



Treball Fi de Grau - Curs 2022/2023

Dualitat de Stone

Autor: **Ivan Jorro Medina**

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Índex

1	Introducció	1
2	Context històric	3
2.1	Precursors de les àlgebres Booleanes	3
2.2	Una discussió filosòfica	3
2.3	Els fonaments de la lògica proposicional	5
2.4	El treball de Tarski i Lindenbaum	6
2.5	La figura de Marshall Stone	6
3	Àlgebres Booleanes, reticles i espais topològics	9
3.1	Àlgebra Booleana	9
3.1.1	Subàlgebres i homomorfismes Booleans	17
3.1.2	Dualitat Booleana	19
3.2	Teoria de l'ordre	19
3.2.1	Conjunts ordenats	20
3.2.2	Suprem, ínfim i reticles	21
3.2.3	Filtres i ideals	24
3.2.4	Àlgebres Booleanes com a conjunts ordenats	26
3.3	Topologia	30
3.3.1	Espais topològics	31
4	Teoria de categories	39
4.1	Categories, functors i transformacions naturals	39
5	Dualitat de Stone	45
5.1	Representació d'àlgebres Booleanes	45
5.1.1	Àlgebres Booleanes finites	45
5.1.2	Àlgebres Booleanes no finites	46
5.2	L'espai dual d'una àlgebra Booleana i els espais de Stone	49

5.3 Dualitat categòrica	54
Bibliografia	59
Índex alfabètic	63

Capítol 1

Introducció

La *dualitat de Stone* estableix una correspondència entre àlgebres Booleanes i espais de Stone i a més entre homomorfismes de àlgebres Booleanes i aplicacions contínues entre espais de Stone. Una àlgebra Booleana és un reticle fitat, distributiu i complementat i un espai de Stone és un espai topològic totalment separable i compacte. Es pot veure que un espai topològic és totalment separable i compacte si, i només si, és totalment disconnex, Hausdorff i compacte, que és la definició usual per a un espai de Stone.

En aquest treball anem a demostrar que la correspondència esmentada anteriorment, és functorial, i pel camí, anirem demostrant altres resultats que també són interessants i útils tant per a l'estudi de les àlgebres Booleanes, com per a l'estudi dels espais de Stone, com és el cas de que tota àlgebra Booleana és una subàlgebra d'una àlgebra de conjunts, que és un cas d'àlgebra Booleana molt conegut. Així podem pensar en les operacions d'una àlgebra Booleana com interseccions, unions i complementacions.

A continuació, resumim de manera breu el contingut de cadascun dels següents capítols d'aquest treball. El lector pot trobar una descripció més detallada al principi de cada capítol.

En el Capítol 2 vorem una introducció històrica a la dualitat i els antecedents de les àlgebres Booleanes abans del treball de Marshall Stone.

En el Capítol 3 definirem les àlgebres Booleanes com a estructura algebraica i demostrarem algunes propietats bàsiques. Després definirem el concepte de reticle i vorem que una àlgebra Booleana és un exemple de reticle amb certes propietats addicionals. Donarem els conceptes bàsics de topologia, definint els conceptes d'espai topològic i certes propietats topològiques que seran necessàries per a la definició d'espai de Stone, i ens donaran ferramentes per a poder treballar amb aquests.

En el Capítol 4 introduïrem la teoria de categories, que ens serà útil per a conceptualitzar el significat de la dualitat que s'estudia en aquest treball.

Per últim, en el Capítol 5, donarem els resultats que estructurin i culminen en la descripció categòrica de la Dualitat de Stone.

En aquest treball farem el conveni notacional de posar en negreta els conjunts estructurats, és a dir, les àlgebres Booleanes, els conjunts parcialment ordenats, els espais topològics, etc.

La presentació dels resultats segueix principalment les notes de **Dekkers** [11].

Capítol 2

Context històric

2.1 Precursors de les àlgebres Booleanes

Podem trobar un precursor de les àlgebres Booleanes en la figura de **Gottfried Leibniz** (1646-1716), en la seua “àlgebra de conceptes”, que en segles posteriors es va vore que era deductivament equivalent a una àlgebra de conjunts. L’estudi d’aquestes idees i de moltes altres es feia amb la intenció d’entendre el pensament humà i reduir tots els conceptes a una mena d’alfabet.

Leibniz va ser un polímata, es va dedicar a moltes matèries (filosofia, matemàtiques, enginyeria, dret, diplomàcia i altres més) on va arribar a tindre certa fama per algunes invencions, com és el cas de la notació per al càlcul infinitesimal, l’invenió de la primera calculadora, que podia fer les quatre operacions aritmètiques, i altres coses que el lector interessat podrà trobar en [28][8][36][32]. És una llàstima que molts dels seus escrits es publicaren de forma pòstuma, ja amb moltes parts de la seua lògica desenvolupades de forma independent per altres pensadors com és el cas de **G. Boole**, **W.S. Jevons**, **E. Schröder**, **E.V. Huntington**, **C.S. Pierce**, **A. De Morgan**.

2.2 Una discussió filosòfica

El treball de **George Boole** en lògica i àlgebra estava motivat pel seu interès en trobar uns fonaments matemàtics per a la lògica. Boole era un matemàtic autodidacta que estava profundament interessat en la filosofia de la ciència i la naturalesa del coneixement. Ell estava fascinat per la idea d’usar les matemàtiques per a entendre el món que l’envolta i creia que la lògica era una ferramenta fonamental per aconseguir

aquest objectiu.

Boole estava influenciat pel treball del filòsof anglès **John Stuart Mill**, que va argumentar que la lògica es podria estudiar utilitzant un mètode similar al que s'utilitza en matemàtiques. Boole pensava que la lògica proposicional podria ser representada utilitzant símbols algebraics i que les regles lògiques es podien reduir a una col·lecció d'equacions algebraiques.

Els treballs de Boole en lògica i àlgebra van culminar en el seu llibre "*An Investigation of the Laws of Thought*" [3]. En aquest llibre, Boole va introduir l'idea d'usar mètodes algebraics per a estudiar proposicions lògiques i raonar sobre els seus valors de veritat. Va desenvolupar un sistema de lògica algebraic que li permetia manipular les proposicions lògiques de manera algebraica, i amb això va demostrar que podia provar molts resultats importants de la lògica.

Aquests treballs de Boole en lògica algebraica van ser molt innovadors i van donar el fonament per als desenvolupaments posteriors en lògica moderna i ciències de la computació. Les seues idees van ser desenvolupades per altres matemàtics, com **Augustus De Morgan** i **Ernst Schröder**, i continuen sent una àrea de recerca important en matemàtiques i ciències de la computació.

Com a conseqüència d'aquests treballs, va sortir una discussió entre **Sir William Hamilton**¹, un filòsof escocès, i **Augustus De Morgan**, matemàtic britànic. De Morgan i Hamilton tenien visions diferents en quant a la naturalesa de l'àlgebra Booleana.

Hamilton argumentava que l'àlgebra Booleana era un reflex de la naturalesa fonamental de l'univers i que representava una estructura lògica que estava present en tots els aspectes de la realitat. Pensava que els principis de l'àlgebra Booleana eren més que una ferramenta convenient per al raonament amb proposicions; representaven l'estructura essencial de l'univers mateix.

De Morgan, per altre costat, considerava que l'àlgebra Booleana era un sistema purament formal que és podia manipular d'acord amb certes regles, sense cap connexió necessària amb l'estructura subjacent de l'univers. Ell pensava que els principis de l'àlgebra Booleana eren una simple col·lecció de regles per a la manipulació de símbols, i que no tenien cap importància filosòfica o metafísica inherent.

Boole mateix no tenia una posició favorable cap a les implicacions filosòfiques de l'àlgebra Booleana, i veia el seu treball primàriament com una forma de desenvolupar un marc matemàtic rigorós per a raonar amb proposicions lògiques. Encara així, el treball de Boole va tindre un impacte profund en el desenvolupament de les matemàtiques i la lògica, i va obrir el camí per al desenvolupament de noves àrees de recerca, incloent la teoria de conjunts, la topologia i les ciències de la computació.

¹No confondre amb William Rowan Hamilton, inventor dels quaternions.

El debat entre De Morgan i Hamilton reflectix una tensió major en la història de les matemàtiques; entre aquells que veuen les estructures matemàtiques com construccions purament abstractes i aquells que pensen que les matemàtiques tenen una significació filosòfica més profunda, és a dir, reflectix diferents perspectives de la naturalesa i l'abast de les matemàtiques, i il·lumina la complexa relació entre les matemàtiques, la lògica i la filosofia. Aquesta tensió ha jugat un paper de diferents formes al llarg de la història de les matemàtiques i continua sent un tema important en les matemàtiques contemporànies.

2.3 Els fonaments de la lògica proposicional

Les àlgebres Booleanes formen part de l'àlgebra abstracta, i per tant la seua història està inclosa dins d'aquesta. Seguint a [24], el primer moment on apareix una instància clara d'enfoc abstracte o axiomàtic a l'àlgebra és en un article de **Cayley** [7] de teoria de grups. Encara així, la teoria de grups no estava al front del camí cap a l'abstracció en àlgebra, el qual va ocórrer a principis del segle XX. Potser el fet de que el teorema de Cayley (1878) que ens diu que tot grup abstracte és isomorf a un subgrup d'un grup simètric, va eliminar la necessitat d'un desenvolupament abstracte de la teoria de grups fins a molt més endavant.

Si la teoria de grups és la branca més antiga de l'àlgebra abstracta, l'àlgebra Booleana té una bona reivindicació per a ser la segona. Per suposat, **Boole** [2][3] i **Peirce** [25] només estaven preocupats per les àlgebres de conjunts de proposicions, però **Whitehead** [35] i **Huntington** [15] van prendre un enfocament més abstracte. Malgrat això, no hi va haver interès en els reticles no Booleans abans de 1930 (Apart dels importants articles de **Dedekind** [9][10], que un altra vegada tractaven de reticles especials, en aquest cas, reticles d'ideals), i poc desenvolupament de les àlgebres Booleanes més enllà de triar entre axiomatitzacions d'aquestes.

Encara que el teorema de representació de Cayley pot haver retardat l'avançament de la teoria de grups, almenys va donar estabilitat en els axiomes que definixen un grup, demostrant que eren suficients per a capturar la noció d'"àlgebra de substitucions". En l'àlgebra Booleana, hi havia una clara necessitat d'un teorema de representació similar que mostrara que els axiomes capturen la noció d'"àlgebra de classes", però aquest no sortia de forma immediata.

2.4 El treball de Tarski i Lindenbaum

És clar que no hem d'esperar un teorema que diga que tota àlgebra Booleana és isomorfa a l'àlgebra de conjunts d'algún conjunt. Per exemple els grups simètrics tenen certes propietats que no les tenen tots els grups (per exemple, si excluïm el grup d'ordre 2, la propietat de tindre centre trivial), així hi ha propietats de reticles que es donen per a àlgebres de conjunts, però no per a totes les àlgebres Booleanes. Anem a fer una breu menció de dos propietats.

En l'àlgebra de conjunts, a més de les operacions binàries d'unió i intersecció, tenim la possibilitat de formar unions i interseccions infinites de famílies de subconjunts. Diem que un reticle és *complet* si es poden formar unions i interseccions infinites, amb les mateixes propietats que l'unió i l'intersecció en les àlgebres de conjunts. És fàcil veure que exemples d'àlgebres Booleanes que no són completes (per exemple, l'àlgebra de subconjunts d'un conjunt infinit que són finits o tenen un complement finit és una àlgebra Booleana que no és completa). En l'àlgebra de conjunts d'un conjunt X , els conjunts formats per un únic element, és a dir, $\{x\}$, on $x \in X$, tenen una propietat especial, són *minimals* o el que és equivalent, no poden ser representats com a una unió de subconjunts estrictament continguts en aquest. Un element d'una àlgebra Booleana amb aquesta propietat es diu *àtom*. L'abundància d'àtoms en $\mathcal{P}(X)$ ve expressada pel fet que, per a qualsevol $Y \neq \emptyset$, existeix un àtom Z tal que $Z \subseteq Y$. Una àlgebra Booleana amb aquesta propietat es diu que és *atòmica*. Un altra vegada és fàcil donar exemples d'àlgebres Booleanes que no són atòmiques (per exemple, l'àlgebra Booleana del quocient de l'àlgebra de subconjunts dels reals, que són mesurables Lebesgue, amb l'ideal de subconjunts dels reals de mesura nul·la).

Teorema 2.1. *Una àlgebra Booleana és isomorfa a l'àlgebra de conjunts d'un conjunt si, i només, si és completa i atòmica.*

Aquest teorema va ser demostrat per primera vegada pels lògics **A. Lindenbaum** i **A. Tarski** [34], i és clarament un pas important cap a un teorema general de representació. Encara així, no podem fer res quan tenim una àlgebra Booleana que no és atòmica. És necessària una nova idea.

2.5 La figura de Marshall Stone

Arribat a aquest moment de l'història, entra en escena **Marshall Harvey Stone** (1903-1989), aquest matemàtic no era algebrista ni lògic. El seu treball principal es troba en l'àrea de l'anàlisi funcional, en concret en l'estudi dels operadors lineals

entre espais de Hilbert [33]. Va ser el seu treball en aquesta àrea, en el teorema de resolució espectral, que li va portar a les àlgebres de projeccions commutatives en un espai de Hilbert. Era conegut que se li podia donar estructura d'àlgebra Booleana a aquest espai, però no tenien una representació natural com a àlgebra de conjunts. El teorema de representació va esdevindre una ferramenta d'importància pràctica per a Stone. Al mateix temps, els seus antecedents com a analista funcional, li van donar una major familiaritat amb els nous mètodes de topologia general desenvolupats en eixe moment que la que tenien la majoria d'algebristes del moment.

Hi ha dos idees clau en el treball de Stone:

1. La seua comprensió de que una àlgebra Booleana és equivalent a un tipus d'anell (en concret, un anell commutatiu unitari on tot element compleix que $a^2 = a$). Actualment, la equivalència entre els anells Booleans i les àlgebres Booleans és una cosa que es posa com a exercici en la assignatura de teoria d'anells del grau. És difícil comprendre que aquest fet romanguera desconegut per tant de temps. L'analogia amb els anells portà a Stone donar-se compte de l'importància dels ideals (i particularment dels ideals primers) en la teoria de reticles; és el conjunt d'ideals primers d'una àlgebra Booleana el que dona la representació en el teorema de Stone (Observem el contrast amb la representació de Lindenbaum-Tarski, on el conjunt que dona la representació està compost per elements de l'àlgebra Booleana).
2. La introducció de la topologia. Stone va observar que a partir del conjunt d'ideals primers d'una àlgebra Booleana es pot obtenir un espai topològic de forma natural, on els conjunts oberts corresponen a ideals arbitraris de l'àlgebra (específicament, a un ideal I li associem el conjunt obert de tots els ideals primers que no contenen a I). En aquesta topologia, els conjunts oberts i tancats a la vegada, es corresponen amb els ideals principals i, per tant, amb els elements de l'àlgebra; així podem recuperar (una còpia isomorfa de) l'àlgebra a partir del conjunt d'ideals primers.

L'objectiu d'aquest treball és presentar el resultat de Stone i comprovar que conforma una dualitat categorial.

Capítol 3

Àlgebres Booleanes, reticles i espais topològics

En aquest capítol, en la primera secció, anem a definir les àlgebres Booleanes, demostrar algunes propietats bàsiques, introduir les subàlgebres d'una àlgebra Booleana, els homomorfismes Booleanes, a més de donar la dualitat Booleana. En la segona secció anem a treballar amb conjunts parcialment ordenats, aplicacions monòtones, reticles i, per últim, definirem el concepte de filtre que serà de gran importància més endavant.

3.1 Àlgebra Booleana

Definició 3.1. Una àlgebra Booleana és una tupla $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ on B és un conjunt amb dos operacions binàries internes $\vee$ i $\wedge$, una unària interna $\neg$ i dos constants (0 i 1), que compleixen les següents propietats; per a tots $x, y, z \in B$:

(A1) (Identitat)

(a) $x \vee 0 = x$.

(b) $x \wedge 1 = x$.

(A3) (Distributivitat)

(a) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(b) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

(A2) (Commutativitat)

(a) $x \vee y = y \vee x$.

(b) $x \wedge y = y \wedge x$.

(A4) (Complementació)

(a) $x \wedge \neg x = 0$.

(b) $x \vee \neg x = 1$.

Donada una àlgebra Booleana $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, ens referirem a aquesta només amb $\mathbf{B}$, sense especificar les operacions i els elements especials, en cas que estiga clar pel context.

Proposició 3.1. *Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana. Aleshores donats $x, y, z \in B$, es satisfan les següents proposicions:*

$$x = x \wedge y \text{ si, i només si, } y = x \vee y. \quad (\text{B1})$$

$$\begin{aligned} (a) \text{ Si per a tot } x \in B, \ x \vee y = x, \text{ aleshores } y = 0. \\ (b) \text{ Si per a tot } x \in B, \ x \wedge y = x, \text{ aleshores } y = 1. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

$$\begin{aligned} (a) \ x \vee x = x. \\ (b) \ x \wedge x = x. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

$$\begin{aligned} (a) \ x \vee 1 = 1. \\ (b) \ x \wedge 0 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

$$\begin{aligned} (a) \ x \vee (x \wedge y) = x. \\ (b) \ x \wedge (x \vee y) = x. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

$$\text{Si } x \vee y = 1 \text{ i } x \wedge y = 0, \text{ aleshores } x = \neg y. \quad (\text{B6})$$

$$x = \neg(\neg x). \quad (\text{B7})$$

$$\begin{aligned} (a) \ x \vee (\neg x \vee y) = 1. \\ (b) \ x \wedge (\neg x \wedge y) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

$$\begin{aligned} (a) \ (x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = 1. \\ (b) \ (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

$$\begin{aligned} (a) \ (x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = 0. \\ (b) \ (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) = 1. \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

$$\begin{aligned} (a) \ \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y. \\ (b) \ \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y. \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & (x \vee (y \vee z)) \vee \neg x = 1. \\
(b) \quad & (x \wedge (y \wedge z)) \wedge \neg x = 0.
\end{aligned} \tag{B12}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & y \wedge (x \vee (y \vee z)) = y. \\
(b) \quad & y \vee (x \wedge (y \wedge z)) = y.
\end{aligned} \tag{B13}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & (x \vee (y \vee z)) \vee \neg y = 1. \\
(b) \quad & (x \wedge (y \wedge z)) \wedge \neg y = 0.
\end{aligned} \tag{B14}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & (x \vee (y \vee z)) \vee \neg z = 1. \\
(b) \quad & (x \wedge (y \wedge z)) \wedge \neg z = 0.
\end{aligned} \tag{B15}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \neg((x \vee y) \vee z) \wedge x = 0. \\
(b) \quad & \neg((x \wedge y) \wedge z) \vee x = 1.
\end{aligned} \tag{B16}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \neg((x \vee y) \vee z) \wedge y = 0. \\
(b) \quad & \neg((x \wedge y) \wedge z) \vee y = 1.
\end{aligned} \tag{B17}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \neg((x \vee y) \vee z) \wedge z = 0. \\
(b) \quad & \neg((x \wedge y) \wedge z) \vee z = 1.
\end{aligned} \tag{B18}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & (x \vee (y \vee z)) \vee \neg((x \vee y) \vee z) = 1. \\
(b) \quad & (x \wedge (y \wedge z)) \wedge \neg((x \wedge y) \wedge z) = 0.
\end{aligned} \tag{B19}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & (x \vee (y \vee z)) \wedge \neg((x \vee y) \vee z) = 0. \\
(b) \quad & (x \wedge (y \wedge z)) \vee \neg((x \wedge y) \wedge z) = 1.
\end{aligned} \tag{B20}$$

$$\begin{aligned}
(a) \quad & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z. \\
(b) \quad & x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.
\end{aligned} \tag{B21}$$

Demostració: En els casos, en que hi han dues proposicions a demostrar (en concret, (a) i (b)), només demostrarem (a) ja que, posteriorment, vorem que açò és suficient. En tot cas, la demostració és anàloga.

12CAPÍTOL 3. ÀLGEBRES BOOLEANES, RETICLES I ESPAIS TOPOLÒGICS

(B1) Si $x = x \wedge y$, aleshores tenim la següent cadena d'igualtats

$$y = y \wedge 1 \quad (\text{A1})$$

$$= y \wedge (x \vee \neg x) \quad (\text{A4})$$

$$= (y \wedge x) \vee (y \wedge \neg x) \quad (\text{A3})$$

$$= x \vee (y \wedge \neg x) \quad (\text{Hipòtesi})$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee \neg x) \quad (\text{A3})$$

$$= (x \vee y) \wedge 0 \quad (\text{A4})$$

$$= x \vee y. \quad (\text{A1})$$

Ara, si $y = x \vee y$, tenim la següent cadena d'igualtats

$$x = x \vee 0 \quad (\text{A1})$$

$$= x \vee (y \wedge \neg y) \quad (\text{A4})$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \quad (\text{A3})$$

$$= y \wedge (x \vee \neg y) \quad (\text{Hipòtesi})$$

$$= (y \wedge x) \vee (y \wedge \neg y) \quad (\text{A3})$$

$$= (y \wedge x) \vee 1 \quad (\text{A4})$$

$$= y \wedge x. \quad (\text{A1})$$

(B2) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$0 = 0 \vee y \quad (\text{Hipòtesi})$$

$$= y \vee 0 \quad (\text{A2})$$

$$= y. \quad (\text{A1})$$

(B3) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$x \vee x = (x \vee x) \wedge 1 \quad (\text{A1})$$

$$= (x \vee x) \wedge (x \vee \neg x) \quad (\text{A4})$$

$$= x \vee (x \wedge \neg x) \quad (\text{A3})$$

$$= x \vee 0 \quad (\text{A4})$$

$$= x. \quad (\text{A1})$$

(B4) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$x \vee 1 = (x \vee 1) \wedge 1 \quad (\text{A1})$$

$$= 1 \wedge (x \vee 1) \quad (\text{A2})$$

$$= (x \vee \neg x) \wedge (x \vee 1) \quad (\text{A4})$$

$$= x \vee (\neg x \wedge 1) \quad (\text{A3})$$

$$= x \vee \neg x \quad (\text{A1})$$

$$= 1. \quad (\text{A4})$$

(B5) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) \quad (\text{A1})$$

$$= x \wedge (1 \vee y) \quad (\text{A3})$$

$$= x \wedge 1 \quad (\text{A2})$$

$$= x. \quad (\text{B4})$$

(B6) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$y = y \wedge 1 \quad (\text{A1})$$

$$= y \wedge (x \vee \neg x) \quad (\text{A4})$$

$$= (y \wedge x) \vee (y \wedge \neg x) \quad (\text{A3})$$

$$= (y \wedge x) \vee (\neg x \wedge y) \quad (\text{A2})$$

$$= 0 \vee (\neg x \wedge y) \quad (\text{Hipòtesi})$$

$$= (x \wedge \neg x) \vee (\neg x \wedge y) \quad (\text{A4})$$

$$= (\neg x \wedge x) \vee (\neg x \wedge y) \quad (\text{A2})$$

$$= \neg x \wedge (x \vee y) \quad (\text{A3})$$

$$= \neg x \wedge 1 \quad (\text{Hipòtesi})$$

$$= \neg x. \quad (\text{A1})$$

(B7) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$\neg x \vee x = x \vee \neg x \quad (\text{A2})$$

$$= 1. \quad (\text{A4})$$

$$\neg x \wedge x = x \wedge \neg x \quad (\text{A2})$$

$$= 0. \quad (\text{A4})$$

Per (B6) $x = \neg(\neg x)$.

(B8) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$x \vee (\neg x \vee y) = (x \vee (\neg x \vee y)) \wedge 1 \quad (\text{A1})$$

$$= 1 \wedge (x \vee (\neg x \vee y)) \quad (\text{A2})$$

$$= (x \vee \neg x) \wedge (x \vee (\neg x \vee y)) \quad (\text{A4})$$

$$= x \vee (\neg x \wedge (\neg x \vee y)) \quad (\text{A3})$$

$$= x \vee \neg x \quad (\text{B5})$$

$$= 1. \quad (\text{A4})$$

(B9) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = ((x \vee y) \vee \neg x) \wedge ((x \vee y) \vee \neg y) \quad (\text{A3})$$

$$= (\neg x \vee (x \vee y)) \wedge (\neg y \vee (y \vee x)) \quad (\text{A2})$$

$$= (\neg x \vee (\neg \neg x \vee y)) \wedge (\neg y \vee (\neg \neg y \vee x)) \quad (\text{B7})$$

$$= 1 \wedge 1 \quad (\text{B8})$$

$$= 1. \quad (\text{A1})$$

(B10) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = (\neg x \wedge \neg y) \wedge (x \vee y) \quad (\text{A2})$$

$$= ((\neg x \wedge \neg y) \wedge x) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge y) \quad (\text{A3})$$

$$= (x \wedge (\neg x \wedge \neg y)) \vee (y \wedge (\neg y \wedge \neg x)) \quad (\text{A2})$$

$$= 0 \vee 0 \quad (\text{B8})$$

$$= 0. \quad (\text{A1})$$

(B11) Es dedueix de les propietats (B9) i (B10) i l'unicitat de la negació (B6).

(B12) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$(x \vee (y \vee z)) \vee \neg x = \neg x \vee (x \vee (y \vee z)) \quad (\text{A2})$$

$$= \neg x \vee (\neg \neg x \vee (y \vee z)) \quad (\text{B7})$$

$$= 1. \quad (\text{B8})$$

(B13) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$y \wedge (x \vee (y \vee z)) = (y \wedge x) \vee (y \wedge (y \vee z)) \quad (\text{A3})$$

$$= (y \wedge x) \vee y \quad (\text{B5})$$

$$= y \vee (y \wedge x) \quad (\text{A2})$$

$$= y. \quad (\text{B5})$$

(B14) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$(x \vee (y \vee z)) \vee \neg y = \neg y \vee (x \vee (y \vee z)) \quad (\text{A2})$$

$$= (\neg y \vee (x \vee (y \vee z))) \wedge 1 \quad (\text{A1})$$

$$= 1 \wedge (\neg y \vee (x \vee (y \vee z))) \quad (\text{A2})$$

$$= (y \vee \neg y) \wedge (\neg y \vee (x \vee (y \vee z))) \quad (\text{A4})$$

$$= (\neg y \vee y) \wedge (\neg y \vee (x \vee (y \vee z))) \quad (\text{A2})$$

$$= \neg y \vee (y \wedge (x \vee (y \vee z))) \quad (\text{A3})$$

$$= \neg y \vee y \quad (\text{B13})$$

$$= y \vee \neg y \quad (\text{A2})$$

$$= 1. \quad (\text{A4})$$

(B15) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$(x \vee (y \vee z)) \vee \neg z = (x \vee (z \vee y)) \vee \neg z \quad (\text{A2})$$

$$= 1. \quad (\text{B14})$$

(B16) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$\neg((x \vee y) \vee z) \wedge x = (\neg(x \vee y) \wedge \neg z) \wedge x \quad (\text{B11})$$

$$= ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \wedge x \quad (\text{B11})$$

$$= x \wedge ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \quad (\text{A2})$$

$$= (x \wedge ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z)) \vee 0 \quad (\text{A1})$$

$$= 0 \vee (x \wedge ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z)) \quad (\text{A2})$$

$$= (x \wedge \neg x) \vee (x \wedge ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z)) \quad (\text{A4})$$

$$= x \wedge (\neg x \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z)) \quad (\text{A3})$$

$$= x \wedge (\neg x \vee (\neg z \wedge (\neg x \wedge \neg y))) \quad (\text{A2})$$

$$= x \wedge \neg x \quad (\text{B13})$$

$$= 0. \quad (\text{A4})$$

(B17) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$\neg((x \vee y) \vee z) \wedge y = \neg((y \vee x) \vee z) \wedge y \quad (\text{A2})$$

$$= 0. \quad (\text{B16})$$

16CAPÍTOL 3. ÀLGEBRES BOOLEANES, RETICLES I ESPAIS TOPOLÒGICS

(B18) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$\neg((x \vee y) \vee z) \wedge z = (\neg(x \vee y) \wedge \neg z) \wedge z \quad (\text{B11})$$

$$= z \wedge (\neg(x \vee y) \wedge \neg z) \quad (\text{A2})$$

$$= z \wedge (\neg z \wedge \neg(x \vee y)) \quad (\text{A2})$$

$$= 0. \quad (\text{B8})$$

(B19) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} & (x \vee (y \vee z)) \vee \neg((x \vee y) \vee z) \\ &= (x \vee (y \vee z)) \vee (\neg(x \vee y) \wedge \neg z) \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

$$= (x \vee (y \vee z)) \vee ((\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z) \quad (\text{B11})$$

$$= ((x \vee (y \vee z)) \vee (\neg x \wedge \neg y)) \wedge ((x \vee (y \vee z)) \vee \neg z) \quad (\text{A3})$$

$$= (((x \vee (y \vee z)) \vee \neg x) \wedge ((x \vee (y \vee z)) \vee \neg y)) \wedge ((x \vee (y \vee z)) \vee \neg z) \quad (\text{A3})$$

$$= (1 \wedge 1) \wedge 1 \quad (\text{B12, B14, B15})$$

$$= 1. \quad (\text{A1})$$

(B20) Tenim la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned} & (x \vee (y \vee z)) \wedge \neg((x \vee y) \vee z) \\ &= \neg((x \vee y) \vee z) \wedge (x \vee (y \vee z)) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

$$= (\neg((x \vee y) \vee z) \wedge x) \vee (\neg((x \vee y) \vee z) \wedge (y \vee z)) \quad (\text{A3})$$

$$= (\neg((x \vee y) \vee z) \wedge x) \vee ((\neg((x \vee y) \vee z) \wedge y) \vee (\neg((x \vee y) \vee z) \wedge z)) \quad (\text{A3})$$

$$= 0 \vee (0 \vee 0) \quad (\text{B16, B17, B18})$$

$$= 0. \quad (\text{A1})$$

(B21) Es dedueix de les dues propietats anteriors (B19) i (B20), la doble negació (B7) i l'unicitat de la negació (B6).

Queda, així, demostrada la Proposició 3.1. □

Anem a veure un exemple d'àlgebra Booleana prou conegut i que, més avant, vorem que és clau en aquest treball, el conjunt de les parts d'un conjunt.

Exemple 3.1. *Siga X un conjunt. Aleshores $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ()^c, \emptyset, X)$ és una àlgebra Booleana.*

3.1.1 Subàlgebres i homomorfismes Booleans

Ara que ja hem donat a conèixer aquesta estructura algebraica, anem a estudiar les seues subestructures i els homomorfismes, és a dir, vorem les subàlgebres Booleans i els homomorfismes Booleans. Aquests últims ens donen una forma de relacionar distintes àlgebres Booleans que, com vorem més avant, és clau en el seu estudi.

Definició 3.2. Donada una àlgebra Booleana $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ i un subconjunt $\emptyset \neq A \subseteq B$, diem que **$\mathbf{A}$** és una subàlgebra Booleana de **$\mathbf{B}$** , i ho denotem per $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, si **$\mathbf{A}$** és tancat sota les operacions $\vee$, $\wedge$ i $\neg$, i conté les constants. És a dir, si donats $a, b \in A$, tenim que

$$\neg a, a \wedge b, a \vee b, 0, 1 \in A.$$

Definició 3.3. Siga X un conjunt. Una àlgebra de conjunts sobre X és una subàlgebra Booleana $\mathbf{Y} \leq \mathcal{P}(X)$.

Exemple 3.2. Un exemple d'àlgebra de conjunts el podem trobar en teoria de la mesura, que és el fonament de la probabilitat, entre altres coses. Siga X un conjunt. Un espai mesurable, és un parell $(X, \mathcal{A})$ on $\mathcal{A}$ és una **sigma àlgebra**, és a dir, $\mathcal{A}$ és una àlgebra de conjunts que és tancada per a unions numerables. El lector interessat podrà trobar més en [31].

Definició 3.4. Siguen **$\mathbf{B}$** i **$\mathbf{C}$** àlgebres Booleans. Una aplicació $f: \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ és un homomorfisme Booleà, si f és compatible amb $\vee$, $\wedge$ i $\neg$. És a dir, si donats $a, b \in B$, tenim que

1. $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.
2. $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.
3. $f(\neg a) = \neg f(a)$.

A més, si f és injectiva diem que és una imbibició Booleana. Si f és bijectiva diem que és un isomorfisme Booleà.

A l'hora de comprovar si una aplicació entre àlgebres Booleans és un homomorfisme podem fer una comprovació distinta que en moltes situacions pot ser més senzilla, i que és equivalent a la tercera condició esmentada en la definició anterior.

Proposició 3.2. Siguen **$\mathbf{B}$** i **$\mathbf{C}$** àlgebres Booleans i $f: \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ una aplicació tal que donats $a, b \in B$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ i $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Són equivalents:

$$1. f(0) = 0 \text{ i } f(1) = 1.$$

$$2. \text{ Per a tot } a \in B, \text{ tenim que } f(\neg a) = \neg f(a).$$

Demostració: Si $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$, tenim que per a tot $a \in B$, es donen les següents cadenes d'igualtats

$$\begin{aligned} f(a) \wedge f(\neg a) &= f(a \wedge \neg a) && \text{(Hipòtesi)} \\ &= f(0) && \text{(A4)} \\ &= 0. && \text{(Hipòtesi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a) \vee f(\neg a) &= f(a \vee \neg a) && \text{(Hipòtesi)} \\ &= f(1) && \text{(A4)} \\ &= 1. && \text{(Hipòtesi)} \end{aligned}$$

per l'unicitat de la negació (B6) $f(\neg a) = \neg f(a)$.

Per altre costat, si per a tot $a \in B$, $f(\neg a) = \neg f(a)$, tenim que per a tot $a \in B$,

$$\begin{aligned} f(0) &= f(a \wedge \neg a) && \text{(A4)} \\ &= f(a) \wedge f(\neg a) && \text{(Hipòtesi)} \\ &= f(a) \wedge \neg f(a) && \text{(Hipòtesi)} \\ &= 0. && \text{(A4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= f(a \vee \neg a) && \text{(A4)} \\ &= f(a) \vee f(\neg a) && \text{(Hipòtesi)} \\ &= f(a) \vee \neg f(a) && \text{(Hipòtesi)} \\ &= 1. && \text{(A4)} \end{aligned}$$

Queda, així, demostrada la Proposició 3.2. □

Els homomorfismes Booleans respecten l'estructura algebraica, és a dir, l'imatge d'una àlgebra Booleana, és una subestructura del codomini de l'homomorfisme.

Lema 3.1. *Siguen B i C àlgebres Booleans i $f: B \longrightarrow C$ homomorfisme. Aleshores $f[B] \leq C$.*

Demostració: Siguen $c_1, c_2 \in f[\mathbf{B}]$, així tenim que existeixen $b_1, b_2 \in B$ tals que $f(b_1) = c_1$ i $f(b_2) = c_2$. En conseqüència, com f és homomorfisme Booleà,

$$c_1 \vee c_2 = f(b_1) \vee f(b_2) = f(b_1 \vee b_2) \in f[\mathbf{B}].$$

Per altre costat, com que f és homomorfisme Booleà,

$$\neg c_1 = \neg f(b_1) = f(\neg b_1) \in f[\mathbf{B}].$$

Per les propietats (B7) i (B11), tenim $c_1 \wedge c_2 \in f[\mathbf{B}]$. A més, en ser f homomorfisme Booleà, per la proposició anterior, tenim que $1_C = f(1_B) \in f[B]$ i $0_C = f(0_B) \in f[B]$. Per tant, $f[\mathbf{B}] \leq \mathbf{C}$. $\square$

3.1.2 Dualitat Booleana

Fem notar que les propietats que defineixen una àlgebra Booleana i les propietats que hem demostrat posteriorment venen en parells. Açò té conseqüències a l'hora de demostrar propietats sobre una àlgebra Booleana.

Definició 3.5. *Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana. Anomenem dual de $\mathbf{B}$ a l'àlgebra Booleana que resulta d'intercanviar en $\mathbf{B}$ $\vee$ per $\wedge$ i 0 per 1 . És a dir, per a tots $x, y, z \in B$:*

(A1) (Identitat)

$$(a) x \wedge 1 = x.$$

$$(b) x \vee 0 = x.$$

(A3) (Distributivitat)

$$(a) x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

$$(b) x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

(A2) (Commutativitat)

$$(a) x \wedge y = y \wedge x.$$

$$(b) x \vee y = y \vee x.$$

(A4) (Complementació)

$$(a) x \vee \neg x = 1.$$

$$(b) x \wedge \neg x = 0.$$

És fàcil veure que el dual d'una àlgebra Booleana sempre és isomorfa amb l'àlgebra Booleana inicial ja que, fer aquest intercanvi en les propietats (a) et dóna (b), i viceversa.

3.2 Teoria de l'ordre

La teoria de l'ordre estudia les relacions binàries d'ordre sobre conjunts i les aplicacions monòtones entre conjunts amb relacions binàries d'ordre. En aquesta secció anem a treballar amb conjunts parcialment ordenats i un cas particular d'aquests,

que és el de reticle. A més, vorem més avant que les àlgebres Booleans indueixen un tipus de reticles, donant així un altra relació de les algebres Booleans amb altres estructures.

3.2.1 Conjunts ordenats

Definició 3.6. *Un conjunt (parcialment) ordenat és una tupla $(P, \leq)$ on P és un conjunt i $\leq$ és una relació binària d'ordre sobre P , és a dir, una relació que és reflexiva, antisimètrica i transitiva. Així, donats $x, y, z \in P$,*

(O1) $x \leq x$.

(O2) Si $x \leq y$ i $y \leq x$, aleshores $x = y$.

(O3) Si $x \leq y$ i $y \leq z$, aleshores $x \leq z$.

A més, si per a tot $x, y \in P$, tenim que $x \leq y$ o $y \leq x$, diem que $(P, \leq)$ és un conjunt totalment ordenat o una cadena. Ens referirem a $(P, \leq)$ com a $\mathbf{P}$, sense especificar l'ordre, quan el context ho permeti.

Nota 3.1. Donat un conjunt (parcialment) ordenat $\mathbf{P}$, si $x, y \in P$ són tals que $x \leq y$ i $x \neq y$, denotarem aquest fet per $x < y$.

Definició 3.7. Donat un conjunt (parcialment) ordenat $\mathbf{P}$ i $x, y \in P$. Diem que y cobreix a x si $x < y$ i si existeix $z \in P$ tal que $x \leq z \leq y$ aleshores $x = z$ o $y = z$. Ho denotarem per $x \prec y$.

Nota 3.2. Usant aquesta relació de cobriment, podem representar un conjunt (parcialment) ordenat finit $\mathbf{P}$ per un graf, anomenat Diagrama de Hasse. Un exemple d'aquest diagrama es pot veure en la Figura 3.1. Tot element de P es representa per un vèrtex i cada relació $x \prec y$ entre punts es representa per una eix entre els vèrtexs. En aquesta situació representarem y per dalt d' x .

Definició 3.8. Donat un conjunt (parcialment) ordenat $\mathbf{P} = (P, \leq)$. Definim $\mathbf{P}^\delta = (P, \geq)$, el dual de $\mathbf{P}$, de la següent manera, $x \leq y$ en $\mathbf{P}^\delta$ si, i només si, $y \leq x$ en $\mathbf{P}$.

És fàcil veure que $\mathbf{P}$ és un conjunt (parcialment) ordenat si, i només si, $\mathbf{P}^\delta = (P, \geq)$ també ho és.

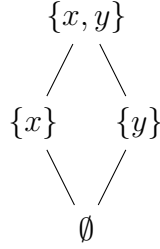


Figura 3.1: Diagrama de Hasse per a l'àlgebra de conjunts del conjunt $\{x, y\}$.

Definició 3.9. Donat un conjunt (parcialment) ordenat $\mathbf{P}$, si existeix $x \in P$ tal que, per a tot $y \in P$, tenim que $x \leq y$, ho denotem per $0 = x$. De forma anàloga, si existeix $x \in P$ tal que per a tot $y \in P$ tenim que $y \leq x$, ho denotem per $1 = x$. Diem que $\mathbf{P}$ és fitat, si existeixen $0, 1 \in P$ tals que, per a tot $y \in P$, tenim que $0 \leq y \leq 1$.

Definició 3.10. Siguen $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ conjunts (parcialment) ordenats i $\phi: P \longrightarrow Q$ una aplicació. Diem que:

1. ϕ és monòtona, si $x \leq y$ en $\mathbf{P}$ implica $\phi(x) \leq \phi(y)$ en $\mathbf{Q}$.
2. ϕ és antítona, si $x \leq y$ en $\mathbf{P}$ implica $\phi(y) \leq \phi(x)$ en $\mathbf{Q}$.
3. ϕ és una imbibició, si $x \leq y$ en $\mathbf{P}$ si, i només si, $\phi(x) \leq \phi(y)$ en $\mathbf{Q}$.
4. ϕ és un isomorfisme, si és una imbibició sobrejectiva.

Observem que una aplicació antítona $\phi: P \longrightarrow Q$ és el mateix que una aplicació monòtona $\phi': P^\delta \longrightarrow Q$. També notem que una imbibició és necessàriament injectiva.

3.2.2 Suprem, ínfim i reticles

En aquesta subsecció anem a estudiar els conceptes de suprem i ínfim en un conjunt parcialment ordenat i l'estructura de reticle, que vorem que és el mateix que un conjunt parcialment ordenat on tot subconjunt finit té suprem i ínfim. Definirem algunes propietats que tenen els reticles.

Definició 3.11. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat i $S \subseteq P$. Diem que $x \in P$ és una fita superior de S si, per a tot $s \in S$, $s \leq x$. Anàlogament, diem que $y \in P$ és una fita inferior de S si, per a tot $s \in S$, $y \leq s$.

Definició 3.12. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat i $S \subseteq P$. Diem que $x \in P$ és un suprem de S si, per a tot $z \in P$ fita superior de S , $x \leq z$. Anàlogament, diem que $y \in P$ és un ínfim de S si, per a tot $z \in P$ fita inferior de S , $z \leq y$. En cas d'existir els denotarem per $\sup(S)$ i $\inf(S)$, respectivament.

És fàcil vore de la definició que, en cas d'existir, el suprem i l'ínfim són únics.

Definició 3.13. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat. Diem que $x \in P$ és maximal si, donat $y \in P$ tal que $x \leq y$, aleshores $x = y$. Diem que $x \in P$ és minimal si x és maximal en $\mathbf{P}^\delta$.

Definició 3.14. Un reticle és una tupla $(L, \vee, \wedge)$, on L és un conjunt i $\vee$ i $\wedge$ són dues operacions binàries en L , tals que per a tots $a, b, c \in L$,

$$\begin{aligned} (a) \quad a \vee b &= b \vee a. \\ (b) \quad a \wedge b &= b \wedge a. \end{aligned} \tag{A2}$$

$$\begin{aligned} (a) \quad a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c. \\ (b) \quad a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c. \end{aligned} \tag{B21}$$

$$\begin{aligned} (a) \quad a \vee (a \wedge b) &= a. \\ (b) \quad a \wedge (a \vee b) &= a. \end{aligned} \tag{B5}$$

Proposició 3.3. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat. Definim

$$a \wedge b = a \text{ i } a \vee b = b \text{ si, i només si, } a \leq b.$$

Aleshores, $\mathbf{P}$ és un reticle si, i només si, donats $a, b \in P$, existeixen

$$\sup\{a, b\}, \inf\{a, b\} \in P.$$

Demostració: Suposem que $\mathbf{P}$ és un reticle. Tenim que

$$a = a \wedge (a \vee b). \tag{B5}$$

$$b = b \wedge (b \vee a) \tag{B5}$$

$$= b \wedge (a \vee b). \tag{A2}$$

Així $a \leq a \vee b$ i $b \leq a \vee b$, per tant $a \vee b$ és una fita superior de $\{a, b\}$. Siga $u \in P$ tal que $a \leq u$ i $b \leq u$, aleshores

$$a \vee u = (a \wedge u) \vee u = u. \quad (\text{B5})$$

$$b \vee u = (b \wedge u) \vee u = u. \quad (\text{B5})$$

Tenim que

$$\begin{aligned} (a \vee b) \vee u &= a \vee (b \vee u) \\ &= a \vee u \\ &= u. \end{aligned} \quad (\text{B21})$$

Per tant

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge u &= (a \vee b) \wedge ((a \vee b) \vee u) \\ &= a \vee b. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

És a dir, $a \vee b \leq u$. Així $\sup\{a, b\} = a \vee b$. De forma anàloga, es pot veure que $\inf\{a, b\} = a \wedge b$.

Ara, suposem que existeix el suprem i ínfim de dos elements qualsevols. Definim

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \iff a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Com, $\sup\{a, b\} = \sup\{b, a\}$ i $\inf\{a, b\} = \inf\{b, a\}$, tenim que es compleix (R1).

Com que, per a tot $a, b \in P$, existeixen $\sup\{a, b\}, \inf\{a, b\} \in P$, tenim que existeixen $x, y \in P$ tals que $\sup\{a, b\} = x$ i $\sup\{b, c\} = y$, i siga $z \in P$ tal que $z = \sup\{x, y\}$, així tenim que z és fita superior d' a i y . Siga $u \in P$ tal que $a \leq u$ i $y \leq u$, i com que y és fita superior de b i c , tenim que u és fita superior d' a i b . Però en eixe cas, $\sup\{a, b\} = x \leq u$, així u és fita superior de x i y . Per tant $\sup\{x, y\} = z \leq u$, així $\sup\{x, y\} = z = \sup\{a, y\} = \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$. Argumentant de la mateixa forma intercanviant a i c , i per la commutativitat obtenim $z = \sup\{c, \sup\{b, a\}\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$. En conseqüència es compleix (R2).

Per últim, com que $\inf\{a, b\} \leq a$, tenim que $\sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a$, i tenim (R3).

Per un raonament anàleg obtenim les mateixes propietats per a l'ímfim. $\square$

Definició 3.15. Siga $\mathbf{P} = (P, \vee, \wedge)$ un reticle.

24CAPÍTOL 3. ÀLGEBRES BOOLEANES, RETICLES I ESPAIS TOPOLÒGICS

1. Diem que P és fitat, si existeixen $0, 1 \in P$ tals que per a tot $x \in P$, tenim que

$$\begin{aligned} (a) \quad & x \vee 0 = x. \\ (b) \quad & x \wedge 1 = x. \end{aligned}$$

2. Diem que P és distributiu, si per a tots $x, y, z \in P$, tenim que

$$\begin{aligned} (a) \quad & x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \\ (b) \quad & x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{aligned}$$

3. Diem que P és complementat, si existeixen $0, 1 \in P$ tals que per a tot $x \in P$, tenim que

$$\begin{aligned} (a) \quad & x \wedge \neg x = 0. \\ (b) \quad & x \vee \neg x = 1. \end{aligned}$$

4. Diem que P és complet, si donat $S \subseteq P$, existeixen $\sup(S), \inf(S) \in P$.

Nota 3.3. Observem que una àlgebra Booleana, és un reticle fitat, distributiu i complementat. Notem que si $\mathbf{B}$ és una àlgebra Booleana i $S = \emptyset$, aleshores $\inf(S) = 1$ i $\sup(S) = 0$.

Definició 3.16. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat tal que $\inf(P) \in P$ i $x \in P \setminus \{\inf(P)\}$. Diem que x és un àtom de $\mathbf{P}$ si, per a tot $a \in P$, tenim que si $\inf(P) \leq a \leq x$ aleshores, $\inf(P) = a$ o $a = x$. En aquest cas, ho denotarem com $x \in \mathcal{A}(\mathbf{P})$.

3.2.3 Filtres i ideals

El concepte de *filtre* va ser introduït per **Henri Cartan** [5][6] com una alternativa al concepte que *xarxa*, que és una generalització del concepte de successió. Aquest concepte és va desenvolupar en l'àrea de la topologia. En el nostre cas serà molt important també en l'aspecte topològic, que desenvoluparem més avant. En aquesta subsecció, anem a definir el concepte de filtre en un conjunt parcialment ordenat i demostrarem alguna propietat en el cas dels reticles.

Definició 3.17. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat i $F \subseteq P$. És fàcil veure que la restricció de la relació binària d'ordre a F és un conjunt (parcialment) ordenat, que denotem $(F, \leq)$. Diem que $\mathbf{F}$ és un filtre de $\mathbf{P}$, si

1. $F \neq \emptyset$.
2. Donat $x \in F$, si existeix $y \in P$ tal que $x \leq y$, aleshores $y \in F$.
3. Donats $x, y \in F$ existeix $z \in F$ tal que $z \leq x$ i $z \leq y$.

Si $F \neq P$, diem que $\mathbf{F}$ és propi. Diem que $\mathbf{F}$ és un ideal de $\mathbf{P}$, si $\mathbf{F}$ és un filtre de $\mathbf{P}^\delta$. Denotarem per $\mathcal{F}(\mathbf{P})$ al conjunt de filtres de $\mathbf{P}$, i $\mathcal{I}(\mathbf{P})$ al conjunt d'ideals de $\mathbf{P}$, que en ausència d'ambigüitat només denotarem per $\mathcal{F}$ i $\mathcal{I}$, respectivament. En el cas dels reticles, la condició 3, diu que donats $x, y \in F$, tenim que $x \wedge y = \inf\{x, y\} \in F$.

Definició 3.18. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat i donat $x \in P$, definim

$$\uparrow x = \{y \in P : x \leq y\}$$

que és un filtre que anomenarem filtre principal associat a x .

Definició 3.19. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat i $\mathbf{F}$ un filtre propi. Diem que $\mathbf{F}$ és primer si, donats $x, y \in P$, i $z \in F$ tals que $x, y \leq z$, aleshores $x \in F$ o $y \in F$. En el cas dels reticles, aquesta condició es tradueix a que, si $x, y \in P$ i $x \vee y = \sup\{x, y\} \in F$, aleshores $x \in F$ o $y \in F$. Si $\mathbf{I}$ és un ideal propi, diem que $\mathbf{I}$ és primer si, donats $x, y \in P$, i $z \in I$ tals que $z \leq x, y$, aleshores $x \in I$ o $y \in I$. Denotarem per $\mathcal{F}_p(\mathbf{P})$ al conjunt de filtres primers de $\mathbf{P}$, i $\mathcal{I}_p(\mathbf{P})$ al conjunt d'ideals primers de $\mathbf{P}$.

A continuació farem ús de la dualitat de l'ordre, per a vore una proposició que pot ser útil a l'hora de demostrar que un subconjunt és un filtre en un reticle.

Proposició 3.4. Siga $\mathbf{P}$ un reticle i $F \subset P$. Aleshores $\mathbf{F}$ és un filtre primer de $\mathbf{P}$ si, i només si, $P \setminus F$ és un ideal primer de $\mathbf{P}$.

Demostració: Només demostrarem una de les implicacions, l'altra implicació és anàloga.

Suposem que $\mathbf{F}$ és un filtre primer. Com que $F \neq P$ per ser un filtre propi, tenim que $P \setminus F \neq \emptyset$, així tenim que es compleix l'apartat 1 de la Definició 3.17.

Siga $y \in P \setminus F$ amb $x \leq y$, si $x \in F$, per la propietat 2 de la Definició 3.17, tenim que $y \in F$, però això és una contradicció, així $x \in P \setminus F$, i tenim que es compleix 2 de la Definició 3.17.

Siguen $x, y \in P \setminus F$, com que $\mathbf{P}$ és un reticle, existeix $z \in P$ tal que $x, y \leq z = \sup\{x, y\}$, si $z \in F$, com F és un filtre primer, tenim que $x \in F$ o $y \in F$, que és una contradicció. Per tant es compleix la propietat 3 de la Definició 3.17. Suposem que $x, y \in F$ i $\inf\{x, y\} \in P \setminus F$, però per la propietat 3 de la Definició 3.17, tenim que $\inf\{x, y\} \in F$, que és una contradicció, per tant $x \in P \setminus F$ o $y \in P \setminus F$, així $P \setminus F$ és un ideal primer. $\square$

Definició 3.20. Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat i $\mathbf{F}$ un filtre propi. Diem que $\mathbf{F}$ és un ultrafiltre si és maximal respecte l'inclusió entre els filtres propis de $\mathbf{P}$. Dualment es defineix un ideal maximal, com un element maximal respecte l'inclusió entre els ideals propis de $\mathbf{P}$.

3.2.4 Àlgebres Booleanes com a conjunts ordenats

Com hem dit abans, una àlgebra Booleana és un reticle fitat, distributiu i complementat. Així, podem utilitzar les propietats i construccions que tenen els reticles per a estudiar les àlgebres Booleanes, que és el que anem a fer a continuació.

Teorema 3.1. Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana. Definim sobre $\mathbf{B}$ la següent relació binària, donats $x, y \in B$, $x \leq y$ si, i només si, $x \vee y = y$. Aleshores $\leq$ és una relació d'ordre sobre $\mathbf{B}$, que anomenarem relació d'ordre induïda en $\mathbf{B}$.

Demostració: Per (B3) tenim que per a tot $a \in B$, $a \vee a = a$. Així $\leq$ és reflexiva. Per a tot $a, b \in B$ si $a \leq b$ i $b \leq a$, per (A2), tenim que $b = a \vee b = b \vee a = a$. Per tant $\leq$ és antisimètrica. Per a tot $a, b, c \in B$ si $a \leq b$ i $b \leq c$, tenim que $a \vee b = b$ i $b \vee c = c$ i per (B21), tenim que $a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$. En conseqüència $a \leq c$ i concloem que $\leq$ és transitiva. Per tant $\leq$ és una relació d'ordre. $\square$

Proposició 3.5. Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana. Aleshores, $\mathbf{B}$ amb la relació d'ordre induïda, és un conjunt (parcialment) ordenat fitat.

Demostració: Tenim que per a tot $b \in B$, $0 \vee b = b$. Així per a tot $b \in B$, $0 \leq b$. Per un altre costat, per a tot $b \in B$, $b \vee 1 = 1$. Així per a tot $b \in B$, $b \leq 1$. $\square$

Proposició 3.6. Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana. Donats $a, b \in B$, tenim que $a \vee b = b$ si, i només si, $a \wedge \neg b = 0$.

Demostració: Si $a \vee b = b$, aleshores

$$a \wedge \neg b = (a \wedge \neg b) \vee 0 \quad (\text{A1})$$

$$= (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg b) \quad (\text{A4})$$

$$= (a \vee b) \wedge \neg b \quad (\text{A3})$$

$$= b \wedge \neg b \quad (\text{Hipòtesi})$$

$$= 0. \quad (\text{A4})$$

Si, per altra banda, $a \wedge \neg b = 0$, tenim que

$$a \vee b = (a \vee b) \wedge 1 \quad (\text{A1})$$

$$= (a \vee b) \wedge (\neg b \vee b) \quad (\text{A4})$$

$$= (a \wedge \neg b) \vee b \quad (\text{A3})$$

$$= 0 \vee b \quad (\text{Hipòtesi})$$

$$= b. \quad (\text{A1})$$

Queda així demostrada la Proposició 3.8. $\square$

Corol·lari 3.1. *Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana. Aleshores el dual del conjunt (parcialment) ordenat induït per $\mathbf{B}$, és el conjunt (parcialment) ordenat induït pel dual de $\mathbf{B}$.*

Teorema 3.2. *Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana i $\leq$ l'ordre induït. Aleshores, per a tot $A \subseteq B$ finit, existeixen $x, y \in B$ tals que $\inf(A) = x$, $\sup(A) = y$. A més, per a qualsevols $a, b \in B$, $\sup\{a, b\} = a \vee b$ i $\inf\{a, b\} = a \wedge b$.*

Demostració: Anem a demostrar primer la segona afirmació i raonarem la primera a partir d'aquesta. Tenim la següent cadena d'igualtats,

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b \quad (\text{B21})$$

$$= a \vee b. \quad (\text{B3})$$

Per tant, $a \leq a \vee b$. Per altre costat,

$$b \vee (a \vee b) = b \vee (b \vee a) \quad (\text{A2})$$

$$= (b \vee b) \vee a \quad (\text{B21})$$

$$= b \vee a \quad (\text{B3})$$

$$= a \vee b. \quad (\text{A2})$$

En conseqüència, $b \leq a \vee b$. Així $a \vee b$ és una fita superior de $\{a, b\}$. Suposem que $x \in B$ és una fita superior de $\{a, b\}$. Per tant, $a \vee x = x$ i $b \vee x = x$. Això implica que $(a \vee b) \vee x = a \vee (b \vee x) = a \vee x = x$. En conseqüència $a \vee b \leq x$. Aleshores $a \vee b$ és la menor fita superior de $\{a, b\}$.

Per a la primera afirmació, notem que per a tot $a \in B$ tenim que $\sup\{a\} = a$ i $\sup(\emptyset) = 0$. Si treballem per inducció sobre el nombre d'elements, obtenim que qualsevol subconjunt finit d'una àlgebra Booleana té suprem. Per la dualitat de l'ordre podem obtindre el mateix per a l'ínfim. $\square$

28CAPÍTOL 3. ÀLGEBRES BOOLEANES, RETICLES I ESPAIS TOPOLÒGICS

A continuació anem a veure una propietat prou especial de les àlgebres Booleanes, que és que tot element és l'unió de tots els àtoms que té per baix.

Proposició 3.7. *Siga B una àlgebra Booleana finita. Aleshores, per a tot $a \in B$,*

$$a = \bigvee \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a\}.$$

Demostració: Siga $a \in B$ i $S = \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a\}$. Obviament a és una fita superior de S . Així $\bigvee S \leq a$. Siga b una fita superior de S . Suposem que $a \not\leq b$, així per la Proposició 3.6, tenim que $a \wedge \neg b > 0$. Com que B és finit, és fàcil veure que, per a cada element $c \in B$, tal que $c > 0$, tenim que, si aquest no és un àtom, hi ha un element $v \in B$ tal que $v \leq c$ amb $v \in \mathcal{A}(B)$. En particular, hi ha un element $x \in \mathcal{A}(B)$ tal que $x \leq a \wedge \neg b$. Així $x \leq a$, és a dir, $x \in S$ i, per tant, $x \leq b$. Però també tenim que $x \leq \neg b$, així $x \leq b \wedge \neg b = 0$, el que és una contradicció. Per tant, $a \leq b$. En conseqüència $a = \sup(S) = \bigvee S$. $\square$

Lema 3.2. *Siga B una àlgebra Booleana, $x \in \mathcal{A}(B)$ i $a, b \in B$. Si $x \leq a \vee b$, aleshores $x \leq a$ o $x \leq b$.*

Demostració: Suposem que $a = 0$, així $x \leq a \vee b = b$. D'igual forma, si $b = 0$, aleshores $x \leq a$. Suposem que $a, b > 0$ i a més que $x \not\leq a$ i $x \not\leq b$. Com que $x \in \mathcal{A}(B)$, les úniques fites inferiors de x , són x i 0 . Per tant, $x \wedge a = x \wedge b = 0$. Tenim que

$$x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b) = 0 \vee 0 = 0,$$

que és una contradicció. Concloem doncs que $x \leq a$ o $x \leq b$. $\square$

Proposició 3.8. *Siga B una àlgebra Booleana, $x \in \mathcal{A}(B)$ i $S \subseteq B$ finit. Si $x \leq \bigvee S$, aleshores existeix $a \in S$ tal que $x \leq a$.*

Demostració: Suposem que $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, així tenim que $x \leq a_1 \vee \dots \vee a_n$. Com que $b = a_1 \vee \dots \vee a_{n-1} \in B$ pel Lema 3.2, tenim que $x \leq a_n$ o $x \leq b$. En cas que $x \leq b$, tornem a aplicar el mateix argument i arribem a que existeix $a \in S$ tal que $x \leq a$. $\square$

Lema 3.3. *Siga B una àlgebra Booleana i F un filtre propi de B . Aleshores, les següents afirmacions són equivalents:*

1. F és un filtre primer.
2. Per a tot $a \in B$, $a \in F$ si, i només si, $\neg a \notin F$.

3. $\mathbf{F}$ és un ultrafiltre.

Demostració: Suposem que $\mathbf{F}$ és primer. Com que $\mathbf{F}$ no és buit, existeix $a \in F$, però com que $a \leq 1$ i $\mathbf{F}$ és un filtre, tenim que $1 \in F$, és a dir, $a \vee \neg a = 1 \in F$. A més, com que $\mathbf{F}$ és primer, $a \in F$ o $\neg a \in F$, però si $a, \neg a \in F$, aleshores $a \wedge \neg a = 0 \in F$. Per tant $F = B$, que és una contradicció. Concloem 2.

Suposem que se satisfà 2 i que $\mathbf{F}'$ és un filtre tal que $F \subset F'$, és a dir, existeix $a \in F'$ tal que $a \notin F$. Però aleshores $\neg a \in F \subset F'$. Per tant $a \wedge \neg a \in F'$. Així, $F' = B$ i concloem que $\mathbf{F}$ és un ultrafiltre.

Suposem que $\mathbf{F}$ és un ultrafiltre, $a \vee b \in F$ i $a \notin F$. Definim $F_a = \uparrow \{a \wedge c : c \in F\}$. Així F_a és un filtre que conté a F i a a , com que F és maximal $F_a = B$. En particular, $0 \in F_a$, és a dir, existeix $c \in F$ tal que $0 = a \wedge c$. Com que

$$b \wedge c = (b \wedge c) \vee 0 \quad (\text{A1})$$

$$= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \quad (\text{Hipòtesi})$$

$$= (a \vee b) \wedge c \in F. \quad (\text{A3})$$

A més, com que $b \wedge c \leq b$, tenim que $b \in F$, per tant $\mathbf{F}$ és un filtre primer. $\square$

A continuació, enunciem el lema de Zorn, que ens serà útil per a demostrar el teorema del filtre primer.

Lema 3.4 (Lema de Zorn). *Siga $\mathbf{P}$ un conjunt (parcialment) ordenat no buit, on cada cadena té una fita superior. Aleshores $\mathbf{P}$ té un element maximal.*

Teorema 3.3 (Del filtre primer). *Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana i $\mathbf{F}$ un filtre propi de $\mathbf{B}$. Aleshores existeix un filtre primer $\mathbf{F}'$ tal que $F \subseteq F'$.*

Demostració: Siga $P = \{G \in \mathcal{F} : F \subseteq G \neq B\}$, el conjunt de filtres propis de $\mathbf{B}$ que contenen a F . Aleshores $\mathbf{P}$ és un conjunt (parcialment) ordenat per a l'inclusió i $F \subset P$, així P és no buit. Siga $\mathcal{C}$ una cadena no buida de $\mathbf{P}$, aleshores $\bigcup \mathcal{C}$ és una fita superior de $\mathcal{C}$. Clarament, $\bigcup \mathcal{C}$ compleix la propietat 2 de la Definició 3.17 i conté a F . A més, $\bigcup \mathcal{C} \neq B$, perquè $0 \notin \bigcup \mathcal{C}$. Siguen $a, b \in \bigcup \mathcal{C}$, aleshores podem trobar filtres $F_1, F_2 \in \bigcup \mathcal{C}$ tals que $a \in F_1$ i $b \in F_2$. Com que $\mathcal{C}$ és una cadena, podem suposar que $F_1 \subseteq F_2$, per tant $a, b \in F_2$ i en conseqüència $a \wedge b \in F_2 \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. En este cas, $\bigcup \mathcal{C} \in P$. Pel Lema de Zorn, existeix un element maximal en P , que serà un filtre maximal, és a dir, un ultrafiltre. Pel Lema 3.3, tenim que és un filtre primer, que per construcció satisfà les propietats que volem. $\square$

Teorema 3.4. *Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana, $\mathbf{F}$ un filtre de $\mathbf{B}$ i $\mathbf{I}$ un ideal de $\mathbf{B}$ tals que $F \cap I = \emptyset$. Aleshores existeixen un filtre primer $\mathbf{F}'$ i un ideal primer $\mathbf{I}'$ tals que $F \subseteq F'$, $I \subseteq I'$ i $F' \cap I' = \emptyset$.*

Demostració: Siga G el conjunt d'elements $c \in B$ per als què existeixen $a \in F$ i $b \in I$ tals que $a \wedge \neg b \leq c$. És fàcil veure que G compleix la propietat 2 de la Definició 3.17. Siguen $c_1, c_2 \in G$, aleshores tenim $a_1, a_2 \in F$ i $b_1, b_2 \in I$ tals que $a_1 \wedge \neg b_1 \leq c_1$ i $a_2 \wedge \neg b_2 \leq c_2$. Utilitzant les propietats demostrades en la primera secció d'aquest capítol, es pot veure que, $(a_1 \wedge \neg b_1) \wedge (a_2 \wedge \neg b_2) \leq c_1 \wedge c_2$. A més

$$(a_1 \wedge \neg b_1) \wedge (a_2 \wedge \neg b_2) = a_1 \wedge (\neg b_1 \wedge (a_2 \wedge \neg b_2)) \quad (\text{B21})$$

$$= a_1 \wedge ((\neg b_1 \wedge a_2) \wedge \neg b_2) \quad (\text{B21})$$

$$= a_1 \wedge ((a_2 \wedge \neg b_1) \wedge \neg b_2) \quad (\text{A2})$$

$$= a_1 \wedge (a_2 \wedge (\neg b_1 \wedge \neg b_2)) \quad (\text{B21})$$

$$= (a_1 \wedge a_2) \wedge (\neg b_1 \wedge \neg b_2) \quad (\text{B21})$$

$$= (a_1 \wedge a_2) \wedge \neg(b_1 \vee b_2). \quad (\text{B11})$$

Com que $a_1 \wedge a_2 \in F$ i $b_1 \vee b_2 \in I$ tenim que $c_1 \wedge c_2 \in G$. Per tant G és un filtre de $\mathbf{B}$. Suposem que $0 \in G$, per definició tenim que existeixen $a \in F$ i $b \in I$ tals que $a \wedge \neg b = 0$. Això vol dir per la Proposició 3.6 i per la definició de l'ordre induït, que $a \leq b$, però com que F és un filtre i I és un ideal, $a \in I$ i $b \in F$. En conseqüència $F \cap I \neq \emptyset$, que és una contradicció. Així $0 \notin G$ i, per tant, G és un filtre propi. Pel Teorema 3.3, existeix un filtre primer $\mathbf{F}'$ tal que $F \subseteq F'$. Per la Proposició 3.4 tenim que $B \setminus F'$ és un ideal primer, i com que $I \cap F = \emptyset$, tenim que per a tot $a \in I$, $a \notin F$ i pel Lema 3.3, deduïm que $\neg a \in F \subseteq F'$. Per tant $I \subseteq B \setminus F'$. $\square$

3.3 Topologia

Els orígens de la Topologia no estan clars, ja que certs historiadors situen el seu naixement en el segle XX, amb la formalització de certes idees de **Poincaré** [26] i **Riemann**, i l'aparició de la teoria de conjunts de **Cantor**. Aquesta és la visió més comú. Encara així, hi ha un altra visió que troba antecedents encara més enrere, en matemàtics com **Leibniz** [27] i les seues idees de geometria situs i analysis situs, en certs treballs combinatòrics, que van passar desapercebuts al llarg de la història, encara que les idees generals de què eren estes dues ciències van influenciar en matemàtics tan importants com **Euler** [13], **Gauss** [16], **Riemann** [30], **Klein** [18], **Poincaré** i **Listring** [23], aquests dos últims van publicar treballs molt importants en aquesta àrea i l'últim d'ells va donar l'actual nom a la disciplina.

3.3.1 Espais topològics

El concepte d'espai topològic té el seu origen en els treballs de **Hausdorff** [14], que els va definir en termes d'entorns, encara que no és la definició que anem a donar aquí, que va ser la donada posteriorment per **Kuratowski** [19]. Té significat a nivell històric i en termes més intuitius podem dir que està formalitzant el concepte d'espai topològic, que dona precisió a la noció de proximitat, sense la necessitat d'una forma de mesurar en termes de l'ordre dels nombres reals, el que és diu una mètrica.

Definició 3.21. *Un espai topològic és un parell $(X, \mathcal{T})$, on X és un conjunt i $\mathcal{T}$ és una topologia sobre X , és a dir, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfà les següents propietats:*

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. Si $\{E_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$, aleshores $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{T}$.
3. Si $J, K \in \mathcal{T}$, aleshores $J \cap K \in \mathcal{T}$.

A un element de $\mathcal{T}$ l'anomenarem obert. Direm que un subconjunt $Y \subseteq X$ és tancat si $X \setminus Y \in \mathcal{T}$.

Notem que el conjunt de tancats d'una topologia es determina mitjançant les lleis de De Morgan.

Definició 3.22. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic, $U \subseteq X$ i $x \in X$. Diem que U és entorn de x si existeix $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$. Ho denotarem com $U \in \xi(x)$.*

Proposició 3.9. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic i $x \in X$. Aleshores,*

1. Si $U \in \xi(x)$ i $U \subseteq V$, aleshores $V \in \xi(x)$.
2. Si $U, V \in \xi(x)$, aleshores $U \cap V \in \xi(x)$.

Demostració: Suposem que $U \in \xi(x)$ i $U \subseteq V$. Com $U \in \xi(x)$, tenim que existeix $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U$, però $U \subseteq V$, així existeix $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq V$ i, per tant $V \in \xi(x)$.

Suposem que $U, V \in \xi(x)$. Com que $U \in \xi(x)$, tenim que existeix $A_1 \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A_1 \subseteq U$. Com que $V \in \xi(x)$, tenim que existeix $A_2 \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A_2 \subseteq V$. Tenim que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ i $x \in A_1 \cap A_2 \subseteq U \cap V$, per tant $U \cap V \in \xi(x)$. $\square$

La proposició anterior ens diu que donat un punt $x \in X$, tenim que $\xi(x)$ és un filtre en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Normalment, el que ocorre es que donat un conjunt, no tenim un altra forma de saber si és obert, més enllà, de per definició de la topologia. A continuació, donem un proposició, que ens permet vore eixa situació mitjançant entorns.

Proposició 3.10. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic i $A \subseteq X$. Aleshores, $A \in \mathcal{T}$ si, i només si, per a tot $x \in A$, $A \in \xi(x)$.*

Demostració: Com $A \in \mathcal{T}$, tenim que per a tot $x \in A$, $x \in A \subseteq A$. Així, per a tot $x \in A$, $A \in \xi(x)$. Per altra banda, si per a tot $x \in A$, $A \in \xi(x)$, tenim que, per a tot $x \in A$, existeix $U_x \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_x \subseteq A$. Per tant,

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \subseteq A$$

així $A = \bigcup_{x \in A} U_x \in \mathcal{T}$. □

Definició 3.23. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic. Diem que $(X, \mathcal{T})$ és Hausdorff, si per a tots $x, y \in X$ tals que $x \neq y$, existeixen $U \in \xi(x)$ i $V \in \xi(y)$ tals que $U \cap V = \emptyset$.*

Definició 3.24. *Siguen $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}')$ espais topològics, i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació. Diem que f és contínua en $x_0 \in X$ si per a tot $U \in \xi(f(x_0))$, existeix $V \in \xi(x_0)$ tal que $f[V] \subseteq U$.*

Proposició 3.11. *Siguen $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ i $(Z, \mathcal{T}'')$ espais topològics. Siguen $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ aplicacions tals que f és contínua en $x_0 \in X$ i g és contínua en $f(x_0)$. Aleshores $g \circ f$ és contínua en x_0 .*

Demostració: Siga $U \in \xi(g(f(x_0)))$, com que g és contínua en $f(x_0)$, existeix $V \in \xi(f(x_0))$ tal que $g[V] \subseteq U$. Com que f és contínua en x_0 , existeix $V' \in \xi(x_0)$ tal que $f[V'] \subseteq V$. Així, $g[f[V']] \subseteq U$. □

Definició 3.25. *Siguen $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}')$ espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació. Diem que f és contínua, si per a tot $x \in X$, f és contínua en x .*

Teorema 3.5. *Siguen $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}')$ espais topològics, i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació. Aleshores, f és contínua si, i només si, per a tot $A \in \mathcal{T}'$, tenim que $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$.*

Demostració: Suposem que f és contínua. Siga $A \in \mathcal{T}'$ i $x_0 \in f^{-1}[A]$. Per tant, $f(x_0) \in A$ i per la Proposició 3.10, tenim que $A \in \xi(f(x_0))$, i com que f és contínua en x_0 , existeix $V \in \xi(x_0)$ tal que $f[V] \subseteq A$. Com que $V \in \xi(x_0)$, tenim que existeix $B \in \mathcal{T}$ tal que $x_0 \in B \subseteq V$, per tant,

$$B \subseteq V \subseteq f^{-1}[f[V]] \subseteq f^{-1}[A].$$

Així $f^{-1}[A] \in \xi(x_0)$ i per la Proposició 3.10, $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$.

Suposem que per a tot $A \in \mathcal{T}'$, tenim que $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$. Siga $x_0 \in X$ i $U \in \xi(f(x_0))$,

així existeix $A \in \mathcal{T}'$ tal que $f(x_0) \in A \subseteq U$, així $x_0 \in f^{-1}[A]$, i per hipòtesi, $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$. Per la Proposició 3.10, $f^{-1}[A] \in \xi(x_0)$ i

$$f[f^{-1}[A]] \subseteq A \subseteq U.$$

Així f és contínua en x_0 . □

Proposició 3.12. *Siguen $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}')$ espais topològics, i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació. Aleshores, f és contínua si, i només si, per a tot $C \subseteq Y$ tancat en $\mathcal{T}'$, tenim que $f^{-1}[C]$ és tancat en $\mathcal{T}$.*

Demostració: Suposem que f és contínua. Siga $C \subseteq Y$ tal que $Y \setminus C \in \mathcal{T}'$, com que f és contínua, $f^{-1}[Y \setminus C] = X \setminus f^{-1}[C] \in \mathcal{T}$.

Suposem que per a tot $C \subseteq Y$ tancat en $\mathcal{T}'$, tenim que $f^{-1}[C]$ és tancat en $\mathcal{T}$. Siga $A \in \mathcal{T}'$, així $Y \setminus A$ és tancat en $\mathcal{T}'$, i per hipòtesi $f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A]$ és tancat en $\mathcal{T}$, així $f^{-1}[A] \in \mathcal{T}$. Per tant f és contínua. □

Definició 3.26. *Siguen $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}')$ espais topològics i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació. Diem que f és un homeomorfisme, si f és bijectiva, contínua i f^{-1} és contínua. Una propietat topològica és una propietat que és invariant sota homeomorfismes.*

Proposició 3.13. *Siguen $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}')$ espais topològics, i $f: X \rightarrow Y$ homeomorfisme. Si $(X, \mathcal{T})$ és Hausdorff, aleshores $(Y, \mathcal{T}')$ és Hausdorff.*

Demostració: Siguen $y_1, y_2 \in Y$ tals que $y_1 \neq y_2$, com que f és bijectiva, existeix un únic $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = y_1$ i existeix un únic $x_2 \in X$ tal que $f(x_2) = y_2$ i a més $x_1 \neq x_2$. Com que $(X, \mathcal{T})$ és Hausdorff, existeixen $U_1 \in \xi(x_1)$ i $U_2 \in \xi(x_2)$ tals que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Així, com f^{-1} és contínua, per a tot $i \in \{1, 2\}$ tenim que $f[U_i] \in \xi(f(x_i))$. Com que f és bijectiva,

$$\emptyset = f[\emptyset] = f[U_1 \cap U_2] = f[U_1] \cap f[U_2].$$

Així $(Y, \mathcal{T}')$ és Hausdorff. □

Definició 3.27. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic i $H \subseteq X$. Definim la topologia relativa (induïda o restringida) com $\mathcal{T}|_H = \mathcal{T}_H = \{A \cap H : A \in \mathcal{T}\}$, així és fàcil vore que $(H, \mathcal{T}_H)$ és un espai topològic, que anomenarem subespai topològic. Un element de $\mathcal{T}_H$ s'anomena obert relatiu de H .*

Nota 3.4. *Anem a vore que l'espai definit anteriorment és un espai topològic. Tenim que $\emptyset = \emptyset \cap H \in \mathcal{T}_H$ i també $H = X \cap H \in \mathcal{T}_H$. A més, donats $A, B \in \mathcal{T}_H$ tenim que existeixen $A', B' \in \mathcal{T}$ tals que $A = A' \cap H$ i $B = B' \cap H$, per tant*

$A \cap B = (A' \cap H) \cap (B' \cap H) = (A' \cap B') \cap H \in \mathcal{T}_H$. Per últim, donada una família d'oberts relatiu $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}_H$, tenim que existeix una família $\{A'_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ tals que per a tot $i \in I$, tenim que $A_i = A'_i \cap H$, així

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A'_i \cap H) = \left(\bigcup_{i \in I} A'_i \right) \cap H \in \mathcal{T}_H.$$

Proposició 3.14. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic i $H \subseteq X$. Aleshores, $C \subseteq H$ és tancat en $\mathcal{T}_H$ si, i només si, existeix $C' \subseteq X$ tancat en $\mathcal{T}$ tal que $C = C' \cap H$.*

Demostració: Suposem que C és tancat en $\mathcal{T}_H$, així $H \setminus C \in \mathcal{T}_H$, per tant, existeix $A' \in \mathcal{T}$ tal que $H \setminus C = A' \cap H$. Siga $C' = X \setminus A'$ que és tancat en $\mathcal{T}$. Per tant

$$C = H \setminus (H \setminus C) = H \setminus (A' \cap H) = H \setminus A' = H \cap (X \setminus A') = H \cap C'.$$

Per altre costat, si $C = C' \cap H$ amb C' tancat en $\mathcal{T}$, aleshores

$$H \setminus C = H \setminus (C' \cap H) = H \setminus C' = H \cap (X \setminus C') \in \mathcal{T}_H.$$

Per tant C és tancat en $\mathcal{T}_H$. □

Proposició 3.15. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic, $H \subseteq X$, $x \in H$ i $U \subseteq H$. U és un entorn de x en $\mathcal{T}_H$ si, i només si, existeix $U' \in \xi(x)$ tal que $U = U' \cap H$. En aquest cas, ho denotarem com $U \in \xi_H(x)$.*

Demostració: Siga U un entorn de x en $\mathcal{T}_H$, és a dir, existeix $A \in \mathcal{T}_H$ tal que $x \in A \subseteq U$. Per tant existeix $A' \in \mathcal{T}$ tal que $A = A' \cap H$. Siga $U' = U \cup A'$, i com $x \in A' \subseteq U'$, tenim que $U' \in \xi(x)$. A més,

$$U' \cap H = (U \cup A') \cap H = (U \cap H) \cup (A' \cap H) = U \cup A = U.$$

Per altre costat, si existeix $U' \in \xi(x)$ tal que $U = U' \cap H$, tenim que existeix $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq U'$. Per tant,

$$x \in A \cap H \subseteq U' \cap H = U \in \xi_H(x).$$

□

Definició 3.28. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic. Diem que $(X, \mathcal{T})$ és totalment separable si, per a tots $x, y \in X$ distints, tenim que existeix $V \subseteq X$ tancat i obert, tal que $x \in V$ i $y \notin V$.*

Definició 3.29. Siga X un conjunt i $S \subseteq X$. Anomenem *recobriments* de S a una família de subconjunts de X , $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ tals que $S \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Anomenem *subrecobriments* d' $\mathcal{A}$ a una subfamília $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}$ també és *recobriments* de S .

Definició 3.30. Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic. Diem que $(X, \mathcal{T})$ és *compacte*, si per a tot *recobriments* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ de X , existeix un *subrecobriments* $\{B_j\}_{j \in J}$ de $\{A_i\}_{i \in I}$ *finit*.

Definició 3.31. Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic, $K \subseteq X$ és *compacte* si $(K, \mathcal{T}_K)$ és *compacte*.

Proposició 3.16. Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic, $K \subseteq X$. Tenim que K és *compacte* si, i només si, per a tot *recobriments* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ de K existeix un *subrecobriments* *finit*.

Demostració: Suposem que K és *compacte* i siga $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un *recobriments* per oberts de K . Considerem $\mathcal{A}' = \{A_i \cap K\}_{i \in I}$ que és un *recobriments* d'oberts de la topologia induïda per K , que compleixen,

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap K = K.$$

Així $\mathcal{A}'$ és un *recobriments* per oberts de K , que és *compacte*, per tant, existeixen $i_1, \dots, i_n \in I$ tals que

$$K = \bigcup_{j=1}^n (A_{i_j} \cap K) = \left(\bigcup_{j=1}^n A_{i_j} \right) \cap K.$$

Per tant, $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}$.

Suposem que es compleix que per a tot *recobriments* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ de K existeix un *subrecobriments* *finit*. Siga $\mathcal{A}' = \{A'_i\}_{i \in I}$ un *recobriments* per oberts de K , on per a cada $i \in I$, tenim que $A'_i \in \mathcal{T}_K$ així per a cada $i \in I$, existeix $A_i \in \mathcal{T}$ tals que $A'_i = A_i \cap K$, per tant

$$K = \bigcup_{i \in I} A'_i = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap K.$$

Així $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Per hipòtesi tenim que existeixen $i_1, \dots, i_n \in I$ tals que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}$, en conseqüència,

$$K = \left(\bigcup_{j=1}^n A_{i_j} \right) \cap K = \bigcup_{j=1}^n (A_{i_j} \cap K) = \bigcup_{j=1}^n A'_{i_j}.$$

□

Proposició 3.17. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic compacte i $C \subseteq X$ tancat. Aleshores, C és compacte.*

Demostració: Siga $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un recobriment de C per oberts de X , és a dir, per a tot $i \in I$, $A_i \in \mathcal{T}$ i $C \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Com C és tancat, $X \setminus C$ és obert, i per tant $\mathcal{A}' = \{A_i\}_{i \in I} \cup \{X \setminus C\}$ és un recobriment per oberts de X . Com X és compacte, existeixen $i_1, \dots, i_n \in I$ tals que

$$X = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n} \cup (X \setminus C).$$

Així $C \subseteq A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$, concloem doncs que C és compacte. □

Proposició 3.18. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic Hausdorff i $C \subseteq X$ compacte. Aleshores C és tancat.*

Demostració: Fixem $x \in X \setminus C$. Com que $(X, \mathcal{T})$ és Hausdorff, tenim que per a tot $y \in C$ amb $y \neq x$, existeixen entorns U_x i V_y de x i y , respectivament, tals que $U_x \cap V_y = \emptyset$. En ser entorns, tenim que existeixen oberts A_x i B_y tals que $x \in A_x \subseteq U_x$ i $y \in B_y \subseteq V_y$. Per tant $A_x \cap B_y \subseteq U_x \cap V_y = \emptyset$. Siga $\mathcal{B} = \{B_y\}_{y \in C}$ construïts de la manera anterior, per tant

$$C = \bigcup_{y \in C} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in C} B_y.$$

Així $\mathcal{B}$ és un recobriment per oberts de K que, per hipòtesi, és compacte. En conseqüència, existeixen $y_1, \dots, y_n \in C$ tals que $C \subseteq B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n}$. Definim $A = A_x \cap \dots \cap A_{y_n}$, que és obert i satisfà que $x \in A$. Així per a tot $z \in A$, tenim que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, es té que $z \in A_{y_i}$. Per tant $z \notin B_{y_i}$ i en conseqüència $z \notin B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n}$. És a dir, $z \notin C$ i concloem doncs que $z \in X \setminus C$. En resum, hem trobat A obert contingut en $X \setminus C$, tal que $x \in A$, per tant $X \setminus C$ és obert, i en conseqüència C és tancat. □

Proposició 3.19. *Siguen $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}')$ espais topològics i $f: X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua. Si X és compacte, llavors $f[X]$ és compacte.*

Demostració: Siga $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un recobriment de $f[X]$ per oberts de Y . Tenim que

$$X \subseteq f^{-1}[f[X]] \subseteq f^{-1} \left[\bigcup_{i \in I} A_i \right] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i].$$

En ser f contínua, per a tot $i \in I$, tenim que, $f^{-1}[A_i]$ és obert en X . En conseqüència, $\mathcal{A}' = \{f^{-1}[A_i]\}_{i \in I}$ és un recobriment per oberts de X . Com X és compacte, existeixen $i_1, \dots, i_n \in I$ tals que

$$X = \bigcup_{j=1}^n f^{-1}[A_{i_j}] = f^{-1} \left[\bigcup_{j=1}^n A_{i_j} \right].$$

És a dir,

$$f[X] = f \left[f^{-1} \left[\bigcup_{j=1}^n A_{i_j} \right] \right] \subseteq \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}.$$

Per consegüent, $f[X]$ és compacte en Y . □

Proposició 3.20. *Siguen $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}')$ espais topològics i $f: X \longrightarrow Y$ una aplicació contínua i bijectiva. Si X és compacte i Y és Hausdorff, llavors f és homeomorfisme.*

Demostració: Siga $A \subseteq X$ tancat en X , com $(X, \mathcal{T})$ és compacte, per la Proposició 3.17, tenim que A és compacte en X . Com f és contínua, per la Proposició 3.19, tenim que $f[A]$ és compacte en $(Y, \mathcal{T}')$, però com $(Y, \mathcal{T}')$ és Hausdorff, per la Proposició 3.18, tenim que $f[A]$ és tancat, per tant f^{-1} és contínua. Concloem doncs que f és bijectiva, contínua amb inversa contínua, per tant homeomorfisme. □

Capítol 4

Teoria de categories

En aquest capítol anem a donar el llenguatge matemàtic amb el què anem a formalitzar les idees que permetixen expressar el que diu la dualitat de Stone, aquest llenguatge és la teoria de categories.

La teoria de categories naix com una manera de formalitzar certes equivalències entre objectes i construccions de naturalesa a priori distinta, però que comparteixen una estructura a un nivell més superior que el que normalment es tracta usualment amb l'argumentació de teoria de conjunts i treballant a nivell d'elements, així moltes definicions d'objectes matemàtics és poden unificar i simplificar mitjançant una presentació amb diagrames commutatius.

4.1 Categories, functors i transformacions naturals

En aquesta secció anem a donar tots els conceptes necessaris desde la definició de categoria, passant per les de functor i de transformació natural, per a acabar donant la definició categòrica de dualitat. Les categories són estructures d'una naturalesa molt variada, no tenen una inclinació cap a cap branca particular de les matemàtiques, és a dir, aquesta estructura apareix en la majoria de les branques pures de la matemàtica, sense una inclinació cap a una concreta, com vorem en els exemples de categories.

Definició 4.1. *Definim una categoria $\mathcal{C}$, com una col·lecció d'objectes $\text{Ob}(\mathcal{C})$ i una col·lecció de morfismes $\text{Morf}(\mathcal{C})$ que compleixen les següents propietats:*

1. *Per a cada $f \in \text{Morf}(\mathcal{C})$, existeixen $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tals que $\text{Dom}(f) = X$, $\text{Cod}(f) = Y$. Als objectes X i Y els anomenarem domini i codomini, respec-*

tivament. En aquest cas ho denotarem com $f: X \longrightarrow Y$ i $f \in \text{Hom}(X, Y) = \mathbf{C}(X, Y)$.

2. Per a cada $X \in \text{Ob}(\mathbf{C})$, existeix $1_X \in \mathbf{C}(X, X)$, el morfisme identitat en X .
3. Per a tots $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ i $g \in \mathbf{C}(Y, Z)$, existeix $g \circ f \in \mathbf{C}(X, Z)$, la composició de g amb f .
4. Per a tots $g, f, h \in \text{Morf}(\mathbf{C})$ tals que $\text{Cod}(h) = \text{Dom}(f)$ i $\text{Cod}(f) = \text{Dom}(g)$, tenim que $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$.
5. Per a tot $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, tenim que $f \circ 1_X = f$ i $1_Y \circ f = f$.

En ocasions farem abús de la notació i denotarem $\text{Ob}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$.

Nota 4.1. L'ús de la paraula “col·lecció”, que és una paraula del llenguatge col·loquial i que no té una definició formal, es podria haver substituït per una més correcta i que correspon a un concepte formal com la de “classe”, però no per la de “conjunt”, ja que normalment es consideren col·leccions d'objectes massa “grans” per a ser conjunts.

Exemples 4.1.

1. **Set** és la categoria que té als conjunts com a objectes i les aplicacions entre conjunts com a morfismes.
2. **Bool** és la categoria que té les àlgebres Booleanes com a objectes i els homomorfismes Booleans com a morfismes.
3. **Poset** és la categoria que té els conjunts parcialment ordenats com a objectes i les aplicacions monòtones com a morfismes.
4. **Top** és la categoria que té els espais topològics com a objectes i les aplicacions contínues com a morfismes.
5. Un conjunt (parcialment) ordenat $(P, \leq)$ (o més generalment, un preordenat¹) es pot considerar com una categoria. Els elements de P són els objectes de la categoria, i existeix un únic morfisme $f: x \longrightarrow y$ si, i només si, $x \leq y$. Les condicions de reflexivitat i transitivitat indiquen l'existència de les identitats i de la composició, respectivament. Denotarem aquesta categoria per $\mathbf{P}$.

¹Un conjunt *preordenat* és un conjunt amb una relació binària que és reflexiva i transitiva.

Com hem vist, moltes de les categories més conegudes són les que tenen conjunts estructurats com a objectes i aplicacions que preserven eixa estructura, però no totes les categories són d'aquesta mena, com hem vist amb l'últim exemple anterior.

Definició 4.2. Siga $\mathcal{C}$ una categoria, i $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Diem que $\mathcal{D}$ és una subcategoria si $\text{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$ i $\text{Morf}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Morf}(\mathcal{C})$ i es compleix que, per a tot $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, $1_X \in \text{Morf}(\mathcal{D})$. Per a tot $f \in \mathcal{D}(X, Y)$, $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$. Per a tots $f \in \mathcal{D}(X, Y)$ i $g \in \mathcal{D}(Y, Z)$, $g \circ f \in \mathcal{D}(X, Z)$.

Definició 4.3. Siga $\mathcal{C}$ una categoria i $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

1. Diem que f és un endomorfisme si $X = Y$.
2. Diem que f és un isomorfisme si existeix $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ tal que $f \circ g = 1_Y$ i $g \circ f = 1_X$. Si, a més, és un endomorfisme, diem que és un automorfisme.
3. Diem que f és un monomorfisme si, per a tot $W \in \mathcal{C}$ i per a tots $h, k \in \mathcal{C}(W, X)$, tals que $f \circ h = f \circ k$, tenim que $h = k$.
4. Diem que f és un epimorfisme si, per a tot $W \in \mathcal{C}$ i per a tots $h, k \in \mathcal{C}(Y, W)$ tals que $h \circ f = k \circ f$, tenim que $h = k$.

Exemples 4.2.

1. En **Top** els isomorfismes són els homeomorfismes.
2. Siga P un conjunt (parcialment) ordenat, considerat com a categoria $(P, \leq)$ en el sentit que hem dit en els Exemples 4.1, la propietat de antisimetria fa que els únics isomorfismes d'aquesta categoria siguin les identitats.

Definició 4.4. Siga $\mathcal{C}$ una categoria. Definim la categoria oposada o dual $\mathcal{C}^{op}$, amb $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{C}^{op})$ i $f^{op} \in \mathcal{C}^{op}(X, Y)$ si, i només si, $f \in \mathcal{C}(Y, X)$.

És fàcil veure que un monomorfisme en una categoria és un epimorfisme en la categoria oposada, en eixe sentit diem que són conceptes duals. Hi ha molts conceptes, nocions i construccions en categories, que són duals, és a dir, que per cada construcció en una categoria, tenim la contrucció dual, que és la contrucció original en la categoria dual a l'original.

Proposició 4.1. Siga $\mathcal{C}$ una categoria.

1. Si $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ i $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ són monomorfismes, aleshores $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z)$ és monomorfisme.

2. Si $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ i $g \circ f$ és monomorfisme, aleshores f és monomorfisme.

Demostració: Siga $W \in \mathcal{C}$, i $h, k \in \mathcal{C}(W, X)$ tals que $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$. Com que g és monomorfisme, $f \circ h = f \circ k$ i com que f és monomorfisme, $h = k$.

Siga $W \in \mathcal{C}$, i $h, k \in \mathcal{C}(W, X)$ tals que $f \circ h = f \circ k$. Composem amb g , $g \circ f \circ h = g \circ f \circ k$ i com que $g \circ f$ és monomorfisme, tenim que $h = k$. $\square$

És fàcil veure que podem obtenir la proposició per a epimorfismes fent la mateixa demostració en la categoria dual. Observem que, quan estem demostrant una proposició en una categoria, també estem demostrant la proposició dual en la categoria oposada.

A continuació, anem a donar la definició de functor que es una associació dels objectes i morfismes d'una categoria, amb els objectes i morfismes, respectivament, d'una altra categoria.

Definició 4.5. *Siguen $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categories. Diem que $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ és un functor covariant (contravariant) si*

1. *Per a tot $X \in \mathcal{C}$, $F(X) \in \mathcal{D}$.*
2. *Per a tot $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $F(f) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ ($F(f) \in \mathcal{D}(F(Y), F(X))$).*
3. *Per a tots $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ i $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ ($F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).*
4. *Per a tot $X \in \mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$.*

Si $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, diem que F és un endofunctor. Notem que, dir que $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ és contravariant, és equivalent a dir que $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ és covariant. Així doncs, per aquesta raó, només parlarem de functors covariants.

Exemples 4.3. *Els següents són exemples de functors.*

1. *Donada una categoria $\mathcal{C}$, tenim el functor identitat $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, que envia cada objecte a si mateix, i cada morfisme a si mateix.*
2. $\delta: \text{Poset} \rightarrow \text{Poset}$ que porta cada conjunt (parcialment) ordenat al seu dual $\delta(\mathbf{P}) = \mathbf{P}^{\delta}$ i cada aplicació monòtona $f: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ a $\delta(f): \mathbf{Q}^{\delta} \rightarrow \mathbf{P}^{\delta}$, és un endofunctor.
3. $\mathcal{B}: \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$ donada per la dualitat Booleana en la Secció 3.1.2 és un endofunctor.

4. El functor $\mathcal{O}: \mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{Poset}$, que porta un espai topològic al conjunt (parcialment) ordenat de conjunts oberts amb la inclusió, és a dir, $\mathcal{O}(X) = (\mathcal{T}_X, \subseteq)$. En el cas dels morfismes, $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$, prenem

$$\mathcal{O}(f) = f^{-1}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$$

que com f és una funció contínua, tenim que per a tot $U \in \mathcal{T}_Y = \mathcal{O}(Y)$,

$$\mathcal{O}(f)(U) = f^{-1}[U] \in \mathcal{T}_X$$

pel Teorema 3.5. Analogament es pot definir $\mathcal{C}: \mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{Poset}$ que envia l'espai topològic al seu conjunt de tancats.

Proposició 4.2. Siguen $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ tres categories, i $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ i $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ dos functors, aleshores $G \circ F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ és un functor.

Demostració: Per hipòtesi, tenim que donat $X \in \mathbf{C}$, $F(X) \in \mathbf{D}$, i a més $(G \circ F)(X) = G(F(X)) \in \mathbf{E}$. Donada $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, tenim que $F(f) \in \mathbf{D}(F(X), F(Y))$, i a més $(G \circ F)(f) = G(F(f)) \in \mathbf{E}((G \circ F)(X), (G \circ F)(Y))$. Siguen $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ i $g \in \mathbf{C}(Y, Z)$,

$$\begin{aligned} (G \circ F)(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(g) \circ F(f)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \\ &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f). \end{aligned}$$

Per últim,

$$(G \circ F)(1_X) = G(F(1_X)) = G(1_{F(X)}) = 1_{G(F(X))} = 1_{(G \circ F)(X)}.$$

□

La teoria de categories va ser iniciada per **S. MacLane** i **S. Eilenberg**, amb l'intenció de formalitzar les equivalències entre construccions, així es va definir el concepte de categoria, per poder definir el concepte de functor, i aquest per a poder definir el concepte que donem a continuació, que és el de transformació natural, que no és altra cosa que una manera de poder comparar functors, conservant certa estructura.

Definició 4.6. Siguen $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ dos categories i $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ dos functors. Diem que $\alpha: F \Rightarrow G$ és una transformació natural si, per a cada $X \in \mathbf{C}$, existeix $\alpha_X \in \mathbf{D}(F(X), G(X))$, que compleix que, si $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, aleshores $G(f) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ F(f)$. Si a més, per a cada $X \in \mathbf{C}$, α_X és un isomorfisme, diem que α és un isomorfisme natural.

$$\begin{array}{ccccc}
X & & F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\
f \downarrow & & F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
Y & & F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y)
\end{array}$$

Definició 4.7. Siguen $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ dos categories. Diem que $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ són equivalents i ho denotem per $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$, si existeixen $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}, G: \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ functors satisfent que

$$\eta: 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F \quad \epsilon: F \circ G \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$$

són isomorfismes naturals.

Definició 4.8. Direm que existeix una dualitat entre les categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ si, les categories $\mathbf{C}^{op}$ i $\mathbf{D}$ són equivalents.

Capítol 5

Dualitat de Stone

La dualitat de Stone és una de les primeres aparicions de situacions categòriques abans de l'arribada de l'article de **MacLane** i **Eilenberg**[12], en concret la primera dualitat categòrica [17].

5.1 Representació d'àlgebres Booleanes

En aquesta secció, donarem teoremes de representació per a àlgebres Booleanes com a àlgebres de conjunts o subàlgebres de conjunts. Començarem distingint el cas finit, ja que la representació és més senzilla i el teorema ens dona un isomorfisme amb l'àlgebra de conjunts.

5.1.1 Àlgebres Booleanes finites

En aquesta subsecció anem a veure un teorema de representació per a àlgebres Booleanes finites, en forma d'un isomorfisme amb el conjunt de parts del conjunt format pels àtoms de l'àlgebra Booleana. Recordem que donada una àlgebra Booleana, denotem el conjunt dels seus àtoms com $\mathcal{A}(\mathbf{B})$.

Teorema 5.1. *Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana finita. Aleshores $\mathbf{B} \cong \mathbf{P}(\mathcal{A}(\mathbf{B}))$. A més, l'aplicació*

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbf{B} &\longrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{A}(\mathbf{B})) \\ a &\longmapsto \{x \in \mathcal{A}(\mathbf{B}) : x \leq a\}\end{aligned}$$

és un isomorfisme Booleà.

Demostració: Primer anem a vore que φ és un homomorfisme.

$$\begin{aligned}
 \varphi(a \wedge b) &= \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a \wedge b\} && \text{(Definició)} \\
 &= \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a \text{ i } x \leq b\} \\
 &= \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a\} \cap \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq b\} \\
 &= \varphi(a) \cap \varphi(b). && \text{(Definició)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(a \vee b) &= \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a \vee b\} && \text{(Definició)} \\
 &= \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a \text{ o } x \leq b\} && \text{(Lema 3.2)} \\
 &= \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a\} \cup \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq b\} \\
 &= \varphi(a) \cup \varphi(b). && \text{(Definició)}
 \end{aligned}$$

$$\varphi(0) = \emptyset.$$

$$\varphi(1) = \mathcal{A}(B).$$

Per la Proposició 3.2, tenim que φ és un homomorfisme Booleà. Ara, per la Proposició 3.7, tenim que, per a tot $a \in B$,

$$a = \bigvee \{x \in \mathcal{A}(B) : x \leq a\} = \bigvee \varphi(a).$$

Així $\varphi(a) = \varphi(b)$, implica $a = \bigvee \varphi(a) = \bigvee \varphi(b) = b$. És a dir, φ és injectiva. Siga $S \subseteq \mathcal{A}(B)$. Obviament $S \subseteq \varphi(\bigvee S)$. Per altre costat, siga $x \in \varphi(\bigvee S)$, és a dir, $x \in \mathcal{A}(B)$ i $x \leq \bigvee S$. Per la Proposició 3.8, existeix $a \in S$ tal que $x \leq a$, però com que $x, a \in \mathcal{A}(B)$ tenim que $x = a$. En conseqüència, $x \in S$. Per tant $S = \varphi(\bigvee S)$, és a dir, φ és un isomorfisme Booleà. $\square$

5.1.2 Àlgebres Booleanes no finites

En aquesta subsecció anem a vore el teorema de representació per a àlgebres Booleanes no necessàriament finites, amb un isomorfisme amb el conjunt de parts del conjunt de filtres primers de l'àlgebra Booleana.

Teorema 5.2. *Siga B una àlgebra Booleana. Llavors B és isomorfa a una subàlgebra de $\mathcal{P}(\mathcal{F}_p(B))$. A més, l'aplicació*

$$\begin{aligned}
 \varphi: B &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_p(B)) \\
 a &\longmapsto \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \in F\}
 \end{aligned}$$

és una imbibició Booleana. I ho denotarem per $\varphi: B \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_p(B))$.

Demostració: Clarament, $\varphi(0) = \emptyset$, ja que cap filtre primer conté el 0, i per altra banda $\varphi(1) = \mathcal{F}_p(B)$, perquè tot filtre conté a 1. Siga $F \in \mathcal{F}_p(B)$. Com que F és un filtre, tenim que $a \wedge b \in F$ si, i només si, $a \in F$ i $b \in F$. Com que F és primer, tenim que $a \vee b \in F$ si, i només si, $a \in F$ o $b \in F$. Així, tenim que

$$\begin{aligned}\varphi(a \wedge b) &= \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \wedge b \in F\} \\ &= \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \in F \text{ i } b \in F\} \\ &= \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \in F\} \cap \{F \in \mathcal{F}_p(B) : b \in F\} \\ &= \varphi(a) \cap \varphi(b).\end{aligned}$$

Per altre costat,

$$\begin{aligned}\varphi(a \vee b) &= \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \vee b \in F\} \\ &= \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \in F \text{ o } b \in F\} \\ &= \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \in F\} \cup \{F \in \mathcal{F}_p(B) : b \in F\} \\ &= \varphi(a) \cup \varphi(b).\end{aligned}$$

Així, φ és un homomorfisme Booleà. Siguen $a, b \in B$ elements distints. Sense pèrdua de generalitat, podem assumir que $a \not\leq b$. Per la Proposició 3.6, tenim que $a \wedge \neg b \neq 0$. Llavors, $F = \uparrow(a \wedge \neg b)$ és un filtre propi que conté a a i a b . Pel teorema 3.3 tenim que existeix un filtre primer F' que conté a F . És clar que $a, \neg b \in F'$. Pel Lema 3.3 tenim que $b \notin F'$. Per tant $b \notin F$ i, així, $F \in \varphi(a)$ i $F \notin \varphi(b)$. En conseqüència $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Concloem que φ és un isomorfisme Booleà. $\square$

Corol·lari 5.1. (*Teorema de representació d'àlgebres Booleanes*) Tota àlgebra Booleana és isomorfa a una àlgebra de conjunts.

Definició 5.1. Siguen $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dos àlgebres Booleanes, i $h: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ una imbibició Booleana. Diem que h és densa si tot element de B es pot expressar com a suprem d'ínfims i com a ínfim de suprems d'elements de $h[A]$.

Teorema 5.3. Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana. Llavors, la imbibició Booleana $\varphi: \mathbf{B} \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_p(\mathbf{B}))$, definida en el Teorema 5.2 és densa.

Demostració: Siga $A \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_p(B))$. Evidentment A és l'unió de àtoms en $\mathcal{P}(\mathcal{F}_p(B))$ per la Proposició 3.7. Així, només tenim que demostrar que tot àtom de $\mathcal{P}(\mathcal{F}_p(B))$ és l'intersecció d'elements en $\varphi[B]$. Tenim que per a tot $a \in F$, $F \in \mathcal{F}_p(B)$ i $a \in F$, així $F \in \varphi(a) = \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \in F\}$. Per tant $F \in \bigcap \{\varphi(a) : a \in F\}$. A més, si $F' \in \bigcap \{\varphi(a) : a \in F\}$, tenim que per a tot $a \in F$,

$$F' \in \varphi(a) = \{F \in \mathcal{F}_p(B) : a \in F\}.$$

Per tant $F \subseteq F'$, però com $F, F' \in \mathcal{F}_p(B)$, pel Lema 3.3 tenim que F i F' són ultrafiltres, és a dir, maximals entre els filtres propis de B . Per tant $F = F'$. Concloem doncs que per a tot $F \in \mathcal{F}_p(B)$, $\{F\} = \bigwedge \{\varphi(a) : a \in F\}$. Per altre costat, per la dualitat de l'ordre, obtenim que A és l'intersecció de la unió d'elements de $\varphi[B]$. Per tant tenim que φ és densa. $\square$

Definició 5.2. Siguen $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dos àlgebres Booleans i $h: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ una imbibició Booleana. Suposem que B és complet com a reticle. Diem que h és compacta si per a tots $S, T \subseteq A$ amb $\bigwedge h(S) \leq \bigvee h(T)$, aleshores existeixen $S' \subseteq S$ i $T' \subseteq T$, conjunts finits, tals que $\bigwedge S' \leq \bigvee T'$.

Teorema 5.4. Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana. Llavors, la imbibició Booleana $\varphi: \mathbf{B} \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_p(\mathbf{B}))$, definida en el Teorema 5.2 és compacta.

Demostració: Siguen $S, T \subseteq B$ tals que $\bigwedge h[S] \leq \bigvee h[T]$. Definim $\neg T = \{\neg t : t \in T\}$ i definim $A \subseteq B$ de la següent manera

$$A = S \cup (\neg T).$$

Siga $F = \{b \in B : \text{existeixen } a_1, \dots, a_n \in A \text{ tals que } a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq b\}$, anem a vore que és el menor filtre que conté a A . Com que per a tot $a \in A$, és té que $a \leq 1$, tenim que $1 \in F$, per tant $F \neq \emptyset$. Siga $b \in F$, si existeix $y \in B$ tal que $b \leq y$, tenim que existeixen $a_1, \dots, a_n \in A$ tals que $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq b$. Així, per la transitivitat de la relació d'ordre, tenim que $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq y$. Per tant $y \in F$. Siguen $x, y \in F$, tenim que existeixen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k \in A$ tals que $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq x$ i $b_1 \wedge \dots \wedge b_k \leq y$, així, com que $x \leq y$ si, i només si, $x \vee y = y$, tenim que

$$\begin{aligned} & (a_1 \wedge \dots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_k) \vee (x \wedge y) \\ &= ((a_1 \wedge \dots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_k) \vee x) \wedge ((a_1 \wedge \dots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_k) \vee y) \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

$$= (((a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \wedge (b_1 \wedge \dots \wedge b_k)) \vee x) \wedge \quad (\text{B21})$$

$$\begin{aligned} & (((a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \wedge (b_1 \wedge \dots \wedge b_k)) \vee y) \\ &= (((a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \vee x) \wedge ((b_1 \wedge \dots \wedge b_k) \vee x)) \wedge \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (((a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \vee y) \wedge ((b_1 \wedge \dots \wedge b_k) \vee y)) \\ &= (x \wedge ((b_1 \wedge \dots \wedge b_k) \vee x)) \wedge (((a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \vee y) \wedge y) \quad (\text{Hipòtesi}) \end{aligned}$$

$$= x \wedge y. \quad (\text{B5})$$

Per tant $x \wedge y \in F$, és a dir, F és un filtre. Com que, per a tot $a \in A$, tenim que $a \vee a = a$, així $a \leq a$, és a dir, $A \subseteq F$. Siga

$$\langle A \rangle = \bigcap_{P \in \mathcal{F}_p(B)/A \subseteq P} P$$

és a dir, el filtre generat per A . Anem a veure que $F = \langle A \rangle$. Siga P un filtre primer que conté a A i $x \in F$, tenim que existeixen $a_1, \dots, a_n \in A \subseteq P$ tals que $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq x$. Com que P és un filtre, tenim que $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \in P$. En conseqüència $x \in P$, és a dir F , i com que el filtre generat per A és el menor filtre que el conté, tenim que $F = \langle A \rangle$. Ara, si F no és un filtre propi, tenim que $0 \in F$ i existeixen $a_1, \dots, a_n \in A$ tals que $a_1 \wedge \dots \wedge a_n = 0$. Així, tenim que existeixen $s_1, \dots, s_k \in S$ i $t_1, \dots, t_l \in T$ tals que

$$s_1 \wedge \dots \wedge s_k \wedge (\neg t_1) \wedge \dots \wedge (\neg t_l) = 0.$$

Per les lleis de De Morgan (B11), tenim que

$$s_1 \wedge \dots \wedge s_k \wedge \neg(t_1 \vee \dots \vee t_l) = 0.$$

Per tant, per la Proposició 3.6, tenim que

$$s_1 \wedge \dots \wedge s_k \leq t_1 \vee \dots \vee t_l.$$

En conseqüència tenim que existeixen dos conjunts finits $T' = \{t_1, \dots, t_l\}$ i $S' = \{s_1, \dots, s_k\}$ amb $\bigwedge S' \leq \bigvee T'$.

Ara suposem que F és un filtre propi, aleshores pel Teorema 3.3, tenim que existeix un filtre F' en $\mathbf{B}$ que conté a F . Com que $S \subseteq F'$ tenim que

$$F' \in \{F \in \mathcal{F}_p(B) : S \subseteq F\} = \bigcap \varphi[S] = \bigwedge \varphi[S].$$

Per altre costat, tenim que $\neg T \subset F'$. Per tant, com que F' és un filtre propi, tenim que, per a tot $t \in T$, $t \notin F'$. Així

$$F' \notin \{F \in \mathcal{F}_p(B) : t \in F \text{ per a algun } t \in T\} = \bigcup \varphi[T] = \bigvee \varphi[T].$$

Però això és una contradicció amb el fet que $\bigwedge \varphi[S] \leq \bigvee \varphi[T]$. □

5.2 L'espai dual d'una àlgebra Booleana i els espais de Stone

En aquesta secció anem a construir un espai topològic a partir d'una àlgebra Booleana, que ens donarà lloc per a poder utilitzar tots els resultats anteriors obtinguts en l'àmbit topològic. Donarem el teorema de representació d'àlgebres Booleans de Stone, i els ingredients per la preparació de la dualitat categòrica que establim en la següent secció.

Definició 5.3. Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana i $\mathcal{F}_p(\mathbf{B})$ el conjunt de filtres primers en $\mathbf{B}$. Definim el conjunt d'oberts en $\mathcal{F}_p(\mathbf{B})$ com

$$\mathcal{T}_B = \{U \subseteq \mathcal{F}_p(\mathbf{B}) : U \text{ és unió d'elements de } \varphi[B]\}.$$

on φ és l'aplicació definida en el Teorema 5.2. L'espai topològic $(\mathcal{F}_p(\mathbf{B}), \mathcal{T}_B)$ s'anomena espai dual de $\mathbf{B}$.

Nota 5.1. Els espais topològics els escriurem en negreta $\mathbf{X}_B$ en comptes de $\mathcal{F}_p(\mathbf{B})$.

Nota 5.2. Anem a vore que $(\mathcal{F}_p(\mathbf{B}), \mathcal{T}_B)$ és un espai topològic. Notem que, $\emptyset = \varphi(0)$ és unió d'elements de $\varphi[B]$, per tant $\emptyset \in \mathcal{T}_B$.

Per altre costat, $\mathbf{X}_B = \mathcal{F}_p(\mathbf{B}) = \varphi(1)$ és unió d'elements de $\varphi[B]$, per tant $\mathbf{X}_B \in \mathcal{T}_B$. Siga $\{E_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}_B$. Així, per a cada $i \in I$ tenim que E_i és unió d'elements de $\varphi[B]$, per tant $\bigcup_{i \in I} E_i$ és unió d'elements de $\varphi[B]$, és a dir, $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{T}_B$.

Siguen $J, K \in \mathcal{T}_B$, aleshores tenim que existeixen $J', K' \subseteq B$ tals que $J = \bigcup_{x \in J'} \varphi(x)$ i

$$K = \bigcup_{y \in K'} \varphi(y), \text{ així}$$

$$J \cap K = \left(\bigcup_{x \in J'} \varphi(x) \right) \cap \left(\bigcup_{y \in K'} \varphi(y) \right) = \bigcup_{\substack{y \in K' \\ x \in J'}} (\varphi(x) \cap \varphi(y)) = \bigcup_{\substack{y \in K' \\ x \in J'}} \varphi(x \wedge y)$$

Com $x, y \in B$, tenim que $x \wedge y \in B$, per tant $J \cap K$ és unió d'elements en $\varphi[B]$, així $J \cap K \in \mathcal{T}_B$.

Concloem així, que $(\mathcal{F}_p(\mathbf{B}), \mathcal{T}_B)$ és un espai topològic.

Proposició 5.1. Siga $\mathbf{B}$ una àlgebra Booleana, $\mathbf{X}_B$ el seu espai dual i

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbf{B} &\hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X}_B) \\ a &\mapsto \{F \in \mathbf{X}_B : a \in F\}. \end{aligned}$$

Llavors els conjunts en l'imatge de φ són els conjunts oberts i tancats de $\mathbf{X}_B$.

Demostració: Siga $U \in \varphi[B]$, així tenim que existeix $a \in B$ tal que $U = \varphi(a)$. Per definició, $\varphi(a)$ és obert. A més, tenim que $\mathbf{X}_B \setminus \varphi(a) = \varphi(\neg a)$, ja que si $F \in \mathbf{X}_B$ i $\neg a \in F$, és a dir, $F \in \varphi(\neg a)$, tenim que $a \notin F$, perquè en cas contrari tindríem que $0 = a \wedge \neg a \in F$, que és una contradicció amb el fet de que $F \in \mathbf{X}_B$. Així $\varphi(\neg a) \subseteq \mathbf{X}_B \setminus \varphi(a)$ i per (B7), tenim l'inclusió contrària. Un altra vegada, per definició tenim que $\varphi(\neg a)$ és obert. Així $\varphi(a)$ és obert i tancat en $\mathcal{T}_B$.

Ara suposem que U és un subconjunt obert i tancat de $\mathbf{X}_B$. Com U és obert,

5.2. L'ESPAI DUAL D'UNA ÀLGEBRA BOOLEANA I ELS ESPAIS DE STONE 51

tenim que $U = \bigcup \varphi[T]$ per a algun $T \subseteq B$. Per altre costat, en ser U tancat, $X_B \setminus U = \bigcup \varphi[S]$ per a algun $S \subseteq B$. Definim $\neg S = \{\neg s : s \in S\}$ i observem que

$$X_B \setminus U = \bigcup \varphi[S] \text{ si, i només si, } U = X_B \setminus \bigcup \varphi[S] = \bigcap \varphi[\neg S].$$

Per tant, tenim que

$$\bigcap \varphi[\neg S] = \bigcup \varphi[T].$$

Pel Teorema 5.4, tenim que φ és una imbibició compacta, per tant existeixen $S' \subseteq \neg S$ i $T' \subseteq T$ subconjunts finits tals que

$$\bigwedge S' \leq \bigvee T'.$$

Com que φ és un homomorfisme d'àlgebres Booleans, tenim que preserva l'ordre, suprems finits i ínfims finits, així

$$U = \bigcap \varphi[\neg S] \subseteq \bigcap \varphi[S'] = \varphi \left[\bigwedge S' \right] \subseteq \varphi \left[\bigvee T' \right] = \bigcup \varphi[T'] \subseteq \bigcup \varphi[T] = U.$$

En conseqüència, tenim que $\bigvee \varphi[T'] = U$ i com que T' és finit, tenim que $U = \varphi(a)$ amb $a = \bigvee T' \in B$. Concloem doncs que $U \in \varphi[B]$. $\square$

A continuació donarem el teorema de representació d'àlgebres Booleans de Stone, que és un dels teoremes que va donar Marshall Stone, però com no hi havia un llenguatge categòric en el moment, no és va poder conceptualitzar com a dualitat.

Teorema 5.5. *(Teorema de representació d'àlgebres Booleans de Stone) Siga B una àlgebra Booleana i X_B el seu espai dual. Llavors,*

$$B \cong Cl(X_B)$$

on $Cl(X_B)$, és el conjunt d'oberts i tancats de X_B .

Demostració: Siga $\varphi: B \hookrightarrow \mathcal{P}(X_B)$ la imbibició definida en la Proposició 5.1. Per la proposició anterior, tenim que l'imatge de φ és exactament el conjunt d'oberts i tancats de $(X_B, \mathcal{T}_B)$. És a dir $\varphi[B] = Cl(X_B)$ i com que φ és injectiva, tenim que $B \cong \varphi[B] = Cl(X_B)$. $\square$

Proposició 5.2. *Siga B una àlgebra Booleana i X_B el seu espai dual. Aleshores X_B és compacte.*

Demostració: Siga $\mathcal{U}$ un recobriment de $\mathbf{X}_B$ per oberts. Com que tot obert és unió d'elements de $\varphi[B]$, podem assumir sense pèrdua de generalitat, que $\mathcal{U} \subseteq \varphi[B]$. Això vol dir que existeix $A \subseteq B$ tal que $\mathcal{U} = \{\varphi(a) : a \in A\}$, en altres paraules,

$$\mathbf{X}_B = \bigcup \varphi[A].$$

Parem compte que $\mathbf{X}_B = \varphi(1) = \bigcap \varphi[\{1\}]$. Per tant,

$$\bigcap \varphi[\{1\}] = \bigcup \varphi[A].$$

Ara podem usar el fet de que φ és un imbibició compacta, per a obtenir un subconjunt finit $A' \subseteq A$ tal que

$$\mathbf{X}_B = \bigcap \varphi[\{1\}] = \bigcup \varphi[A'].$$

En conseqüència, $\mathcal{U}' = \{\varphi(a) : a \in A'\}$ és un subrecobriment finit de $\mathbf{X}_B$. □

Proposició 5.3. *Siga $(X_B, \mathcal{T}_B)$ l'espai dual d'una àlgebra Booleana B . Aleshores $(X_B, \mathcal{T}_B)$ és totalment separable.*

Demostració: Siguen $F_1, F_2 \in X_B$, tals que $F_1 \neq F_2$. En ser distints, existeix $a \in B$ tal que $a \in F_1$ i $a \notin F_2$, així $F_1 \in \varphi(a)$ i $F_2 \notin \varphi(a)$. Aleshores per definició, $\varphi(a)$ és obert i tancat. □

Definició 5.4. *Siga $(X, \mathcal{T})$ un espai topològic. Diem que $(X, \mathcal{T})$ és un espai de Stone (o espai Booleà), si és compacte i totalment separable.*

Corol·lari 5.2. *L'espai dual d'una àlgebra Booleana és un espai de Stone.*

És fàcil veure que la família de conjunts oberts i tancats d'un espai de Stone, forma una àlgebra Booleana, en concret, una àlgebra de conjunts.

Teorema 5.6. *Siga X un espai de Stone. Definim B com l'àlgebra Booleana que sorgeix dels conjunts tancats i oberts de X , és a dir, $B = \mathcal{C}\mathcal{U}(X)$, i denotem $\mathbf{X}_B$ com l'espai dual de B . Llavors X i $\mathbf{X}_B$ són homeomorfs, és a dir, isomorfs com a espais topològics.*

Demostració: Siga

$$\begin{aligned} \psi: X &\longrightarrow \mathbf{X}_B \\ x &\longmapsto \{a \in B : x \in a\}. \end{aligned}$$

Anem a comprovar que $\psi(x)$ és un filtre primer de $\mathbf{B}$. Donat $x \in X$, tenim que $X \in \mathbf{Cl}(X) = B$, així $\psi(x) \neq \emptyset$. Donats $a \in \psi(x)$ i $b \in B$ amb $a \subseteq b$, tenim que $x \in a \subseteq b$. Per tant $x \in b$, és a dir, $b \in \psi(x)$. Donats $a, b \in \psi(x)$, tenim que $x \in a$ i $x \in b$. Per tant $x \in a \cap b$, així $a \cap b \in \psi(x)$. Així tenim que $\psi(x)$ és un filtre.

Ara anem a veure que és un filtre primer. Com que $x \notin \emptyset$, tenim que $\emptyset \notin \psi(x)$. Per tant $\psi(x)$ és un filtre propi. Donats $a, b \in B$ tals que $a \cup b \in \psi(x)$, tenim que $x \in a \cup b$, i en ser una àlgebra de conjunts, tenim que $x \in a$ o $x \in b$. En conseqüència, $\psi(x)$ és un filtre primer en B , és a dir, ψ està ben definida.

Com que X és compacte i Hausdorff és suficient demostrar que ψ és contínua i bijectiva per la Proposició 3.20. Siguen $x, y \in X$ distints. Com que X és totalment separable, existeix $x \in B$ tal que $x \in a$ i $y \notin a$. Per tant $a \in \psi(x)$ i $a \notin \psi(y)$, així $\psi(x) \neq \psi(y)$, és a dir, ψ és injectiva. Per a veure la continuïtat, és suficient veure que, per a tot U en la base de $\mathbf{X}_B$, tenim que $\psi^{-1}[U]$ és obert en X , és a dir, que per a tot $a \in B$, hem de veure que $\psi^{-1}[\varphi(a)]$ és obert en X , on φ és l'aplicació definida en la Proposició 5.1. Aquesta és la situació, si observem que, per a tot $a \in B$, tenim que

$$\psi^{-1}[\varphi(a)] = \{x \in X : \psi(x) \in \varphi(a)\} = \{x \in X : a \in \psi(x)\} = \{a\}.$$

Com que B és, per definició, el conjunt d'oberts i tancats de X , tenim que ψ és contínua. Suposem ara que existeix $x \in \mathbf{X}_B$ tal que $x \notin \psi[X]$. Com que $\mathbf{X}_B$ és totalment separable, per a cada $y \in \psi[X]$, tenim que existeix $V_y \subseteq X_B$ tal que $y \in V_y$ i $x \notin V_y$. En conseqüència

$$\psi[X] = \bigcup_{y \in \psi[X]} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in \psi[X]} V_y.$$

Com que $\psi[X]$ és tancat i està contingut en X_B , que és compacte, tenim que $\psi[X]$ és compacte. Per tant, existeix un subcobriment per oberts finit de $\psi[X]$, és a dir, existeixen $y_1, \dots, y_n \in \psi[X]$ tals que

$$\psi[X] \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} = V.$$

Com que V és la unió finita de conjunts oberts i tancats, V és obert i tancat. Així existeix $a \in B$ tal que $V = \varphi(a)$ i, per definició, tenim que $\psi[X] \subseteq \varphi(a)$ i $x \notin \varphi(a)$. En conseqüència, $X = \psi^{-1}[\varphi(a)] = \{a\}$, però això és una contradicció amb el fet de que $x \notin \varphi(a)$. $\square$

5.3 Dualitat categòrica

Siga **Bool** la categoria de àlgebres Booleans i homomorfismes Booleans, i **Stone** la categoria de espais de Stone i aplicacions contínues. Definim, per a cada **B** i **A** àlgebres Booleans i per a cada **X** i **Y** espais de Stone, les correspondències $F: \text{Obj}(\text{Bool}^{op}) \rightarrow \text{Obj}(\text{Stone})$ i $G: \text{Obj}(\text{Stone}) \rightarrow \text{Obj}(\text{Bool}^{op})$ com

$$F(\mathbf{B}) = \mathbf{X}_\mathbf{B}.$$

$$G(\mathbf{X}) = \mathbf{Cl}(\mathbf{X}).$$

I per a cada homomorfisme Booleà $h: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ i cada aplicació contínua $f: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$, definim les correspondències $F: \text{Morf}(\text{Bool}^{op}) \rightarrow \text{Morf}(\text{Stone})$ i $G: \text{Morf}(\text{Stone}) \rightarrow \text{Morf}(\text{Bool}^{op})$ com, $F(h): F(\mathbf{B}) \rightarrow F(\mathbf{A})$ i $G(f): G(\mathbf{X}) \rightarrow G(\mathbf{Y})$ donades per

$$\text{per a cada } y \in F(\mathbf{B}), (F(h))(y) = h^{-1}(y).$$

$$\text{per a cada } U \in G(\mathbf{X}), (G(f))(U) = f^{-1}[U].$$

$$\begin{array}{ccc}
 F: \text{Bool}^{op} & \longrightarrow & \text{Stone} \\
 \mathbf{A} & & \mathbf{X}_\mathbf{B} \\
 \downarrow h & \longmapsto & \downarrow F(h) \\
 \mathbf{B} & & \mathbf{X}_\mathbf{A}
 \end{array}
 \quad \text{on} \quad
 \begin{array}{ccc}
 F(h): \mathbf{X}_\mathbf{B} & \longrightarrow & \mathbf{X}_\mathbf{A} \\
 y & \longmapsto & h^{-1}(y)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 G: \text{Stone} & \longrightarrow & \text{Bool}^{op} \\
 \mathbf{Y} & & \mathbf{Cl}(\mathbf{X}) \\
 \downarrow f & \longmapsto & \downarrow G(f) \\
 \mathbf{X} & & \mathbf{Cl}(\mathbf{Y})
 \end{array}
 \quad \text{on} \quad
 \begin{array}{ccc}
 G(f): \mathbf{Cl}(\mathbf{X}) & \longrightarrow & \mathbf{Cl}(\mathbf{Y}) \\
 U & \longmapsto & f^{-1}(U)
 \end{array}$$

Teorema 5.7. *Tenim que:*

1. Per a tot $\mathbf{B} \in \text{Obj}(\text{Bool})$ tenim un isomorfisme Booleà $\varphi_\mathbf{B}: \mathbf{B} \rightarrow G(F(\mathbf{B}))$

2. Per a tot $\mathbf{X} \in \text{Obj}(\text{Stone})$ tenim un homeomorfisme $\psi_{\mathbf{X}}: \mathbf{X} \longrightarrow F(G(\mathbf{X}))$

Demostració: Els isomorfismes $\varphi_{\mathbf{B}}$ i $\psi_{\mathbf{X}}$ són les aplicacions definides en les demostracions de la proposició 5.1 i el teorema 5.6. $\square$

Proposició 5.4. Siga $h: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfisme Booleà. Llavors, per a tot $y \in \mathbf{X}_B$, considerem

$$(F(h))(y) = h^{-1}(y).$$

Així, $F(h): \mathbf{X}_B \longrightarrow \mathbf{X}_A$ és contínua.

Demostració: Anem a veure que si y és un filtre primer en B , tenim que $h^{-1}(y)$ és un filtre primer en A . Com que $y \neq \emptyset$, es té que existeix $x \in B$ tal que $x \in y$, i com que $x \leq 1_B$, tenim que $1_B \in y$, però sabem que en ser h un homomorfisme Booleà, tenim que $h(1_A) = 1_B \in y$, així $h^{-1}(y) \neq \emptyset$. Donat $x \in h^{-1}(y)$, si existeix $b \in A$ tal que $x \leq b$, tenim que, per definició, $h(x) \in y$. Com que y és un filtre primer i h és homomorfisme Booleà, tenim que $h(x) \leq h(b)$. En conseqüència $h(b) \in y$, és a dir, $b \in h^{-1}(y)$. Donats $c, d \in h^{-1}(y)$, per definició $h(c), h(d) \in y$. Com que y és filtre primer $h(c) \cap h(d) \in y$, però com que h és homomorfisme Booleà, tenim que $h(c \cap d) = h(c) \cap h(d) \in y$, és a dir, $c \cap d \in h^{-1}(y)$. Així ja hem demostrat que $h^{-1}(y)$ és un filtre d' A . Donats $c, d \in A$ tals que $c \cup d \in h^{-1}(y)$, com que h és homomorfisme Booleà, tenim que $h(c) \cup h(d) = h(c \cup d) \in y$. Com que y és un filtre primer, tenim que $h(c) \in y$ o $h(d) \in y$, és a dir, $c \in h^{-1}(y)$ o $d \in h^{-1}(y)$. Per tant $h^{-1}(y)$ és un filtre primer en A . En conseqüència l'aplicació

$$F(h): \mathbf{X}_B \longrightarrow \mathbf{X}_A$$

està ben definida. Per a demostrar la continuïtat d'aquesta aplicació, és suficient demostrar-ho per a la base de la topologia de $\mathbf{X}_A$. Així tenim que,

$$\begin{aligned} y \in (F(h))^{-1}(\varphi_A(a)) &\iff (F(h))(y) \in \varphi_A(a) \\ &\iff h^{-1}(y) \in \varphi_A(a) \\ &\iff a \in h^{-1}(y) \\ &\iff h(a) \in y \\ &\iff y \in \varphi_B(h(a)). \end{aligned}$$

i, per definició de la topologia de $\mathbf{X}_B$, tenim que $\varphi_B(h(a))$ és obert en $\mathbf{X}_B$. $\square$

Proposició 5.5. *Siga $f: Y \longrightarrow X$ una aplicació contínua entre espais de Stone. Per a cada $U \in \text{Cl}(X)$, considerem*

$$(G(f))(U) = f^{-1}[U].$$

Així, $G(f): \mathbf{Cl}(X) \longrightarrow \mathbf{Cl}(Y)$ es un homomorfisme Booleà.

Demostració: Donat $U \in \text{Cl}(X)$, com que f és contínua, tenim que $f^{-1}[U] \in \text{Cl}(Y)$. Així l'aplicació

$$G(f): \text{Cl}(X) \longrightarrow \text{Cl}(Y).$$

està ben definida. obviament $(G(f))(\emptyset) = \emptyset$ i $(G(f))(X) = Y$. A més, prendre imatges inverses de subconjunts respecta l'unió i l'intersecció, és a dir,

$$\begin{aligned} (G(f))(U \cup V) &= (G(f))(U) \cup (G(f))(V); \\ (G(f))(U \cap V) &= (G(f))(U) \cap (G(f))(V). \end{aligned}$$

Així tenim que $G(f)$ és un homomorfisme Booleà. □

Teorema 5.8. *Les correspondències $F: \mathbf{Bool}^{op} \longrightarrow \mathbf{Stone}$ i $G: \mathbf{Stone} \longrightarrow \mathbf{Bool}^{op}$ definides anteriorment són functors.*

Demostració: Pels resultats previs, per a tot $B \in \text{Obj}(\mathbf{Bool}^{op})$, tenim que $F(B) \in \text{Obj}(\mathbf{Stone})$ i per a tot $X \in \text{Obj}(\mathbf{Stone})$, tenim que $G(X) \in \text{Obj}(\mathbf{Bool}^{op})$. A més, per les proposicions 5.4 i 5.5, tenim que, per a tot $f \in \text{Morf}(\mathbf{Bool}^{op})$, tenim que $F(f) \in \text{Morf}(\mathbf{Stone})$, i per a tot $h \in \text{Morf}(\mathbf{Stone})$, tenim que $G(h) \in \text{Morf}(\mathbf{Bool}^{op})$. Siga B una àlgebra Booleana i $y \in X_B$, tenim que

$$(F(id_B))(y) = id_B^{-1}(y) = y = id_{F(B)}(y).$$

Així tenim que $F(id_B) = id_{F(B)}$.

Ara, siguen $g: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ i $h: \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ homomorfismes Booleans i $y \in X_C$, aleshores,

$$\begin{aligned} F(h \circ g)(y) &= (h \circ g)^{-1}(y) \\ &= (g^{-1}(h^{-1}(y))) \\ &= (F(g) \circ F(h))(y). \end{aligned}$$

És fàcil veure que el mateix ocorreix amb el functor G . □

Teorema 5.9. *Siguen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ algebres Booleans i $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ espais de Stone. Siguen $h: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorfisme Booleà i $f: X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Els functors $F: \mathbf{Bool}^{op} \rightarrow \mathbf{Stone}$ i $G: \mathbf{Stone} \rightarrow \mathbf{Bool}^{op}$, definits com hem dit abans donen lloc als següents diagrames commutatius*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h} & B \\
 \varphi_A \downarrow \uparrow \varphi_A^{-1} & & \varphi_B \downarrow \uparrow \varphi_B^{-1} \\
 G(F(A)) & \xrightarrow{G(F(h))} & G(F(B))
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f} & X \\
 \psi_Y \downarrow \uparrow \psi_Y^{-1} & & \psi_X \downarrow \uparrow \psi_X^{-1} \\
 F(G(Y)) & \xrightarrow{F(G(f))} & F(G(X))
 \end{array}$$

Demostració: Només demostrarem que $G(F(h)) \circ \varphi_A = \varphi_B \circ h$, la resta és demostra de forma anàloga. Siguen $a \in A$ i $y \in X_B$. Llavors,

$$\begin{aligned}
 y \in (G(F(h)) \circ \varphi_A)(a) &\iff y \in G(F(h))(\varphi_A(a)) \\
 &\iff y \in (F(h))^{-1}[\varphi_A(a)] \\
 &\iff (F(h))(y) \in \varphi_A(a) \\
 &\iff h^{-1}(y) \in \varphi_A(a) \\
 &\iff a \in h^{-1}(y) \\
 &\iff h(a) \in y \\
 &\iff y \in \varphi_B(h(a)) \\
 &\iff y \in (\varphi_B \circ h)(a).
 \end{aligned}$$

Això conclou la demostració. □

Bibliografia

- [1] R. Ayala, E. Domínguez, A. Quintero (1997) *Elementos de la topología general*, Addison-Wesley Iberoamericana.
- [2] G. Boole (1847) *The Mathematical Analysis of Logic*, (originally published as a small pamphlet), Cambridge: Macmillan, Barclay & Macmillan; London: George Bell.
- [3] G. Boole (1854) *An Investigation of the Laws of Thought*, Walton & Maberly.
- [4] S. Burris, H.P.Sankappanavar (1981) *A Course in Universal Algebra* Springer-Verlag.
- [5] H. Cartan (1937) *Théorie des filtres* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 205:595-598.
- [6] H. Cartan (1937) *Filtres et ultrafiltres* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 205:777-779.
- [7] A. Cayley (1854) *On the theory of Groups as depending on the Symbolical Equation $\theta^n = 1$* Philos. Mag. 7, 40-7.
- [8] D. Martin (2000). *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*, WW Norton.
- [9] R. Dedekind (1897) *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler*, In Festschrift, der Techn. Hochschule Braunschweig bei Gelegenheit der 69 Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte, pp. 1-40.
- [10] R. Dedekind (1900) *Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe* Math. Ann. 53, 371- 403.
- [11] M. Dekkers (2008) *Stone Duality: An application in the theory of formal languages*, University Nijmegen.

- [12] S. Eilenberg; S. MacLane (1945). "General theory of natural equivalences". Transactions of the American Mathematical Society. 58: 247.
- [13] L. Euler (1736). "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". Comment. Acad. Sci. U. Petrop 8, 128–40.
- [14] F. Hausdorff "Grundzüge der Mengenlehre", Leipzig: Veit. In (Hausdorff Werke, II (2002), 91–576).
- [15] E.V. Huntington (1904) *Sets of independent postulates for the algebra of logic* Trans. Amer. Math. Soc. 5, 288-309.
- [16] I.M. James (2006) *History of Topology*, Norht Holland, 913.
- [17] P.T. Johnstone (1982) *Stone Spaces*, Cambridge University Press.
- [18] F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin 1921-23, vol.I, pp.460-97.
- [19] K. Kuratowski (1922). *Sur l'opération $\tilde{A}$ de l'Analysis Situs*. Fundamenta Mathematicae. 3: 182–199.
- [20] W. Lenzen (1990) *Das System der Leibnizschen Logik*, Berlin (de Gruyter).
- [21] W. Lenzen (2004a) *Calculus Universalis – Studien zur Logik von G. W. Leibniz*, Paderborn (mentis).
- [22] W. Lenzen (2004b) "Leibniz's Logic", in D. Gabbay & J. Woods (eds.) *The Rise of Modern Logic – From Leibniz to Frege (Handbook of the History of Logic, vol. 3)*, Amsterdam (Elsevier), pp. 1-83.
- [23] B. Listing (1847) *Vorstudien zur Topologie*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.
- [24] S. MacLane (1981) *History of abstract algebra: origin, rise and decline of a movement* In *American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics* Texas Tech. Univ. Math. Series no. 13. pp. 3-35.
- [25] C.S. Peirce (1880) *On the algebra of logic*, Amer. J. Math. 3, 15-57.
- [26] H. Poincaré, (1895) *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique. (2). 1: pp.1–123.

- [27] J.C. Pont (1974), *La Topologie Algébrique des Origines à Poincaré*, Paris, pp.7-8.
- [28] N. Rescher (2013) *On Leibniz*, Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.
- [29] E. Riehl (2016) *Category Theory in Context*, Courier Dover Publications.
- [30] G.F.B. Riemann, *Fragment aus der Analysis Situs*, in *Gesammelte Mathematische Werke*, 2^a ed. Dover/New York (1953)
- [31] W. Rudin (1987). *Real & Complex Analysis*. McGraw-Hill.
- [32] B. Russell (1900), *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, Cambridge: The University Press.
- [33] M. Stone (1932) *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, American Mathematical Society.
- [34] A. Tarski (1935) *Zur Grundlegung der Booleschen Algebra*, Fund. Math. 24, 177-98. Z 11-2.
- [35] A.N. Whitehead (1898) *A treatise on Universal Algebra, with applications*, vol. 1. Cambridge University Press.
- [36] P. Wiener (ed.), (1951) *Leibniz: Selections* Scribner.

Índex alfabètic

- aplicació
 - antítona, 21
 - contínua, 32
 - monòtona, 21
- categoria, 39
 - dual, 41
 - equivalent, 44
 - oposada, 41
- conjunt (parcialment) ordenat, 20
 - dual, 20
 - fitat, 21
- conjunt totalment ordenat, 20
- espai dual, 50
- espai topològic, 31
 - de Stone, 52
 - compacte, 35
 - Hausdorff, 32
 - totalment separable, 34
- filtre, 24
 - primer, 25
 - principal, 25
 - propi, 25
 - ultra-, 26
- functor, 42
 - contravariant, 42
 - covariant, 42
- homeomorfisme, 33
- homomorfisme Booleà, 17
- ideal, 25
 - maximal, 26
 - primer, 25
- imbibició, 21
 - sobrejectiva, 21
- imbibició Booleana, 17
 - compacta, 48
 - densa, 47
- isomorfisme, 41
- isomorfisme Booleà, 17
- isomorfisme natural, 43
- Lema de Zorn, 29
- morfisme, 39
- obert, 31
 - relatiu, 33
- objecte, 39
- reticle, 22
 - complementat, 24
 - complet, 24
 - distributiu, 24
 - fitat, 24
- subcategoria, 41

subàlgebra Booleana, 17

suprem, 22

tancat, 31

Teorema

de representació d'àlgebres

 Booleanes, 47

de representació d'àlgebres

 Booleanes de Stone, 51

del filtre primer, 29

transformació natural, 43

àlgebra Booleana, 9

àlgebra de conjunts, 17

ínfim, 22