació dual d' f , denotada per $f^*: W^* \rightarrow V^*$ definida per $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, on A^t és la matriu coordenada associada a la base dual $\mathcal{B}^*$.

Per la Proposició 3.10, sabem que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Com que, pel Teorema 3.11 les matrius associades a les dues aplicacions compostes són les mateixes, tindrem que $(BA)^t = A^t B^t$. $\square$

2. Espai bidual

DEFINICIÓ 3.13. *Donat un espai vectorial V sobre un cos $\mathbb{K}$, s'anomena **espai bidual** de V a l'espai dual de V^* el qual es representa per V^{**} .*

NOTA 3.14. *Si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, sabem que $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = n$ i que $\dim_{\mathbb{K}}(V^{**}) = n$. Així els tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials són isomorfs.*

Recordem de la demostració de la Proposició 3.4 que, per a demostrar l'isomorfisme entre V i V^* hem fet ús de les bases. A continuació vorem que l'isomorfisme entre V i V^{**} no necessita fer ús de bases.

PROPOSICIÓ 3.15. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V)$. Aleshores $V \cong V^{**}$.*

DEMOSTRACIÓ. Recordem que

$$V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K}) = \{f: V^* \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ lineal}\}.$$

Considerem la següent aplicació

$$\begin{array}{llll} \text{av}_V: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & v & \longmapsto & \text{av}_V(v): \quad \begin{array}{ll} V^* & \longrightarrow \mathbb{K} \\ f & \longmapsto f(v) \end{array} \end{array}$$

És a dir, $\text{av}_V(v)$ és l'**aplicació avaluació** en v . Anem a vore que av_V és lineal i bijectiva.

En primer lloc vegem que av_V **és lineal**. Siguen $v, w \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i siga $f \in V^*$. Les següents equacions es donen.

$$\begin{aligned}\text{av}_V(\lambda v + \mu w)(f) &= f(\lambda v + \mu w) \\ &= \lambda f(v) + \mu f(w) \\ &= \lambda \text{av}_V(v)(f) + \mu \text{av}_V(w)(f) \\ &= (\lambda \text{av}_V(v) + \mu \text{av}_V(w))(f).\end{aligned}$$

Per tant es té que

$$\text{av}_V(\lambda v + \mu w) = \lambda \text{av}_V(v) + \mu \text{av}_V(w).$$

Vegem ara que av_V **és injectiva**. Per a veure que av_V és injectiva, estudiem el nucli

$$\text{Ker}(\text{av}_V) = \{v \in V \mid \text{av}_V(v) = 0\}.$$

Siga $v \in \text{Ker}(\text{av}_V)$ aleshores, per a tot $f \in V^*$, es té que

$$f(v) = \text{av}_V(v)(f) = 0(f) = 0.$$

Per tant, v és un vector de V que s'anul·la per a tota aplicació lineal f en V^* . Si v no fóra el vector zero, aleshores v podria formar part d'una base de V , diem-li $\mathcal{B}$. L'aplicació constant a 1, que envia tots els vectors de $\mathcal{B}$ a l'1 en $\mathbb{K}$ es pot estendre per Propietat Universal a una aplicació lineal g en V^* . Notem que esta aplicació g avaluada en v tornaria l'1, contradient que v s'anul·la en tota aplicació lineal de V^* . Així $v = 0$. Per tant, $\text{Ker}(\text{av}_V) = \{0\}$, és a dir, av_V és injectiva.

Ara veurem que av_V **és sobrejectiva**. Com $\text{av}_V: V \longrightarrow V^{**}$ és lineal i injectiva i $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V^{**})$ concloem, pel Corol·lari 2.44, que av_V és sobrejectiva.

En definitiva, av_V és un isomorfisme de V a V^{**} . □

CAPÍTOL 4

Formes bilineals

En aquest capítol anem a estudiar nocions algebraiques relacionades amb les formes bilineals, introduint la seua definició i propietats més importants relacionades amb aquestes formes bilineals, així com també veurem quina és la seua representació matricial, la qual ens servirà per introduir conceptes com la congruència de matrius. A més, posteriorment també veurem quins són els principals tipus de formes bilineals (simètriques, alternades i antisimètriques).

DEFINICIÓ 4.1. *Siga $\mathbb{K}$ un cos i siga V un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$. Definim una **forma bilineal** en V com una aplicació $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ que és lineal en cada variable quan l'altra està fixada. És a dir, es cumplix que per a tot $v, v', w, w' \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*

$$(1) \quad B(\lambda v + \mu v', w) = \lambda B(v, w) + \mu B(v', w).$$

$$(2) \quad B(v, \lambda w + \mu w') = \lambda B(v, w) + \mu B(v, w').$$

*Un **espai bilineal** (V, B) és un espai vectorial dotat d'una elecció específica de forma bilineal.*

A més, definim el conjunt de les formes bilineals com

$$\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) = \{B : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \mid B \text{ és forma bilineal}\}$$

A continuació presentem una sèrie de propietats al respecte de les formes bilineals mitjançant la següent proposició.

PROPOSICIÓ 4.2. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Siguen $v, w \in V$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Aleshores:*

$$(1) \quad B(0, w) = B(v, 0) = 0.$$

$$(2) \quad B(\lambda v, w) = B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w).$$

DEMOSTRACIÓ. En primer lloc tenim que

$$B(0, w) = B(0 + 0, w) = B(0, w) + B(0, w).$$

Restant $B(0, w)$ als dos costats, arribem a que $B(0, w) = 0$. En l'altra component és anàleg.

Per altra banda, la segona propietat ix directa de la definició de forma bilineal,

$$B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w) = B(v, \lambda w).$$

□

EXEMPLE 4.3. *El producte escalar estàndard $\cdot$ determinat per la següent aplicació*

$$\begin{aligned} \cdot: \quad & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (\alpha_1, \dots, \alpha_n)(\beta_1, \dots, \beta_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \end{aligned}$$

és una forma bilineal.

Tenim dues construccions de nous espais bilineals que anem a presentar a continuació.

PROPOSICIÓ 4.4. *Si (V, B) és un espai bilineal i $W \leq V$, aleshores $(W, B|_W)$ és un espai bilineal.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen $w_1, w_2, u \in W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Hem de comprovar la linealitat de $B|_W$ en les dues components.

$$\begin{aligned} B|_W(\lambda w_1 + \mu w_2, u) &= B(\lambda w_1 + \mu w_2, u) && \text{(Definició de } B|_W) \\ &= \lambda B(w_1, u) + \mu B(w_2, u) && (B \text{ és bilineal}) \\ &= \lambda B|_W(w_1, u) + \mu B|_W(w_2, u) && \text{(Def. de } B|_W) \end{aligned}$$

En l'altra component s'obté de forma anàlega.

□

PROPOSICIÓ 4.5. *Si V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $W_1, W_2 \leq V$ de forma que $V = W_1 \oplus W_2$ i $(W_1, B_1), (W_2, B_2)$ són espais bilineals, aleshores $(V, B_1 \oplus B_2)$ és un espai bilineal amb*

$$\begin{aligned} B_1 \oplus B_2: \quad & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (w_1 + w_2, v_1 + v_2) & \longmapsto & B_1(w_1, v_1) + B_2(w_2, v_2). \end{aligned}$$

Notem que la condició $V = W_1 \oplus W_2$ fa que tot vector de V s'escriu de forma única com a $w_1 + w_2$ amb $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$.

DEMOSTRACIÓ. Siguen $u, w, v \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Com $V = W_1 \oplus W_2$, existeixen uns únics $w_1, u_1, v_1 \in W_1$ i $w_2, u_2, v_2 \in W_2$ de forma que

$$w = w_1 + w_2 \qquad v = v_1 + v_2 \qquad u = u_1 + u_2.$$

Comprovem la linealitat de $B_1 \oplus B_2$ en la primera component.

$$\begin{aligned}
& B_1 \oplus B_2(\lambda w + \mu v, u) \\
&= B_1 \oplus B_2(\lambda(w_1 + w_2) + \mu(v_1 + v_2), (u_1 + u_2)) \quad (\text{Def. } w, v, u) \\
&= B_1 \oplus B_2((\lambda w_1 + \mu v_1) + (\lambda w_2 + \mu v_2), u_1 + u_2) \\
&= B_1(\lambda w_1 + \mu v_1, u_1) + B_2(\lambda w_2 + \mu v_2, u_2) \quad (\text{Def. } B_1 \oplus B_2) \\
&= \lambda B_1(w_1, u_1) + \mu B_1(v_1, u_1) + \lambda B_2(w_2, u_2) + \mu B_2(v_2, u_2) \\
&= \lambda[B_1(w_1, u_1) + B_2(w_2, u_2)] + \mu[B_1(v_1, u_1) + B_2(v_2, u_2)] \\
&= \lambda(B_1 \oplus B_2)(w_1 + w_2, u_1 + u_2) + \mu(B_1 \oplus B_2)(v_1 + v_2, u_1 + u_2) \\
&\quad (\text{Def. } B_1 \oplus B_2) \\
&= \lambda(B_1 \oplus B_2)(w, u) + \mu(B_1 \oplus B_2)(v, u). \quad (\text{Def. } w, v, u)
\end{aligned}$$

La linealitat en l'altra component s'obté de forma anàloga. $\square$

1. Representació matricial de les formes bilineals

En aquesta secció definim la matriu associada a una forma bilineal respecte d'una base i estudiem quina és la correspondència entre les formes bilineals i les matrius coordenades.

En primer lloc definim la matriu coordenada de la forma bilineal B en la base $\mathcal{B}$.

DEFINICIÓ 4.6. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, siga $B: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Definim la **matriu coordenada** de B en $\mathcal{B}$ com la matriu A en $M_n(\mathbb{K})$ que té per entrada (i, j) a l'element $B(e_i, e_j)$ per a tot $1 \leq i, j \leq n$, és a dir,*

$$A = \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix}.$$

A continuació presentem una proposició que caracteritza la representació matricial d'una forma bilineal B .

PROPOSICIÓ 4.7. *Siga (V, B) un $\mathbb{K}$ -espai bilineal i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Siga $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matriu coordenada de B en $\mathcal{B}$. Aleshores A és la única matriu en $M_n(\mathbb{K})$ que satisfà que, per a tot $u, v \in V$, si X són les coordenades de u en $\mathcal{B}$ i Y coordenades de v en $\mathcal{B}$, aleshores*

$$B(u, v) = X^t A Y.$$

DEMOSTRACIÓ. Siguen $u, v \in V$, es poden escriure a partir dels elements de la base com

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \quad v = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$$

on

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \text{ són les coordenades de } u \text{ en } \mathcal{B} \text{ i} \\ \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \text{ són les coordenades de } v \text{ en } \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Per a la forma bilineal B en V , la seua bilinealitat ens dona l'expressió de la següent forma

$$\begin{aligned} B(u, v) &= B\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i B\left(e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j B(e_i, e_j) \\ &= \mathbf{X}^t \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix} \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

A continuació comprovem la unicitat.

Siga $\mathbf{C} \in M_n(\mathbb{K})$ que satisfà que per a tot $u, v \in V$, si anomenem

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\text{ coordenades de } u \text{ en } \mathcal{B} \\ \mathbf{Y} &\text{ coordenades de } v \text{ en } \mathcal{B} \end{aligned}$$

Aleshores $B(u, v) = \mathbf{X}^t \mathbf{C} \mathbf{Y}$. En el cas particular dels vectors e_i, e_j de $\mathcal{B}$, si anomenem

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &\text{ coordenades de } e_i \text{ en } \mathcal{B} \\ \mathbf{Y}_j &\text{ coordenades de } e_j \text{ en } \mathcal{B} \end{aligned}$$

Aleshores

$$B(e_i, e_j) = \mathbf{X}_i^t \mathbf{C} \mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}(i, j).$$

Així $\mathbf{A}(i, j) = \mathbf{C}(i, j)$ i per tant $\mathbf{A} = \mathbf{C}$. □

Vegem a continuació un exemple relacionat.

EXEMPLE 4.8. *Es considera la forma bilineal*

$$\begin{aligned} B: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (z, t)) &\longmapsto xz + 2yz + yt \end{aligned}$$

*Considerem la base canònica de $\mathbb{R}^2$ donada per $\mathcal{B}_c^{(2)} = \{(1, 0), (0, 1)\}$
Calculem la imatge dels elements d'aquesta base per l'aplicació B :*

$$\begin{aligned} B((1, 0), (1, 0)) &= 1 & B((1, 0), (0, 1)) &= 0 \\ B((0, 1), (1, 0)) &= 2 & B((0, 1), (0, 1)) &= 1 \end{aligned}$$

Així, la matriu coordenada $\mathbf{A}$ de B en $\mathcal{B}_c^{(2)}$ ve donada per

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per altra banda, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(z, t) \in \mathbb{R}^2$ i anomenem

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &\text{ coordenades de } (x, y) \text{ en } \mathcal{B}_c^{(2)} \\ \mathbf{Y} &\text{ coordenades de } (z, t) \text{ en } \mathcal{B}_c^{(2)} \end{aligned}$$

$$\text{on } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}.$$

Vegem ara que coincideixen les expressions de $B((x, y), (z, t))$ i $\mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}$:

$$\begin{aligned} B((x, y), (z, t)) &= xz + 2yz + yt \\ \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 2z + t \end{bmatrix} = [xz + 2zy + yt] \end{aligned}$$

Vegem així que coincideixen les expressions de la forma bilineal i la seua representació matricial.

TEOREMA 4.9 (Tota matriu quadrada és matriu coordenada d'una forma bilineal). *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V i siga $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu qualsevol. Aleshores existeix una única forma bilineal $B: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ per a la que $\mathbf{A}$ és matriu coordenada de B en $\mathcal{B}$.*

DEMOSTRACIÓ. Siga

$$\begin{aligned} B: V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y} \end{aligned}$$

on $\mathbf{X}$ són les coordenades de u en $\mathcal{B}$ i $\mathbf{Y}$ són les coordenades de v en $\mathcal{B}$.

Ens falta veure que B és una forma bilineal i que $\mathbf{A}$ és la seua matriu coordenada en la base $\mathcal{B}$. Així, siguen $u_1, u_2, v \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, per als què

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &\text{ coordenades de } u_1 \text{ en } \mathcal{B}, \\ \mathbf{X}_2 &\text{ coordenades de } u_2 \text{ en } \mathcal{B}, \\ \mathbf{Y} &\text{ coordenades de } v \text{ en } \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Així tenim que $\lambda \mathbf{X}_1 + \mu \mathbf{X}_2$ són les coordenades de $\lambda u_1 + \mu u_2$ en $\mathcal{B}$. Per tant

$$\begin{aligned} B(\lambda u_1 + \mu u_2, v) &= (\lambda \mathbf{X}_1 + \mu \mathbf{X}_2)^t \mathbf{A} \mathbf{Y} \\ &= (\lambda \mathbf{X}_1^t + \mu \mathbf{X}_2^t) \mathbf{A} \mathbf{Y} \\ &= \lambda \mathbf{X}_1^t \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mu \mathbf{X}_2^t \mathbf{A} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

La linealitat en la segona component és anàlega. Ara, si $\mathbf{C}$ és la matriu coordenada de B en $\mathcal{B}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

de forma que la matriu coordenada de B en $\mathcal{B}$ és $\mathbf{A}$.

Per últim falta veure la unicitat. Si $B(u, v) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}$ per a una matriu $\mathbf{A}$, aleshores

$$B(e_i, e_j) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

el qual és la entrada (i, j) de $\mathbf{A}$ i per tant $\mathbf{A} = (B(e_i, e_j))$. □

A continuació anem a definir un concepte important com és el de matrius congruents a partir de la següent proposició.

PROPOSICIÓ 4.10. *Siga (V, B) un $\mathbb{K}$ -espai vectorial bilineal. Siguen $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$ dues bases de V . Anomenem*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\text{ matriu coordenada de } B \text{ en } \mathcal{B}, \\ \overline{\mathbf{A}} &\text{ matriu coordenada de } B \text{ en } \overline{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Siga $P \in GL_n(\mathbb{K})$, la matriu canvi de base de $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$, aleshores

$$P^tAP = \overline{A}.$$

DEMOSTRACIÓ. Siguen $u, v \in V$, anomenem

X coordenades de u en $\mathcal{B}$, $\overline{X}$ coordenades de u en $\overline{\mathcal{B}}$

Y coordenades de v en $\mathcal{B}$, $\overline{Y}$ coordenades de v en $\overline{\mathcal{B}}$.

Aleshores,

$$B(u, v) = X^tAY = \overline{X}^t\overline{A}\overline{Y}.$$

A més, $P\overline{X} = X$ i $P\overline{Y} = Y$. Notem que

$$\begin{aligned} B(u, v) &= X^tAY \\ &= (P\overline{X})^tA(P\overline{Y}) \\ &= \overline{X}^t(P^tAP)\overline{Y}. \end{aligned}$$

Per la unicitat de la matriu coordinada d'una forma bilineal provada en la Proposició 4.7 en una base es té que $P^tAP = \overline{A}$. $\square$

DEFINICIÓ 4.11. Siguen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ dues matrius. Direm que A i B són **congruents** si existeix una matriu $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que

$$P^tAP = B.$$

Relacionada amb aquesta definició, tenim la següent proposició que ens diu que ser congruents és una relació d'equivalència:

PROPOSICIÓ 4.12. Ser congruents és una relació d'equivalència en $M_n(\mathbb{K})$.

DEMOSTRACIÓ. Per tal de ser una relació d'equivalència ha de satisfer les propietats transitiva, reflexiva i simètrica. Vegem que compleix les tres propietats.

Vegem en primer lloc que compleix la propietat **reflexiva**. Siga I_n la matriu identitat $n \times n$. Aleshores, $A = I_n^t A I_n$ i per tant A és congruent a ella mateixa.

Vegem ara que es compleix la propietat **simètrica**. Siguen A i B congruents. Com que A és congruent a B , tenim que $P^tBP = A$, per a alguna matriu invertible $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

Multiplicant per la inversa de P^t , $(P^t)^{-1}$, ja que les operacions inversa i trasposta commuten, per l'esquerra a ambdós costats de la igualtat, i per la inversa de P , P^{-1} per la dreta a ambdós costats de la igualtat, obtenim la següent igualtat:

$$(P^{-1})^tAP^{-1} = (P^{-1})^tP^tBPP^{-1}$$

Equivalentment:

$$(P^t)^{-1}AP^{-1} = B.$$

Vegem per últim que se satisfà la propietat **transitiva**. Suposem que A i B són congruents, és a dir, existeix $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que $P^tBP = A$; i que B i C són congruents és a dir que existeix $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que $Q^tCQ = B$. Relacionant estes dos igualtats, tenim que:

$$P^tQ^tCQP = A.$$

Equivalentment

$$(QP)^tC(QP) = A.$$

Per tant A i C són congruents. $\square$

COROL·LARI 4.13. *Siguen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ dues matrius. Les següents afirmacions són equivalents:*

- (1) A i B són congruents.
- (2) A i B representen la mateixa forma bilineal en bases diferents.

DEMOSTRACIÓ. Aquest corol·lari ve demostrat com a conseqüència de la Definició 4.11 i de la propietat que ens diu que ser congruents és una relació d'equivalència, la qual ve expressada en la Proposició 4.12. $\square$

PROPOSICIÓ 4.14. *Siguen A i B dues matrius quadrades en $M_n(\mathbb{K})$. Aleshores A i B són congruents si, i només si, podem trobar una forma de passar d' A a B mitjançant operacions elementals, les mateixes per fila que per columna.*

DEMOSTRACIÓ. Notem que A i B són congruents, aleshores podem trobar una matriu $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que $P^tAP = B$.

Recordem que tota matriu invertible es pot descomposar com a producte finit de matrius elementals. A més, fer operacions elementals fila és equivalent a multiplicar la matriu inicial a esquerra per una matriu elemental; mentre que fer operacions columna és equivalent a fer-ho per la dreta.

Així si

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \\ \hline I_n & \end{array} \right] \xrightarrow{\text{operacions per fila i columna}} \left[\begin{array}{c|c} B & P \\ \hline Q & \end{array} \right]$$

Així, trobem que $PAQ = B$. El fet que les operacions elementals siguin les mateixes per fila que per columna garantitza que $Q = P^t$. $\square$

EXEMPLE 4.15. *Considerem la següent matriu $A \in M_2(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Considerem la següent seqüència d'operacions elementals

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array} \right] & \xrightarrow{f_2=f_2-2f_1} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array} \right] \\ & & \xrightarrow{c_2=c_2-2c_1} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & & \\ 0 & 1 & & \end{array} \right] \end{array}$$

Amb aquest procediment hem arribat a trobar una matriu diagonal congruent amb la matriu original. Notem que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B.$$

Així, si A representa una forma bilineal B en alguna base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, es té que B representa a B en alguna altra base $\tilde{\mathcal{B}}$. Notem que hem aconseguit una representació diagonal de B .

A continuació anem a tractar de relacionar mitjançant una aplicació les formes bilineals amb la seua representació matricial. Abans de fer-ho, vorem que el conjunt de formes bilineals $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ té estructura de $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

PROPOSICIÓ 4.16. $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ té estructura de $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

DEMOSTRACIÓ. Hem de comprovar que la suma, el producte per escalar i el vector zero estan ben definits.

Vegem en primer lloc que la suma està ben definida. Definim l'aplicació suma de la següent forma

$$\begin{array}{ccc} +: & \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) \times \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) & \longrightarrow \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) \\ & (B, C) & \longmapsto B + C. \end{array}$$

on si $B: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ i $C: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, aleshores

$$\begin{array}{ccc} B + C: & V \times V & \longrightarrow \mathbb{K} \\ & (v, u) & \longmapsto B(v, u) + C(v, u). \end{array}$$

Anem a veure que $B + C$ és una forma bilineal.

Si $v, u, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, vegem que $B + C$ és lineal en la primera component.

$$\begin{aligned} (B + C)(\alpha v + \beta u, w) &= B(\alpha v + \beta u, w) + C(\alpha v + \beta u, w) \\ &= \alpha B(v, w) + \beta B(u, w) + \alpha C(v, w) + \beta C(u, w) \\ &= \alpha[B(v, w) + C(v, w)] + \beta[B(u, w) + C(u, w)] \\ &= \alpha[B + C](v, w) + \beta[B + C](u, w). \end{aligned}$$

Anàlogament es pot comprovar que és lineal en la segona component.

Ara veurem que el producte per escalar està ben definit. Aquest ve donat per la següent expressió

$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathbb{K} \times \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) &\longrightarrow \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) \\ (\lambda, B) &\longmapsto \lambda B \end{aligned}$$

on, si $B: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, aleshores

$$\begin{aligned} \lambda B: \quad V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (v, u) &\longmapsto \lambda[B(v, u)]. \end{aligned}$$

Provem que λB és una forma bilineal, veient que és lineal per l'esquerra primer. Siguen $u, v, w \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, aleshores

$$\begin{aligned} \lambda B(\alpha v + \beta u, w) &= \lambda[B(\alpha v + \beta u, w)] \\ &= \lambda[\alpha B(v, w) + \beta B(u, w)] \\ &= \alpha[\lambda B(v, w)] + \beta[\lambda B(u, w)] \\ &= \alpha(\lambda B)(v, w) + \beta(\lambda B)(u, w). \end{aligned}$$

La linealitat en la segona component és anàlega.

Per últim anem a veure que l'aplicació 0 que ve donada per

$$\begin{aligned} 0_{\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)}: \quad V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (v, u) &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

és una forma bilineal. Vegem que és lineal per l'esquerra. Siguen $u, v, w \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Aleshores

$$\begin{aligned} 0(\alpha v + \beta u, w) &= 0 = \alpha 0 + \beta 0 \\ &= \alpha 0(v, w) + \beta 0(u, w). \end{aligned}$$

La linealitat en la segona component és anàlega. □

Ara ja podem estudiar la **correspondència entre matrius i formes bilineals**. Per fer-ho presentarem el següent teorema.

TEOREMA 4.17. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, siga $\mathcal{B}$ una base de V . Considerem l'aplicació*

$$\begin{array}{ccc} \Psi: \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ B & \longmapsto & A \end{array}$$

on A és la matriu coordenada de B en $\mathcal{B}$. Aleshores Ψ és un isomorfisme de $\mathbb{K}$ -espais vectorials.

DEMOSTRACIÓ. En primer lloc tenim que Ψ és bijectiva pel Teorema 4.9. Anem a veure ara que Ψ és lineal: Siguen B_1, B_2 dues formes bilineals en V i siguen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Anomenem

A_1 matriu coordenada de B_1 en $\mathcal{B}$.
 A_2 matriu coordenada de B_2 en $\mathcal{B}$.

Anem a veure que $\alpha A_1 + \beta A_2$ és matriu coordenada de $\alpha B_1 + \beta B_2$ en $\mathcal{B}$. Siguen $u, v \in V$, anomenem

X coordenades de u en $\mathcal{B}$.
 Y coordenades de v en $\mathcal{B}$.

Per definició tenim que $B_1(u, v) = X^t A_1 Y$ i que $B_2(u, v) = X^t A_2 Y$. Així:

$$\begin{aligned} (\alpha B_1 + \beta B_2)(u, v) &= \alpha B_1(u, v) + \beta B_2(u, v) \\ &= \alpha X^t A_1 Y + \beta X^t A_2 Y \\ &= X^t (\alpha A_1 + \beta A_2) Y. \end{aligned}$$

Per tant $\alpha A_1 + \beta A_2$ és la matriu coordenada de $\alpha B_1 + \beta B_2$ en $\mathcal{B}$. $\square$

2. Formes bilineals simètriques, antisimètriques i alternades.

Després d'haver definit el concepte de formes bilineals, anem a aprofundir més sobre la classificació d'aquestes en tres tipus diferents: formes bilineals simètriques, antisimètriques i alternades.

En primer lloc les definirem i presentarem una sèrie d'exemples al respecte i posteriorment presentarem una sèrie de resultats que ens permeten caracteritzar aquesta classificació de formes bilineals abans de presentar un altre concepte important com és el de l'ortogonalitat.

DEFINICIÓ 4.18. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $B: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Direm que una forma bilineal B és **simètrica** si per a tot $v, w \in V$*

$$B(v, w) = B(w, v).$$

*Direm que és **antisimètrica** si per a tot $v, w \in V$*

$$B(v, w) = -B(w, v).$$

*Direm que és **alternada** si*

$$B(v, v) = 0 \text{ per a tot } v \in V.$$

Direm que (V, B) és un espai bilineal simètric, antisimètric o alternat quan la forma bilineal tinga la corresponent propietat.

Vegem a continuació uns exemples.

EXEMPLE 4.19. Per a un cos $\mathbb{K}$, vist com a un espai vectorial 1-dimensional sobre si mateix, la multiplicació $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ és una forma bilineal simètrica i no alternada. És antisimètrica quan $\mathbb{K}$ té característica 2.

EXEMPLE 4.20. Per a un cos $\mathbb{K}$, la forma bilineal següent és antisimètrica i alternada.

$$B((x, y), (x', y')) = xy' - x'y = \det \begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix}.$$

Per exemple, $B((2, 1), (3, 4)) = 5$ i $B((2, 1), (2, 1)) = 0$.

EXEMPLE 4.21. Considerem $\mathbb{R}^2$ i la forma bilineal B que ve donada per l'expressió

$$B((x, y), (x', y')) = xx' - yy'.$$

Tenim que és una forma bilineal simètrica ja que si canviem l'ordre dels elements es conserva el producte, com podem comprovar de la següent forma

$$B((x', y'), (x, y)) = x'x - y'y = xx' - yy'.$$

EXEMPLE 4.22. Considerem $\mathbb{R}^2$. Considerem la forma bilineal

$$B((x, y), (x', y')) = xy' + yx'.$$

Tenim que és simètrica ja que $B((x', y'), (x, y)) = x'y + y'x$, $B(e_i, e_i) = 0$ on $\{e_1, e_2\}$ és la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

Sobre els tres tipus de formes bilineals que hem definit (simètrica, antisimètrica i alternada), el primer i el tercer tipus són més bàsics que el segon. En particular, anem a veure ara que una forma bilineal antisimètrica és altre nom per a una forma simètrica o alternada, depenent de si el cos té característica 2 o no.

TEOREMA 4.23. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $B: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. En totes les característiques, una forma bilineal alternada és antisimètrica. En característica diferent de 2, una forma bilineal és antisimètrica si, i només si, és alternada. En característica 2, una forma bilineal és antisimètrica si, i només si, és simètrica.

DEMOSTRACIÓ. En primer lloc tractem el cas en què la forma bilineal B és alternada. Siguen $v, w \in V$, recordant que la definició de forma bilineal, podem descomposar l'equació $0 = B(v + w, v + w)$ de la següent forma

$$0 = B(v, v) + B(v, w) + B(w, v) + B(w, w) = B(v, w) + B(w, v).$$

Ens fixem en què $B(v, w) = -B(w, v)$ i per tant les formes bilineals alternades són antisimètriques en totes les seues característiques (fins i tot en característica 2).

Per altra banda treballem ara amb les formes bilineals antisimètriques. Tenim que quan la característica és diferent de 2 la forma bilineal antisimètrica és alternada ja que com es compleix que $B(v, v) = -B(v, v)$ aleshores $2B(v, v) = 0$ i per tant $B(v, v) = 0$.

Per últim, en el cas en que la forma bilineal siga simètrica amb característica 2, tindrem que aquesta forma bilineal coincideix amb la forma bilineal antisimètrica ja que $1 = -1$ en característica 2 i per tant $B(v, w) = B(w, v) = -B(w, v) = B(v, w)$. $\square$

Malgrat el que acabem de veure en aquest teorema, farem ús del concepte de forma bilineal antisimètrica. A continuació presentem el següent teorema que relaciona les formes bilineals alternades amb les formes bilineals simètriques.

TEOREMA 4.24. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $B: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Si treballem en característica diferent de 2, tota forma bilineal B s'expressa de forma única com a suma $B_1 + B_2$ on B_1 és simètrica i B_2 és alternada (equivalentment antisimètrica). En característica 2, les formes bilineals alternades són un subconjunt de les formes bilineals simètriques.*

DEMOSTRACIÓ. En primer lloc tenim que en característica 2 les formes bilineals alternades són un subconjunt de les formes bilineals simètriques com a conseqüència del Teorema 4.23.

Vegem el cas en característica diferent de 2. Siga B una forma bilineal, suposem que la podem expressar com la suma de dues formes bilineals B_1 i B_2 com $B = B_1 + B_2$ on B_1 és una forma bilineal simètrica i B_2 una forma bilineal alternada. Siguen $v, w \in V$, podem expressar-ho com

$$B(v, w) = B_1(v, w) + B_2(v, w). \quad (1)$$

Tenint en compte que B_1 és simètrica i B_2 alternada, vegem que

$$B(v, w) = B_1(w, v) + B_2(w, v) = B_1(v, w) - B_2(v, w). \quad (2)$$

Sumem i restem (1) i (2) i obtenim les fórmules per a B_1 i B_2 en termes de B com:

$$B_1(v, w) = \frac{B(v, w) + B(w, v)}{2}, \quad B_2(v, w) = \frac{B(v, w) - B(w, v)}{2}. \quad (3)$$

Així, les formes bilineals B_1 i B_2 definides en (3) són simètrica i alternada respectivament ja que

$$B_1(v, w) = \frac{B(v, w) + B(w, v)}{2} = \frac{B(w, v) + B(v, w)}{2} = B_1(w, v)$$

i

$$B_2(v, w) = \frac{B(v, w) - B(w, v)}{2} = \frac{B(w, v) - B(v, w)}{2} = B_2(w, v).$$

Així doncs hem establert l'existència i unicitat de B_1 i B_2 . $\square$

Ara demostrarem un teorema que caracteritza les formes bilineals simètriques.

TEOREMA 4.25. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguen $B: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. En característica diferent de 2, una forma bilineal simètrica $B(v, w)$ és completament determinada pels seus valors $B(v, v)$ en la diagonal.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen $v, w \in V$, es compleix que

$$\begin{aligned} B(v, w) &= \frac{1}{2}(B(v, w) + B(w, v)) \\ &= \frac{1}{2}(B(v + w, v + w) - B(v, v) - B(w, w)). \end{aligned}$$

Notem que hem usat la simetria a la primera igualtat. $\square$

El fet que per a la forma bilineal B pugam recuperar la funció de dues variables $B(v, w)$ de la funció d'una variable $B(v, v)$ fora de la característica 2 s'anomena **polarització**. Per exemple, ens mostra que una forma bilineal simètrica B és idènticament 0 si, i només si, $B(v, v) = 0$ per a tot v .

TEOREMA 4.26. *Siga (V, B) un espai bilineal, siga $\mathcal{B}$ una base de V i A la matriu coordinada de B en la base $\mathcal{B}$. Aleshores*

- (1) *B és simètrica si, i només si, $A^t = A$ (és a dir, A és simètrica).*
- (2) *B és antisimètrica si, i només si, $A^t = -A$ (és a dir, A és antisimètrica).*
- (3) *B és alternada si, i només si, $A^t = -A$ i les entrades diagonals de A són zero.*

DEMOSTRACIÓ. Anem a provar en primer lloc que B és simètrica si, i només si, A és simètrica.

Suposem que B és simètrica. Tenim que A és de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

on $\alpha_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = \alpha_{ji}$ (ja que B és simètrica). Per tant, A és simètrica.

Ara, suposem que A és simètrica. Siguen $u, v \in V$, anomenem

X coordenades de u en $\mathcal{B}$,

Y coordenades de v en $\mathcal{B}$.

Així,

$$B(u, v) = X^t A Y = (X^t A Y)^t = Y^t A^t X^{tt} = Y^t A X = B(v, u).$$

Ara anem a veure que B és antisimètrica si, i només si, A és antisimètrica.

Suposem que B és antisimètrica, és a dir, que donats $u, v \in V$ es compleix que $B(u, v) = -B(v, u)$. Tenim que A és de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

on $\alpha_{ij} = B(e_i, e_j) = -B(e_j, e_i) = -\alpha_{ji}$ (ja que B és antisimètrica). Per tant, A és antisimètrica.

Suposem ara que A és antisimètrica. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base de V per a la qual A és la matriu coordinada de B en $\mathcal{B}$. Siguen $u, v \in V$, anomenem

X coordenades de u en $\mathcal{B}$,

Y coordenades de v en $\mathcal{B}$.

Aleshores, tenim que

$$B(u, v) = X^t A Y = (X^t A Y)^t = Y^t A^t X^{tt} = -Y^t A X = -B(v, u).$$

Per últim anem a veure que B és alternada si, i només si, les entrades diagonals de la matriu A són zero.

Suposem que B és alternada. Suposem que estem en característica diferent de 2. Pel Teorema 4.23, una forma bilineal és alternada si, i només si, és antisimètrica. D'aquesta forma, estarem en el segon punt i tindrem que $A^t = A$. A més, les entrades diagonals seran nul·les. $\square$

Per acabar aquesta secció anem a presentar un algorisme que ens permet trobar una matriu diagonal congruent a una matriu simètrica A i relacionar el concepte de congruència de matrius amb el de les formes bilineals i matrius simètriques.

PROPOSICIÓ 4.27. *Siga $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matriu simètrica amb $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$ aleshores podem trobar una matriu diagonal congruent amb A .*

DEMOSTRACIÓ. Siga $A = (\alpha_{ij})$ la matriu simètrica que ens donen per inducció sobre n .

Si $n = 1$, A ja és una matriu diagonal.

Suposem cert l'enunciat per a $n - 1$ i anem a demostrar-ho per a matrius de tamany n . Si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

aleshores A ja és diagonal. Per tant, alguna entrada d' A serà diferent de 0.

En el primer pas anem a aconseguir un element no nul en la posició $(1, 1)$. Si $\alpha_{11} \neq 0$ ja estaria. En altre cas, si $\alpha_{11} = 0$, diferenciarem dos casos.

Cas 1: Tenim que existeix un índex $2 \leq i \leq n$ de forma que $\alpha_{ii} \neq 0$. Ens trobem en la següent situació.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ii} \end{bmatrix} \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_1} \begin{bmatrix} \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ii} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{1i} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_i} \begin{bmatrix} \alpha_{ii} & \cdots & \alpha_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1i} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Així, ho hem aconseguit i tenim que la matriu resultant és congruent a l'original.

Cas 2: Tenim que per a tot $1 \leq i \leq n$ es cumplix que $\alpha_{ii} = 0$. Com estem suposant que $A \neq 0$, existeix un índex $1 \leq j \leq n$ amb $i < j$ de forma que $\alpha_{ij} \neq 0$. Així, ens trobem en la següent situació.

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & \cdots & \alpha_{ij} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & \alpha_{ji} & \cdots & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_i = f_i + f_j} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{ij} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & \alpha_{ji} & \cdots & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_i = c_i + c_j} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 2\alpha_{ji} & \cdots & \alpha_{ij} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & \alpha_{ji} & \cdots & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Notem que hem arribat a una situació com la del Cas 1. A més, l'última matriu és simètrica i congruent a l'original.

En el cas que $\alpha_{11} \neq 0$, vegem que

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & & & \end{array} \right] \xrightarrow{f_i = f_i - \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{11}} f_1, c_i = c_i - \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{11}} c_1} \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

Així, ara només quedaria repetir el procés tenint en compte que la matriu és de tamany $n - 1$. Podem fer operacions elementals per fila i després per columna per a eliminar totes les entrades amb α_{ij} i α_{ji} amb $2 \leq j \leq n$. $\square$

Vegem ara un exemple amb una matriu simètrica sobre $\mathbb{R}$ que a partir d'una sèrie d'operacions per fila i columna ens proporciona la congruència amb una matriu diagonal.

EXEMPLE 4.28. Considerem la següent matriu simètrica sobre $\mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Anem a tractar d'arribar a una matriu diagonal a partir d'operacions per fila i per columna.

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array} \right] & \xrightarrow{f_2 = f_2 - 2f_1} & \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \end{array} \right] \\ & & \xrightarrow{c_2 = c_2 - 2c_1} & \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & & \\ 0 & \frac{1}{2} & & \end{array} \right] \end{array}$$

Després de veure l'exemple anterior, anem a presentar una proposició que ens permet generalitzar-ho per a qualsevol matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$ simètrica.

PROPOSICIÓ 4.29. Siga $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriu simètrica real, aleshores A és congruent a una matriu diagonal de la forma

$$\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0).$$

DEMOSTRACIÓ. Sabem per la Proposició 4.27 que A és congruent a una matriu diagonal de la forma

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Raonem sobre els diferents α_i per a $1 \leq i \leq n$.

- Si $\alpha_i = 0$, és una matriu amb una diagonal de zeros i per tant no cal canviar res.
- Si $\alpha_i > 0$, dividim la fila i i la columna i per $\sqrt{\alpha_i}$ fins convertir esta entrada en un 1.
- Si $\alpha_i < 0$, dividim la fila i i la columna i per $\sqrt{-\alpha_i}$ fins convertir esta entrada en un -1 .

Només quedaria reordenar fins a trobar una matriu diagonal

$$\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

congruent a la matriu original. $\square$

3. Ortogonalitat.

Abans hem parlat d'espais duals i formes bilineals. Hem particularitzat aquestes formes bilineals i les hem classificades en tres tipus diferents, simètriques, alternades i antisimètriques. Relacionat amb açò últim, a continuació anem a introduir el concepte d'ortogonalitat.

DEFINICIÓ 4.30. Siga $\mathbb{K}$ un cos, siga V un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$. Siga B una forma bilineal en V i siguen $v, w \in V$ dos vectors. Direm que v i w són **ortogonals** quan $B(v, w) = 0$ i ho denotarem per $v \perp w$.

Per a un subespai $W \subseteq V$ i un vector $v \in V$ escrivim $v \perp W$ quan $v \perp w$ per a tot $w \in W$.

DEFINICIÓ 4.31. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $B: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal i siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Direm que $\mathcal{B}$ és una **base ortogonal** si, per a tot $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, $B(e_i, e_j) = 0$.

Relacionada amb aquesta definició tenim la següent proposició i el següent corol·lari.

PROPOSICIÓ 4.32. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $B: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Les següents afirmacions són equivalents

- (1) B admet una matriu coordenada diagonal.
- (2) V admet una base ortogonal per a B .

DEMOSTRACIÓ. Suposem primer que B admet una matriu coordenada diagonal, és a dir, és una matriu de la forma

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Com que la matriu coordenada de B respecte a la base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ és diagonal, tindrem que $B(e_i, e_j) = 0$ per a tot $i \neq j$. Així doncs, tindrem per definició de base ortogonal que V admet una base ortogonal per a B .

Per altra banda, suposem ara que V admet una base ortogonal per a B . Considerem la matriu coordenada D de B respecte de $\mathcal{B}$. Aquesta matriu fa correspondre el coeficient α_{ij} amb l'entrada (e_i, e_j) de la matriu per a $1 \leq i, j \leq n$.

Com que $B(e_i, e_j) = 0$ per a $i \neq j$, tots els elements de fora de la diagonal principal de D són zero. Per tant, la matriu D és una matriu diagonal. $\square$

COROLLARI 4.33. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i siga $B: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal. Si $\mathcal{B}$ és una base ortogonal per a B , aleshores B és simètrica.*

DEMOSTRACIÓ. Notem que la matriu coordenada de B en la base $\mathcal{B}$, que és ortogonal per a B , té la forma

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

és a dir, la matriu coordenada de B en la base $\mathcal{B}$ és una matriu diagonal per la Proposició 4.32 i, per tant, simètrica. Així, pel Teorema 4.26 B és una forma bilineal simètrica. $\square$

EXEMPLE 4.34. *En un espai bilineal (V, B) , la relació $\perp$ pot no ser simètrica. Donats dos vectors $v, w \in V$ podem tindre que $v \perp w$ però $w \not\perp v$. És a dir, podem tindre $B(v, w) = 0$ i $B(w, v) \neq 0$ com vegem a continuació.*

Siga $V = \mathbb{R}^2$, siga la forma bilineal B cumplint que

$$B((x, y), (x', y')) = xx' + xy' - x'y - yy'.$$

Tenim que $(1, 0) \perp (1, -1)$ ja que

$$B((1, 0), (1, -1)) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0$$

però $(1, -1) \not\perp (1, 0)$ ja que

$$B((1, -1), (1, 0)) = 1 + 0 + 1 - 0 = 2.$$

Per tal de conèixer les formes bilineals on $v \perp w$ si, i només si, $w \perp v$ (és a dir, on la relació d'ortogonalitat és simètrica), tenim el següent resultat.

TEOREMA 4.35. *Siga (V, B) un espai vectorial bilineal. Les següents afirmacions són equivalents*

- (1) *La relació de perpendicularitat és simètrica, és a dir, $v \perp w$ si, i només si, $w \perp v$.*
 (2) *B és simètrica o alternada.*

DEMOSTRACIÓ. Aquesta demostració l'hem adaptada de la que trobem al Teorema 1.17 al llibre [Con].

Vegem en primer lloc que (2) implica (1).

Si B és una forma bilineal simètrica o alternada aleshores tenim que $B(v, w) = B(w, v)$ o $B(v, w) = -B(w, v)$ respectivament. Per tant $B(v, w)$ s'anul·la si i només si $B(w, v)$ s'anul·la.

Vegem ara l'altra implicació.

Suposem que la relació de perpendicularitat és simètrica. Prenem vectors $u, v, w \in V$. Anem a trobar una combinació lineal $\alpha v + \beta w$ tal que $(\alpha v + \beta w) \perp u$. Açò és equivalent a dir que

$$\alpha B(v, u) + \beta B(w, u) = 0. \quad (1)$$

ja que B és lineal en la seua primera component. Podem aconseguir (1) usant $\alpha = B(w, u)$ i $\beta = -B(v, u)$.

Considerem ara

$$x = B(w, u)v - B(v, u)w.$$

Aleshores per (1), tenim que $B(x, u) = 0$. Conseqüentment $B(u, x) = 0$ per la relació de simetria dels vectors ortogonals. Així, treballant amb $B(u, x)$ per la linealitat de B en la segona component i igualant-ho a 0, obtenim que per a tot $u, v, w \in V$

$$B(w, u)B(u, v) = B(v, u)B(u, w). \quad (2)$$

Ara mostrarem una forma bilineal satisfent (2) és simètrica o alternada. Utilitzem $w = u$ en (2) de la següent forma

$$B(u, u)B(u, v) = B(v, u)B(u, u). \quad (3)$$

Notem que $B(u, u)$ apareix en els dos costats de (3). Així doncs, per a tot $u, v \in V$ es cumplix que

$$B(u, v) \neq B(v, u) \text{ aleshores } B(u, u) = 0. \quad (4)$$

(anàlogament per a $B(v, v) = 0$).

Ara assumim que la relació $\perp$ per a B és simètrica i B no és una forma bilineal simètrica. Provarem que B és alternada. Per hipòtesi, existixen $u_0, v_0 \in V$ tals que

$$B(u_0, v_0) \neq B(v_0, u_0) \quad (5)$$

Des d'ací provarem que $B(w, w) = 0$ per a tot $w \in V$, emprant (4). Notem per (4) i (5) que es complix que

$$B(u_0, u_0) = 0, B(v_0, v_0) = 0 \quad (6)$$

Prenem ara un $w \in V$ qualsevol. Si $B(u_0, w) \neq B(w, u_0)$ o $B(v_0, w) \neq B(w, v_0)$ aleshores (4) prova que $B(w, w) = 0$.

Per tant, per provar que $B(w, w) = 0$ podem assumir que

$$B(u_0, w) = B(w, u_0), B(v_0, w) = B(w, v_0). \quad (7)$$

En (2), prenem $u = u_0$ i $v = v_0$. Aleshores

$$B(w, u_0)B(u_0, v_0) = B(v_0, u_0)B(u_0, w).$$

Per (7) tenim que

$$B(u_0, w)(B(u_0, v_0) - B(v_0, u_0)) = 0.$$

Açò implica, per (5) i per (7) que

$$B(u_0, w) = B(w, u_0) = 0. \quad (8)$$

Anàlogament, fixant $u = v_0$ i $v = u_0$ en (2) ens diu que per (5) i (7)

$$B(v_0, w) = B(w, v_0) = 0. \quad (9)$$

Per (8), $B(u_0, v_0 + w) = B(u_0, v_0)$ i $B(v_0 + w, u_0) = B(v_0, u_0)$. Aquestes són diferents per (5), aleshores (4) amb $u = v_0 + w$ i $v = u_0$ implica que

$$B(v_0 + w, v_0 + w) = 0.$$

Aleshores per (6) i (9), $B(w, w) = 0$. □

Després de demostrar aquest teorema, tenim que quan $\perp$ és una relació simètrica en V , per a qualsevol subconjunt W de V , tenim la següent definició.

DEFINICIÓ 4.36. *Siga $\mathbb{K}$ un cos, siga V un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ i W un subconjunt de V . Siga B una forma bilineal en V simètrica o alternada i siguen $v, w \in V$ dos vectors. Definim l'**espai ortogonal** $W^\perp$ (o **complement ortogonal de W**) com el conjunt*

$$\begin{aligned} W^\perp &= \{v \in V \mid v \perp w \text{ per a tot } w \in W\} \\ &= \{v \in V \mid w \perp v \text{ per a tot } w \in W\}. \end{aligned}$$

Per a $v \in V$ distint de zero, definirem $v^\perp$ com $v^\perp = \{v' \in V \mid v' \perp v\}$.

NOTA 4.37. *La notació $W^\perp$ per a un subespai W d'un espai bilineal V pren sentit només quan V és simètrica o alternada.*

Si un espai bilineal V es pot expressar com a suma directa de subespais W i W' amb les condicions addicionals de que $W \perp W'$ i $W' \perp W$ aleshores el Teorema 4.38 prova que V es comporta com la suma directa ortogonal de W i W' . La majoria de descomposicions d'un espai bilineal en suma directa de subespais no són sumes ortogonals directes ja que els subespais poden no ser perpendiculars mutuament. Açò ocorre en $\mathbb{R}^n$, el qual admet moltes descomposicions en suma directa de subespais vectorials que no són mutuament perpendiculars com la que veurem al següent exemple.

TEOREMA 4.38. *Siguen (V_1, B_1) i (V_2, B_2) espais bilineals. Vegent V_1 i V_2 com subespais de $V_1 \oplus V_2$ en una forma natural, tenim que $B_1 \oplus B_2$ restringix a B_i en V_i i tenim que els dos $V_1 \perp V_2$ i $V_2 \perp V_1$ són relatiu a $B_1 \oplus B_2$. Aquestes condicions determinen $B_1 \oplus B_2$ com una forma bilineal en $V_1 \oplus V_2$.*

DEMOSTRACIÓ. Com que $(B_1 \oplus B_2)((v_1, 0), (v'_1, 0)) = B_1(v_1, v'_1)$, tenim que $(B_1 \oplus B_2)|_{V_1} = B_1$. Anàlogament vegem que $(B_1 \oplus B_2)|_{V_2} = B_2$. Per a $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$, tenim que

$$(B_1 \oplus B_2)((v_1, 0), (0, v_2)) = B_1(v_1, 0) + B_2(0, v_2) = 0$$

i que

$$(B_1 \oplus B_2)((0, v_2), (v_1, 0)) = B_1(0, v_1) + B_2(v_2, 0) = 0$$

Per tant $v_1 \perp v_2$ i $v_2 \perp v_1$ en $(V_1 \oplus V_2, B_1 \oplus B_2)$.

Siga B_0 una forma bilineal qualsevol en $V_1 \oplus V_2$ tal que $B_0|_{V_i} = B_i$ i $V_1 \perp V_2$ i $V_2 \perp V_1$ relatiu a B_0 . Aleshores

$$\begin{aligned} B_0((v_1, v_2), (v'_1, v'_2)) &= B_0((v_1, 0), (v'_1, 0)) + B_0((v_1, 0), (0, v'_2)) \\ &\quad + B_0((0, v_2), (v'_1, 0)) + B_0((0, v_2), (0, v'_2)) \\ &= B_0((v_1, 0), (v'_1, 0)) + B_0((0, v_2), (0, v'_2)) \\ &= B_1(v_1, v'_1) + B_2(v_2, v'_2). \end{aligned}$$

de forma que $B_0 = B_1 \oplus B_2$ tal com volíem provar. $\square$

DEFINICIÓ 4.39. *L'espai bilineal $(V_1 \oplus V_2, B_1 \oplus B_2)$ construït abans s'anomena **suma directa ortogonal** de V_1 i V_2 i es denota per $V_1 \perp V_2$.*

EXEMPLE 4.40. *Considerem $\mathbb{R}$ com un espai bilineal baix el producte escalar $\cdot$.*

Tenim que $\mathbb{R} \perp \mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^2$ amb el producte escalar $\cdot$. Si considerem la n -suma ortogonal directa $\mathbb{R}^{\perp n} = \mathbb{R} \perp \cdots \perp \mathbb{R}$, tindrem que aquest equival a $\mathbb{R}^n$.

4. Formes bilineals no degenerades

En aquesta secció anem a estudiar un tipus especial de les formes bilineals simètriques: les formes bilineals no degenerades. Definirem aquest concepte i demostrarem una sèrie de propietats i resultats bàsics al respecte.

DEFINICIÓ 4.41. *Siga (V, B) un espai bilineal on B és una forma bilineal simètrica. Direm que una forma bilineal B és **no degenerada** si el nucli d'aquesta forma bilineal B és $\{0\}_V$. Equivalentment podem dir que existeix un $v \in V - \{0\}$ per al què*

$$B(u, v) = 0 \text{ per a tot } u \in V \text{ si, i només si, } v = 0.$$

*En cas que el nucli d'aquesta forma bilineal B siga diferent de $\{0\}_V$, la forma bilineal serà **degenerada**.*

Quan treballem amb formes bilineals simètriques, tenen una caracterització senzilla en termes de la seua matriu associada. En efecte, tenim el següent teorema.

TEOREMA 4.42. *Siga (V, B) un espai bilineal on B és una forma bilineal simètrica. Aleshores B és no degenerada si i només si la seua matriu associada respecte de qualsevol base és invertible.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen $u, v \in V$. Les formes bilineals $B(u, v)$ no degenerades en un espai vectorial de dimensió finita V ve definit per als vectors $u, v \in V$ per la condició

$$B(u, v) = 0 \text{ per a tot } u \in V \text{ si i només si } v = 0.$$

Siga A la matriu associada a la forma bilineal simètrica B , i siguen

$$\begin{aligned} X &\text{ les coordenades de } u \text{ en } \mathcal{B}, \\ Y &\text{ les coordenades de } v \text{ en } \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Sabem per la Proposició 4.7 que $B(u, v) = X^t A Y$. Suposem que v és un vector en V que satisfà $B(u, v) = 0$ per a tot $u \in V$. Açò es té si, i només si $X^t A Y = 0$ per a tot $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$. Esta darrera equació es té si, i només si $A Y = 0$.

Recordem que A és invertible si, i només si, l'única solució del sistema $A Y = 0$ és $Y = 0$. Així, si A és invertible, l'equació $A Y = 0$ implica que $Y = 0$, és a dir, $v = 0$ i B és no degenerada.

Per contra, si B és no degenerada el sistema $A Y = 0$ només té a $Y = 0$ com a solució, o el que és el mateix, A és invertible. $\square$

Ara, anem a classificar les formes bilineals pel seu signe per tal de relacionar-ho amb les formes bilineals degenerades i no degenerades.

DEFINICIÓ 4.43. Siga (V, B) un espai bilineal. Direm que una forma bilineal B és **definida positiva** si $B(u, u) > 0$ per a tot $u \neq 0$, **definida negativa** si $B(u, u) < 0$ per a tot $u \neq 0$, **semidefinida positiva** si $B(u, u) \geq 0$ per a tot $u \neq 0$ i **semidefinida negativa** si $B(u, u) \leq 0$ per a tot $u \neq 0$.

Tenim a continuació la següent proposició que relaciona formes bilineals degenerades i no degenerades amb la classificació que acabem de fer de les formes bilineals.

PROPOSICIÓ 4.44. Siga (V, B) un espai bilineal. Es complix que:

- (1) Si B és una forma bilineal definida positiva o negativa aleshores és no degenerada.
- (2) Si B és una forma bilineal semidefinida positiva o negativa aleshores és degenerada.

DEMOSTRACIÓ. Vegem el primer punt de la demostració. Siga $u \in V$, siguen X les coordenades de u en $\mathcal{B}$, on $\mathcal{B}$ és una base de V . Per la definició de forma bilineal definida positiva sabem que la matriu associada A associada a la forma bilineal B és definida positiva si $X^t A X > 0$.

Notem que $X^t A X = 0$ per a tot $u \in V$ si i només si $A X = 0$. En particular, $A X = 0$ implica que $X = 0$ i per tant, A és invertible. Així, pel Teorema 4.42 tindrem que B és no degenerada. Anàlogament provaríem que B és no degenerada en cas que siga definida negativa.

Anem a provar ara la segona part de la demostració. Per la definició de forma bilineal semidefinida positiva sabem que la matriu A associada a la forma bilineal B és semidefinida positiva si $X^t A X \geq 0$.

Analitzem el cas en què $X^t A X = 0$ on $X \neq 0$. Notem que implica que $A X = 0$ on $X \neq 0$ i per tant, A no és invertible. Així doncs, de nou, pel Teorema 4.42 tindrem que la forma bilineal B és degenerada. $\square$

CAPÍTOL 5

Relació entre les formes bilineals i l'espai dual.

En aquest capítol anem a relacionar els dos punts principals que hem tractat als dos anteriors capítols com són l'espai dual i les formes bilineals. Per fer-ho, hem de recordar i entendre una sèrie de conceptes que hem tractat com són els elements de l'espai dual i l'espai bidual, les principals propietats de les formes bilineals, així com el concepte de formes bilineals no degenerades i algunes propietats bàsiques.

Per tal de començar en aquest darrer capítol, definirem les següents aplicacions.

DEFINICIÓ 5.1. *Siga (V, B) un espai bilineal. Siga $v \in V$. Definim les següents aplicacions*

$$\begin{aligned} B(\cdot, v): \quad V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u &\longmapsto B(u, v) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} B(v, \cdot): \quad V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u &\longmapsto B(v, u). \end{aligned}$$

Presentem la següent proposició relacionada amb l'anterior definició.

PROPOSICIÓ 5.2. *Siga (V, B) un espai bilineal. Per a tota forma bilineal $B \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V)$ i per a tot $v \in V$, $B(\cdot, v)$ i $B(v, \cdot)$ són elements en V^* .*

DEMOSTRACIÓ. Per tal de veure que $B(\cdot, v)$ i $B(v, \cdot)$ són elements en V^* hem de veure que $B(\cdot, v)$ i $B(v, \cdot)$ són aplicacions lineals. Ho vegem per a $B(v, \cdot)$.

Siguen $u, v, w \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tenim que

$$\begin{aligned} B(\cdot, v)(\alpha u + \beta w) &= B(\alpha u + \beta w, v) \\ &= \alpha B(u, v) + \beta B(w, v) \\ &= \alpha B(\cdot, v)(u) + \beta B(\cdot, v)(w) \end{aligned}$$

on la primera igualtat l'obtenim per definició de $B(\cdot, v)$ i la segona igualtat per ser B una forma bilineal. És anàleg per a $B(\cdot, v)$. $\square$

Després de presentar les aplicacions $B(\cdot, v)$ i $B(v, \cdot)$, anem a definir les aplicacions R_B i L_B .

DEFINICIÓ 5.3. *Siga (V, B) un espai bilineal. Definim R_B i L_B com les aplicacions entre l'espai vectorial V i el seu dual V^* que fixen elements per la dreta i per l'esquerra respectivament. Aquestes vénen expressades de la següent forma*

$$R_B: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ v & \longmapsto & B(\cdot, v): \end{array} \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & B(u, v) \end{array}$$

i

$$L_B: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ v & \longmapsto & B(v, \cdot): \end{array} \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ v & \longmapsto & B(u, v) \end{array}$$

respectivament.

Anem a veure a la següent proposició que les aplicacions R_B i L_B són lineals.

PROPOSICIÓ 5.4. *Siga (V, B) un espai bilineal. Les aplicacions L_B i R_B són lineals.*

DEMOSTRACIÓ. Siga B una forma bilineal en V . Podem veure $B(u, v)$ com una funció de u amb v fixat o com una funció de v amb u fixat. Prenem el primer punt de vista i notem que la funció $B(v, \cdot): V \longrightarrow \mathbb{K}$ envia cada u a $B(v, u)$. Com que donats $v, v' \in V$ per a tot $w \in V$ es compleix que

$$B(v + v', w) = B(v, w) + B(v', w)$$

aleshores,

$$B(v + v', \cdot) = B(v, \cdot) + B(v', \cdot)$$

el què equival a dir que $L_B(v + v') = L_B(v) + L_B(v')$.

Per altra banda, siguen $v, w \in V$ i siga $\lambda \in \mathbb{K}$. Com que $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$, raonant com hem fet al cas de la suma, ens quedarà que $L_B(\lambda v) = \lambda L_B(v)$. Així, hem vist que L_B és lineal.

Anàlogament, podem veure que R_B és una aplicació lineal de V a V^* . $\square$

Per tal de relacionar L_B amb R_B , anem a introduir la següent proposició. Per a fer-ho, hem de recordar el concepte de l'aplicació avaluació av_V introduïda a la Proposició 3.15.

PROPOSICIÓ 5.5. *Siga (V, B) un espai bilineal i siguin L_B i R_B les aplicacions lineals de V en V^* introduïdes en la Definició 5.3. Aleshores*

- (1) $L_B^* \circ \text{av}_V = R_B$.
- (2) $R_B^* \circ \text{av}_V = L_B$.

DEMOSTRACIÓ. Per tal de demostrar que $L_B^* \circ \text{av}_V = R_B$ és suficient veure que coincideixen en tots els $v \in V$.

Siga $v \in V$, tenim per una banda que

$$\begin{aligned} R_B(v) = B(\cdot, v): \quad V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u &\longmapsto B(u, v). \end{aligned}$$

Definim L_B^* com l'aplicació

$$\begin{aligned} L_B^*: \quad V^{**} &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto B(v, \cdot): \quad V \longrightarrow \mathbb{K} \\ &\quad v \longmapsto B(u, v) \end{aligned}$$

Així, composant-la sobre av_V , ens queda que

$$(L_B^* \circ \text{av}_V)(v) = L_B^*(\text{av}_V(v)) = \text{av}_V(v) \circ L_B.$$

Notem que $R_B(v) = \text{av}_V(v) \circ L_B$ si, i només si, coincideixen per a tot $u \in V$. Així, ho comprovem de la següent forma.

$$(R_B(v))(u) = (B(\cdot, v))(u) = B(u, v)$$

i

$$(\text{av}_V(v) \circ L_B)(u) = \text{av}_V(v)(L_B(u)) = \text{av}_V(v)(B(u, \cdot)) = B(u, v)$$

Així, hem vist que coincideixen les dues expressions i per tant hem provat que $L_B^* \circ \text{av}_V = R_B$.

El segon punt, $R_B^* \circ \text{av}_V = L_B$, es provaria de forma anàlega. $\square$

A continuació presentem un teorema que relaciona la matriu coordenada de B en una base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V i la matriu coordenada de R_B de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}^*$.

TEOREMA 5.6. *Siga (V, B) un espai bilineal. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Anomenem*

*A matriu coordenada de B en $\mathcal{B}$,
B matriu coordenada de R_B de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}^*$.*

Aleshores $A = B$.

DEMOSTRACIÓ. Recordem que

$$\begin{aligned} R_B: \quad V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto B(\cdot, v): \quad V \longrightarrow \mathbb{K} \\ &\quad u \longmapsto B(u, v) \end{aligned}$$

és aplicació lineal.

Considerem la matriu coordinada de R_B de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}^*$ que ve donada per

$$B = \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & \cdots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \cdots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix}$$

on la columna i representa les coordenades de $R_B(e_i)$ en $\mathcal{B}^*$.

Representem l'aplicació $R_B(e_i)$ com:

$$\begin{aligned} R_B(e_i): \quad V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ u &\longmapsto B(u, e_i) \end{aligned}$$

Si el vector u es pot expressar com a combinació lineal dels elements de la base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ com

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

aleshores podrem expressar $B(u, e_i)$ com

$$\begin{aligned} B(u, e_i) &= B(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, e_i) \\ &= \lambda_1 B(e_1, e_i) + \cdots + \lambda_n B(e_n, e_i) \\ &= B(e_1, e_i) e_1^*(u) + \cdots + B(e_n, e_i) e_n^*(u) \\ &= (B(e_1, e_i) e_1^* + \cdots + B(e_n, e_i) e_n^*)(u). \end{aligned}$$

Així, acabem de veure que la matriu per a R_B és la matriu $(B(e_i, e_j))$ ja que coincideixen columna a columna. $\square$

NOTA 5.7. *El fet de que la matriu associada a B siga la matriu per a R_B en lloc de la matriu per a L_B està relacionat en el fet de que per convenció treballem amb les formes bilineals usant l'expressió $X^t A Y$ en lloc de $Y^t A X$. Si utilitzàrem la darrera convenció, aleshores la matriu associada a B seria la matriu per a L_B .*

COROL·LARI 5.8. *Siga (V, B) un espai bilineal. Les següents afirmacions són equivalents.*

- (1) *Per a alguna base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V , la matriu coordinada de B en $\mathcal{B}$ és invertible.*
- (2) *R_B és un isomorfisme.*

1. Formes bilineals no degenerades i l'espai dual.

En esta secció utilitzarem les aplicacions L_B i R_B definides anteriorment per a caracteritzar la forma bilineal B quan és no degenerada.

Per fer-ho, presentarem en primer lloc el següent teorema. Aquest teorema ens dóna una condició en les formes bilineals que correspon a la invertibilitat de les representacions matricials.

TEOREMA 5.9. *Siga (V, B) un espai bilineal. Les següents afirmacions són equivalents:*

- (1) *Per a alguna base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V , la matriu $(B(e_i, e_j))$ és invertible.*
- (2) *Si $B(v, v') = 0$ per a tot $v' \in B$, aleshores $v = 0$.*
- (3) *Tot element de V^* té la forma $B(v, \cdot)$ per a algun $v \in V$.*
- (4) *Tot element de V^* té la forma $B(v, \cdot)$ per a un únic $v \in V$.*

Quan açò ocorre, tota representació matricial de la forma bilineal B és invertible.

DEMOSTRACIÓ. En primer lloc anem a veure que (1) implica (2). La matriu $(B(e_i, e_j))$ és la matriu coordenada de R_B de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}^*$. Pel Teorema 5.6, si $(B(e_i, e_j))$ és invertible, aleshores R_B és isomorfisme.

Recordem que R_B venia definit com

$$\begin{array}{lll} R_B: & V & \longrightarrow V^* \\ & v & \longmapsto B(\cdot, v): \quad V \longrightarrow \mathbb{K} \\ & & u \longmapsto B(u, v) \end{array}$$

Per la Proposició 5.5 sabem que $R_B^* \circ \text{av}_V = L_B$ i com pel Corol·lari 5.8 R_B és un isomorfisme, aleshores L_B també ho és. Recordem que l'aplicació L_B venia donada per l'expressió

$$\begin{array}{lll} L_B: & V & \longrightarrow V^* \\ & v & \longmapsto B(v, \cdot): \quad V \longrightarrow \mathbb{K} \\ & & u \longmapsto B(u, v) \end{array}$$

Les funcions $B(v, \cdot)$ en V^* són els valors de $L_B: V \longrightarrow V^*$, per tant, tindrem que si per a tot $u \in V$, $B(v, u) = 0$, el qual vol dir que

$$v \in \text{Ker}(L_B) = \{0\}$$

ja que L_B és un isomorfisme.

Ara anem a veure la implicació de (2) a (3). La propietat en (2) ens diu que L_B és injectiva ja que ens diu que $\text{Ker}(L_B) = \{0\}$. Com que $L_B: V \longrightarrow V^*$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V^*)$, aleshores L_B és sobrejectiva, és a dir, tot element de V^* té la forma $L_B(v)$ per a algun $v \in V$.

Ara vegem la implicació (3) a (4). El punt (3) ens diu que L_B és sobrejectiva. Com $L_B: V \longrightarrow V^*$ i $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V^*)$, trobem que L_B és bijectiva, és a dir, tot element de V^* s'escriu de forma única com a $L_B(v)$ per a un $v \in V$.

Per últim vegem la implicació (4) a (1). El punt (4) ens diu que L_B és bijectiva. Per tant $L_B^* = R_B$ és bijectiva. Com R_B és bijectiva la matriu coordinada de R_B de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}^*$ és una matriu invertible. Pel Teorema 5.6 esta matriu coincideix en la matriu $(B(e_i, e_j))$. $\square$

NOTA 5.10. *Siga (V, B) un espai bilineal. Si B té una matriu coordinada invertible, totes les matrius coordinades de B són invertibles. Notem que si*

A és la matriu coordinada de B en $\mathcal{B}$
 C és la matriu coordinada de B en $\bar{\mathcal{B}}$

existeix una $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que $A = P^t C P$.

D'esta relació si C és invertible aleshores A també ja que

$$|A| = |P^t C P| = |P|^2 |C| \neq 0.$$

Per últim, anem a presentar un teorema que relaciona la dimensió d'un subespai $W \leq V$ i el seu subespai ortogonal $W^\perp$ amb les formes bilineals no degenerades. Notem que la primera part del teorema caracteritza els subespais d'un espai bilineal simètric o alternat no degenerat, és a dir, els subespais que tan sols intersecten en el conjunt $\{0\}$. El segon punt és una conseqüència del primer punt sobre les dimensions dels subespais.

TEOREMA 5.11. *Siga (V, B) un espai bilineal simètric o alternat. Es cumplix que*

- (1) *Per a un subespai $W \leq V$, les següents afirmacions són equivalents.*
 - (a) *W és no degenerat per a la forma bilineal $B|_{W^2}$.*
 - (b) *$W \cap W^\perp = \{0\}$.*
 - (c) *$V = W \oplus W^\perp$.*
- (2) *Si V no és degenerat, aleshores $\dim_{\mathbb{K}}(W) + \dim_{\mathbb{K}}(W^\perp) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ i $(W^\perp)^\perp = W$.*

DEMOSTRACIÓ. Anem a provar el punt (1). Provem la implicació (a) a (b) en primer lloc.

Suposem que W no és degenerat per a $B|_{W^2}$. Per a veure que $W \cap W^\perp = \{0\}$, és suficient comprovar que $W \cap W^\perp \subseteq \{0\}$. Siga $z \in W \cap W^\perp$, aleshores, per a tot $w \in W$ es té que $B(z, w) = 0$ ja que $w \in W$ i $z \in W^\perp$ però com $z \in W$ i la forma no és degenerada en $B|_{W^2}$, es té que $z = 0$.

Ara vegem la implicació (b) a (c). Com $W \cap W^\perp = \{0\}$, per a comprovar que $V = W \oplus W^\perp$ és suficient comprovar que $V = W + W^\perp$.

En esta igualtat serà suficient comprovar que $V \subseteq W + W^\perp$. Siga $v \in V$, l'aplicació

$$\begin{aligned} L_B: \quad W &\longrightarrow W^* \\ w &\longmapsto B(w, \cdot)|_W \end{aligned}$$

té nucli $\text{Ker}(L_B) = W \cap W^\perp = \{0\}$, per tant L_B és injectiva. A més, com $\dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(W^*)$ es té que L_B és bijectiva. Així, l'aplicació $B(v, \cdot)|_W$ ha de tindre la forma $B(w, \cdot)|_W$ per algun $w \in W$. D'aquesta forma, per a tot $w' \in W$ es té que $B(v, w') = B(w, w')$, d'on $B(v - w, w') = 0$ per a tot $w' \in W$. Concloem que $v - w \in W^\perp$ i per tant $v = w + (v - w)$ on $w \in W$ i $v - w \in W^\perp$.

Ara, anem a provar la implicació (c) a (a). Tenim que $V = W \oplus W^\perp$. Deduïm que $W \cap W^\perp = \{0\}$, és a dir, l'aplicació L_B no és injectiva quan la restringim a W . Per tant, $B|_W$ no és degenerada.

Anem a veure ara el punt (2).

Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \eta: \quad V &\longrightarrow W^* \\ v &\longmapsto B(v, \cdot)|_W \end{aligned}$$

η és la composició $\eta = \text{restr}^{W^*} \circ L_B$ on

$$\begin{aligned} L_B: \quad V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto B(v, \cdot) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \text{restr}^{W^*}: \quad V^* &\longrightarrow W^* \\ g &\longmapsto g|_{W^*} \end{aligned}$$

Tenim que L_B és un isomorfisme perquè la forma no és degenerada. Falta veure que la restricció és lineal i sobrejectiva.

Anem a veure ara que $\text{Ker}(\eta) = W^\perp$.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\eta) &= \{v \in V \mid \eta(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid B(v, \cdot)|_W = 0\} \\ &= \{v \in V \mid \text{per a tot } w \in W \quad B(v, \cdot)|_W(w) = 0(w)\} \\ &= \{v \in V \mid \text{per a tot } w \in W \quad B(v, w) = 0(w) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid \text{per a tot } w \in W \quad B(v, w) = 0\} \\ &= W^\perp. \end{aligned}$$

Pel Primer Teorema d'Isomorfia,

$$V/\text{Ker}(\eta) \cong \text{Im}(\eta)$$

és a dir, $V/W^\perp \cong W^*$. Prenent dimensions tenim que

$$\dim_{\mathbb{K}}(V/W^\perp) = \dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(W^\perp) = \dim_{\mathbb{K}}(W^*) = \dim_{\mathbb{K}}(W).$$

Així, reordenant tindrem demostrada la primera part del punt (2) ja que

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) + \dim_{\mathbb{K}}(W^{\perp}).$$

Ara veurem la segona part del punt (2). Volem veure que $(W^{\perp})^{\perp} = W$. Vegem primer la inclusió $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.

Si $w \in W$ i $z \in W^{\perp}$, $B(w, z) = 0$ aleshores $w \in (W^{\perp})^{\perp}$. A més, per una banda tenim que

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W^{\perp}) + \dim_{\mathbb{K}}((W^{\perp})^{\perp})$$

i per altra banda

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) + \dim_{\mathbb{K}}(W^{\perp}).$$

Així,

$$\dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}((W^{\perp})^{\perp}).$$

Per tant, $(W^{\perp})^{\perp} = W$ tal com volíem provar. □

CAPÍTOL 6

Conclusions

En aquest projecte el principal objectiu ha consistit en comprendre el concepte de formes bilineals, desenvolupar-lo, caracteritzar-lo així com classificar-lo de diferents modes. Així com també ens ha valgut per a treballar en els diferents elements de l'espai dual i relacionar els dos conceptes.

En particular, al capítol dels preliminars hem definit una sèrie de conceptes previs ja coneguts pel lector com poden ser el de matriu i les seues principals propietats, el d'espai vectorial, subespai vectorial i base d'un espai vectorial, les coordenades d'un vector v respecte la base $\mathcal{B}$ i els homomorfismes, així com la classificació d'aquests, incidint sobretot en els isomorfismes.

Al Capítol 3 en la primera secció hem definit què és l'espai dual, hem definit i demostrat les propietats dels seus principals elements com poden ser la base dual de V^* associada a la base $\mathcal{B}$, l'aplicació dual d'una aplicació lineal. En la segona secció hem presentat l'espai bidual i hem presentat una sèrie de resultats que ens han servit per relacionar l'espai dual amb les formes bilineals al darrer capítol, com podria ser el concepte de l'aplicació avaluació.

Al llarg del Capítol 4 hem treballat amb el concepte al voltant del qual se centra aquest projecte: les formes bilineals. Hem començat definint-les, presentant l'espai bilineal, mencionant una sèrie de propietats bàsiques al respecte i donant alguns exemples. Posteriorment hem caracteritzat la representació matricial de les formes bilineals donant una forma compacta d'expressar una forma bilineal B .

Després de donar una sèrie de resultats que relacionen matrius i formes bilineals, hem definit i caracteritzat el concepte de matrius congruents, relacionant-lo de nou amb les formes bilineals.

A la següent secció hem classificat les formes bilineals en simètriques, antisimètriques i alternades, donant alguns exemples i presentant una sèrie de resultats que relacionen les matrius simètriques i antisimètriques amb les corresponents formes bilineals. En aquesta mateixa secció, hem definit el concepte d'ortogonalitat entre vectors, així com el de base ortogonal i el d'espai ortogonal $W^\perp$.

A la darrera secció d'aquest capítol, hem fet una classificació de les formes bilineals en degenerades i no degenerades i posteriorment hem relacionat aquestes mateixes formes amb les formes bilineals definides positives o negatives i semidefinides positives o negatives mitjançant la Proposició 4.44.

Al Capítol 5 hem relacionat aquests dos darrers conceptes: les formes bilineals i l'espai dual. Per fer-ho, hem definit primerament les aplicacions $B(\cdot, v)$ i $B(v, \cdot)$ i les aplicacions que fixen elements a la dreta i l'esquerra, R_B i L_B , les quals han tingut una vital importància durant el desenvolupament d'aquest capítol. Hem provat que R_B i L_B són lineals, les hem relacionat entre si mitjançant la composició d'aplicacions en la Proposició 5.5 i també hem relacionat amb les matrius coordenades d'una forma bilineal B respecte la base $\mathcal{B}$ i l'aplicació R_B de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}^*$.

Per últim, hem relacionat les formes bilineals no degenerades amb l'espai dual mitjançant les aplicacions R_B i L_B amb una sèrie de resultats que ens han portat a veure que si un espai bilineal és simètric, alternat i no degenerat, i quan V es pot descomposar com la suma directa dels subespais W i $W^\perp$.

Bibliografía

- [A⁺03] H. Anton et al. *Introducción al álgebra lineal*. Biblioteca Hernán Malo González, 2003.
- [Con] K. Conrad. Bilinear forms.
- [Her91] I.N. Herstein. *Topics in algebra*. John Wiley & Sons, 1991.
- [Nic21] W.K. Nicholson. *Linear Algebra with Applications*. Lyryx Learning Inc., 2021.
- [Rom06] J. Burgos Román. *Álgebra lineal y geometría cartesiana*. Madrid: McGraw-Hill, 2006.