



Treball Fi de Grau - Curs 2023/2024

Producte tensorial en espais vectorials

Autor: JUAN CARLOS AZCONA LEIVA

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Índex

Capítol 1. Introducció	1
Capítol 2. Preliminars	3
1. Espais vectorials	3
2. Aplicacions lineals	8
3. Coordenades	14
4. Aplicacions bilineals	15
Capítol 3. Construccions d'espais vectorials	19
1. Espai quocient	19
2. Espai vectorial lliure	22
3. Espai dual	28
Capítol 4. Introducció al producte tensorial	31
1. Definició, existència i unicitat	31
2. Propietats bàsiques	38
Capítol 5. Propietats del producte tensorial	43
1. Representació dels elements	43
2. Propietats algebraiques	48
3. Producte tensorial sobre funcions	55
Capítol 6. Aplicacions multilineals	65
1. Introducció	65
2. Grup simètric	67
3. Acció de grup	73
4. L'aplicació determinant	78
Capítol 7. Producte tensorial generalitzat	83
1. Construcció	83
2. Aplicacions multilineals com a producte tensorial	87
3. Tensors covariants	90
Capítol 8. Conclusions	105
Bibliografia	107

CAPÍTOL 1

Introducció

El producte tensorial és un concepte algebraic de molta utilitat en no només les matemàtiques, sinó també en la física i l'enginyeria. En-demés, pel que fa a les matemàtiques, la seua presència és ben diversa, sent utilitzat en diferents branques, com ara l'anàlisi vectorial, la geometria diferencial o la teoria de mòduls. No obstant això, l'enfocament del producte tensorial que farem en el present treball és servint-nos de l'Àlgebra Lineal.

La història darrere del producte tensorial és prou confosa. Al final del segle XIX i principis del segle XX sorgiren els primers apropaments a la noció que tenim actualment. Un dels exemples més coneguts i influents va ser el treball publicat per Ricci i Levi-Civita en 1901 [RLC00], referent a la geometria diferencial. Anys més tard, en 1936, apareixia la notació “ $\otimes$ ” per denotar el producte tensorial per part de Murray i Von Neumann [MN36], tot i que es referien a aquest com “producte directe”. No va ser fins a l'any 1948 que, de la mà de Boubarki [Bou48], es defineix el producte tensorial per a mòduls com el coneguem ara per ara.

L'objectiu d'aquest TFG és introduir el producte tensorial d'espais vectorials sense que el lector haja de conèixer conceptes previs. Per tant, tota definició i resultat utilitzat, s'esmentarà. Així, al llarg del treball s'estudiaran les diverses propietats que sorgeixen d'aquest concepte. D'una banda, prendrem una perspectiva del producte tensorial més abstracta, utilitzant la propietat universal i centrant-nos en el producte tensorial de dos espais vectorials. Tot això per, finalment, generalitzar el producte tensorial per a un nombre finit d'espais tensorials i acabar examinant un cas concret, com són els tensors covariants.

A continuació, presentem una descripció breu de cada capítol.

El capítol 2, com el seu nom indica, compila tots els resultats bàsics per poder iniciar-nos en el producte tensorial. Comencem amb la definició d'espai vectorial, subespai vectorial i de base. Després, la secció d'aplicacions lineals és d'especial importància, ja que prepara al lector per a les denominades “propietats universals”, les quals es fan servir sovint en aquest escrit. Més tard, definirem la coordenada d'un vector i veurem com certes aplicacions lineals tenen una matriu associada. Finalment, introduïrem les aplicacions bilineals, les quals tindran un paper fonamental en la definició de producte tensorial.

El Capítol 3 està dedicat a tractar amb tres espais vectorials: l'espai quocient, l'espai vectorial lliure i l'espai dual. La raó perquè el seu estudi no siga inclòs al capítol anterior és per la seua rellevància al llarg del treball, a banda que els dos primers requereixen definicions prèvies. Té especial interès les propietats universals dels espais quocient i vectorial lliure i la definició de la base de l'espai dual.

Pel que fa al Capítol 4, presentarem el producte tensorial de dos espais vectorials. Així, donarem la seua definició i examinarem dues construccions diferents d'aquest. Assentarem les bases sobre el producte tensorial i ens familiaritzarem amb la seua notació i, sobretot, amb la seua propietat universal. Endemés, comprovarem que és únic tret d'isomorfismes i veurem com és el producte tensorial d'un cos i un espai vectorial. Finalment, definirem un homomorfisme que té, tant com domini com codomini, un producte tensorial.

En el Capítol 5, aprofundirem en més propietats del producte tensorial. En concret, ens centrarem en tres aspectes. En primer lloc, com és la representació dels seus elements, trobant així una base i provant els avantatges d'agafar una representació mínima. En segon lloc, verificarem unes propietats algebraïques tretes d'isomorfisme. Finalment, abordarem la relació entre el producte tensorial i l'espai vectorial d'aplicacions, incloent-hi també el subespai de les aplicacions de suport finit. Tots els resultats provats als Capítols 4 i 5 s'han tret de la recopilació feta per Taschuk [Tas13].

En el Capítol 6, analitzarem les aplicacions multilineals, fent èmfasi en les formes multilineals alternades. Després d'una breu introducció, dedicarem una secció a treballar amb el grup simètric, amb l'objectiu de definir el signe d'una permutació. Gràcies a això, descobrirem una acció de grup que relaciona les formes alternades amb les permutacions que ens permetrà, en la darrera secció, definir el determinant d'un endomorfisme. Per a aquest capítol, a la part d'aplicacions lineals, ens hem servit del llibre *Linear Algebra Done Right* [Axl24] i per a la secció de grup simètric, del treball de [GH19] i [Kra].

Finalment, en el Capítol 7, generalitzem el producte tensorial per a una família finita d'espais vectorials. D'aquesta manera, provarem la relació entre aquest i les aplicacions multilineals. Veurem perquè és vàlid considerar les aplicacions multilineals com a tensors i ens centrarem en l'estudi dels denominats tensor covariants. Pel que fa a aquests últims, ens centrarem de nou en els alternats, amb l'objectiu de definir el determinant de nou, però ara treballant amb tensors. Presentarem, per tant, ferramentes com l'alternador, el producte exterior o el pull-back. Molts dels resultats de l'última secció es poden trobar en [dM] i [GH19].

CAPÍTOL 2

Preliminars

1. Espais vectorials

En aquest treball treballarem sobre espais vectorials, per això, és menester conèixer els objectes amb els quals tractarem. Aquesta secció aporta les definicions i resultats més bàsics d'espais vectorials.

Com els espais vectorials es troben definits sobre un cos, el primer que hem de fer és entendre què és aquest concepte.

DEFINICIÓ 2.1. *Siga A un conjunt. Una llei de composició interna (LCI) sobre A és una aplicació d' $A \times A$ en A .*

DEFINICIÓ 2.2. *Siga $G \neq \emptyset$ un conjunt. Siga $(+)$ una LCI sobre G . Diem que $(G, +, 0)$ és un **grup** si compleix les següents propietats:*

- (1) **Associativa:** $\forall g, g', g'' \in G, (g + g') + g'' = g + (g' + g'')$.
- (2) **Existència d'element neutre:** $\exists 0 \in G$ tal que $\forall g \in G, 0 + g = g + 0 = g$.
- (3) **Tot element té invers:** $\forall x \in G, \exists y \in G$ tal que $x + y = y + x = 0$.

NOTA 2.3. *Normalment es diu abreviadament que G és un grup.*

DEFINICIÓ 2.4. *Direm que G és un grup **abelià** o **commutatiu** si per a tot $g, g' \in G, g + g' = g' + g$.*

DEFINICIÓ 2.5. *Siguen $K \neq \{0\}$, $(+)$ i $(\cdot)$ dos LCIs sobre K . Es diu que $(K, +, \cdot, 0, 1)$ és un **cos** i es denota per $\mathbb{K}$ si compleix les següents propietats:*

- (1) $(\mathbb{K}, +)$ és un grup abelià.
- (2) **Associativa del producte:** $\forall a, b, c \in \mathbb{K}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- (3) **Distributiva del producte respecte de la suma:**

$$\begin{aligned}\forall a, b, c \in \mathbb{K}, (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c, \\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c.\end{aligned}$$

- (4) **Existència d'element neutre pel producte:** $\exists 1 \in \mathbb{K}$ tal que $\forall a \in \mathbb{K}, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
- (5) **Tot element no zero és unitat:** $\forall a \in \mathbb{K}, a \neq 0, \exists b \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.
- (6) **Commutativitat del producte:** $\forall a, b \in \mathbb{K}, a \cdot b = b \cdot a$.

NOTA 2.6. Si $\mathbb{K}$ és un cos, a la LCI $(+)$ l'anomenem **suma** i a la LCI $(\cdot)$, **producte**. El producte el denotarem per juxtaposició, és a dir, ometrem el signe “ $\cdot$ ”, escrivint ab en lloc d' $a \cdot b$. Siga a un element, denotarem per $-a$ el seu invers respecte la suma i per a^{-1} el seu invers respecte el producte, si es que existeix. El neutre de la suma el denotarem per 0 i el del producte per 1.

NOTA 2.7. Mitjançant les propietats d'un cos, si $\mathbb{K}$ té més d'un element, trivialment, $0 \neq 1$.

NOTA 2.8. A partir d'ara, durant tot el treball, $\mathbb{K}$ denotarà un cos arbitrari però fixe.

Ara sí, ja estem preparats per a definir el concepte d'espai vectorial.

DEFINICIÓ 2.9. Siguen A i B dos conjunts. Una **lleï de composició externa (LCE)** d' A en B és una aplicació d' $A \times B$ en B .

DEFINICIÓ 2.10. Siga $\mathbb{K}$ un cos. Un **$\mathbb{K}$ -espai vectorial** és una tupla $(V, +, \cdot, 0)$ on V és un conjunt, $(+)$ és una LCI sobre V , $(\cdot)$ és una LCE de $\mathbb{K}$ sobre V i 0 és un element de V de manera que $(V, +, 0)$ és un grup abelià i se satisfà per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i per a tot $v, v' \in V$:

$$\lambda \cdot (v + v') = \lambda \cdot v + \lambda \cdot v', \quad (\text{EV1})$$

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \quad (\text{EV2})$$

$$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v), \quad (\text{EV3})$$

$$1_{\mathbb{K}} \cdot v = v. \quad (\text{EV4})$$

NOTA 2.11. Els elements de $\mathbb{K}$ s'anomenen **escalars** i habitualment usarem lletres gregues per a denotar-los. Els elements de V s'anomenen **vectors** i utilitzarem lletres llatines. En general, direm que V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Si ens fixem, farem un abús de notació, en denotar la suma de V igual que la suma de $\mathbb{K}$ i en denotar la LCE igual que el producte de $\mathbb{K}$. A més, de manera similar a abans, escriurem la LCE per juxtaposició, és a dir, per a λ escalar i v vector, $\lambda v := \lambda \cdot v$.

Per tractar de familiaritzar-nos amb els espais vectorials, presentem una sèrie d'exemples bàsics i rellevants.

EXEMPLE 2.12. Si V i W són $\mathbb{K}$ -espais vectorials aleshores $V \times W$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb vector zero $0_{V \times W} := (0_V, 0_W)$ i les següents lleis de composició:

$$(+): (v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \quad v, v' \in V, w, w' \in W,$$

$$(\cdot): \lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{K}, v \in V, w \in W.$$

Endemés, el producte cartesià el podem generalitzar fàcilment per a un nombre finit d'espais vectorials i continua sent altre espai vectorial. Així, si $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \dots, V_n$ són $\mathbb{K}$ espais vectorials, denotarem $V_1 \times \dots \times V_n$ per $\prod_{i=1}^n V_i$. En cas que $V_1 = \dots = V_n = V$, simplement escriurem V^n .

EXEMPLE 2.13. Siguen Ω un conjunt i V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, el conjunt format per totes les aplicacions d' Ω a V , denotat per $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V)$, és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb el vector zero l'aplicació nul·la,

$$\begin{aligned} 0: \quad \Omega &\longrightarrow V \\ \omega &\longmapsto 0, \end{aligned}$$

i les lleis de composició

$$\begin{aligned} (+): (f + g)(\omega) &:= f(\omega) + g(\omega), & \omega \in \Omega, f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V), \\ (\cdot): (\lambda f)(\omega) &:= \lambda f(\omega), & \omega \in \Omega, \lambda \in \mathbb{K}, f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V). \end{aligned}$$

EXEMPLE 2.14. El propi cos $\mathbb{K}$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial en el qual el vector zero, la suma i el producte per escalar s'hereten de l'element neutre per a la suma, la suma i el producte del cos, respectivament.

Ara que ja sabem la definició, es moment de conèixer de la teoria que flueix d'ella. Introduïm la definició de subespai vectorial.

DEFINICIÓ 2.15. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Direm que $W \subseteq V$ és un **subespai vectorial** de V si:

- (1) $0 \in W$.
- (2) Donats $v, w \in W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, aleshores $\lambda v + \mu w \in W$.

Ho denotarem per $W \leq V$.

Dos altres exemples coneguts d'espais vectorials són el següents.

DEFINICIÓ 2.16. Si V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $U, W \leq V$, definim la seua suma com

$$U + W := \{u + w \in V \mid u \in U, w \in W\},$$

i la seua intersecció com

$$U \cap W := \{z \in V \mid z \in U, z \in W\},$$

Es pot comprovar fàcilment que $U + W \leq V$ i $U \cap W \leq V$.

Tot i que la suma de subespais vectorials es pot definir sempre, hi ha una en particular que té molt d'interés: la suma directa.

DEFINICIÓ 2.17. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $U, W \leq V$, direm que la suma de U i W és **directa**, i ho denotarem per $U \oplus W$, si $U \cap W = \{0\}$.

El benefici de la suma directa és que tot vector té expressió única, com veiem en la següent proposició.

PROPOSICIÓ 2.18. Si V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $U, W \leq V$, llavors les següents proposicions són equivalents:

- (1) La suma d' U i W és directa.
- (2) Per a tot $u \in U$ i per a tot $w \in W$, si $u + w = 0$, aleshores $u = w = 0$.

(3) *Tot vector d' $U + W$ s'escriu de forma única.*

DEMOSTRACIÓ. Comencem amb $(1) \implies (2)$. Siguen $u \in U$ i $w \in W$ tals que $u + w = 0$, llavors $u = -w$. Així, $u, w \in U \cap W = \{0\}$, i.e., $u = w = 0$.

Veiem ara $(2) \implies (3)$. Siga $v \in U + W$ i suposem que es pot escriure de dues formes, $v = u + w = u' + w'$, per a certs $u, u' \in U$ i $w, w' \in W$. Per tant,

$$0 = v - v = (u + w) - (u' + w') = (u - u') + (w - w').$$

Per hipòtesi, $u - u' = w - w' = 0$. És a dir, $u = u'$ i $w = w'$. Concloem que v té expressió única com vector d' $U + W$.

Finalment, provem $(3) \implies (1)$. Volem verificar que $U \cap W = \{0\}$. Evidentment $\{0\} \subseteq U \cap W$. Ara, siga $v \in U \cap W$. Així, tenim que $v = v + 0 \in U + W$, $v = 0 + v \in U + W$. Com l'expressió ha de ser única, necessàriament $v = 0$ i la suma és directa. $\square$

Les nocions de sistema generador i d'independència lineal són de les més elementals de l'Àlgebra Lineal. Endemés, gràcies a elles podem introduir la idea de base d'un espai vectorial, la qual és important a l'hora de comprendre els seus elements.

DEFINICIÓ 2.19. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $S \subseteq V$. Una **combinació lineal** d'elements en S és una expressió de la forma

$$\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$$

amb $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ i $s_1, \dots, s_n \in S$.

DEFINICIÓ 2.20. Siguen V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $S \subseteq V$. Denotem per $\langle S \rangle$ al conjunt:

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \mid n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, (\lambda_i \in \mathbb{K}, s_i \in S) \right\}.$$

És a dir, $\langle S \rangle$ és el conjunt de totes les combinacions lineals d'elements d' S .

Es pot demostrar que $\langle S \rangle$ és el menor subespai vectorial de V que conté a S . Així, a partir d'aquest concepte, apareixen les següents definicions.

DEFINICIÓ 2.21. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $S \subseteq V$.

- (1) Al subespai $\langle S \rangle$ l'anomenem **subespai generat** per S .
- (2) Direm que S és **sistema generador** de V si $\langle S \rangle = V$.
- (3) Direm que V és **finitament generat** si admet un sistema generador finit.

DEFINICIÓ 2.22. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i S un subconjunt de V . Direm que S és **linealment independent** si tota combinació lineal de vectors en S igualada a zero

$$\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n = 0$$

amb $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $s_1, \dots, s_n \in S$ ha de satisfer que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

DEFINICIÓ 2.23. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $B \subseteq V$ direm que B és **base** si B és linealment independent i sistema generador de V .

NOTA 2.24. Denotarem a las bases amb font cal·ligràfica, és a dir, si B és una base, escriurem $\mathcal{B}$.

EXEMPLE 2.25. Un exemple de base és la denominada **base canònica**. Siga $n \in \mathbb{N}$, per a $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}_C^{(n)} := \{e_1, \dots, e_n\}$ és base, on per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i és el vector amb totes les entrades nul·les excepte la i -èssima que és l'element neutre. És a dir, el conjunt

$$\mathcal{B}_C^{(n)} := \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

és la base canònica de $\mathbb{K}^n$.

A continuació, enunciarem una sèrie de proposicions referents a les bases que no provarem per a no allargar aquest treball. Són resultats bàsics i necessaris per a poder treballar amb els espais vectorials. Les demostracions es poden trobar a les bibliografies esmentades.

PROPOSICIÓ 2.26. [BR13, Corollary 3, p. 88] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $\mathcal{B} \subseteq V$. Les següents afirmacions són equivalents:

- (1) $\mathcal{B}$ és una base de V .
- (2) $\mathcal{B}$ és sistema generador minimal.
- (3) $\mathcal{B}$ és conjunt linealment independent maximal.

PROPOSICIÓ 2.27. (**D'ampliació**). [BR13, Corollary 1, p. 87] Siguen V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i $S \subseteq V$ linealment independent. Aleshores existeix una base $\mathcal{B}$ de V de manera que $S \subseteq \mathcal{B}$.

COROL·LARI 2.28. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Llavors existeix una base de V .

DEMOSTRACIÓ. És conseqüència directa de la proposició anterior, ja que podem agafar el conjunt linealment independent $\{v\}$ on $v \in V$, $v \neq 0$. En cas que $V = \{0\}$, la base és $\emptyset$. $\square$

COROL·LARI 2.29. [BR13, Corollary 1, p. 84] Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Aleshores totes les bases de V són finites i tenen el mateix cardinal.

DEFINICIÓ 2.30. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat. Anomenem **dimensió** de V , i la denotem per $\dim_{\mathbb{K}}(V)$, al cardinal de qualsevol de les bases de V .

Notem que l'anterior corol·lari permet concloure que aquest concepte està ben definit. A més, noves propietats sorgeixen arran de la noció de base. De nou, no ens detindrem a demostrar-les, però cal familiaritzar-se amb elles.

PROPOSICIÓ 2.31. [BR13, Theorem 5.6, p. 81] *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Aleshores tot vector $v \in V$ té una expressió única com a combinació lineal d'elements de la base, i.e., existeixen uns únics $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tals que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.*

PROPOSICIÓ 2.32. [BR13, Corollary 4, p. 88] *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siguin L i G subconjunts de V tals que L és linealment independent i G és sistema generador. Aleshores, $|L| \leq \dim_{\mathbb{K}}(V) \leq |G|$.*

PROPOSICIÓ 2.33. [AH22, Theorem 4.12, p. 177] *Siguin V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i $B \subseteq V$ amb $|B| = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Són equivalents:*

- (1) B és una base de V .
- (2) B és un sistema generador.
- (3) B és un conjunt linealment independent.

PROPOSICIÓ 2.34. [BR13, Theorem 5.9, p. 88] *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siga $W \leq V$. Llavors:*

- (1) $\dim_{\mathbb{K}}(W) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$.
- (2) $\dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$ si, i solament si, $W = V$.

2. Aplicacions lineals

Altres conceptes fonamentals de l'Àlgebra Lineal i essencials per a entendre el producte tensorial són les aplicacions lineals i bilineals. Comencem per veure les primeres.

DEFINICIÓ 2.35. *Siguin V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Siga $f: V \rightarrow W$ una aplicació. Direm que f és **lineal** si per a tot $v, v' \in V$ i per a tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es compleix que*

$$f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v'). \quad (1)$$

*Les aplicacions lineals també reben el nom d'**homomorfismes** i, en cas que $V = W$, s'anomenen **endomorfismes**. Denotarem per $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ al conjunt de totes les aplicacions lineals de V en W , és a dir,*

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ és lineal}\}.$$

*Direm que una aplicació lineal és un **monomorfisme** si és injectiva, un **epimorfisme** si és sobrejectiva i un **isomorfisme** si és bijectiva. A més, en cas que $f: V \rightarrow W$ siga un isomorfisme, direm que V i W són **isomorfs** i ho denotarem per $V \cong W$.*

NOTA 2.36. De nou, hem fet un abús de notació a la Fórmula (1), ja que la primera suma és la suma en V mentre que la segona suma és en W .

NOTA 2.37. Fem un abús de notació en denotar per $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ tant al conjunt de les aplicacions lineals de V en W quan, segons l'Exemple 2.13, $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ denotaria el conjunt d'aplicacions de V en W . Per resoldre aquesta ambigüitat, durant aquest treball, quan el domini siga un espai vectorial, sempre es referirà al conjunt d'aplicacions lineals. En altre cas, és a dir, quan el domini siga un conjunt sense estructura d'espai vectorial, denotarà el conjunt de totes les aplicacions existents.

PROPOSICIÓ 2.38. Si V i W són $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb el vector zero

$$\begin{aligned} 0: \quad V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

i les lleis de composició:

$$\begin{aligned} (+): (f + g)(v) &:= f(v) + g(v), & v \in V, f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W), \\ (\cdot): (\lambda f)(v) &:= \lambda f(v), & v \in V, \lambda \in \mathbb{K}, f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W). \end{aligned}$$

Uns dels exemples més evidents d'homomorfisme és el següent.

EXEMPLE 2.39. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, definim l'aplicació identitat, denotada per id_V , com

$$\begin{aligned} \text{id}_V: \quad V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v. \end{aligned}$$

Clarament id_V és una aplicació lineal.

Arran de la definició d'aplicació lineal, podem treure propietats immediates i útils.

PROPOSICIÓ 2.40. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: V \longrightarrow W$ una aplicació lineal, llavors:

- (1) $f(0) = 0$,
- (2) $\forall v \in V, f(-v) = -f(v)$.

DEMOSTRACIÓ. És una prova fàcil. Per una part,

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0), \text{ per tant, } f(0) = 0.$$

Per altra part, per a qualsevol $v \in V$,

$$0 = f(0) = f(v + (-v)) = f(v) + f(-v), \text{ per tant, } f(-v) = -f(v).$$

Així, (1) i (2) queden provats. $\square$

PROPOSICIÓ 2.41. Siguen V, W i U tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: V \longrightarrow W$ i $g: W \longrightarrow U$ aplicacions lineals, aleshores $g \circ f: V \longrightarrow U$ també és lineal.

DEMOSTRACIÓ. És una comprovació directa. Donats $v, v' \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda v + \mu v') &= g(f(\lambda v + \mu v')) && \text{(Composició)} \\ &= g(\lambda f(v) + \mu f(v')) && (f \text{ lineal}) \\ &= \lambda g(f(v)) + \mu g(f(v')) && (g \text{ lineal}) \\ &= \lambda(g \circ f)(v) + \mu(g \circ f)(v'). && \text{(Composició)} \end{aligned}$$

Per tant, $g \circ f$ és lineal. $\square$

És menester quan parlem d'homomorfismes, tractar amb l'imatge i el nucli d'aquests. Per tant, definim-los.

DEFINICIÓ 2.42. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: V \longrightarrow W$ una aplicació lineal, definim l'**imatge** d' f , denotada per $\text{Im}(f)$, com el conjunt

$$\text{Im}(f) := f[V] = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

A més definim el **nucli** d' f , denotat per $\text{Ker}(f)$, com el conjunt

$$\text{Ker}(f) := f^{-1}[\{0\}] = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

Seguidament, de la mateixa manera que férem amb els espais vectorials, enunciem una sèrie de resultats fonamentals de les aplicacions lineals.

PROPOSICIÓ 2.43. [BR13, Theorem 6.2, p. 98] Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: V \longrightarrow W$ una aplicació lineal.

- (1) Si $V' \leq V$, $f[V'] \leq W$. En particular, $\text{Im}(f) \leq W$.
- (2) Si $W' \leq W$, $f^{-1}[W'] \leq V$. En particular, $\text{Ker}(f) \leq V$.

Clarament, una aplicació lineal $f: V \longrightarrow W$ és sobrejectiva si $\text{Im}(f) = W$. En canvi, per a la injectivitat, tenim el següent resultat.

PROPOSICIÓ 2.44. [BR13, Theorem 6.3, p. 102] Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: V \longrightarrow W$ una aplicació lineal. Aleshores f és injectiva, si, i només si, $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

PROPOSICIÓ 2.45. [AH22, Theorem 5.14, p. 237] Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $A \subseteq V$ i $f: V \longrightarrow W$ una aplicació lineal. Denotem $f[A] := \{f(a) \mid a \in A\}$. Aleshores:

- (1) Si A és linealment independent en V i f és injectiva, $f[A]$ és linealment independent en W .
- (2) Si A és sistema generador de V i f és sobrejectiva, $f[A]$ és sistema generador de W .

Una bona propietat dels homomorfismes és que la imatge d'una base és, de fet, una altra base.

COROLLARI 2.46. *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Si V és finitament generat amb base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f: V \rightarrow W$ és un isomorfisme, llavors $f[\mathcal{B}] = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ és una base de W .*

DEMOSTRACIÓ. Conseqüència directa de la Proposició 2.45. $\square$

Un resultat interessant de les aplicacions lineals és com es relacionen les dimensions del domini, nucli i imatge.

TEOREMA 2.47. [BR13, Theorem 6.4, p. 104] *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb V finitament generat i $f: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Llavors,*

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)).$$

COROLLARI 2.48. *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$ i $f: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Si f és injectiva o sobrejectiva, aleshores és un isomorfisme.*

DEMOSTRACIÓ. És conseqüència directa de l'anterior proposició. Per una part, si f és injectiva, $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(\{0\}) = 0$ i així, $\dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f))$.

Com que $\text{Im}(f) \leq W$, per la Proposició 2.34, $\text{Im}(f) = W$. Això és, f és sobrejectiva i, per tant, un isomorfisme.

Per altra part, si f és sobrejectiva, $\text{Im}(f) = W$ i així,

$$\dim_{\mathbb{K}}(W) = \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(W).$$

Se segueix que $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)) = 0$, és a dir, $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Per la Proposició 2.44, f és injectiva i, d'aquesta manera, un isomorfisme. $\square$

A partir d'ara, ja no tornarem a enunciar resultats sense provar-los, ja que ara sí podem enfocar-nos més en un apropament al producte tensorial. Així, presentem el concepte de " propietat universal". Donats V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $V \times W$ satisfà una propietat de molta utilitat, relacionada amb les aplicacions lineals. Però primer, hem de conèixer les projeccions.

DEFINICIÓ 2.49. *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Definim les aplicacions **projeccions** sobre la primera i segona component, π_1 i π_2 respectivament, com:*

$$\begin{aligned} \pi_1: V \times W &\longrightarrow V & \pi_2: V \times W &\longrightarrow W \\ (v, w) &\longmapsto v, & (v, w) &\longmapsto w. \end{aligned}$$

PROPOSICIÓ 2.50. *Les aplicacions projeccions són lineals.*

DEMOSTRACIÓ. Ho comprovarem únicament per a π_1 ja que per a π_2 és anàleg. Donats $(v, w), (v', w') \in V \times W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

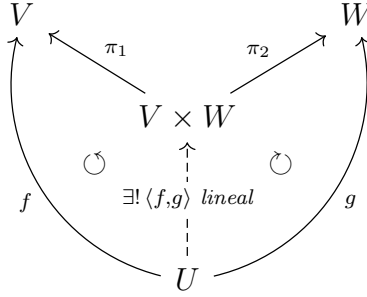
$$\begin{aligned} \pi_1(\lambda(v, w) + \mu(v', w')) &= \pi_1(\lambda v + \mu v', \lambda w + \mu w') && (\text{Estr.}^1 V \times W) \\ &= \lambda v + \mu v' && (\text{Def.}^2 \pi_1) \end{aligned}$$

$$= \lambda\pi_1(v, w) + \lambda\pi_1(v', w'). \quad (\text{Def. } \pi_1)$$

Concloem que π_1 és lineal. $\square$

Ara si, veiem la propietat mencionada anteriorment.

PROPOSICIÓ 2.51. (*Propietat universal del producte d'espais vectorials*). Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Aleshores $V \times W$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial que satisfà la següent propietat: per a tot $\mathbb{K}$ -espai vectorial U , per a tota aplicació lineal $f: U \rightarrow V$ i per a tota aplicació lineal $g: U \rightarrow W$ existeix una única aplicació lineal d' U en $V \times W$, denotada per $\langle f, g \rangle$, de manera que el següent diagrama commuta:



DEMOSTRACIÓ. Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle: U &\longrightarrow V \times W \\ u &\longmapsto (f(u), g(u)). \end{aligned}$$

Primer hem de confirmar que és lineal. En efecte, si agafem $u, u' \in U$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle(\lambda u + \mu u') &= (f(\lambda u + \mu u'), g(\lambda u + \mu u')) && (\text{Def. } \langle f, g \rangle) \\ &= (\lambda f(u) + \mu f(u'), \lambda g(u) + \mu g(u')) && (f, g \text{ lineals}) \\ &= \lambda(f(u), g(u)) + \mu(f(u'), g(u')) && (\text{Estr. } V \times W) \\ &= \lambda\langle f, g \rangle(u) + \mu\langle f, g \rangle(u'). && (\text{Def. } \langle f, g \rangle) \end{aligned}$$

Per altra part, vegem que compleixen les equacions. Siga $u \in U$, aleshores,

$$\begin{aligned} (\pi_1 \circ \langle f, g \rangle)(u) &= \pi_1(f(u), g(u)) = f(u), \\ (\pi_2 \circ \langle f, g \rangle)(u) &= \pi_2(f(u), g(u)) = g(u). \end{aligned}$$

Finalment, cal demostrar que $\langle f, g \rangle$ és l'única aplicació lineal amb aquestes propietats. Així, suposem que existeix $h: U \rightarrow V \times W$ aplicació lineal tal que $\pi_1 \circ h = f$ i $\pi_2 \circ h = g$. Volem verificar que per a tot $u \in U$, $(\langle f, g \rangle)(u) = h(u)$. Així,

$$(\langle f, g \rangle)(u) = (f(u), g(u)) = ((\pi_1 \circ h)(u), (\pi_2 \circ h)(u)) = h(u).$$

¹Estr. serà l'abreviatura d'Estructura.

²Def. serà l'abreviatura de Definició.

Per tant, $h = \langle f, g \rangle$ i deduïm que $\langle f, g \rangle$ és l'única aplicació lineal d' U en $V \times W$ tal que $\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f$ i $\pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g$. $\square$

El producte d'espais vectorials no és l'únic que gaudeix d'una propietat universal. De fet, ens trobarem més exemples al llarg d'aquest treball. Entenem les propietats universals com aquelles que, donada una aplicació, ens defineix altra aplicació, sempre lineal, que fa commutar un diagrama i, a més, serà l'únic homomorfisme que ho faci. Així, provem altra propietat universal. En aquest cas, serà referent a la suma directa.

DEFINICIÓ 2.52. Donat V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $U, W \leq V$ tals que la seua suma és directa. Definim les aplicacions inclusions in_U i in_W com:

$$\begin{array}{ll} \text{in}_U: U & \longrightarrow U \oplus W \\ u & \longmapsto u + 0, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{in}_W: W & \longrightarrow U \oplus W \\ w & \longmapsto 0 + w. \end{array}$$

PROPOSICIÓ 2.53. Les aplicacions inclusions definides són lineals.

DEMOSTRACIÓ. Ho provarem només per a in_U , ja que per a in_W és anàleg. Siguen $u, u' \in U$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Llavors,

$$\begin{aligned} \text{in}_U(\lambda u + \mu u') &= (\lambda u + \mu u') + 0 && (\text{Def. } \text{in}_U) \\ &= \lambda(u + 0) + \mu(u' + 0) && (\text{Estr. } U \oplus W) \\ &= \lambda \text{in}_U(u) + \mu \text{in}_U(u'). && (\text{Def. } \text{in}_U) \end{aligned}$$

Per tant, in_U és lineal com volíem provar. $\square$

PROPOSICIÓ 2.54. (*Propietat universal de la suma directa*). Siguen V i Z $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $U, W \leq V$, tals que $U \oplus W$ i siguen $f: U \longrightarrow Z$ i $g: W \longrightarrow Z$ aplicacions lineals. Llavors existeix una única aplicació lineal $[f, g]: U \oplus W \longrightarrow Z$ tal que $[f, g] \circ \text{in}_U = f$ i $[f, g] \circ \text{in}_W = g$, i.e., tal que el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow f & \nwarrow g \\ & \exists! [f, g] \text{ lineal} & \\ & \uparrow & \\ U \oplus W & & \\ \nearrow \text{in}_U & & \nwarrow \text{in}_W \\ U & & W \end{array} \quad (2)$$

DEMOSTRACIÓ. Definim $[f, g]$ com

$$\begin{array}{ll} [f, g]: U \oplus W & \longrightarrow Z \\ u + w & \longmapsto f(u) + g(w). \end{array}$$

És clar que per a qualsevol $u \in U$, $w \in W$, puix que tota aplicació lineal envia el zero al zero,

$$\begin{aligned}([f, g] \circ \text{in}_U)(u) &= [f, g](\text{in}_U(u)) = [f, g](u + 0) = f(u) + g(0) = f(u), \\([f, g] \circ \text{in}_W)(w) &= [f, g](\text{in}_W(w)) = [f, g](0 + w) = f(0) + g(w) = g(w).\end{aligned}$$

Per altra part, verifiquem la linealitat, Donats $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}[f, g](\alpha(u_1 + w_1) + \beta(u_2 + w_2)) &= [f, g](\alpha u_1 + \beta u_2 + \alpha w_1 + \beta w_2) && (\text{Estr. } U \otimes W) \\ &= f(\alpha u_1 + \beta u_2) + g(\alpha w_1 + \beta w_2) && (\text{Def. } [f, g]) \\ &= \alpha(f(u_1) + g(w_1)) + \beta(f(u_2) + g(w_2)) && (f, g \text{ lineals}) \\ &= \alpha[f, g](u_1 + w_1) + \beta[f, g](u_2 + w_2). && (\text{Def. } [f, g])\end{aligned}$$

Finalment, hem de provar la unicitat. Així, suposem que $h: U \oplus W \rightarrow Z$ és una aplicació lineal que satisfà el diagrama commutatiu (2). Així, donats $u \in U$, $w \in W$, com que $u + w = (u + 0) + (0 + w)$,

$$\begin{aligned}h(u + w) &= h(u + 0) + h(0 + w) && (h \text{ lineal}) \\ &= (h \circ \text{in}_U(u)) + (h \circ \text{in}_W(w)) && (\text{Def. } \text{in}_U, \text{in}_W) \\ &= f(u) + g(w) && (h \circ \text{in}_U = f, h \circ \text{in}_W = g) \\ &= [f, g](u + w). && (\text{Def. } [f, g])\end{aligned}$$

Per tant, $h = [f, g]$ i $[f, g]$ és l'única aplicació lineal amb dita propietat. $\square$

3. Coordenades

La finalitat d'aquesta secció és veure com les aplicacions lineals es poden representar com a matrius. Açò serà d'utilitat per comprendre el determinant d'una matriu en els darrers capítols.

NOTA 2.55. *Siguen $m, n \in \mathbb{N}$, denotarem l'espai de les matrius de dimensió $m \times n$ amb entrades en $\mathbb{K}$ per $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. És fàcil comprovar que $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial que té com a vector zero la matriu nul·la i com a lleis de composició, la suma de matrius i el producte per escalar de matrius habituals.*

Introduïm primerament el concepte de coordenada d'un vector.

DEFINICIÓ 2.56. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat amb base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Siga $v \in V$. Definim la **matriu coordinada de v en $\mathcal{B}$** i la denotem per $[v]_{\mathcal{B}}$ com la matriu*

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

on $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ són els únics escalars tals que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

Ara sí, podem definir, per a cada homomorfisme definit sobre $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats, una matriu que el represente en unes bases donades.

DEFINICIÓ 2.57. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m\}$ bases de V i W respectivament. Siga $f: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Definim la **matriu coordinada o associada** d' f de la base $\mathcal{B}$ a la base $\tilde{\mathcal{B}}$ i la denotem per $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(f)$ a la matriu

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(f) := \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m,1} & \cdots & \lambda_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

on $\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{m,n}$ són els escalars tals que per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_{j,i} \tilde{e}_j$.

Donats $n, m \in \mathbb{N}$ i $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, denotem per $(a_1 \cdots a_n) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ com la matriu d' n columnnes on la columna i -èssima es correspon amb a_i per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Així, de la definició d'abans deduïm que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}(f) = ([f(e_1)]_{\tilde{\mathcal{B}}} \cdots [f(e_n)]_{\tilde{\mathcal{B}}}).$$

En cas que tinguem $V = W$ i $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$, escriurem $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

4. Aplicacions bilineals

En la segona secció vam tractar les aplicacions lineals, les quals estaven definides per a aplicacions que tenen com a domini un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Però, si el domini és un producte de dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, podem definir un concepte similar? Amb aquest objectiu, presentem les denominades aplicacions bilineals.

DEFINICIÓ 2.58. Siguen V, W i U tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: V \times W \rightarrow U$ una aplicació. Direm que f és una aplicació **bilineal** si és lineal en cada component, és a dir, si per una banda per a qualsevol $v, v' \in V$, $w \in W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es té que

$$f(\lambda v + \mu v', w) = \lambda f(v, w) + \mu f(v', w),$$

i per altra banda, per a qualsevol $v \in V$, $w, w' \in W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es té que

$$f(v, \lambda w + \mu w') = \lambda f(v, w) + \mu f(v, w').$$

Denotarem $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, U) := \{f: V \times W \rightarrow U \mid f \text{ és bilineal}\}$.

En altres paraules, una aplicació bilineal és una aplicació lineal en cada component. Això és, si per a $f \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, U)$, $v \in V$ i $w \in W$

qualssevol considerem les aplicacions

$$\begin{array}{ccc} f(\cdot, w): & V & \longrightarrow U \\ v & \longmapsto & f(v, w), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f(v, \cdot): & W & \longrightarrow U \\ w & \longmapsto & f(v, w), \end{array}$$

llavors tant $f(\cdot, w)$ com $f(v, \cdot)$ són lineals.

NOTA 2.59. Les aplicacions bilineals, de la mateixa manera que les lineals, tenen estructura de $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Tant la definició del vector zero com les de les lleis de composició, són anàlegs al cas dels homomorfismes.

Un resultat bàsic i directe de la definició d'aplicació bilineal és el següent.

LEMA 2.60. Si V, W i U són tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: V \times W \longrightarrow U$ és una aplicació bilineal, per a tot $v \in V$ i tot $w \in W$, $f(v, 0) = f(0, w) = 0$.

DEMOSTRACIÓ. Siguen $v \in V$ i $w \in W$. Com que $f(\cdot, w)$ i $f(v, \cdot)$ són lineals, per la Proposició 2.40,

$$0 = f(\cdot, w)(0) = f(0, w), \quad 0 = f(v, \cdot)(0) = f(v, 0),$$

com volíem. $\square$

Per acabar aquest capítol, veiem com es relacionen els homomorfismes i les aplicacions bilineals. Aquest lema serà útil més endavant.

LEMA 2.61. Siguen V, W i Z tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials, aleshores:

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z)) \cong \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, Z).$$

DEMOSTRACIÓ. Definim l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \varphi: & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z)) & \longmapsto \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, Z) \\ & h & \longmapsto \varphi(h), \end{array}$$

on

$$\begin{array}{ccc} \varphi(h): & V \times W & \longmapsto Z \\ (v, w) & \longmapsto & (h(v))(w). \end{array}$$

Primerament verifiquem que està ben definida, això és, que $\varphi(h)$ és bilineal per a qualsevol $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z))$. D'una banda, donats $v, v' \in V$, $w \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (\varphi(h))(\alpha v + \beta v', w) &= (h(\alpha v + \beta v'))(w) && \text{(Def. } \varphi(h)) \\ &= (\alpha h(v) + \beta h(v'))(w) && (h \text{ lineal}) \\ &= \alpha(\varphi(h))(v, w) + \beta(\varphi(h))(v', w). && \text{(Def. } \varphi(h)) \end{aligned}$$

D'altra banda, donats $v \in V$, $w, w' \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (\varphi(h))(v, \alpha w + \beta w') &= (h(v))(\alpha w + \beta w') && \text{(Def. } \varphi(h)) \\ &= \alpha(h(v))(w) + \beta(h(v))(w') && (h(v) \text{ lineal}) \\ &= \alpha(\varphi(h))(v, w) + \beta(\varphi(h))(v, w'). && \text{(Def. } \varphi(h)) \end{aligned}$$

D'aquesta manera, $\varphi(h)$ és bilineal pel que φ està ben definida.

Ara veiem que φ és lineal. Siguen $h, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z))$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, per a qualsevol $(v, w) \in V \times W$,

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha h + \beta g))(v, w) &= ((\alpha h + \beta g)(v))(w) && \text{(Def. } \varphi(\alpha h + \beta g)) \\ &= (\alpha h(v) + \beta g(v))(w) && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= \alpha(h(v))(w) + \beta(g(v))(w) && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= (\alpha(\varphi(h)) + \beta(\varphi(g)))(v, w). && \text{(Def. } \varphi(h), \varphi(g)) \end{aligned}$$

Ens queda així per corroborar que φ és bijectiva. Per a la injectivitat, suposem que $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z))$ és tal que $\varphi(h) = 0_{\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, Z)}$, és a dir, per a tot $(v, w) \in V \times W$,

$$(\varphi(h))(v, w) = (h(v))(w) = 0.$$

Per tant, per a tot $v \in V$, $h(v) = 0_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z)}$ i així, $h = 0_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z))}$. Deduïm que φ és injectiva.

Finalment, per a la sobrejectivitat, suposem $g \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, Z)$. Volem trobar una $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z))$ tal que $\varphi(h) = g$. Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} h: V &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, Z) \\ v &\longmapsto g(v, \cdot). \end{aligned}$$

Aquesta aplicació està ben definida gràcies a la bilinealitat de g . I així, per a tot $(v, w) \in V \times W$, es té que

$$(\varphi(h))(v, w) = (h(v))(w) = (g(v, \cdot))(w) = g(v, w).$$

Així doncs, $\varphi(h) = g$, i concloem que φ és un isomorfisme. $\square$

Construccions d'espais vectorials

Hi ha tres espais vectorials concrets que ens seran d'utilitat per tractar el producte tensorial: l'espai quocient, l'espai vectorial lliure i l'espai dual. Per això, dediquem aquest capítol a introduir-los i comentar les seues propietats més bàsiques.

1. Espai quocient

Per a poder definir l'espai quocient, cal familiaritzar-se primerament amb les relacions d'equivalència.

DEFINICIÓ 3.1. Siga X un conjunt. Una **relació** sobre X és un subconjunt $R \subseteq X \times X$. Donat $(x, x') \in R$, direm que x està **relacionat** amb x' mitjançant R i ho denotarem per xRx' .

DEFINICIÓ 3.2. Siga R una relació sobre X . Direm que R és una relació d'**equivalència** si satisfà les següents propietats:

- (1) **Reflexiva:** Per a tot $x \in X$ es té que xRx .
- (2) **Simètrica:** Per a tot $x, x' \in X$ tals que xRx' , aleshores $x'Rx$.
- (3) **Transitiva:** Per a tot $x, x', x'' \in X$ tals que xRx' i $x'Rx''$, aleshores xRx'' .

Per a qualsevol element $x \in X$, podem definir la seua **classe d'equivalència**, denotada per $[x]_R$, com el conjunt d'elements d' X relacionats amb x , és a dir,

$$[x]_R = \{x' \in X \mid xRx'\}.$$

És clar que $[x]_R \neq \emptyset$, doncs $x \in [x]_R$. Per altra part, anomenem **espai quocient** al conjunt de les classes d'equivalència per a la relació R i el denotarem per X/R :

$$X/R := \{[x]_R \subseteq X \mid x \in X\}.$$

Ara que coneguem les relacions d'equivalència, podem presentar les congruències, concepte necessari per a definir l'espai quocient.

DEFINICIÓ 3.3. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Una **congruència** sobre V és una relació d'equivalència $R \subseteq V \times V$ que satisfà que, per a tot $v, v', w, w' \in V$ i per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$:

- (1) **Compatibilitat amb la suma:** Si $(v, w), (v', w') \in R$, aleshores $(v + v', w + w') \in R$.

- (2) **Compatibilitat amb el producte per escalar:** Si $(v, w) \in R$, aleshores $(\lambda v, \lambda w) \in R$.

Denotarem per $\text{Con}_{\mathbb{K}}(V)$ al conjunt de totes les congruències en V .

PROPOSICIÓ 3.4. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $R \in \text{Con}_{\mathbb{K}}(V)$, aleshores V/R admet estructura de $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb el vector zero $[0]_R \in V/R$ i les lleis de composició

$$\begin{aligned} (+): [v]_R + [w]_R &:= [v + w]_R, & [v]_R, [w]_R &\in V/R, \\ (\cdot): \lambda[v]_R &:= [\lambda v]_R, & [v]_R &\in V/R, \lambda \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Es pot comprovar fàcilment que V/R és un espai vectorial gràcies a la definició de congruència.

Una pregunta natural a fer-se és com es poden trobar aquestes congruències. La realitat és que tot subespai vectorial, de fet, en defineix una, com veiem en la següent proposició.

PROPOSICIÓ 3.5. Si V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $W \leq V$, aleshores $R_W := \{(v, u) \in V \times V \mid v - u \in W\}$ és una congruència.

DEMOSTRACIÓ. D'una banda, cal comprovar que en efecte, per a un $W \leq V$, R_W és una relació d'equivalència. Això vol dir que satisfà les propietats reflexiva, simètrica i transitiva.

Per una part, com per a tot $v \in V$, $v - v = 0 \in W$, $(v, v) \in R_W$, i.e., R_W és simètrica.

Ara, siguen $v, u \in V$ tals que $(v, u) \in R_W$. Per tant, $v - u \in W$. En ser W subespai vectorial, $-(v - u) = u - v \in W$, és a dir, $(u, v) \in R_W$ i R_W és simètrica.

Finalment, per a v_1, v_2, v_3 tals que $(v_1, v_2) \in R_W$ i $(v_2, v_3) \in R_W$, com que $v_1 - v_2 \in W$ i $v_2 - v_3 \in W$, aleshores

$$v_1 - v_2 + (v_2 - v_3) = v_1 - v_3 \in W.$$

D'aquesta manera, $(v_1, v_3) \in R_W$ i R_W és transitiva. Concloem que R_W és una relació d'equivalència.

D'altra banda, s'ha de verificar que R_W és compatible amb la suma i el producte per escalar. Així, siguen $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ amb $(v_1, v_2) \in R_W$ i $(v_3, v_4) \in R_W$ i siga $\lambda \in \mathbb{K}$. Per definició, $c := v_1 - v_2 \in W$ i $d := v_3 - v_4 \in W$. Se segueix que:

$$\begin{aligned} c + d &= (v_1 + v_3) - (v_2 + v_4) \in W, \text{ per tant, } (v_1 + v_3, v_2 + v_4) \in R_W, \\ \lambda c &= \lambda v_1 - \lambda v_2 \in W, \text{ per tant, } (\lambda v_1, \lambda v_2) \in R_W. \end{aligned}$$

Concloem que R_W és una congruència. $\square$

NOTA 3.6. Escriurem V/W en comptes de V/R_W i $[v]_W$ en comptes de $[v]_{R_W}$. Observem que en V/W , $[v]_W = [u]_W$ si, i només si, $v - u \in W$.

Igal que vam fer al capítol anterior amb el producte d'espais vectorials i la suma directa, provarem la propietat universal del quocient. Recordem que en ambdós casos, definírem unes aplicacions prèviament: les projeccions i les inclusions, respectivament. Així, l'espai quocient no serà una excepció.

DEFINICIÓ 3.7. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $W \leq V$, definim l'aplicació **projecció sobre el quocient** com*

$$\begin{aligned} \text{pr}_W: \quad V &\longrightarrow V/W \\ v &\longmapsto [v]_W. \end{aligned}$$

És clar que és un epimorfisme, ja que la sobrejectivitat és trivial i la linealitat se segueix de la definició de congruència.

Ara sí, com que tenim totes les ferramentes necessàries, estudiem la propietat universal de l'espai quocient.

PROPOSICIÓ 3.8. (Propietat universal de l'espai quocient). *Si V i W són $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $f: V \longrightarrow W$ una aplicació lineal i $U \leq V$ tal que $U \subseteq \text{Ker}(f)$, llavors existeix una única aplicació lineal $f^\natural: V/U \longrightarrow W$ tal que el següent diagrama commuta:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{pr}_U} & V/U \\ & \searrow f & \downarrow \exists! f^\natural \text{ lineal} \\ & & W \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ. Definim l'aplicació següent:

$$\begin{aligned} f^\natural: \quad V/U &\longrightarrow W \\ [v]_U &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

Veiem primer que està ben definida, això és, que l'imatge no depèn del representant. Siguen $v, v' \in V$ tals que $[v]_U = [v']_U$. Per tant, $v - v' \in U$. Com que $U \subseteq \text{Ker}(f)$ i f és lineal,

$$0 = f(v - v') = f(v) - f(v'), \quad \text{i.e., } f(v) = f(v').$$

Així doncs, se segueix que $f^\natural([v]_U) = f^\natural([v']_U)$.

Ara, comprovem que és lineal. Siguen $[v]_U, [v']_U \in V/U$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f^\natural(\lambda[v]_U + \mu[v']_U) &= f^\natural([\lambda v + \mu v']_U) && (R_U \text{ congruència}) \\ &= f(\lambda v + \mu v') && (\text{Def. } f^\natural) \\ &= \lambda f(v) + \mu f(v') && (f \text{ lineal}) \\ &= \lambda f^\natural([v]_U) + \mu f^\natural([v']_U). && (\text{Def. } f^\natural) \end{aligned}$$

Consegüentment, $f^\natural$ és lineal.

Que $f^\natural$ fa commutar el diagrama és evident, ja que per a cada $v \in V$, es té que

$$(f^\natural \circ \text{pr}_U)(v) = f^\natural(\text{pr}_U(v)) = f^\natural([v]_U) = f(v).$$

Per tant, l'únic que ens queda per verificar és que $f^\natural$ és l'única aplicació lineal que ho satisfà. Suposem així que $h: V/U \rightarrow W$ és una aplicació lineal tal que $h \circ \text{pr}_U = f$. Llavors per a cada $[v]_U \in V/U$,

$$h([v]_U) = (h \circ \text{pr}_U)(v) = f(v) = f^\natural([v]_U).$$

Concloem que $h = f^\natural$ i es té la unicitat. $\square$

Un corol·lari immediat d'aquest resultat és el Primer Teorema d'Isomorfia.

COROL·LARI 3.9. (*Primer Teorema d'Isomorfia*) *Siguin V i W $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Llavors,*

$$V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f).$$

DEMOSTRACIÓ. Evidentment $\text{Ker}(f) \leq V$ amb $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f)$. Per la propietat universal de l'espai quocient, existeix una única aplicació lineal $f^\natural: V/\text{Ker}(f) \rightarrow W$ tal que $f^\natural \circ \text{pr}_{\text{Ker}(f)} = f$.

Veiem que $\text{Im}(f^\natural) = \text{Im}(f)$. Si $w \in \text{Im}(f^\natural)$, existeix $[v]_{\text{Ker}(f)} \in V/\text{Ker}(f)$ tal que $w = f^\natural([v]_{\text{Ker}(f)}) = f(v)$ i, d'aquesta manera, $w \in \text{Im}(f)$. Igualment, si $w \in \text{Im}(f)$, existeix $v \in V$ amb $w = f(v)$, però com $f(v) = f([v]_{\text{Ker}(f)})$, $w \in \text{Im}(f^\natural)$. Per tant, realment podem restringir el codomini de $f^\natural$ a $\text{Im}(f)$ i així, $f^\natural: V/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ és un epimorfisme. Només cal veure la injectivitat.

Siga $[v]_{\text{Ker}(f)} \in \text{Ker}(f^\natural)$, aleshores $0 = f^\natural([v]_{\text{Ker}(f)}) = f(v)$. Això és, $v \in \text{Ker}(f)$ i $[v]_{\text{Ker}(f)} = [0]_{\text{Ker}(f)}$. Deduïm que $f^\natural$ és injectiva i, així,

$$V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f).$$

Açò conclou la demostració del teorema. $\square$

2. Espai vectorial lliure

L'espai vectorial és un dels conceptes més importants de l'Àlgebra Lineal. Consegüentment, tindre una eina per definir-ne un mitjançant un conjunt qualsevol és de molta utilitat. Presentem així l'espai vectorial lliure.

DEFINICIÓ 3.10. *Siga $\mathbb{K}$ un cos i siga X un conjunt. El $\mathbb{K}$ -espai **vectorial lliure** sobre X , denotat per $F_{\mathbb{K}}(X)$, és el conjunt de totes les aplicacions $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ tals que $f^{-1}[\mathbb{K} \setminus \{0\}]$ és finit. És a dir:*

$$F_{\mathbb{K}}(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists T \subseteq X \text{ finit tal que } \forall x \notin T, f(x) = 0\}. \quad (3)$$

*El conjunt antiimatge $f^{-1}[\mathbb{K} \setminus \{0\}]$ rep el nom de **suport**.*

Provem que, en efecte, és un espai vectorial. Endemés, veiem que sempre té una base associada.

PROPOSICIÓ 3.11. *Siga $\mathbb{K}$ un cos i siga X un conjunt, $F_{\mathbb{K}}(X)$ és un subespai vectorial d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \mathbb{K})$ amb base $\mathcal{B} = \{\delta_x \mid x \in X\}$, on*

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ. En primer lloc veiem que $F_{\mathbb{K}}(X) \leq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \mathbb{K})$. Per una part, és clar que $0 \in F_{\mathbb{K}}(X)$. Per altra part, siguen $f, g \in F_{\mathbb{K}}(X)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Sabem que existeixen $T_1, T_2 \subseteq X$ finits tals que $f(x) = 0, \forall x \notin T_1$ i $g(x) = 0, \forall x \notin T_2$. Definint $T := T_1 \cup T_2$, veiem que $T \subseteq X$ és finit i compleix que

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0, \quad \forall x \notin T.$$

Per tant, $\lambda f + \mu g \in F_{\mathbb{K}}(X)$ i concloem que $F_{\mathbb{K}}(X) \leq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \mathbb{K})$.

En segon lloc, cal comprovar que $\mathcal{B}$ és base de $F_{\mathbb{K}}(X)$, és a dir, que és sistema generador i linealment independent.

Per a provar que és sistema generador, considerem $f \in F_{\mathbb{K}}(X)$. Aleshores existeix $T = \{x_1, \dots, x_n\}$, $T \subseteq X$ finit tal que $f(x) = 0$ si $x \notin T$. Siga $\lambda_i := f(x_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, definim l'aplicació

$$g := \lambda_1 \delta_{x_1} + \dots + \lambda_n \delta_{x_n} \in F_{\mathbb{K}}(X).$$

Si $x \notin T$, com $\delta_{x_i}(x) = 0$, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, se segueix que $f(x) = g(x) = 0$. Si $x \in T$, $x = x_j$ per a cert $j \in \{1, \dots, n\}$. Com que $\delta_{x_i}(x_j) = 0$ si $i \neq j$ i $\delta_{x_j}(x_j) = 1$, llavors $g(x_j) = \lambda_j = f(x_j)$. És a dir, $f = g$ i deduïm que $\mathcal{B}$ és sistema generador.

Per a la independència lineal, siguen $x_1, \dots, x_m \in X$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tals que $\lambda_1 \delta_{x_1} + \dots + \lambda_m \delta_{x_m} = 0$, i volem corroborar que $\lambda_i = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, m\}$. Fixat $j \in \{1, \dots, m\}$, com que $\delta_{x_i}(x_j) = 0$ si $i \neq j$ i $\delta_{x_j}(x_j) = 1$, aleshores

$$(\lambda_1 \delta_{x_1} + \dots + \lambda_m \delta_{x_m})(x_j) = \lambda_1 \delta_{x_1}(x_j) + \dots + \lambda_m \delta_{x_m}(x_j) = \lambda_j.$$

Però com que la combinació lineal és igual a zero,

$$(\lambda_1 \delta_{x_1} + \dots + \lambda_m \delta_{x_m})(x_j) = 0(x_j) = 0.$$

Per tant, $\lambda_j = 0$ per a tot $j \in \{1, \dots, m\}$ i concloem que $\mathcal{B}$ és linealment independent i, d'aquesta manera, una base de $F_{\mathbb{K}}(X)$. $\square$

Una definició alternativa d'espai vectorial lliure és la següent.

DEFINICIÓ 3.12. *Siga $\mathbb{K}$ un cos i X un conjunt. El **$\mathbb{K}$ -espai vectorial lliure** sobre X , denotat per $F_{\mathbb{K}}(X)$, és el conjunt de totes les possibles $\mathbb{K}$ -combinacions lineals formals sobre X . És a dir:*

$$F_{\mathbb{K}}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in X \right\} \quad (4)$$

Té estructura d'espai vectorial on el vector zero s'entén com la combinació lineal formal del conjunt buit i les lleis de composició són

$$\begin{aligned} (+): \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m \mu_j x'_j &:= \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k x''_k, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^m \mu_j x'_j \in F_{\mathbb{K}}(X) \\ (\cdot): \alpha \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) &:= \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i) x_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in F_{\mathbb{K}}(X), \alpha \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \gamma_k &:= \lambda_k, \quad x''_k := x_k, \\ \forall k \in \{n+1, \dots, n+m\}, \quad \gamma_k &:= \mu_{k-n}, \quad x''_k := x'_{k-n}. \end{aligned}$$

Per tant, cal preguntar-se si aquestes definicions són equivalents. La realitat és que ambdós espais vectorials són isomorfs i és per això que podem escollir amb quina construcció treballar.

PROPOSICIÓ 3.13. *Els espais vectorials construïts a les Definicions 3.10 i 3.12 són isomorfs.*

DEMOSTRACIÓ. Denotem per A al conjunt (3) i per B al conjunt (4) i definim l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi: \quad A &\longrightarrow B \\ f &\longmapsto \sum_{x \in X} f(x) x. \end{aligned}$$

Notem que està ben definida, ja que, per a tot $f \in A$ existeix $T = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ finit tal que $f(x) = 0$ si $x \notin T$ i, així, $\varphi(f) = \sum_{x \in X} f(x) x = \sum_{i=1}^n f(x_i) x_i$ és una combinació lineal formal.

Per provar la linealitat, considerem $f, g \in A$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Llavors,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha f + \beta g) &= \sum_{x \in X} (\alpha f + \beta g)(x) x && \text{(Def. } \varphi) \\ &= \alpha \sum_{x \in X} f(x) x + \beta \sum_{x \in X} g(x) x && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= \alpha \varphi(f) + \beta \varphi(g). && \text{(Def. } \varphi) \end{aligned}$$

Per tant, ens resta per verificar que és bijectiva. Per a la injectivitat, considerem $f \in \text{Ker}(\varphi)$ i, d'aquesta manera,

$$0 = \varphi(f) = \sum_{x \in X} f(x) x, \quad \text{llavors, } \forall x \in X, f(x) = 0, \quad \text{i.e., } f = 0.$$

Així, φ és injectiva.

Per a la sobrejectivitat, considerem $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in B$. Si agafem la funció $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(x_i) = \lambda_i$ i tal que $f(x) = 0$ si $x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. És clar que $f \in A$ en tindre suport finit $T := \{x_1, \dots, x_n\}$. A més, f satisfà que

$$\varphi(f) = \sum_{x \in X} f(x) x = \sum_{i=1}^n f(x_i) x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Per tant, φ és bijectiva i, consegüentment, un isomorfisme. $\square$

A partir d'ara, emprarem sempre la Definició 3.12. És a dir, $F_{\mathbb{K}}(X)$ sempre denotarà l'espai vectorial de combinacions lineals formals sobre X . Un dels avantatges que ens aporta aquesta construcció és que sempre té associada una base trivial com s'aprecia en el següent corol·lari.

COROL·LARI 3.14. *Siga X un conjunt, aleshores X és una base de $F_{\mathbb{K}}(X)$.*

DEMOSTRACIÓ. Continuant amb la notació de la demostració de la Proposició 3.13, per la Proposició 3.11 sabem que $\mathcal{B}_A := \{\delta_x \mid x \in X\}$ és una base d' A . Així, pel Corol·lari 2.46, $\varphi[\mathcal{B}_A]$ serà base de B .

Notem que per a cada $y \in X$,

$$\varphi(\delta_y) = \sum_{x \in X} \delta_y(x)x = 1y = y.$$

Per tant, $\varphi[\mathcal{B}_A] = \{\varphi(\delta_x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$ com volíem provar. $\square$

NOTA 3.15. Si V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat amb base $\mathcal{B}$, llavors V és el conjunt de les combinacions lineals de $\mathcal{B}$, mentre que $F_{\mathbb{K}}(\mathcal{B})$ és el conjunt de combinacions lineals formals de $\mathcal{B}$. D'aquesta manera, la identificació de V amb $F_{\mathbb{K}}(\mathcal{B})$ en aquest cas és evident.

L'espai vectorial lliure també té la seua pròpia propietat universal. De nou, per a estudiar-la, prèviament hem de definir una aplicació: la inclusió canònica.

DEFINICIÓ 3.16. Per a un conjunt X , definim l'**inclusió canònica** en $F_{\mathbb{K}}(X)$ com l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \text{in}_X: & X & \longrightarrow F_{\mathbb{K}}(X) \\ & x & \longmapsto x. \end{array}$$

NOTA 3.17. És clar que la inclusió canònica és una aplicació lineal.

Veiem així la propietat universal de l'espai vectorial lliure.

PROPOSICIÓ 3.18. (*Propietat universal de l'espai vectorial lliure*). Siga X un conjunt, V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f: X \rightarrow V$ una aplicació. Aleshores existeix una única aplicació lineal $f^\sharp: F_{\mathbb{K}}(X) \rightarrow V$ tal que $f^\sharp \circ \text{in}_X = f$, i.e., el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{in}_X} & F_{\mathbb{K}}(X) \\ & \searrow f & \downarrow \exists! f^\sharp \text{ lineal} \\ & & V \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ. Definim l'aplicació

$$f^\sharp: \begin{array}{ccc} F_{\mathbb{K}}(X) & \longrightarrow & V \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i). \end{array}$$

Comprovem que compleix les propietats enunciades. Primerament, és lineal, ja que donats $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^m \mu_j \tilde{x}_j \in F_{\mathbb{K}}(X)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f^\sharp \left(\alpha \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) + \beta \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \tilde{x}_j \right) \right) \\ = f^\sharp \left(\sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta \mu_j \tilde{x}_j \right) & \quad (\text{Estr. } F_{\mathbb{K}}(X)) \\ = \sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i f(x_i) + \sum_{j=1}^m \beta \mu_j f(\tilde{x}_j) & \quad (\text{Def. } f^\sharp) \\ = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \beta \sum_{j=1}^m \mu_j f(\tilde{x}_j) & \quad (\text{Estr. } V) \\ = \alpha f^\sharp \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) + \beta f^\sharp \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \tilde{x}_j \right). & \quad (\text{Def. } f^\sharp) \end{aligned}$$

Segonament, és clar que $f^\sharp \circ \text{in}_X = f$, doncs per a qualsevol $x \in X$,

$$(f^\sharp \circ \text{in}_X)(x) = f^\sharp(\text{in}_X(x)) = f^\sharp(x) = f(x).$$

Per últim, ens falta verificar la unicitat. Així, siga una aplicació $g : F_{\mathbb{K}}(X) \longrightarrow V$ lineal tal que $g \circ \text{in}_X = f$, veiem que $f^\sharp = g$. Donat $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in F_{\mathbb{K}}(X)$,

$$\begin{aligned} g \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i) & (g \text{ lineal}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (g \circ \text{in}_X)(x_i) & (\text{Def. } \text{in}_X) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) & (g \circ \text{in}_X = f) \\ &= f^\sharp \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right). & (\text{Def. } f^\sharp) \end{aligned}$$

D'aquesta manera, $g = f^\sharp$ com volíem demostrar. $\square$

Per la Nota 3.15, realment tenim un altre resultat: donat un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat amb base $\mathcal{B}$, si definim una aplicació $f : \mathcal{B} \longrightarrow W$ on W és altre $\mathbb{K}$ -espai vectorial, la podem estendre de manera única a un homomorfisme mitjançant $f^\sharp$. És a dir, $f^\sharp$ seria l'única aplicació lineal de V en W tal que $f^\sharp(e) = f(e)$ per a tot $e \in \mathcal{B}$.

Dit açò, tenim un corol·lari que ens permet assignar a cada matriu un homorfisme.

COROL·LARI 3.19. *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats, amb bases $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$. Siga $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Llavors existeix una única aplicació lineal de V en W tal que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(f)$.*

DEMOSTRACIÓ. Siga

$$A := \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m,1} & \cdots & \lambda_{m,n} \end{pmatrix}$$

Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} f: \mathcal{B} &\longrightarrow W \\ e_i &\longmapsto \sum_{j=1}^m \lambda_{j,i} \tilde{e}_j \end{aligned}$$

i considerem $f^\sharp: V \longrightarrow W$. Així, $f^\sharp$ és una aplicació lineal que, per definició,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(f^\sharp) = ([f^\sharp(e_1)]_{\tilde{\mathcal{B}}} \cdots [f^\sharp(e_n)]_{\tilde{\mathcal{B}}}) = ([f(e_1)]_{\tilde{\mathcal{B}}} \cdots [f(e_n)]_{\tilde{\mathcal{B}}}) = A.$$

Per tant, $f^\sharp$ és l'aplicació que buscàvem. Per verificar la unicitat, considerem $g: V \longrightarrow W$ satisfent que $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(g) = A$. Per definició de matriu coordinada, $g \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = f$, ja que les coordenades d'un vector són úniques. Però, per la unicitat de $f^\sharp$, $g = f^\sharp$ com volíem. $\square$

Per finalitzar aquesta secció, provarem un lema que serà necessari al final del Capítol 5 i que completa la discussió feta anteriorment. Realment, per definir una aplicació lineal que té com a domini un espai vectorial finitament generat, és prou amb conèixer les imatges dels elements de la base.

LEMA 3.20. *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb V finitament generat, $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}, W)$ on $\mathcal{B}$ és una base de V .*

DEMOSTRACIÓ. Siga $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} (\cdot)|_{\mathcal{B}}: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}, W) \\ f &\longmapsto f|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

on $f|_{\mathcal{B}}(e_i) := f(e_i)$ per a tot $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ i tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Evidentment, està ben definida. Comprovem que és un isomorfisme.

Primerament, hem de corroborar la seua linealitat. Donats $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, volem que $(\alpha f + \beta g)|_{\mathcal{B}} = \alpha f|_{\mathcal{B}} + \beta g|_{\mathcal{B}}$. Així, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)|_{\mathcal{B}}(e_i) &= (\alpha f + \beta g)(e_i) && \text{(Def. } (\alpha f + \beta g)|_{\mathcal{B}}) \\ &= \alpha f(e_i) + \beta g(e_i) && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= \alpha f|_{\mathcal{B}}(e_i) + \beta g|_{\mathcal{B}}(e_i) && \text{(Def. } f|_{\mathcal{B}}, g|_{\mathcal{B}}) \end{aligned}$$

$$= (f|_{\mathcal{B}} + \beta g|_{\mathcal{B}})(e_i). \quad (\text{Estr. aplicacions})$$

Per tant, únicament hem de veure que és bijectiva: ho farem trobant la inversa. Definim l'assignació:

$$(\cdot)^{\#}: \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}, W) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ f & \longmapsto & f^{\#} \end{array}$$

Recordem que identifiquem $F_{\mathbb{K}}(\mathcal{B})$ amb V . Verifiquem que $(\cdot)^{\#}$ és la inversa. Per una part, donat $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, hem de provar que $(f|_{\mathcal{B}})^{\#} = f$. Així, per a qualsevol $v \in V$, com que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ per a certs $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, aleshores,

$$\begin{aligned} (f|_{\mathcal{B}})^{\#}(v) &= (f|_{\mathcal{B}})^{\#} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) && (\text{Def. } v) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (f|_{\mathcal{B}})^{\#}(e_i) && ((f|_{\mathcal{B}})^{\#} \text{ lineal}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f|_{\mathcal{B}}(e_i) && ((f|_{\mathcal{B}})^{\#} \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = f|_{\mathcal{B}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) && (\text{Def. } f|_{\mathcal{B}}) \\ &= f \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) && (f \text{ lineal}) \\ &= f(v). && (\text{Def. } v) \end{aligned}$$

Per altra part, cal verificar que, per a cada $g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}, W)$, $(g^{\#})|_{\mathcal{B}} = g$. Així, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} (g^{\#})|_{\mathcal{B}}(e_i) &= g^{\#}(e_i) && (\text{Def. } (g^{\#})|_{\mathcal{B}}) \\ &= g(e_i). && (g^{\#} \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = g) \end{aligned}$$

Concloem que $(\cdot)|_{\mathcal{B}}$ és un isomorfisme. $\square$

3. Espai dual

Tot i que al capítol anterior abordarem les aplicacions lineals, hi ha un cas particular que, per la seua rellevància, és menester tractar-la en altra secció. Així, presentem l'espai dual. En especial, ens interessa el cas on l'espai vectorial de partida és finitament generat.

DEFINICIÓ 3.21. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, es defineix el seu **espai dual**, denotat per V^* , com $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$.*

Suposem que V té dimensió finita $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$. Si agafem una base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de V podem considerar la seua base dual,

definida com segueix: per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \delta_i: \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ e_j &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Per la propietat universal de l'espai vectorial lliure, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$ podem estendre δ_i a una única aplicació lineal $\delta_i^\sharp: V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\delta_i^\sharp \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = \delta_i$. A partir d'ara, escriurem e_i^* per a denotar $\delta_i^\sharp$. Veiem com actuen els e_i^* per a cada vector de V .

Siga $v \in V$, com que $\mathcal{B}$ és base de V , sabem que existeix únics $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tals que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Aleshores,

$$e_i^*(v) = \delta_i^\sharp(v) \quad (\text{Notació})$$

$$= \delta_i^\sharp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) \quad (\text{Def. } v)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i^\sharp(e_i) \quad (\delta_i^\sharp \text{ lineal})$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i(e_i) \quad (\delta_i^\sharp \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = \delta_i)$$

$$= \lambda_i. \quad (\text{Def. } \delta_i)$$

PROPOSICIÓ 3.22. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat amb base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, llavors $\mathcal{B}^* := \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ és base de V^* . En particular, $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.*

DEMOSTRACIÓ. Comprovem que $\mathcal{B}^* := \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ és base de V^* . Per una part, donat $f \in V^*$, si definim per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_i := f(e_i) \in \mathbb{K}$, veiem que $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$. Per a cada $v \in V$, com que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ per a certs $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i),$$

en ser f lineal. Però, també tenim

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right)(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i).$$

Així, $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$ i $\mathcal{B}^*$ és sistema generador. Per a la independència lineal, suposem que, per a certs $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^* = 0.$$

Per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, se satisfà que

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right)(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*(e_j) = \alpha_j.$$

Consegüentment, $\mathcal{B}^*$ és linealment independent. Concloem que $\mathcal{B}^*$ és base. $\square$

Notem que l'assignació

$$\begin{aligned} (\cdot)^*: \mathcal{B} &\longrightarrow V^* \\ e_i &\longmapsto e_i^* \end{aligned}$$

es pot estendre a única aplicació lineal $((\cdot)^)^\sharp: V \longrightarrow V^*$ tal que $((\cdot)^*)^\sharp \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = (\cdot)^*$.*

NOTA 3.23. *Escrivem $(\cdot)^*$ en compte de $((\cdot)^*)^\sharp$.*

Estudiem com actua aquesta aplicació sobre espais vectorials de dimensió finita. Siguen $v, u \in V$ i $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V , aleshores existeixen únics $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tals que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ i $u = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$. Per tant,

$$\begin{aligned} v^*(u) &= [((\cdot)^*)^\sharp(v)](u) && \text{(Notació)} \\ &= \left[((\cdot)^*)^\sharp \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \right] (u) && \text{(Def. } v) \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i ((\cdot)^*)^\sharp(e_i) \right) \right] (u) && (((\cdot)^*)^\sharp \text{ lineal}) \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right] (u) && (((\cdot)^*)^\sharp \circ \text{in}_{\mathcal{B}} = (\cdot)^*) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(u) && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i. && (\forall i \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(u) = \mu_i) \end{aligned}$$

Per acabar amb aquest capítol, presentem el següent lema.

LEMA 3.24. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat i siga $v \in V$ tal que, per a tota aplicació $f \in V^*$, $f(v) = 0$. Llavors $v = 0$.*

DEMOSTRACIÓ. Per reducció a l'absurd, suposem que $v \neq 0$. Aleshores $\{v\}$ és un conjunt linealment independent i es pot ampliar fins obtenir una base de V , $\mathcal{B} = \{v, e_2, \dots, e_n\}$. Considerem ara l'element de la base dual, $v^* \in V^*$. Observem que $v^*(v) = 1$, contradient la hipòtesi. Així, $v = 0$. $\square$

Introducció al producte tensorial

1. Definició, existència i unicitat

El propòsit d'aquest treball és conèixer el producte tensorial d'espais vectorials. Els Capítols 2 i 3 han servit per a recopilar tota la teoria necessària abans de definir aquest concepte. Ara sí, ja estem preparats per entendre què és el producte tensorial de dos espais vectorials. Remarquem que únicament és el de dos espais vectorials i no més. Reservem per al Capítol 7 el producte tensorial d'una quantitat finita arbitrària d'espais vectorials.

DEFINICIÓ 4.1. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Un **producte tensorial** de V i W és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial Z junt a una aplicació bilineal $\varphi: V \times W \rightarrow Z$ satisfent la següent propietat universal: donats un $\mathbb{K}$ -espai vectorial T i una aplicació bilineal $\psi: V \times W \rightarrow T$ qualssevol, existeix una única aplicació lineal $\psi^b: Z \rightarrow T$ de manera que el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\varphi} & Z \\
 & \searrow \psi & \downarrow \exists! \psi^b \text{ lineal} \\
 & & T
 \end{array}$$

Abans de continuar, cal examinar que aquesta definició té sentit, és a dir, que donats dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, sempre existeix un producte tensorial entre aquests. Veurem dues construccions diferents les quals compleixen amb la definició.

PROPOSICIÓ 4.2. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Siga U el subespai de $F_{\mathbb{K}}(V \times W)$ generat pels elements de la forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda(v, w) - (\lambda v, w), & v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{K}, \\ \lambda(v, w) - (v, \lambda w), & v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{K}, \\ (v, w + w') - (v, w) - (v, w'), & v \in V, w, w' \in W, \\ (v + v', w) - (v, w) - (v', w), & v, v' \in V, w \in W. \end{array} \right. \quad (5)$$

Considerem $Z := F_{\mathbb{K}}(V \times W)/U$ i $\varphi: V \times W \rightarrow Z$, $\varphi := \text{pr}_U \circ \text{in}_{V \times W}$. Aleshores (Z, φ) és un producte tensorial de V i W .

DEMOSTRACIÓ. És clar que Z és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, ja que l'espai vectorial lliure i l'espai quocient ho són. Veiem que φ és bilineal. Siguen

$v, v' \in V$, $w \in W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, aleshores

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda v + \mu v', w) &= [(\lambda v + \mu v', w)]_U && (\text{Def. } \varphi) \\
 &= [(\lambda v, w)]_U + [(\mu v', w)]_U && (\text{Compatible suma}) \\
 &= \lambda[(v, w)]_U + \mu[(v', w)]_U && (\text{Compatible producte}) \\
 &= \lambda\varphi(v, w) + \mu\varphi(v', w). && (\text{Def. } \varphi)
 \end{aligned}$$

Per tant, φ és lineal en la primera component. La comprovació del fet que és lineal en la segona component és anàloga. D'aquesta manera, φ és bilineal.

Falta per provar que φ satisfà la propietat universal. Sigui T un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $\psi: V \times W \rightarrow T$ bilineal. Per la propietat universal de l'espai lliure, sabem que existeix una única aplicació lineal $\psi^\#$ tal que aquest diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\text{in}_{V \times W}} & F_{\mathbb{K}}(V \times W) \\
 & \searrow \psi & \downarrow \exists! \psi^\# \text{ lineal} \\
 & & T
 \end{array}$$

Notem que els elements de la forma (5) tenen imatge nul·la. Per exemple, per a $\lambda(v, w) - (\lambda v, w) \in F_{\mathbb{K}}(V \times W)$,

$$\begin{aligned}
 \psi^\#(\lambda(v, w) - (\lambda v, w)) &= (\psi^\# \circ \text{in}_{V \times W})(\lambda(v, w) - (\lambda v, w)) && (\text{Def. } \text{in}_{V \times W}) \\
 &= \psi(\lambda(v, w) - (\lambda v, w)) && (\psi^\# \circ \text{in}_{V \times W} = \psi) \\
 &= \psi(0, \lambda w - w) && (\text{Estr. } V \times W) \\
 &= 0. && (\text{Lema 2.60})
 \end{aligned}$$

La demostració per a la resta d'elements és similar. Si $s \in U$, existeixen elements $s_1, \dots, s_n \in U$ amb la forma de (5) i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ de manera que $s = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$. Així,

$$\begin{aligned}
 \psi^\#(s) &= \psi^\#(\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n) && (\text{Def. } s) \\
 &= \lambda_1 \psi^\#(s_1) + \dots + \lambda_n \psi^\#(s_n) && (\psi^\# \text{ lineal}) \\
 &= 0. && (\forall i, \psi^\#(s_i) = 0)
 \end{aligned}$$

Per tant, $U \subseteq \text{Ker}(\psi^\#)$. Com que $\psi^\#: F_{\mathbb{K}}(V \times W) \rightarrow T$ és lineal, per la propietat universal de l'espai quocient, existeix una única aplicació lineal $(\psi^\#)^\sharp: F_{\mathbb{K}}(V \times W)/U \rightarrow T$ tal que el següent diagrama

commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 F_{\mathbb{K}}(V \times W) & \xrightarrow{\text{pr}_U} & F_{\mathbb{K}}(V \times W)/U \\
 & \searrow \psi^\sharp & \downarrow \exists!(\varphi^\sharp)^\sharp \text{ lineal} \\
 & & T
 \end{array}$$

Llavors, si comprovem que $(\psi^\sharp)^\sharp \circ \varphi = \psi$, hem acabat. En efecte,

$$\begin{aligned}
 (\psi^\sharp)^\sharp \circ \varphi &= (\psi^\sharp)^\sharp \circ (\text{pr}_U \circ \text{in}_{V \times W}) && \text{(Def. } \varphi) \\
 &= ((\psi^\sharp)^\sharp \circ \text{pr}_U) \circ \text{in}_{V \times W} && \text{(Associativitat)} \\
 &= \psi^\sharp \circ \text{in}_{V \times W} && ((\psi^\sharp)^\sharp \circ \text{pr}_U = \psi^\sharp) \\
 &= \psi. && (\psi^\sharp \circ \text{in}_{V \times W} = \psi)
 \end{aligned}$$

Així doncs, φ compleix la propietat universal del producte tensorial, ja que la unicitat es té gràcies a les unicitats de $(\psi^\sharp)^\sharp$ i $\psi^\sharp$. Concloem que $(F_{\mathbb{K}}(V \times W))/U, \varphi$ és un producte tensorial de V i W . $\square$

Altra construcció coneguda es pot trobar a [Rya02]. Presentem-la amb detall. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Sabem que $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, \mathbb{K})^$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Definim*

$$\begin{aligned}
 \Phi: \quad V \times W &\longrightarrow \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, \mathbb{K})^* \\
 (v, w) &\longmapsto \Phi(v, w),
 \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}
 \Phi(v, w): \quad \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
 \psi &\longmapsto \psi(v, w).
 \end{aligned}$$

Veiem que Φ està ben definida, és a dir, que per a qualsevol $(v, w) \in V \times W$, $\Phi(v, w)$ és lineal, ja que ha de ser un element de l'espai dual. Així, siguen $\psi_1, \psi_2 \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, \mathbb{K})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
 \Phi(v, w)(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) &= (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(v, w) && \text{(Def. } \Phi(v, w)) \\
 &= \alpha\psi_1(v, w) + \beta\psi_2(v, w) && \text{(Estr. aplicacions)} \\
 &= \alpha\Phi(v, w)(\psi_1) + \beta\Phi(v, w)(\psi_2). && \text{(Def. } \Phi(v, w))
 \end{aligned}$$

Per tant, $\Phi(v, w)$ és lineal i, així, un element de $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, \mathbb{K})^$ per a qualsevol $(v, w) \in V \times W$.*

Per altra part, considerem

$$Z := \langle \text{Im}(\Phi) \rangle \leq \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, \mathbb{K})^*.$$

Per construcció, és subespai vectorial de $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, \mathbb{K})^$. Així, podem construir una aplicació de $V \times W$ en Z com segueix:*

$$\begin{aligned}
 \varphi: \quad V \times W &\longrightarrow Z \\
 (v, w) &\longmapsto \Phi(v, w).
 \end{aligned}$$

És a dir, φ és la correstricció de Φ a Z .

PROPOSICIÓ 4.3. *La tupla (Z, φ) que acabem de definir és un producte tensorial de V i W .*

DEMOSTRACIÓ. Hem de provar que φ és bilineal i que el parell (Z, φ) satisfà la propietat universal del producte tensorial. Comencem per la bilinealitat: siguin $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, verifiquem que φ és lineal en la primera component. Amb aquest objectiu, cal veure que $\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2, w)$ i $\alpha\varphi(v_1, w) + \beta\varphi(v_2, w)$ actuen de la mateixa manera per a qualsevol $\psi \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, \mathbb{K})$. Així,

$$\begin{aligned}
 \varphi(\alpha v_1 + \beta v_2, w)(\psi) &= \Phi(\alpha v_1 + \beta v_2, w)(\psi) && (\text{Def. } \varphi) \\
 &= \psi(\alpha v_1 + \beta v_2, w) && (\text{Def. } \Phi) \\
 &= \alpha\psi(v_1, w) + \beta\psi(v_2, w) && (\psi \text{ bilineal}) \\
 &= \alpha\Phi(v_1, w)(\psi) + \beta\Phi(v_2, w)(\psi) && (\text{Def. } \Phi) \\
 &= (\alpha\Phi(v_1, w) + \beta\Phi(v_2, w))(\psi) && (\text{Estr. aplicacions}) \\
 &= (\alpha\varphi(v_1, w) + \beta\varphi(v_2, w))(\psi). && (\text{Def. } \varphi)
 \end{aligned}$$

Per tant, φ és lineal en la primera component. Per a la segona, la comprovació és anàloga i se segueix la bilinealitat.

Ens falta corroborar que (Z, φ) satisfà la propietat universal. Siga T un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siga $\psi: V \times W \rightarrow T$ una aplicació bilineal, volem comprovar que existeix una única aplicació lineal $\psi^b: Z \rightarrow T$ tal que el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\varphi} & Z \\
 & \searrow \psi & \downarrow \exists! \psi^b \text{ lineal} \\
 & & T
 \end{array} \quad (6)$$

Donat $z \in Z$, com que $Z = \langle \text{Im}(\Phi) \rangle$, aleshores

$$z = \lambda_1 \Phi(v_1, w_1) + \dots + \lambda_n \Phi(v_n, w_n),$$

per a certs $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $v_1, \dots, v_n \in V$, $w_1, \dots, w_n \in W$ i $n \in \mathbb{N}$. Definim

$$\begin{aligned}
 \psi^b: \quad Z &\longrightarrow T \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(v_i, w_i) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(v_i, w_i).
 \end{aligned}$$

S'ha de veure que és lineal. Siguin $z, z' \in Z$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, sabem que $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(v_i, w_i)$ i $z' = \sum_{j=1}^m \mu_j \Phi(v'_j, w'_j)$, per a certs $(v_i, w_i), (v'_j, w'_j) \in$

$V \times W$, $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}$ on $i \in \{1, \dots, n\}$ i $j \in \{1, \dots, m\}$. Per tant,

$$\begin{aligned}
 \psi^b(\alpha z + \beta z') &= \psi^b\left(\alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(v_i, w_i) + \beta \sum_{j=1}^m \mu_j \Phi(v'_j, w'_j)\right) \quad (\text{Def. } z, z') \\
 &= \psi^b\left(\sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i \Phi(v_i, w_i) + \sum_{j=1}^m \beta \mu_j \Phi(v'_j, w'_j)\right) \quad (\text{Estr. } Z) \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha \lambda_i \psi(v_i, w_i) + \sum_{j=1}^m \beta \mu_j \psi(v'_j, w'_j) \quad (\text{Def. } \psi^b) \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(v_i, w_i) + \beta \sum_{j=1}^m \mu_j \psi(v'_j, w'_j) \quad (\text{Estr. } T) \\
 &= \alpha \psi^b(z) + \beta \psi^b(z'). \quad (\text{Def. } \psi^b, z, z')
 \end{aligned}$$

Consegüentment, ψ^b és lineal. Adonem-nos que el diagrama (6) commuta ja que, per a tot $(v, w) \in V \times W$,

$$(\psi^b \circ \varphi)(v, w) = \psi^b(\varphi(v, w)) = \psi^b(\Phi(v, w)) = \psi(v, w).$$

Això és, $\psi^b \circ \varphi = \psi$ com volíem.

Per últim, hem de provar que ψ^b és l'única aplicació lineal amb dita propietat. Suposem que existeix $\bar{\psi}: Z \rightarrow T$ lineal tal que $\bar{\psi} \circ \varphi = \psi$. Volem $\bar{\psi} = \psi^b$. Siga $z \in Z$ amb $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(v_i, w_i)$. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(z) &= \bar{\psi}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(v_i, w_i)\right) \quad (\text{Def. } z) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\psi}(\Phi(v_i, w_i)) \quad (\bar{\psi} \text{ lineal}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\psi}(\varphi(v_i, w_i)) \quad (\text{Def. } \varphi) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(v_i, w_i) \quad (\bar{\psi} \circ \varphi = \psi) \\
 &= \psi^b(z). \quad (\text{Def. } \psi^b, z)
 \end{aligned}$$

Per tant, $\bar{\psi} = \psi^b$ i concloem que (Z, φ) és un producte tensorial. $\square$

Ara bé, donades dues construccions, apareix el dubte de quin producte tensorial considerar si existeix més d'un. Gràcies a la següent propietat, notem que podem parlar que únicament existeix un "únic" producte tensorial tret d'isomorfisme únic.

PROPOSICIÓ 4.4. *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siguen (Z, φ) i (Z', φ') dos productes tensorials de V i W . Aleshores Z i Z' són isomorfs.*

DEMOSTRACIÓ. Per les propietats universals de φ i de φ' , com que φ' i φ són aplicacions bilineals, existeixen unes úniques aplicacions lineals $(\varphi')^b$ i φ^b tals que els següents diagrames commuten:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow \varphi' & \downarrow \exists! (\varphi')^b \text{ lineal} \\ & & Z' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\varphi'} & Z' \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \varphi^b \text{ lineal} \\ & & Z \end{array}$$

Per tant, tenim els següents diagrames:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ \downarrow \varphi & \searrow \varphi' & \downarrow \exists! (\varphi')^b \text{ lineal} \\ Z & \xleftarrow{\exists! \varphi^b \text{ lineal}} & Z' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \varphi^b = \text{id}_Z \text{ lineal} \\ & & Z \end{array}$$

Notem que com l'aplicació identitat és lineal i la composició d'aplicacions lineals també, per la unicitat d'aquestes en el producte tensorial, podem afirmar que $\varphi^b \circ (\varphi')^b = \text{id}_Z$. Raonant anàlogament, s'obté $(\varphi')^b \circ \varphi^b = \text{id}_{Z'}$. Concloem que Z i Z' són $\mathbb{K}$ -espais vectorials isomorfs. $\square$

NOTA 4.5. *Acabem de provar que el producte tensorial és únic tret d'isomorfisme únic. D'aquesta manera, a partir d'ara ens referirem "al" producte tensorial, ja que el que realment ens interessa és que té associat una aplicació bilineal i la propietat universal que satisfà junt amb aquesta. A més, denotarem el producte tensorial de V i W per $V \otimes W$ i si $(v, w) \in V \times W$ escriurem $v \otimes w$ per a referir-nos a $\varphi(v, w)$, on φ és l'aplicació bilineal associada. També, farem un abús de notació, denotant l'aplicació bilineal φ per $\otimes$.*

Arran del producte tensorial hem definit una assignació de la forma

$$\begin{array}{ccc} (\cdot)^b: & \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, T) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, T) \\ & \psi & \longmapsto & \psi^b. \end{array}$$

Aquesta assignació és de molta importància, puix que, com provarem, és un isomorfisme.

PROPOSICIÓ 4.6. *L'assignació $(\cdot)^b$ és un isomorfisme. Com a conseqüència, $\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, T) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, T)$ per a qualssevol $\mathbb{K}$ -espais vectorials V, W i T .*

DEMOSTRACIÓ. Hem de verificar que l'assignació és lineal, injectiva i sobrejectiva. Començarem amb la linealitat. Així, considerem

$$\psi_1: V \times W \longrightarrow T, \quad \psi_2: V \times W \longrightarrow T$$

aplicacions bilineals i escalars $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Volem provar que

$$(\cdot)^b(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha(\cdot)^b(\psi_1) + \beta(\cdot)^b(\psi_2),$$

és a dir, que

$$(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)^b = \alpha\psi_1^b + \beta\psi_2^b.$$

Per la propietat universal del producte tensorial, $(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)^b$ és l'única aplicació lineal que satisfà:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \searrow \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 & \downarrow \exists!(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)^b \text{ lineal} \\ & & T \end{array}$$

Però, per altra part:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \searrow \psi_1 & \downarrow \exists!\psi_1^b \text{ lineal} \\ & & T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \searrow \psi_2 & \downarrow \exists!\psi_2^b \text{ lineal} \\ & & T \end{array}$$

Així, $\alpha\psi_1^b + \beta\psi_2^b$ és una aplicació lineal i a més compleix que

$$(\alpha\psi_1^b + \beta\psi_2^b) \circ \otimes = \alpha(\psi_1^b \circ \otimes) + \beta(\psi_2^b \circ \otimes) = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2.$$

Per la unicitat de $(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)^b$, es té que $(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)^b = \alpha\psi_1^b + \beta\psi_2^b$ i $(\cdot)^b$ és lineal.

La bijectivitat de $(\cdot)^b$ la provarem donant la seua inversa. Considerem l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} (\cdot) \circ \otimes: & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, T) & \longrightarrow & \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, T) \\ & f & \longmapsto & f \circ \otimes. \end{array}$$

Hem de comprovar que està ben definida, és a dir, que si considerem $f: V \otimes W \longrightarrow T$ aplicació lineal, llavors $f \circ \otimes$ és bilineal de $V \times W$ en T . Siguen $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (f \circ \otimes)(\alpha v_1 + \beta v_2, w) &= f((\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w) && \text{(Notació)} \\ &= f(\alpha(v_1 \otimes w) + \beta(v_2 \otimes w)) && (\otimes \text{ bilineal}) \\ &= \alpha f(v_1 \otimes w) + \beta f(v_2 \otimes w) && (f \text{ lineal}) \\ &= \alpha(f \circ \otimes)(v_1, w) + \beta(f \circ \otimes)(v_2, w). && \text{(Notació)} \end{aligned}$$

Per tant, és lineal en la primera component i, anàlogament, es veu que és lineal en la segona. Consegüentment, $f \circ \otimes$ és bilineal i $(\cdot) \circ \otimes$

està ben definida. Així, falta per corroborar que és la inversa de $(\cdot)^b$, això és,

$$((\cdot) \circ \otimes) \circ (\cdot)^b = \text{id}_{\text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, T)}, \quad (\cdot)^b \circ ((\cdot) \circ \otimes) = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, T)}.$$

Siga $\psi \in \text{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, T)$. Per la propietat universal del producte tensorial, sabem que $\psi^b \circ \otimes = \psi$. D'aquesta manera:

$$(((\cdot) \circ \otimes) \circ (\cdot)^b)(\psi) = ((\cdot) \circ \otimes)(\psi^b) = \psi^b \circ \otimes = \psi.$$

Per altra part, siga $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, T)$, com que hem provat que $f \circ \otimes$ és bilineal, per la propietat universal del producte tensorial aquest diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \searrow f \circ \otimes & \downarrow \exists! (f \circ \otimes)^b \text{ lineal} \\ & & T \end{array}$$

És a dir, $(f \circ \otimes)^b \circ \otimes = f \circ \otimes$. Com que f és lineal, per la unicitat de la propietat universal, $(f \circ \otimes)^b = f$, i concloem que

$$((\cdot)^b \circ ((\cdot) \circ \otimes))(f) = ((\cdot)^b)(f \circ \otimes) = (f \circ \otimes)^b = f.$$

D'aquesta manera, $(\cdot)^b$ presenta inversa, la qual és $((\cdot)^b)^{-1} = (\cdot) \circ \otimes$, i aleshores és bijectiva. En ser bijectiva i lineal, és un isomorfisme. $\square$

2. Propietats bàsiques

Recordem que si V i W són dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $f: V \rightarrow W$ una aplicació lineal i sobrejectiva i $A \subseteq V$ és un sistema generador, aleshores, per la Proposició 2.45, $f[A]$ és sistema generador de W . Basant-nos en la construcció del producte tensorial de la Proposició 4.2, com que $F_{\mathbb{K}}(V \times W)$ i $V \otimes W$ són $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $\text{pr}_U: F_{\mathbb{K}}(V \times W) \rightarrow V \otimes W$ és lineal i sobrejectiva i $V \times W \subseteq F_{\mathbb{K}}(V \times W)$ és sistema generador, llavors

$$\text{pr}_U[V \times W] = \{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$$

és sistema generador de $V \otimes W$. Encara que hem gastat la primera construcció, recordem que qualsevol altra és isomorfa a aquesta gràcies a la unicitat del producte tensorial.

DEFINICIÓ 4.7. Els elements de $V \otimes W$ s'anomenen **tensors**. En-demés, els tensors que tenen la forma $v \otimes w$ on $v \in V$ i $w \in W$ s'anomenen **tensors elementals**.

Notem per l'observació prèvia que els tensors elementals generen $V \otimes W$. Per tant, tot element de $V \otimes W$ és una combinació lineal de

tensors elementals. Però com que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i v_i) \otimes w_i,$$

tot element de $V \otimes W$ és una suma finita de tensors elementals.

Això és de molta ajuda doncs, per exemple, donada una aplicació lineal $\psi: V \otimes W \rightarrow Z$, basta conèixer la seua imatge per als tensors elementals, ja que si $t \in V \otimes W$, $t := \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$ per a certs $v_i \in V$, $w_i \in W$, $i \in \{1, \dots, n\}$, llavors

$$\psi(t) = \psi\left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i \otimes w_i). \quad (7)$$

Això també ens facilita la labor si volem demostrar que una aplicació és lineal, ja que provar-ho amb tensors elementals és suficient, en ser tot tensor suma d'aquests. Finalment, si el nostre objectiu és veure que una aplicació lineal és la identitat, observant (7), clarament basta examinar que, per a tot tensor elemental, la funció retorna el mateix tensor elemental.

Al següent capítol tractarem els tensors elementals més en detall. En aquesta secció, mostrarem com la propietat universal ens serveix per a demostrar propietats bàsiques, començant per la següent.

PROPOSICIÓ 4.8. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Llavors $\mathbb{K} \otimes V \cong V$.*

DEMOSTRACIÓ. Per una part, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v. \end{aligned}$$

Aquesta aplicació és bilineal. En efecte, si considerem $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i $v \in V$,

$$\psi(\alpha\lambda + \beta\mu, v) = (\alpha\lambda + \beta\mu)v \quad (\text{Def. } \psi)$$

$$= \alpha\lambda v + \beta\mu v \quad (\text{EV2})$$

$$= \alpha(\lambda v) + \beta(\mu v) \quad (\text{EV3})$$

$$= \alpha\psi(\lambda, v) + \beta\psi(\mu, v). \quad (\text{Def. } \psi)$$

Per tant és lineal en la primera component. Pel que fa a la segona, agafant $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $v, v' \in V$,

$$\psi(\lambda, \alpha v + \beta v') = \lambda(\alpha v + \beta v') \quad (\text{Def. } \psi)$$

$$= \lambda\alpha v + \lambda\beta v' \quad (\text{EV1})$$

$$= \alpha(\lambda v) + \beta(\lambda v') \quad (\text{Commutativitat i EV3})$$

$$= \alpha\psi(\lambda, v) + \beta\psi(\lambda, v'). \quad (\text{Def. } \psi)$$

Així, ψ és bilineal i per la propietat universal del producte tensorial existeix una única aplicació lineal ψ^b tal que el següent diagrama

commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} \times V & \xrightarrow{\otimes} & \mathbb{K} \otimes V \\
 & \searrow \psi & \downarrow \exists! \psi^b \text{ lineal} \\
 & & V
 \end{array}$$

Per altra part, siga l'aplicació

$$\begin{aligned}
 \xi: V &\longrightarrow \mathbb{K} \otimes V \\
 v &\longmapsto 1 \otimes v.
 \end{aligned}$$

Notem que ξ és lineal ja que si agafem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $v, v' \in V$,

$$\begin{aligned}
 \xi(\alpha v + \beta v') &= 1 \otimes (\alpha v + \beta v') && (\text{Def. } \xi) \\
 &= \alpha(1 \otimes v) + \beta(1 \otimes v') && (\otimes \text{ bilinear}) \\
 &= \alpha\xi(v) + \beta\xi(v'). && (\text{Def. } \xi)
 \end{aligned}$$

Si provem que $(\psi^b)^{-1} = \xi$, ψ^b seria bijectiva i, com que és lineal, un isomorfisme. En conseqüència, comprovem primer que $\xi \circ \psi^b = \text{id}_{\mathbb{K} \otimes V}$. En ser tant ψ com ξ lineals, la seua composició és lineal i d'aquesta manera és suficient de veure-ho per als tensors elementals. Així, si agafem $\lambda \in \mathbb{K}$ i $v \in V$,

$$\begin{aligned}
 (\xi \circ \psi^b)(\lambda \otimes v) &= \xi(\psi^b(\lambda \otimes v)) && (\text{Composició}) \\
 &= \xi(\psi(\lambda, v)) && (\psi^b \circ \otimes = \psi) \\
 &= \xi(\lambda v) && (\text{Def. } \psi) \\
 &= 1 \otimes \lambda v && (\text{Def. } \xi) \\
 &= \lambda \otimes v. && (\otimes \text{ bilinear})
 \end{aligned}$$

Finalment, verifiquem que $\psi^b \circ \xi = \text{id}_V$. Per a $v \in V$,

$$\begin{aligned}
 (\psi^b \circ \xi)(v) &= \psi^b(\xi(v)) && (\text{Composició}) \\
 &= \psi^b(1 \otimes v) && (\text{Def. } \xi) \\
 &= \psi(1, v) && (\psi^b \circ \varphi = \psi) \\
 &= v. && (\text{Def. } \psi \text{ i EV4})
 \end{aligned}$$

Concloem que $\psi^b \circ \xi = \text{id}_V$ i, així mateix, que $\mathbb{K} \otimes V$ i V són isomorfs. $\square$

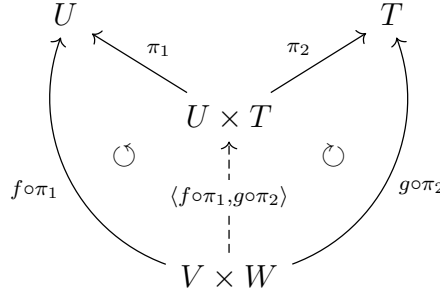
NOTA 4.9. A partir d'ara, a l'aplicació ψ^b de la demostració anterior l'anomenarem ϱ_V . És a dir, donat V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, $\varrho_V: \mathbb{K} \otimes V \longrightarrow V$ denota l'isomorfisme tal que per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$ i $v \in V$, $\varrho_V(\lambda \otimes v) = \lambda v$.

Sabem que el conjunt d'aplicacions lineals formen un espai vectorial. Per tant, és natural preguntar-se com funciona un tensor elemental

format per dues aplicacions lineals. En eixe sentit, introduïm el següent resultat.

PROPOSICIÓ 4.10. *Siguen U, V, W i T quatre $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siguem $f: V \rightarrow U$, $g: W \rightarrow T$ dues aplicacions lineals. Aleshores existeix una única aplicació lineal $f \otimes g: V \otimes W \rightarrow U \otimes T$ tal que, per a qualsevol $v \in V$ i $w \in W$, $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$.*

DEMOSTRACIÓ. Definim l'aplicació $\psi := \otimes \circ (\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle)$. Com que f, g són aplicacions lineals i les projeccions també, $f \circ \pi_1$ i $g \circ \pi_2$ també ho són. Així, $\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle$ és l'única aplicació lineal que satisfà que aquest diagrama commuta:



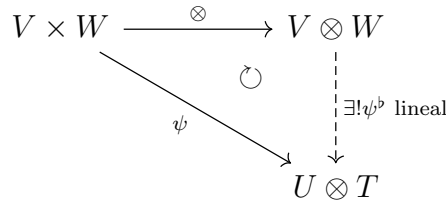
D'aquesta manera, per a cada $(v, w) \in V \times W$,

$$\begin{aligned}
 \psi(v, w) &= (\otimes \circ (\langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle))(v, w) && \text{(Def. } \psi) \\
 &= \otimes((f \circ \pi_1)(v, w), (g \circ \pi_2)(v, w)) && \text{(Def. } \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle) \\
 &= f(\pi_1(v, w)) \otimes g(\pi_2(v, w)) && \text{(Notació)} \\
 &= f(v) \otimes g(w). && \text{(Def. } \pi_1, \pi_2)
 \end{aligned}$$

L'aplicació que cerquem és ψ^b , però per poder-la definir cal primer veure que ψ és bilineal. Si agafem $v, v' \in V$ i $w \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
 \psi(\alpha v + \beta v', w) &= f(\alpha v + \beta v') \otimes g(w) && \text{(Def. } \psi) \\
 &= (\alpha f(v) + \beta f(v')) \otimes g(w) && (f \text{ lineal}) \\
 &= \alpha(f(v) \otimes g(w)) + \beta(f(v') \otimes g(w)) && (\otimes \text{ bilineal}) \\
 &= \alpha\psi(v, w) + \beta\psi(v', w). && \text{(Def. } \psi)
 \end{aligned}$$

Per tant, ψ és lineal en la primera component. La linealitat en la segona és anàloga. Així, ψ és bilineal i podem construir el següent diagrama commutatiu:



Així, per a tot $v \in V$ i $w \in W$, existeix una única aplicació lineal $\psi^b: V \otimes W \rightarrow U \otimes T$ tal que

$$\psi^b(v \otimes w) = \psi(v, w) = f(v) \otimes g(w),$$

com volíem demostrar. $\square$

NOTA 4.11. A l'aplicació ψ^b de la proposició anterior la denotarem per $f \otimes g$.

NOTA 4.12. Notem que $f \otimes g$ en aquest cas denota un element d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, U \otimes T)$. No obstant això, també es podria considerar com un tensor elemental d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, T)$. Més endavant veurem que aquesta ambigüitat no dona lloc a confusió si V i U són finitament generats.

Finalment, examinem com es relaciona l'aplicació definida a la Proposició 4.10 amb la composició d'aplicacions.

PROPOSICIÓ 4.13. Siguen V_1, V_2, V_3 i W_1, W_2, W_3 sis $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Siguen $f_1: V_1 \rightarrow V_2$, $f_2: V_2 \rightarrow V_3$ i $g_1: W_1 \rightarrow W_2$ i $g_2: W_2 \rightarrow W_3$ aplicacions lineals. Llavors,

$$(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) = (f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1).$$

DEMOSTRACIÓ. Utilitzem la caracterització de $(f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1)$. Sabem que $(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1)$ és una aplicació lineal de $V_1 \otimes W_1$ en $V_3 \otimes W_3$ en ser composició d'aplicacions lineals. A més, satisfà que per a tot $v \in V$, $w \in W$,

$$\begin{aligned} & ((f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1))(v \otimes w) \\ &= (f_2 \otimes g_2)((f_1 \otimes g_1)(v \otimes w)) && \text{(Composició)} \\ &= (f_2 \otimes g_2)(f_1(v) \otimes g_1(w)) && \text{(Prop.}^1 \text{ 4.10)} \\ &= (f_2(f_1(v)) \otimes g_2(g_1(w))) && \text{(Prop. 4.10)} \\ &= (f_2 \circ f_1)(v) \otimes (g_2 \circ g_1)(w) && \text{(Composició)} \\ &= ((f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1))(v \otimes w). && \text{(Prop. 4.10)} \end{aligned}$$

Com ambdues aplicacions són lineals i retornen la mateixa imatge per als tensors elementals, necessàriament són la mateixa aplicació. $\square$

¹Prop. serà l'abreviatura de Proposició.

Propietats del producte tensorial

1. Representació dels elements

Al capítol anterior hem observat com els tensors elementals generen la resta d'elements en el producte tensorial. Però, com són aquests elements? Hi tenen representació única? Quina relació tenen amb els vectors dels espais vectorials dels que procedeixen? En aquesta secció estudiarem tot açò.

Comencem amb aquesta proposició. Com notarem en diversos resultats, els conjunts linealment independents seran d'especial rellevància.

PROPOSICIÓ 5.1. Siga $\{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunt de vectors en V i $\{w_1, \dots, w_n\}$ un conjunt de vectors linealment independents en W . Si $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = 0$, aleshores $v_i = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$.

DEMOSTRACIÓ. Emprarem el Lema 3.24. Siga $\tilde{V} = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, evidentment $\tilde{V} \leq V$ és finitament generat i $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \in \tilde{V} \otimes W$. Per a qualsevol $f \in \tilde{V}^*$, considerem l'aplicació lineal

$$\begin{aligned} f \otimes \text{id}_W: \tilde{V} \otimes W &\longrightarrow \mathbb{K} \otimes W \\ \tilde{v} \otimes w &\longmapsto f(\tilde{v}) \otimes w. \end{aligned}$$

Per altra part, per la Proposició 4.8 sabem que l'aplicació $\varrho_W: \mathbb{K} \otimes W \longrightarrow W$ és un isomorfisme. Així, la composició d'aquestes dues aplicacions, $\psi := \varrho_W \circ (f \otimes \text{id}_W)$, és lineal i satisfà que, per a tot $\tilde{v} \in \tilde{V}$ i tot $w \in W$,

$$\psi(\tilde{v}, w) = \varrho_W((f \otimes \text{id}_W)(\tilde{v}, w)) = \varrho_W(f(\tilde{v}) \otimes w) = f(\tilde{v}) w.$$

Per tant, si $\sum_{i=0}^n v_i \otimes w_i = 0$, com que $\psi(0) = 0$ en ser ψ lineal,

$$\begin{aligned} 0 &= \psi \left(\sum_{i=0}^n v_i \otimes w_i \right) && (\sum_{i=0}^n v_i \otimes w_i = 0) \\ &= \sum_{i=0}^n \psi(v_i \otimes w_i) && (\psi \text{ lineal}) \\ &= \sum_{i=0}^n f(v_i) w_i. && (\text{Def. } \psi) \end{aligned}$$

Com que $\{w_1, \dots, w_n\}$ és linealment independent, per definició, $f(v_i) = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Com açò és cert per a tot $f \in \tilde{V}^*$, llavors pel Lema 3.24, $v_i = 0$, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

D'aquesta proposició se segueix immediatament la següent.

COROL·LARI 5.2. *Siguen $\{v_1, \dots, v_n\}$ i $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ subconjunts de V i siga el subconjunt $\{w_1, \dots, w_n\}$ linealment independent en W . Si*

$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^n v'_i \otimes w_i,$$

aleshores $v_i = v'_i$, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$.

DEMOSTRACIÓ. Si $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^n v'_i \otimes w_i$, com que $\otimes$ és bilineal,

$$0 = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i - \left(\sum_{i=1}^n v'_i \otimes w_i \right) = \sum_{i=1}^n (v_i - v'_i) \otimes w_i.$$

Per la proposició anterior, com $\{w_1, \dots, w_n\}$ és linealment independent en W , se segueix que $v_i - v'_i = 0$, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. És a dir, $v_i = v'_i$, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

El nostre objectiu és donats V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb base, trobar una base per a $V \otimes W$. De fet, aquesta base serà prou intuïtiva, ja que serà el conjunt de tensors elementals on es consideren tots els possibles aparellaments d'elements de les bases de V i W .

PROPOSICIÓ 5.3. *Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ és linealment independent en V i $\{w_1, \dots, w_n\}$ és linealment independent en W , aleshores*

$$A := \{v_j \otimes w_i \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$$

és linealment independent en $V \otimes W$.

DEMOSTRACIÓ. Considerem una combinació lineal de la forma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} (v_j \otimes w_i) = 0, \quad \text{on } \lambda_{ji} \in \mathbb{K}.$$

Aleshores, per la bilinearitat de $\otimes$:

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} (v_j \otimes w_i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{ji} v_j \right) \otimes w_i.$$

Per la Proposició 5.1, deduïm que, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^m \lambda_{ji} v_j = 0.$$

Com $\{v_1, \dots, v_m\}$ és linealment independent, $\lambda_{ji} = 0$, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Concloem que el conjunt A és linealment independent en $V \otimes W$. $\square$

PROPOSICIÓ 5.4. *Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ genera V i $\{w_1, \dots, w_n\}$ genera W , aleshores el conjunt A anterior,*

$$A := \{v_j \otimes w_i \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\},$$

genera $V \otimes W$.

DEMOSTRACIÓ. Sabem que els tensors elementals generen $V \otimes W$. Així, és suficient demostrar que qualsevol d'ells es pot escriure com a combinació lineal dels elements d' A .

Siguen $v \in V$ i $w \in W$, considerem el tensor elemental $v \otimes w \in V \otimes W$. Com que $\{v_1, \dots, v_m\}$ genera V , $v = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j$ per a alguns $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$. De la mateixa manera, com que $\{w_1, \dots, w_n\}$ genera W , $w = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i$ per a alguns $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} v \otimes w &= \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \otimes \left(\sum_{i=1}^n \mu_i w_i \right) && \text{(Def. } v, w) \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(v_j \otimes \left(\sum_{i=1}^n \mu_i w_i \right) \right) && (\otimes \text{ bilinear}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_i (v_j \otimes w_i). && (\otimes \text{ bilinear}) \end{aligned}$$

Deduïm que A és un sistema generador de $V \otimes W$. $\square$

Com en les dos proposicions hem considerat el mateix conjunt, és clar que ja tenim base per al producte tensorial de dos espais vectorials finitament generats.

COROL·LARI 5.5. *Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ és base de V i $\{w_1, \dots, w_n\}$ és base de W , aleshores el conjunt A ,*

$$A := \{v_j \otimes w_i \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\},$$

és base de $V \otimes W$.

DEMOSTRACIÓ. Per la Proposició 5.3, el conjunt A és linealment independent i per la Proposició 5.4, sistema generador. Per tant, és base de $V \otimes W$. $\square$

De fet, la dimensió de $V \otimes W$ és prou senzilla de calcular.

COROL·LARI 5.6. *Si V i W són finitament generats:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(V \otimes W) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \dim_{\mathbb{K}}(W).$$

DEMOSTRACIÓ. Pel corol·lari anterior, $\dim_{\mathbb{K}}(V \otimes W) = |A|$. Però, per la construcció d' A , tenim que

$$\dim_{\mathbb{K}}(V \otimes W) = |A| = |\{v_1, \dots, v_m\}| |\{w_1, \dots, w_n\}| = \dim_{\mathbb{K}}(V) \dim_{\mathbb{K}}(W).$$

Açò conclou la demostració. $\square$

El següent corol·lari ens serà d'ajuda.

COROLLARI 5.7. *Siga $v \in V$ i $w \in W$, aleshores $v \otimes w = 0$ si, i només si, $v = 0$ o $w = 0$.*

DEMOSTRACIÓ. Com que $\otimes$ és bilineal, la condició necessària està provada al Lema 2.60. Veiem la condició suficient. Considerem així els espais vectorials generats per $\{v\}$ i $\{w\}$, denotem-los $\tilde{V}$ i $\tilde{W}$ respectivament. Pel col·lorari anterior,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\tilde{V} \otimes \tilde{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\tilde{V}) \dim_{\mathbb{K}}(\tilde{W}).$$

D'aquesta manera, si $v \otimes w = 0$, $\tilde{V} \otimes \tilde{W} = \{0\}$. Per tant, o bé $\dim_{\mathbb{K}}(\tilde{V}) = 0$, o bé $\dim_{\mathbb{K}}(\tilde{W}) = 0$. És a dir, o bé $v = 0$, o bé $w = 0$. $\square$

Acabem aquesta secció veient dos teoremes de molta utilitat. Un tensor es pot representar de diverses formes, no obstant això, sovint ens interessarà considerar la seua representació mínima, ja que ens assegurarà la independència lineal dels vectors.

TEOREMA 5.8. *Si $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$ és la mínima representació d'un tensor com a suma de tensors elementals, aleshores $\{v_1, \dots, v_n\}$ és linealment independent en V i $\{w_1, \dots, w_n\}$ és linealment independent en W .*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrem pel contrarrecíproc. Sense pèrdua de generalitat, suposem que $\{v_1, \dots, v_n\}$ no és linealment independent en V . Aleshores existeix una combinació lineal del tipus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, on no tots els escalars són zero.

Suposem que $\lambda_k \neq 0$ per a algun $k \in \{1, \dots, n\}$. Aleshores

$$v_k = -\frac{1}{\lambda_k} \left(\sum_{i=1, i \neq k}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1, i \neq k}^n \mu_i v_i,$$

per a certs $\mu_i \in \mathbb{K}$. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i &= \sum_{i=1, i \neq k}^n (v_i \otimes w_i) + v_k \otimes w_k && \text{(Aïllem } v_k \otimes w_k) \\ &= \sum_{i=1, i \neq k}^n (v_i \otimes w_i) + \left(\sum_{i=1, i \neq k}^n \mu_i v_i \right) \otimes w_k && \text{(Expressió } v_k) \\ &= \sum_{i=1, i \neq k}^n (v_i \otimes w_i) + \sum_{i=1, i \neq k}^n (v_i \otimes \mu_i w_k) && (\otimes \text{ bilineal}) \\ &= \sum_{i=1, i \neq k}^n v_i \otimes (w_i + \mu_i w_k). && (\otimes \text{ bilineal}) \end{aligned}$$

És a dir, tenim una representació del mateix tensor com un sumatori de $n - 1$ tensors elementals, però la representació mínima en té n . ζ

Deduïm que $\{v_1, \dots, v_n\}$ és un conjunt linealment independent en V . De manera anàloga se segueix que $\{w_1, \dots, w_n\}$ és linealment independent en W . $\square$

TEOREMA 5.9. *Totes les representacions d'un tensor com a suma de tensors elementals amb factors linealment independents tenen el mateix nombre de termes. És a dir, si $\{v_1, \dots, v_m\}$ i $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ són conjunts linealment independents en V i $\{w_1, \dots, w_m\}$ i $\{w'_1, \dots, w'_n\}$ són conjunts linealment independents en W . Si,*

$$\left(\sum_{j=1}^m v_j \otimes w_j = \sum_{i=1}^n v'_i \otimes w'_i \right), \text{ aleshores } n = m.$$

DEMOSTRACIÓ. Definim $\tilde{V} = \langle v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_n \rangle$. Com $\{v_1, \dots, v_m\}$ és linealment independent en V , ho és també en $\tilde{V} \leq V$. En ser $\tilde{V}$ finitament generat, podem ampliar aquest conjunt fins obtenir una base de $\tilde{V}$, denotem-la $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+l}\}$ per a cert $l \in \mathbb{N}$. Així, podem considerar la base dual $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_m^*, e_{m+1}^*, \dots, e_{m+l}^*\}$.

Per a cada $k \in \{1, \dots, m\}$ agafem l'aplicació lineal $v_k^*: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{K}$ i l'isomorfisme de la Proposició 4.8, $\varrho_W: \mathbb{K} \otimes W \rightarrow W$. Prenem així la composició, $\varrho_W \circ (v_k^* \otimes \text{id}_W): \tilde{V} \times W \rightarrow W$ i, d'una banda,

$$\varrho_W \circ (v_k^* \otimes \text{id}_W) \left(\sum_{j=1}^m v_j \otimes w_j \right) = \varrho_W(1 \otimes w_k) = w_k.$$

D'altra banda,

$$\varrho_W \circ (v_k^* \otimes \text{id}_W) \left(\sum_{i=1}^n v'_i \otimes w'_i \right) = \varrho_W \left(\sum_{i=1}^n v_k^*(v'_i) \otimes w'_i \right) = \sum_{i=1}^n v_k^*(v'_i) w'_i.$$

D'aquesta manera, $w_k = \sum_{i=1}^n v_k^*(v'_i) w'_i$ i, per a cada $k \in \{1, \dots, m\}$, es té que $w_k \in \langle w'_1, \dots, w'_n \rangle$. Per tant, $\langle w_1, \dots, w_m \rangle \leq \langle w'_1, \dots, w'_n \rangle$ i així,

$$m = \dim_{\mathbb{K}}(\langle w_1, \dots, w_m \rangle) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\langle w'_1, \dots, w'_n \rangle) = n.$$

En canvi, si raonem anàlogament estenent $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ a una base de $\tilde{V}$ arribem que $n \leq m$. Concloem que $n = m$. $\square$

D'aquests dos teoremes, sorgeix la definició de rang d'un tensor.

DEFINICIÓ 5.10. *Siga $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$ una suma de tensors elementals, on $\{v_1, \dots, v_n\}$ és linealment independent en V i $\{w_1, \dots, w_n\}$ és linealment independent en W . Definim el **rang** de dita suma com el nombre de sumands que té, i.e., $\text{rang}(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i) = n$.*

Notem que, pel teorema anterior, el rang està ben definit. A més, pel Teorema 5.8, sabem que el rang és el mínim de sumands necessaris per a poder expressar un tensor com a suma de tensors elementals.

2. Propietats algebraiques

En aquesta secció, comprovarem com el producte tensorial “compleix” propietats algebraiques com ara la commutativitat, associativitat o distributivitat. Escrivim “compleix” entre cometes ja que com veurem, serà tret d’isomorfisme.

PROPOSICIÓ 5.11. *El producte tensorial és commutatiu tret d’isomorfisme, és a dir, per a qualssevol V i W $\mathbb{K}$ -espais vectorials,*

$$V \otimes W \cong W \otimes V.$$

DEMOSTRACIÓ. Definim l’aplicació

$$\begin{aligned} \psi_1: V \times W &\longrightarrow W \otimes V \\ (v, w) &\longmapsto w \otimes v. \end{aligned}$$

Comprovem que és bilineal: si agafem $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha v_1 + \beta v_2, w) &= w \otimes (\alpha v_1 + \beta v_2) && (\text{Def. } \psi_1) \\ &= \alpha(w \otimes v_1) + \beta(w \otimes v_2) && (\otimes \text{ bilineal}) \\ &= \alpha\psi_1(v_1, w) + \beta\psi_1(v_2, w). && (\text{Def. } \psi_1) \end{aligned}$$

Per tant, ψ_1 és lineal en la primera component. La comprovació a la segona és anàloga i així ψ_1 és bilineal. Per la propietat universal de $V \otimes W$ existeix una única aplicació lineal ψ_1^b tal que

$$\begin{aligned} \psi_1^b: V \otimes W &\longrightarrow W \otimes V \\ v \otimes w &\longmapsto w \otimes v. \end{aligned}$$

Si definim ara l’aplicació

$$\begin{aligned} \psi_2: W \times V &\longrightarrow V \otimes W \\ (w, v) &\longmapsto v \otimes w, \end{aligned}$$

raonant de la mateixa manera, es veu que és bilineal i, com a conseqüència de la propietat universal de $W \otimes V$, existeix una única aplicació lineal ψ_2^b tal que

$$\begin{aligned} \psi_2^b: W \otimes V &\longrightarrow V \otimes W \\ w \otimes v &\longmapsto v \otimes w. \end{aligned}$$

És clar que $\psi_2^b \circ \psi_1^b = \text{id}_{V \otimes W}$ i $\psi_1^b \circ \psi_2^b = \text{id}_{W \otimes V}$. Per tant, $V \otimes W \cong W \otimes V$, com volíem. $\square$

PROPOSICIÓ 5.12. *El producte tensorial és associatiu tret d’isomorfisme, i.e., donats V, W i U tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials,*

$$V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U.$$

DEMOSTRACIÓ. Fixem $v \in V$ i definim l’aplicació

$$\begin{aligned} \psi_v: W \times U &\longrightarrow (V \otimes W) \otimes U \\ (w, u) &\longmapsto (v \otimes w) \otimes u. \end{aligned}$$

Provem que ψ_v és lineal a esquerra. Agafem $w_1, w_2 \in W$, $u \in U$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\psi_v(\alpha w_1 + \beta w_2, u) &= (v \otimes (\alpha w_1 + \beta w_2)) \otimes u && \text{(Def. } \psi_v) \\ &= (\alpha(v \otimes w_1) + \beta(v \otimes w_2)) \otimes u && (\otimes \text{ bilinear}) \\ &= \alpha((v \otimes w_1) \otimes u) + \beta((v \otimes w_2) \otimes u) && (\otimes \text{ bilinear}) \\ &= \alpha\psi_v(w_1, u) + \beta\psi_v(w_2, u). && \text{(Def. } \psi_v)\end{aligned}$$

La comprovació de la linealitat a dreta és anàloga i, consegüentment, ψ_v és bilineal. Per la propietat universal de $W \otimes U$, existeix una única aplicació lineal ψ_v^b tal que

$$\begin{aligned}\psi_v^b: \quad W \otimes U &\longrightarrow (V \otimes W) \otimes U \\ w \otimes u &\longmapsto (v \otimes w) \otimes u.\end{aligned}$$

Definim ara l'aplicació

$$\begin{aligned}\psi: \quad V \times (W \otimes U) &\longrightarrow (V \otimes W) \otimes U \\ (v, t) &\longmapsto \psi_v^b(t).\end{aligned}$$

Comprovem que és bilineal. Considerem primer $v_1, v_2 \in V$, $t \in W \otimes U$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Per definició,

$$\psi(\alpha v_1 + \beta v_2, t) = \psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}^b(t).$$

Recordem que $\psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}^b$ és l'única aplicació lineal de $W \otimes U$ en $(V \otimes W) \otimes U$ que satisfà que $\psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}^b \circ \otimes = \psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}$. Notem que per a qualsevol $(w, u) \in W \times U$,

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}(w, u) &= ((\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w) \otimes u && \text{(Def. } \psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}) \\ &= (\alpha(v_1 \otimes w) + \beta(v_2 \otimes w)) \otimes u && (\otimes \text{ bilinear}) \\ &= \alpha((v_1 \otimes w) \otimes u) + \beta((v_2 \otimes w) \otimes u) && (\otimes \text{ bilinear}) \\ &= \alpha\psi_{v_1}(w, u) + \beta\psi_{v_2}(w, u). && \text{(Def. } \psi_{v_1}, \psi_{v_2})\end{aligned}$$

És a dir, $\psi_{\alpha v_1 + \beta v_2} = \alpha\psi_{v_1} + \beta\psi_{v_2}$. Com que $\alpha\psi_{v_1}^b + \beta\psi_{v_2}^b$ és lineal i satisfà que

$$\begin{aligned}(\alpha\psi_{v_1}^b + \beta\psi_{v_2}^b) \circ \otimes &= \alpha(\psi_{v_1}^b \circ \otimes) + \beta(\psi_{v_2}^b \circ \otimes) && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= \alpha\psi_{v_1} + \beta\psi_{v_2} && (\forall v \in V, \psi_v^b \circ \otimes = \psi_v) \\ &= \psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}, && (\psi_{\alpha v_1 + \beta v_2} = \alpha\psi_{v_1} + \beta\psi_{v_2})\end{aligned}$$

per la propietat universal del producte tensorial, $\alpha\psi_{v_1}^b + \beta\psi_{v_2}^b = \psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}^b$. Així, és té que

$$\begin{aligned}\psi(\alpha v_1 + \beta v_2, t) &= \psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}^b(t) && \text{(Def. } \psi) \\ &= (\alpha\psi_{v_1}^b + \beta\psi_{v_2}^b)(t) && (\alpha\psi_{v_1}^b + \beta\psi_{v_2}^b = \psi_{\alpha v_1 + \beta v_2}^b) \\ &= \alpha\psi_{v_1}^b(t) + \beta\psi_{v_2}^b(t) && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= \alpha\psi(v_1, t) + \beta\psi(v_2, t). && \text{(Def. } \psi)\end{aligned}$$

D'aquesta manera, s'infereix la linealitat en la primera component de ψ . Per altra part, si agafem $v \in V$, $t_1, t_2 \in W \otimes U$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\psi(v, \alpha t_1 + \beta t_2) &= \psi_v^b(\alpha t_1 + \beta t_2) && (\text{Def. } \psi) \\ &= \alpha \psi_v^b(t_1) + \beta \psi_v^b(t_2) && (\psi_v^b \text{ lineal}) \\ &= \alpha \psi(v, t_1) + \beta \psi(v, t_2), && (\text{Def. } \psi)\end{aligned}$$

i es conclou que ψ és bilineal. Llavors, per la propietat universal de $V \otimes (W \otimes U)$, existeix una única aplicació lineal ψ^b de manera que aquest diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} V \times (W \otimes U) & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes (W \otimes U) \\ & \searrow \psi & \downarrow \exists! \psi^b \text{ lineal} \\ & & (V \otimes W) \otimes U \end{array}$$

De manera anàloga, si per a cada $u \in U$ considerem l'aplicació ϕ_u com

$$\begin{aligned}\phi_u: \quad V \times W &\longrightarrow V \otimes (W \otimes U) \\ (v, w) &\longmapsto v \otimes (w \otimes u),\end{aligned}$$

es pot verificar la seua bilinealitat. Així, per la propietat universal de $V \otimes W$, la següent aplicació està ben definida:

$$\begin{aligned}\phi: \quad (V \otimes W) \times U &\longrightarrow V \otimes (W \otimes U) \\ (t, u) &\longmapsto \phi_u^b(t).\end{aligned}$$

Es pot comprovar que, de manera similar, ϕ és bilineal. Aleshores, per la propietat universal del producte tensorial, tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccccc} (V \otimes W) \times U & \xrightarrow{\otimes} & (V \otimes W) \otimes U & & \\ & \searrow \phi & \downarrow \exists! \phi^b \text{ lineal} & \uparrow \exists! \psi^b \text{ lineal} & \swarrow \psi \\ & & V \otimes (W \otimes U) & \xleftarrow{\otimes} & V \times (W \otimes U) \end{array}$$

Finalment, falta veure que $\phi^b = (\psi^b)^{-1}$. Per la linealitat d'ambdues aplicacions, és suficient comprovar que la composició actuant sobre un tensor elemental retorna el propi tensor elemental. Siguen $v \in V$, $w \in W$ i $u \in U$,

$$\begin{aligned}(\phi^b \circ \psi^b)(v \otimes (w \otimes u)) &= \phi^b(\psi(v, w \otimes u)) && (\psi^b \circ \otimes = \psi) \\ &= \phi^b(\psi_v^b(w \otimes u)) && (\text{Def. } \psi) \\ &= \phi^b(\psi_v(w, u)) && (\psi_v^b \circ \otimes = \psi_v) \\ &= \phi^b((v \otimes w) \otimes u) && (\text{Def. } \psi_v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(v \otimes w, u) && (\phi^b \circ \otimes = \phi) \\
&= \phi_u^b(v \otimes w) && (\text{Def. } \phi) \\
&= \phi_u(v, w) && (\phi_u^b \circ \otimes = \phi_u) \\
&= v \otimes (w \otimes u). && (\text{Def. } \phi_u)
\end{aligned}$$

Per consegüent, $\phi^b \circ \psi^b = \text{id}_{V \otimes (W \otimes U)}$. Anàlogament, obtenim que $\psi^b \circ \phi^b = \text{id}_{(V \otimes W) \otimes U}$. Concloem que $V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$ com volíem. $\square$

Hem estudiat com el producte tensorial compleix amb la propietat commutativa i associativa. Però, què ocorre amb la distributiva? Per resoldre aquesta pregunta, hem de treballar amb sumes directes. Així, prèviament veiem un lema.

LEMA 5.13. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin $U, W \leq T$ amb T un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $U \cap W = \{0\}$. Llavors, $(V \otimes U) \oplus (V \otimes W)$.*

DEMOSTRACIÓ. Confirmem primer que $V \otimes U \leq V \otimes T$. En efecte, per una part, $0 \in V \otimes U$ i com que tot tensor és suma de tensors elementals, tota combinació lineal de tensors en $V \otimes U$ és una altra suma de tensors elementals, i.e., tensor, de $V \otimes T$. De la mateixa manera succeeix amb $V \otimes W$.

Falta veure que la suma és directa, i.e., $(V \otimes U) \cap (V \otimes W) = \{0\}$. Evidentment la segona inclusió es té. Per a la primera, considerem $z \in (V \otimes U) \cap (V \otimes W)$ i hem de provar que necessàriament, $z = 0$. Així, considerem dues representacions mínimes de z , una amb tensors de $V \otimes U$, $z = \sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i$ i altra amb tensors de $V \otimes W$, $z = \sum_{j=1}^m v'_j \otimes w_j$. Pel Teorema 5.8 sabem que els seus factors són linealment independents.

Definim $\tilde{T} := \langle u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m \rangle$ i com que $\{u_1, \dots, u_n\}$ és un conjunt de vectors linealment independents, podem ampliar amb altres vectors fins formar una base $\mathcal{B}$ de $\tilde{T}$. Així, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ podem considerar $u_i^* \in \tilde{T}^*$. Per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, agafem l'aplicació $\psi = \varrho_V \circ (\text{id}_V \otimes u_i^*)$. Llavors, com que ψ és lineal,

$$\psi(z) = \psi \left(\sum_{j=1}^m v_j \otimes u_j \right) = \sum_{j=1}^m \psi(v_j \otimes u_j) = \sum_{j=1}^m \text{id}_V(v_j) u_i^*(u_j) = v_i.$$

Però, per altra part, com que $U \cap W = \{0\}$, $u_i^*(w_j) = 0$ per a tot u_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ i tot w_j , $j \in \{1, \dots, m\}$. D'aquesta manera,

$$\psi(z) = \psi \left(\sum_{j=1}^m v'_j \otimes w_j \right) = \sum_{j=1}^m \psi(v'_j \otimes w_j) = \sum_{j=1}^m \text{id}_V(v'_j) u_i^*(w_j) = 0.$$

Així, $v_i = 0$ per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, pel que

$$z = \sum_{i=1}^n v_i \otimes u_i = \sum_{i=1}^n 0 \otimes u_i = 0.$$

Per tant, la suma de $V \otimes U$ i $V \otimes W$ és directa. $\square$

Estudiem com el producte tensorial és, tret d'isomorfisme, distributiu respecte de la suma directa.

PROPOSICIÓ 5.14. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i siguin $U, W \leq T$ amb T un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $U \cap W = \{0\}$. Aleshores*

$$V \otimes (U \oplus W) \cong (V \otimes U) \oplus (V \otimes W). \quad (8)$$

DEMOSTRACIÓ. D'una banda, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \psi: \quad V \times (U \oplus W) &\longrightarrow (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \\ (v, u + w) &\longmapsto (v \otimes u) + (v \otimes w). \end{aligned}$$

Estudiem la linealitat de ψ a la primera component. Donats $v_1, v_2 \in V$, $u \in U$, $w \in W$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha v_1 + \beta v_2, u + w) &= (\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes u + (\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w \quad (\text{Def. } \psi) \\ &= \alpha(v_1 \otimes u) + \beta(v_2 \otimes u) \\ &\quad + \alpha(v_1 \otimes w) + \beta(v_2 \otimes w) \quad (\otimes \text{ bilineal}) \\ &= \alpha\psi(v_1, u + w) + \beta\psi(v_2, u + w). \quad (\text{Def. } \psi) \end{aligned}$$

Per a la segona component, si agafem $v \in V$, $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \psi(v, \alpha(u_1 + w_1) + \beta(u_2 + w_2)) &= v \otimes (\alpha u_1 + \beta u_2) + v \otimes (\alpha w_1 + \beta w_2) \quad (\text{Def. } \psi) \\ &= \alpha(v \otimes u_1 + v \otimes w_1) + \beta(v \otimes u_2 + v \otimes w_2) \quad (\otimes \text{ bilineal}) \\ &= \alpha\psi(v, u_1 + w_1) + \beta\psi(v, u_2 + w_2). \quad (\text{Def. } \psi) \end{aligned}$$

Se segueix que ψ és bilineal. D'aquesta manera, per la propietat universal del producte tensorial, existeix una única aplicació lineal, $\psi^b: V \otimes (U \oplus W) \longrightarrow (V \otimes U) \oplus (V \otimes W)$, tal que $\psi^b \circ \otimes = \psi$.

D'altra banda, construïm l'aplicació inversa. Amb aquesta finalitat, emprarem la propietat universal de la suma directa. Definim ψ_U i ψ_W com

$$\begin{aligned} \psi_U: \quad V \times U &\longrightarrow V \otimes (U \oplus W) \\ (v, u) &\longmapsto v \otimes (u + 0), \\ \psi_W: \quad V \times W &\longrightarrow V \otimes (U \oplus W) \\ (v, w) &\longmapsto v \otimes (0 + w). \end{aligned}$$

Com que $\otimes$ és bilineal, és trivial que aquestes noves aplicacions també ho són. Consegüentment, per la propietat universal del producte tensorial, existeixen unes úniques aplicacions lineals

$$\psi_U^b: V \otimes U \longrightarrow V \otimes (U \oplus W), \quad \psi_W^b: V \otimes W \longrightarrow V \otimes (U \oplus W),$$

tals que $\psi_U^b \circ \otimes = \psi_U$ i $\psi_W^b \circ \otimes = \psi_W$.

L'aplicació desitjada és l'obtinguda amb la propietat universal de la suma directa, $[\psi_U^b, \psi_W^b]: (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \longrightarrow V \otimes (U \oplus W)$. Comprovem que és la inversa. Com que ambdues són aplicacions lineals, és suficient amb veure com actuen les composicions en els tensors elementals. Per a qualsevol $v \in V$, $u \in U$ i $w \in W$,

$$\begin{aligned} & ([\psi_U^b, \psi_W^b] \circ \psi^b)(v \otimes (u + w)) \\ &= [\psi_U^b, \psi_W^b](\psi(v, u + w)) && (\psi^b \circ \otimes = \psi) \\ &= [\psi_U^b, \psi_W^b]((v \otimes u) + (v \otimes w)) && (\text{Def. } \psi) \\ &= \psi_U^b(v \otimes u) + \psi_W^b(v \otimes w) && (\text{Def. } [\psi_U^b, \psi_W^b]) \\ &= \psi_U(v, u) + \psi_W(v, w) && (\psi_U^b \circ \otimes = \psi_U, \psi_W^b \circ \otimes = \psi_W) \\ &= v \otimes (u + 0) + v \otimes (0 + w) && (\text{Def. } \psi_U, \psi_W) \\ &= v \otimes (u + w), && (\otimes \text{ bilineal}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\psi^b \circ [\psi_U^b, \psi_W^b])((v \otimes u) + (v \otimes w)) \\ &= \psi^b(\psi_U^b(v \otimes u) + \psi_W^b(v \otimes w)) && (\text{Def. } [\psi_U^b, \psi_W^b]) \\ &= \psi^b(\psi_U(v, u) + \psi_W(v, w)) && (\psi_U^b \circ \otimes = \psi_U, \psi_W^b \circ \otimes = \psi_W) \\ &= \psi^b(v \otimes (u + 0) + v \otimes (0 + w)) && (\text{Def. } \psi_U, \psi_W) \\ &= \psi(v, u + w) && (\psi^b \circ \otimes = \psi) \\ &= (v \otimes u) + (v \otimes w). && (\text{Def. } \psi) \end{aligned}$$

Concloem que ψ^b és un isomorfisme i tenim (8). $\square$

Per finalitzar aquesta secció veiem dos resultats més.

PROPOSICIÓ 5.15. *Siguin U, V i W tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials i siga $f: U \longrightarrow V$ un monomorfisme. Llavors $f \otimes \text{id}_W: U \otimes W \longrightarrow V \otimes W$ és un monomorfisme.*

DEMOSTRACIÓ. Ja sabem que $f \otimes \text{id}_W$ és lineal, per tant l'únic que hem de verificar és la injectivitat. Amb eixe fi, siga $z = \sum_{i=1}^n u_i \otimes w_i$ una representació minimal d'un $z \in \text{Ker}(f \otimes \text{id}_W)$ qualsevol. Aleshores,

$$\begin{aligned} 0 &= (f \otimes \text{id}_W)(z) && (z \in \text{Ker}(f \otimes \text{id}_W)) \\ &= (f \otimes \text{id}_W)\left(\sum_{i=1}^n u_i \otimes w_i\right) && (\text{Def. } z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (f \otimes \text{id}_W)(u_i \otimes w_i) && (f \otimes \text{id}_W \text{ lineal}) \\
&= \sum_{i=1}^n f(u_i) \otimes w_i. && (\text{Def. } f \otimes \text{id}_W)
\end{aligned}$$

Pel Teorema 5.8, $\{w_1, \dots, w_n\}$ és un conjunt linealment independent i, d'aquesta manera, per la Proposició 5.1, $f(u_i) = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Com f és injectiva, $u_i = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Així, necessàriament $z = 0$ i $f \otimes \text{id}_W$ és injectiva. $\square$

En l'última proposició estudiem com, tret d'isomorfisme, el producte tensorial es "distribueix" respecte l'espai quocient.

PROPOSICIÓ 5.16. *Siguin U, V i W tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb $U \leq V$, aleshores*

$$(V/U) \otimes W \cong (V \otimes W)/(U \otimes W).$$

DEMOSTRACIÓ. Per una part, sabem que l'aplicació projecció al quocient, $\text{pr}_U: V \rightarrow V/U$, és un epimorfisme. Com id_W també ho es, llavors $\text{pr}_U \otimes \text{id}_W: V \otimes W \rightarrow (V/U) \otimes W$ és un epimorfisme.

Per altra part, volem conèixer el conjunt $\text{Ker}(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W)$. Siga $z \in \text{Ker}(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W)$ de representació mínima, $z = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i$. Per definició,

$$0 = (\text{pr}_U \otimes \text{id}_W) \left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{pr}_U(v_i) \otimes w_i = 0.$$

Ara bé, pel Teorema 5.8, $\{w_1, \dots, w_n\}$ és un conjunt linealment independent i, per la Proposició 5.1, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{pr}_U(v_i) = 0$. Això és que, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i \in U$ i, per tant, $z \in U \otimes W$. D'aquesta manera, $\text{Ker}(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W) \subseteq U \otimes W$.

L'altra inclusió és trivial, ja que si $z \in U \otimes W$, $z = \sum_{j=1}^m u_j \otimes w_j$,

$$\begin{aligned}
(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W)(z) &= (\text{pr}_U \otimes \text{id}_W) \left(\sum_{j=1}^m u_j \otimes w_j \right) && (\text{Def. } z) \\
&= \sum_{j=1}^m (\text{pr}_U \otimes \text{id}_W)(u_j \otimes w_j) && (\text{pr}_U \otimes \text{id}_W \text{ lineal}) \\
&= \sum_{j=1}^m \text{pr}_U(u_j) \otimes \text{id}_W(w_j) && (\text{Def. } \text{pr}_U \otimes \text{id}_W) \\
&= \sum_{j=1}^m 0 \otimes w_j && (\forall i \in \{1, \dots, n\}, u_i \in U) \\
&= 0. && (\text{Corol·lari 5.7})
\end{aligned}$$

Així, $z \in \text{Ker}(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W)$ i $\text{Ker}(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W) = U \otimes W$. Finalment, pel Primer Teorema d'Isomorfia,

$$(V \otimes W)/\text{Ker}(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W) \cong \text{Im}(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W).$$

Però, com que $\text{Ker}(\text{pr}_U \otimes \text{id}_W) = U \otimes W$ i $\text{pr}_U \otimes \text{id}_W$ és sobrejectiva,

$$(V \otimes W)/(U \otimes W) \cong (V/U) \otimes W.$$

Açò conclou la demostració. $\square$

3. Producte tensorial sobre funcions

En aquesta secció reprenem l'espai vectorial de les aplicacions definides sobre conjunts, és a dir,

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) := \{f: \Omega \longrightarrow V \mid f \text{ aplicació}\}.$$

El propòsit serà veure com el producte tensorial afecta a aquesta estructura algebraica.

PROPOSICIÓ 5.17. *Existeix un monomorfisme d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) \otimes W$ en $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V \otimes W)$.*

DEMOSTRACIÓ. Construïrem el monomorfisme per propietat universal d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) \otimes W$. Així, volem trobar una f bilineal per a tindre el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) \times W & \xrightarrow{\otimes} & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) \otimes W \\ & \searrow f & \downarrow \exists! f^b \text{ lineal} \\ & & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V \otimes W) \end{array}$$

L'aplicació que plantegem és

$$\begin{array}{ccc} f: & \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) \times W & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V \otimes W) \\ & (h, w) & \longmapsto f(h, w), \end{array}$$

on $f(h, w)$ es defineix com

$$\begin{array}{ccc} f(h, w): & \Omega & \longrightarrow V \otimes W \\ & \omega & \longmapsto h(\omega) \otimes w. \end{array}$$

Comprovem que és bilineal. Veiem la linealitat únicament a la primera component, ja que per a la segona és anàleg. Considerem $h, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V)$, $w \in W$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i cerquem que

$$f(\alpha h + \beta g, w) = \alpha f(h, w) + \beta f(g, w).$$

Per tant, hem de verificar que retornen la mateixa imatge per a un $\omega \in \Omega$ qualsevol:

$$\begin{aligned} f(\alpha h + \beta g, w)(\omega) &= (\alpha h + \beta g)(\omega) \otimes w && \text{(Def. } f) \\ &= (\alpha h(\omega) + \beta g(\omega)) \otimes w && \text{(Estr. aplicacions)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha(h(\omega) \otimes w) + \beta(g(\omega) \otimes w) && (\otimes \text{ bilineal}) \\
&= (\alpha f(h, w) + \beta f(g, w))(\omega). && (\text{Def. } f)
\end{aligned}$$

Es té que f és bilineal. Així, existeix una única aplicació lineal

$$f^\flat: \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V \otimes W)$$

tal que $f^\flat \circ \otimes = f$. Si provem que $f^\flat$ és injectiva, hem acabat. Siga $F \in \text{Ker}(f^\flat)$, volem verificar que $F = 0_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) \otimes W}$. D'aquesta manera, agafem una representació mínima d' F com a suma de tensors elementals, $F = \sum_{i=1}^n h_i \otimes w_i$. Aleshores,

$$0 = f^\flat(F) = f^\flat\left(\sum_{i=1}^n h_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^n f(h_i, w_i).$$

És a dir, per a tot $\omega \in \Omega$,

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n f(h_i, w_i)\right)(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(\omega) \otimes w_i.$$

Com la representació d' F és minimal, els vectors $\{w_1, \dots, w_n\}$ són linealment independents. Així, per la Proposició 5.1, per a tot $w \in \Omega$, $h_i(\omega) = 0$. Això és, $h_i = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$ i

$$F = \sum_{i=1}^n h_i \otimes w_i = 0.$$

Concloem que f és injectiva. $\square$

NOTA 5.18. Si V i W son $\mathbb{K}$ -espais vectorials, escriurem $V \hookrightarrow W$ per indicar que existeix un monomorfisme de V en W .

En la proposició hem definit una aplicació i hem provat que és un monomorfisme. A més, és una aplicació interessant, doncs ens mostra com el producte tensorial i el conjunt d'homomorfismes interactuen. Així, cal preguntar-se si estem davant d'un isomorfisme, és a dir, si f és també sobrejectiva. Però abans d'estudiar-lo, cal comprendre quin és el conjunt imatge d' $f^\flat$.

PROPOSICIÓ 5.19. L'imatge de l'aplicació $f^\flat$ construïda en la proposició anterior és

$$\text{Im}(f^\flat) = \left\{ h: \Omega \longrightarrow V \otimes W \mid \begin{array}{l} \exists W' \leq W, \dim_{\mathbb{K}}(W') \text{ finita,} \\ \text{Im}(h) \subseteq V \otimes W' \end{array} \right\}. \quad (9)$$

DEMOSTRACIÓ. Ho comprovarem per doble inclusió. Suposem primer que $h \in \text{Im}(f^\flat)$, és a dir, $h = f^\flat(F)$ per a un $F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V) \otimes W$.

D'aquesta manera, $F = \sum_{i=1}^n h_i \otimes w_i$ amb $h_i \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V)$ i $w_i \in W$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Llavors,

$$h = f^b(F) = f^b\left(\sum_{i=1}^n h_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^n f^b(h_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^n f(h_i, w_i).$$

Si ara definim $W' = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$, obtenim un subespai vectorial de W de dimensió finita. A més, per a tot $\omega \in \Omega$,

$$h(\omega) = \sum_{i=1}^n f(h_i, w_i)(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(\omega) \otimes w_i \subseteq V \otimes W'.$$

Això és, $\text{Im}(h) \subseteq V \otimes W'$ i tenim la primera inclusió.

Per a la segona, considerem $h: \Omega \longrightarrow V \otimes W'$ amb $\dim_{\mathbb{K}}(W') = m$ finit i $W' \leq W$. Per a cada $\omega \in \Omega$ es té que

$$h(\omega) = \sum_{i=1}^{n^\omega} v_i^\omega \otimes w_i^\omega \in V \otimes W',$$

per a certs $v_i^\omega \in V$, $w_i^\omega \in W$, $n^\omega \in \mathbb{N}$. Com que W' és finitament generat, existeix una base $\mathcal{B} := \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m\}$. Per tant, per a tot $i \in \{1, \dots, n^\omega\}$, $w_i^\omega = \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j}^\omega \tilde{w}_j$ per a certs $\lambda_{i,j}^\omega \in \mathbb{K}$. Emprant que $\otimes$ és bilineal,

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \sum_{i=1}^{n^\omega} v_i^\omega \otimes w_i^\omega && (\text{Def. } h(\omega)) \\ &= \sum_{i=1}^{n^\omega} v_i^\omega \otimes \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{i,j}^\omega \tilde{w}_j \right) && (\text{Def. } w_i^\omega, i \in \{1, \dots, n^\omega\}) \\ &= \sum_{i=1}^{n^\omega} \sum_{j=1}^m (\lambda_{i,j}^\omega v_i^\omega \otimes \tilde{w}_j) && (\otimes \text{ bilineal}) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n^\omega} \lambda_{i,j}^\omega v_i^\omega \right) \otimes \tilde{w}_j. && (\otimes \text{ bilineal}) \end{aligned}$$

Definim per a cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $\tilde{v}_j^\omega := \sum_{i=1}^{n^\omega} \lambda_{i,j}^\omega v_i^\omega \in V$. Així, $h(\omega) = \sum_{j=1}^m \tilde{v}_j^\omega \otimes \tilde{w}_j$. Ara, definim també $h_j \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V)$ com $h_j(\omega) := \tilde{v}_j^\omega$. Es pot veure que $F := \sum_{j=1}^m h_j \otimes \tilde{w}_j$ satisfà $f^b(F) = h$. En efecte, com que

$$f^b(F) = f^b\left(\sum_{j=1}^m h_j \otimes \tilde{w}_j\right) = \sum_{j=1}^m f^b(h_j \otimes \tilde{w}_j) = \sum_{j=1}^m f(h_j, \tilde{w}_j),$$

llavors, per a cada $\omega \in \Omega$,

$$f^b(F)(\omega) = \sum_{j=1}^m f(h_j, \tilde{w}_j)(\omega) = \sum_{j=1}^m h_j(\omega) \otimes \tilde{w}_j = \sum_{j=1}^m \tilde{v}_j^\omega \otimes \tilde{w}_j = h(\omega).$$

Concloem que $h \in \text{Im}(f^b)$ i per tant se segueix la igualtat (9). $\square$

Com que ja coneguem $\text{Im}(f)$, tenim dos casos on podem saber que f^b és un isomorfisme.

PROPOSICIÓ 5.20. *L'aplicació f^b construïda en la proposició anterior és sobrejectiva i, per tant, un isomorfisme, si Ω és un conjunt finit o si W és finitament generat.*

DEMOSTRACIÓ. A la proposició anterior hem vist quin és el conjunt imatge. Per tant, l'únic que hem de fer es provar que en eixos casos, si $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V \otimes W)$, existeix un $W' \leq W$ finitament generat tal que $\text{Im}(h) \subseteq W'$.

Si W és finitament generat, això és trivial. D'aquesta manera, estudiem únicament el cas en què Ω és un conjunt finit, és a dir, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ amb $r \in \mathbb{N}$. Així, donat $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V \otimes W)$,

$$h(w_k) = \sum_{i=1}^{n_k} v_i^k \otimes w_i^k,$$

per a tot $k \in \{1, \dots, r\}$. Si definim

$$W' := \langle w_1^1, \dots, w_{n_1}^1, \dots, w_1^r, \dots, w_{n_r}^r \rangle,$$

és clar que W' és un subespai d' W finitament generat i $\text{Im}(h) \subseteq V \otimes W'$. $\square$

NOTA 5.21. *Siga Ω un conjunt i siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Denotem per $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V)$ al conjunt de les aplicacions d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V)$ amb suport finit. D'una manera similar a la de la Proposició 3.11, es veu que $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \leq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V)$.*

PROPOSICIÓ 5.22. *Siga Ω un conjunt i V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Aleshores, $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \otimes W \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V \otimes W)$.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem l'aplicació f de la Proposició 5.17 restringida a $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \times W$, denotem-la $\tilde{f} := f|_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \times W}$. Vegem que podem restringir el seu codomini a $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V \otimes W)$.

Siga $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V)$, existeix $T \subseteq \Omega$ finit tal que, per a tot $\omega \in \Omega \setminus T$, $h(\omega) = 0$. Siga $w \in W$, $(h, w) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \times W$ i notem que, donat $\omega \in \Omega \setminus T$,

$$\tilde{f}(h, w)(\omega) = f(h, w)(\omega) = h(\omega) \otimes w = 0 \otimes w = 0$$

i, per tant, $\tilde{f}(h, w) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V \otimes W)$. Deduïm que

$$\text{Im}(\tilde{f}) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V \otimes W).$$

D'aquesta manera, com que $\tilde{f}$ és bilineal, ja que f ho és, existeix una única aplicació lineal $\tilde{f}^b: \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \otimes W \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V \otimes W)$ tal que $\tilde{f}^b \circ \otimes = \tilde{f}$.

És evident que si $F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \otimes W$, llavors $\tilde{f}^b(F) = f^b(F)$. Consegüentment, la injectivitat de $\tilde{f}^b$ se segueix de la injectivitat de f^b . Només resta provar la sobrejectivitat per tindre l'isomorfisme.

Donat un $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V \otimes W)$, volem trobar un $F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \otimes W$ tal que $\tilde{f}^b(F) = h$. Com que el suport d' h és finit, existeix $T = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ tal que si $\omega \in \Omega \setminus T$, aleshores $h(\omega) = 0$. Així, per a cada $k \in \{1, \dots, r\}$, $h(\omega_k) = \sum_{i=1}^{n_k} v_i^k \otimes w_i^k$. Considerem

$$W' := \langle w_1^1, \dots, w_{n_1}^1, \dots, w_1^r, \dots, w_{n_r}^r \rangle.$$

Aleshores, per a cada $k \in \{1, \dots, r\}$, $h(\omega_k) \in V \otimes W'$, i.e., $\text{Im}(h) \subseteq V \otimes W'$ amb $W' \leq V$ finitament generat.

Aquest cas és el mateix a l'estudiat en la demostració de la Proposició 5.19. Sabem que, per a cada $\omega \in \Omega$, $h(\omega) = \sum_{j=1}^m \tilde{v}_j^\omega \otimes \tilde{w}_j$, on $\mathcal{B} := \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m\}$ és una base de W' i que, si definim per a cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $h_j \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V)$ com $h_j(\omega) := \tilde{v}_j^\omega$, $F := \sum_{j=1}^m h_j \otimes \tilde{w}_j$ satisfà $\tilde{f}^b(F) = h$.

Però ara bé, si $\omega \in \Omega \setminus T$, $h(\omega) = 0$, llavors $\tilde{v}_j^\omega = 0$ per a cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Això implica que tot h_j té suport finit, i concloem que $F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, V) \otimes W$ amb $\tilde{f}^b(F) = f^b(F) = h$. És a dir, $\tilde{f}^b$ és sobrejectiva. $\square$

Un resultat interessant és un cas concret on el producte tensorial de dos conjunts d'aplicacions de suport finit és isomorf a un conjunt d'aplicacions de suport finit. Així, cada parell d'aplicacions de suport finit amb domini un conjunt qualsevol, tindrà associada una aplicació de suport finit que té com a domini el producte cartesià dels dos conjunts. Tot això sempre que el codomini siga $\mathbb{K}$.

PROPOSICIÓ 5.23. *Siguen Ω, Ω' dos conjunts. Llavors,*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \mathbb{K}) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K}) &\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \mathbb{K} \otimes \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K})) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K})) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega \times \Omega', \mathbb{K}). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ. Per la proposició anterior es té el primer isomorfisme. El segon isomorfisme se segueix de la Proposició 4.8. Per tant, solament hem de provar que $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K})) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega \times \Omega', \mathbb{K})$. Amb eixe propòsit, definim l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} f: & \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K})) & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega \times \Omega', \mathbb{K}) \\ & h & \longmapsto f(h), \end{array}$$

on

$$\begin{aligned} f(h): \quad \Omega \times \Omega' &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\omega, \omega') &\longmapsto (h(\omega))(\omega'). \end{aligned}$$

Notem que, per a cada $\omega \in \Omega$, $h(\omega)$ és una aplicació d' Ω' en $\mathbb{K}$ amb suport finit.

Provem que f és un isomorfisme. Per a això, primerament hem de verificar que està ben definida, és a dir, veure que, per a cada $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K}))$, $f(h)$ té suport finit. Per una part, existeix $T \subseteq \Omega$ finit tal que, per a qualsevol $\omega \in \Omega \setminus T$, $h(\omega) = 0_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K})}$. Per tant, donat $(\omega, \omega') \in (\Omega \setminus T) \times \Omega'$,

$$f(h)(\omega, \omega') = (h(\omega))(\omega') = 0(\omega') = 0.$$

Per altra part, donat $\omega \in \Omega$, per a l'aplicació $h(\omega)$ existeix un T'_{ω} finit, $T'_{\omega} \subseteq \Omega'$, de manera que per a cada $\omega' \in \Omega' \setminus T'_{\omega}$, $(h(\omega))(\omega') = 0$. En cas que $\omega \in \Omega \setminus T$, agafem $T'_{\omega} := \emptyset$. D'aquesta manera, $T' := \bigcup_{\omega \in \Omega} T'_{\omega}$ és un conjunt finit, puix que és unió finita de conjunts finits no buits. Endemés, si $(\omega, \omega') \in \Omega \times (\Omega' \setminus T')$, s'acompleix que

$$f(h)(\omega, \omega') = (h(\omega))(\omega') = 0,$$

doncs $\omega' \in \Omega' \setminus T' \subseteq \Omega' \setminus T'_{\omega}$.

Com que $(\Omega \times \Omega') \setminus (T \times T') = ((\Omega \setminus T) \times \Omega') \cup (\Omega \times (\Omega' \setminus T'))$, prenent el conjunt finit $T \times T'$, se satisfà $f(h)(\omega, \omega') = 0$ per a qualsevol $(\omega, \omega') \in (\Omega \times \Omega') \setminus (T \times T')$ i, així, $f(h)$ té suport finit i f està ben definida.

Ara veiem que f és lineal. Siguen $h, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K}))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, volem comprovar que $f(\alpha h + \beta g) = \alpha f(h) + \beta f(g)$. Això equival al fet que, per a cada $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'$, ambdues aplicacions retornen la mateixa imatge. En efecte,

$$\begin{aligned} f(\alpha h + \beta g)(\omega, \omega') &= ((\alpha h + \beta g)(\omega))(\omega') && \text{(Def. } f) \\ &= (\alpha h(\omega) + \beta g(\omega))(\omega') && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= \alpha(h(\omega))(\omega') + \beta(g(\omega))(\omega') && \text{(Estr. aplicacions)} \\ &= \alpha f(h)(\omega, \omega') + \beta f(g)(\omega, \omega') && \text{(Def. } f) \\ &= (\alpha f(h) + \beta f(g))(\omega, \omega'). && \text{(Estr. aplicacions)} \end{aligned}$$

Consegüentment, f és lineal. Falta corroborar que és una bijecció, és a dir, injectiva i sobrejectiva.

Siga $z \in \text{Ker}(f)$, llavors per a tot $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'$, $f(z)(\omega, \omega') = (z(\omega))(\omega') = 0$. Això és que, per a tot $\omega \in \Omega$, $z(\omega) = 0_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K})}$. Per tant, $z = 0$ i f és injectiva.

Ens queda la sobrejectivitat. Siga $g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega \times \Omega', \mathbb{K})$, definim h de manera que, per a qualsevol $\omega \in \Omega$, $h(\omega) = g(\omega, \cdot)$. Llavors per a

cada $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega'$,

$$f(h)(\omega, \omega') = (h(\omega))(\omega') = (g(\omega, \cdot))(\omega') = g(\omega, \omega').$$

Així, $f(h) = g$ i sols hem de verificar que $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K}))$. Com que g té suport finit, existeixen $T \subseteq \Omega$, $T' \subseteq \Omega'$ finits de manera que, per a tot $(\omega, \omega') \in (\Omega \times \Omega') \setminus (T \times T') = ((\Omega \setminus T) \times \Omega') \cup (\Omega \times (\Omega' \setminus T'))$, $g(\omega, \omega') = 0$. D'una banda, si $\omega' \in \Omega' \setminus T'$, per a tot $\omega \in \Omega$,

$$(h(\omega))(\omega') = g(\omega, \omega') = 0.$$

Aleshores, per a tot $\omega \in \Omega$, es té que

$$h(\omega) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K}).$$

D'altra banda, si $\omega \in \Omega \setminus T$, per a tot $\omega' \in \Omega'$,

$$(h(\omega))(\omega') = g(\omega, \omega') = 0, \text{ i.e., } h(\omega) = 0_{\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K})}.$$

Concloem que $h \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega, \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\Omega', \mathbb{K}))$ i que f és un isomorfisme. $\square$

Finalitzem aquesta secció donant una sèrie de resultats que, gràcies als estudiats prèviament, són de ràpida comprovació. El nostre objectiu serà veure quants espais isomorfs podem trobar al producte tensorial de conjunts d'aplicacions. Abans de provar-los, enunciem aquest lema que ens serà d'utilitat.

LEMA 5.24. *Siguen $n, m \in \mathbb{N}$ i Ω un conjunt, aleshores $\Omega^n \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\{1, \dots, n\}, \Omega)$ i $\mathbb{K}^{mn} \cong \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem les següents aplicacions:

$$\begin{aligned} \xi: \quad \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\{1, \dots, n\}, \Omega) &\longrightarrow \Omega^n \\ f &\longmapsto (f(1), \dots, f(n)) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \eta: \quad \mathbb{K}^{mn} &\longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_{mn}) &\longmapsto \eta(\lambda_1, \dots, \lambda_{mn}), \end{aligned}$$

on

$$\eta(\lambda_1, \dots, \lambda_{mn}) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_{n+1} & \lambda_{n+2} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n(m-1)+1} & \lambda_{n(m-1)+2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}.$$

Es comprova fàcilment que són isomorfismes. $\square$

NOTA 5.25. *Escriurem $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(n, \Omega)$ en lloc d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\{1, \dots, n\}, \Omega)$.*

El primer resultat que trobem és el següent.

PROPOSICIÓ 5.26. *Siguen $m, n \in \mathbb{N}$, aleshores*

$$\mathbb{K}^m \otimes \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^{mn} \cong \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

DEMOSTRACIÓ. És conseqüència directa de la proposició 5.23 i el Lema 5.24.

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m &\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(m, \mathbb{K}) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(n, \mathbb{K}) && (\text{Lema 5.24}) \\
&\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, \mathbb{K}) && (\text{Prop. 5.23}) \\
&\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(mn, \mathbb{K}) && (|\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}| = mn) \\
&\cong \mathbb{K}^{mn} && (\text{Lema 5.24}) \\
&\cong \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}). && (\text{Lema 5.24})
\end{aligned}$$

Com volíem. $\square$

Curiosament, el producte tensorial de l'n-èssim producte cartesià de $\mathbb{K}$ i un conjunt qualsevol és isomorf a l'n-èssim producte cartesià de dit conjunt.

PROPOSICIÓ 5.27. *Siguen $n \in \mathbb{N}$ i Ω un conjunt, aleshores*

$$\mathbb{K}^n \otimes \Omega \cong \Omega^n.$$

DEMOSTRACIÓ. De nou se segueix de proposicions anteriors.

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}^n \otimes \Omega &\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(n, \mathbb{K}) \otimes \Omega && (\text{Lema 5.24}) \\
&\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(n, \mathbb{K} \otimes \Omega) && (\text{Prop 5.23}) \\
&\cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}^{\text{fin}}(n, \Omega) && (\text{Prop 4.8}) \\
&\cong \Omega^n. && (\text{Lema 5.24})
\end{aligned}$$

Com volíem. $\square$

A continuació, veiem un monomorfisme que es dedueix de la primera proposició d'aquesta secció.

PROPOSICIÓ 5.28. *Siguen V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i Ω un conjunt, aleshores existeix un monomorfisme d' $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathbb{K}) \otimes V$ en $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V)$.*

DEMOSTRACIÓ. Per la Proposició 5.17,

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathbb{K}) \otimes V \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathbb{K} \otimes V).$$

Però, per la Proposició 4.8,

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathbb{K} \otimes V) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\Omega, V).$$

Com volíem. $\square$

Quan els espais vectorials són finitament generats, obtenim isomorfismes rellevants.

PROPOSICIÓ 5.29. *Siguen V, W i U tres $\mathbb{K}$ -espais vectorials amb V finitament generat. Llavors $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \otimes U \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W \otimes U)$.*

DEMOSTRACIÓ. Com que V és finitament generat, podem considerar una base $\mathcal{B}$ i, aleshores,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \otimes U &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}, W) \otimes U && \text{(Lema 3.20)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}, W \otimes U) && \text{(Prop. 5.20)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W \otimes U). && \text{(Lema 3.20)}\end{aligned}$$

Com volíem. $\square$

Reprenem l'espai dual per veure el següent corol·lari.

COROL·LARI 5.30. *Siguen V, W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i V finitament generat, llavors $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.*

DEMOSTRACIÓ. És una conseqüència directa de la proposició anterior.

$$\begin{aligned}V^* \otimes W &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) \otimes W && \text{(Def. } V^*) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K} \otimes W) && \text{(Prop. 5.29)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W). && \text{(Prop. 4.8)}\end{aligned}$$

Com volíem. $\square$

La següent proposició és prou interessant, ja que ens resoldrà un dubte sorgit al capítol anterior.

PROPOSICIÓ 5.31. *Siguen V, W, U i T quatre $\mathbb{K}$ -espais vectorials, amb V i W finitament generats, es té que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, U \otimes T).$$

DEMOSTRACIÓ. Gastarem proposicions anteriors.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, T) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, T)) && \text{(Prop 5.29)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, T) \otimes U) && \text{(Prop. 5.11)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, T \otimes U)) && \text{(Prop. 5.29)} \\ &\cong \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, T \otimes U) && \text{(Lema 2.61)} \\ &\cong \mathrm{Bil}_{\mathbb{K}}(V \times W, U \otimes T) && \text{(Prop. 5.11)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, U \otimes T). && \text{(Prop 4.6)}\end{aligned}$$

Com volíem. $\square$

NOTA 5.32. *Recordem que a la Nota 4.12 parlàrem d'una possible ambigüitat on, donat $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ i $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, T)$, l'expressió $f \otimes g$ donava lloc a confusió, ja que, per una part, podria ser un tensor elemental d' $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, T)$ però, per altra part, l'única aplicació lineal en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, U \otimes T)$ tal que per a tot $v \in V$ i $w \in W$,*

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w).$$

Ara, gràcies a la Proposició 5.31, sabem que ambdós espais vectorials són isomorfs en cas que V i W siguin finitament generats, cosa que soluciona aquesta ambigüitat.

Acabem el Capítol amb un corol·lari relacionat amb l'espai dual.

COROL·LARI 5.33. *Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials finitament generats, aleshores existeix un isomorfisme de $V^* \otimes W^*$ en $(V \otimes W)^*$.*

DEMOSTRACIÓ. Es comprova directament.

$$\begin{aligned}
 V^* \otimes W^* &= \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(W, \mathbb{K}) && (\text{Def. } V^*, W^*) \\
 &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}) && (\text{Prop. 5.31}) \\
 &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V \otimes W, \mathbb{K}) && (\text{Prop. 4.8}) \\
 &= (V \otimes W)^*. && (\text{Def. } (V \otimes W)^*)
 \end{aligned}$$

Com volíem. □

Aplicacions multilineals

Encara que durant el present treball hem tractat amb aplicacions lineals i bilineals, aquest concepte es pot generalitzar per a un nombre finit d'espais vectorials. Introduïm així les aplicacions multilineals. D'igual forma que les aplicacions bilineals són fonamentals per definir el producte tensorial de dos espais, requerirem de les multilineals si volem generalitzar el producte tensorial per a més de dos espais vectorials.

1. Introducció

NOTA 6.1. Durant aquest capítol, $m \in \mathbb{N}$ denotarà un número natural arbitrari però fixe.

La definició d'aplicacions multilinear segueix la mateixa lògica que la d'aplicació bilinear. La diferència és que podem contar amb més de dos components.

DEFINICIÓ 6.2. Siguen $V_1, \dots, V_m$ i W $m+1$ $\mathbb{K}$ -espais vectorials i $f: \prod_{j=1}^m V_j \rightarrow W$ una aplicació. Direm que f és **multilinear** si per a tot $j \in \{1, \dots, m\}$ se satisfà que per a qualssevol $v_j, v'_j \in V_j$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f(v_1, \dots, \lambda v_j + \mu v'_j, \dots, v_m) = \lambda f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_m) + \mu f(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_m)$.

Això és, f és multilinear si és lineal en cada component. Denotarem

$$\text{Multi}_{\mathbb{K}} \left(\prod_{j=1}^m V_j, W \right) := \left\{ f: \prod_{j=1}^m V_j \rightarrow W \mid f \text{ multilinear} \right\}.$$

En cas que el codomini siga $\mathbb{K}$, escriurem $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(\prod_{j=1}^m V_j)$.

L'espai de les aplicacions multilineals, de manera anàloga a les aplicacions lineals i bilineals, té estructura d'espai vectorial junt amb l'aplicació nul·la i les lleis de composició internes habituals de les aplicacions.

Hi existeix un cas particular de les aplicacions multilineals que és de considerable rellevància: les formes m -lineals. És més, podem seleccionar dins d'aquestes un conjunt més específic encara com són les formes m -lineals alternades. De fet, com veurem, el determinant és un exemple d'aquest tipus d'aplicació.

DEFINICIÓ 6.3. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. Una **forma m -lineal** f és una aplicació multilinear amb domini V^m i codomini $\mathbb{K}$. A més,

direm que és **alternada** si $f(v_1, \dots, v_m) = 0$ sempre que existisquen $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, per als quals $v_i = v_j$.

NOTA 6.4. Denotarem per $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ al conjunt de les m -formes alternades sobre V .

Una conseqüència immediata de la definició és aquesta.

PROPOSICIÓ 6.5. Siga $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ i siga $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ un conjunt de vectors linealment dependents. Aleshores, $f(v_1, \dots, v_m) = 0$.

DEMOSTRACIÓ. Com que $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ és un conjunt de vectors linealment dependent, aleshores existeix $j \in \{1, \dots, m\}$ de manera que v_m és combinació lineal dels altres vectors. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar $j = m$. És a dir, existeixen $\lambda_j \in \mathbb{K}$, tals que $v_m = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j v_i$. Per tant,

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_m) &= f\left(v_1, \dots, v_{m-1}, \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j v_i\right) && (\text{Def. } v_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j f(v_1, \dots, v_{m-1}, v_i) && (f \text{ } m\text{-lineal}) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \cdot 0 && (f \text{ alternada}) \\ &= 0, && (\text{Estr. } \mathbb{K}) \end{aligned}$$

com volíem provar. $\square$

COROLLARI 6.6. Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) < m$. Llavors l'única forma m -lineal alternada és l'aplicació nul·la.

DEMOSTRACIÓ. Siga $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$. Com que $\dim_{\mathbb{K}}(V) < m$, llavors, per la Proposició 2.32, qualsevol conjunt d' m vectors de V és linealment dependent. Per la proposició anterior, la imatge per f d'aquests és zero. Així, necessàriament, $f = 0$. $\square$

Finalitzem veient una proposició de la qual emergirà una qüestió que estudiarem després: com afecta canviar d'ordre les tuples en una forma m -lineal alternada.

PROPOSICIÓ 6.7. En una forma m -lineal alternada f , intercanviar la posició de dues entrades en la tupla canvia el resultat de l'imatge per un factor de -1 .

DEMOSTRACIÓ. Siga $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$ i siguen $i, j \in \{1, \dots, m\}$ amb $i < j$. Com que f és una forma m -lineal alternada,

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_m) \\ &= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m). \end{aligned}$$

És a dir, $f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m)$. $\square$

2. Grup simètric

En la proposició anterior hem vist com varia l'imatge d'una forma m -lineal alternada en intercanviar dues entrades en la tupla. Però, i si intercanviem més, què passa? Abans de respondre açò, cal comprendre què és matemàticament canviar d'ordre els elements d'una tupla. Amb aquest objectiu, cal estudiar les permutacions.

DEFINICIÓ 6.8. Siga Ω un conjunt finit no buit. Una **permutació** d' Ω és una aplicació bijectiva d' Ω en Ω . Al conjunt de totes les permutacions d' Ω es coneix com el **grup simètric** d' Ω i es denota per Σ_Ω . A més, si $\Omega = \{1, \dots, m\}$, és habitual emprar la notació Σ_m .

La teoria d'aquesta secció és vàlida per a qualsevol conjunt Ω . No obstant això, ens centrarem exclusivament en el cas $\Omega = \{1, \dots, m\}$, cosa que ens facilitarà la notació.

NOTA 6.9. Tal i com el seu nom indica, Σ_m té estructura de grup. És fàcil comprovar-ho agafant la composició ($\circ$) com a LCI i a l'aplicació identitat id com a element neutre.

NOTA 6.10. De vegades es denota la composició per juxtaposició, això és que, per a $f, g \in \Sigma_m$, escrivim fg en lloc de $f \circ g$.

Ens preguntem quants elements té Σ_m . Així, tractem de construir un element $\sigma \in \Sigma_m$: per a definir $\sigma(1)$, tenim m -possibilitats. En canvi, una vegada definit $\sigma(1)$, per a $\sigma(2)$ tenim una possibilitat menys, és a dir, $m - 1$. Successivament, arribem al fet que $\sigma(m)$ ha de ser necessàriament el terme que no hagem escollit encara. Per tant, per a definir σ , tenim $m(m - 1) \cdots 1 = m!$ possibilitats. Concloem que $|\Sigma_m| = m!$.

Ara presentem el concepte de cicle, el qual ens permetrà representar cada element de Σ_m d'una manera útil i compacta.

DEFINICIÓ 6.11. Siguen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, \dots, m\}$ elements distints dos a dos. S'anomena **n -cicle** i es denota per $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a l'únic element $g \in \Sigma_m$ tal que:

- (1) Per a $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, $g(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$.
- (2) $g(\alpha_n) = \alpha_1$.
- (3) Si $\beta \in \{1, \dots, m\} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $g(\beta) = \beta$.

Els 2-cicles reben el nom de **transposicions**.

DEFINICIÓ 6.12. Siga $\sigma \in \Sigma_m$ i $j \in \{1, \dots, m\}$, direm que σ **mou** a j si $\sigma(j) \neq j$. En cas contrari, direm que σ **fixa** a j .

DEFINICIÓ 6.13. Siguen $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ i $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ dos cicles de Σ_m . Direm que són **disjunts** si els conjunts $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ i $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ ho són.

El que dos cicles siguen disjunts és de molta ajuda gràcies a la següent proposició.

PROPOSICIÓ 6.14. Si $f, g \in \Sigma_m$ són cicles disjunts, llavors $f \circ g = g \circ f$.

DEMOSTRACIÓ. Siga $j \in \{1, \dots, m\}$. Existeixen tres possibilitats.

(1) Si ni f ni g mouen a j :

$$(f \circ g)(j) = f(g(j)) = f(j) = j,$$

$$(g \circ f)(j) = g(f(j)) = g(j) = j.$$

(2) Si f mou a j , en ser f i g disjunts, j és fixat per g . Així, $f(j)$ també es fixa per g , ja que $f(j)$ pertany al conjunt d'elements que f mou. D'aquesta manera:

$$(f \circ g)(j) = f(g(j)) = f(j),$$

$$(g \circ f)(j) = g(f(j)) = f(j).$$

(3) Si g mou a j , el raonament és anàleg a l'anterior i

$$(f \circ g)(j) = (g \circ f)(j) = g(j).$$

Concloem que $f \circ g = g \circ f$. $\square$

Un resultat bàsic del grup simètric és el següent lema ja que, com veurem, amb únicament les transposicions podem definir qualsevol element del grup simètric.

LEMA 6.15. La inversa d'una transposició és ella mateixa.

DEMOSTRACIÓ. Siga $(i, j) \in \Sigma_m$, amb $m \geq 2$ i $i \neq j$. Per a $k \in \{1, \dots, m\}$ distingim tres casos.

(1) Si $k = i$,

$$((i, j) \circ (i, j))(i) = (i, j)(j) = i.$$

(2) Si $k = j$,

$$((i, j) \circ (i, j))(j) = (i, j)(i) = j.$$

(3) Si $k \notin \{i, j\}$,

$$((i, j) \circ (i, j))(k) = (i, j)(k) = k.$$

Així, per a tot $k \in \{1, \dots, m\}$, $((i, j) \circ (i, j))(k) = k$. Deduïm que $(i, j) \circ (i, j) = \text{id}$, i.e., $(i, j)^{-1} = (i, j)$. $\square$

El següent teorema és un dels més importants i bàsics del grup simètric. Certament, és un resultat intuïtiu, ja que en la vida quotidiana, si volem canviar d'ordre una sèrie d'objectes, usualment intercanviem objectes dos a dos fins a arribar a l'ordre que busquem. És a dir, enllacem transposicions.

TEOREMA 6.16. *Per a tot $m \in \mathbb{N}$, tota permutació en Σ_m es pot expressar com a producte de transposicions.*

DEMOSTRACIÓ. Ho demostrarem per inducció. Per al cas de $m = 1$ o $m = 2$ és evident, doncs $\Sigma_1 = \{\text{id}\}$ i $\Sigma_2 = \{\text{id}, (1, 2)\}$. Suposem cert el resultat per a $m \geq 2$. Així, donat $\sigma \in \Sigma_{m+1}$, o bé σ fixa $m + 1$, o bé el mou. Si el fixa, podem entendre σ com un element de Σ_m i, per hipòtesi d'inducció, es pot descomposar com a producte de transposicions.

Si el mou, aleshores $\sigma(m + 1) = j$ per a cert $j \in \{1, \dots, m\}$. D'aquesta manera, si agafem $\tau := (m + 1, j) \circ \sigma$, notem que

$$\tau(m + 1) = ((m + 1, j) \circ \sigma)(m + 1) = (m + 1, j)(j) = m + 1.$$

És a dir, τ fixa $m + 1$. Per tant, estem al primer cas i τ es descompon com a producte de transposicions. Però, com que

$$\sigma = ((m + 1, j) \circ (m + 1, j)) \circ \sigma = (m + 1, j) \circ \tau,$$

ja que la inversa d'una transposició és ella mateixa, σ és també producte de transposicions. $\square$

Com que tota permutació es pot expressar com a producte de transposicions, introduïm les següents definicions.

DEFINICIÓ 6.17. *Direm que una permutació és **parella** si es pot expressar com a producte d'un nombre parell de transposicions. De la mateixa manera, direm que és **senar** si es pot expressar com a producte d'un nombre senar de transposicions.*

Notem que una permutació no té una representació única com a producte de transposicions. Per exemple, en Σ_3 :

$$\text{id} = 1 = (1, 2)(1, 2) = (1, 2)(1, 3)(1, 3)(1, 2).$$

És a dir, podem expressar la identitat com a producte de 0, 2 o 4 permutacions per i , per açò, és parella. Però, podem trobar una expressió de la identitat com producte d'un nombre senar de transposicions? Per a trobar la resposta, presentem el concepte de signe d'una transposició, el qual serà d'ajuda.

DEFINICIÓ 6.18. *Per a $m \geq 2$ definim el polinomi*

$$\Delta(x_1, \dots, x_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j).$$

A més, donat $\sigma \in \Sigma_m$, definim $\sigma\Delta$ com

$$\sigma\Delta(x_1, \dots, x_m) = \Delta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}).$$

Al principi, aquestes definicions poden semblar difícils d'entendre. Tot i això, són una ferramenta que utilitzarem exclusivament per definir de manera matemàtica el signe d'una permutació. Però abans d'açò, cal provar la següent proposició.

PROPOSICIÓ 6.19. *Per a qualsevol $\sigma \in \Sigma_m$, $\sigma\Delta = \pm\Delta$.*

DEMOSTRACIÓ. És clar que tant $\sigma\Delta$ com Δ tenen el mateix nombre de factors. Donats $i, j \in \{1, \dots, m\}$ amb $i < j$, en $\sigma\Delta$ aquests subíndexs tenen associats el factor $(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$. No obstant això, com σ és una bijecció, $x_{\sigma(i)} \neq x_{\sigma(j)}$ i existeixen $k, l \in \{1, \dots, m\}$ tals que $k \neq l$ i $k = \sigma(i)$, $l = \sigma(j)$.

Ara, hi ha dues possibilitats. Per una part, si $k < l$,

$$x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)} = x_k - x_l$$

és un factor de Δ . Per altra part, si $k > l$, aleshores

$$-(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) = x_l - x_k$$

és un factor de Δ . És a dir, cada factor de $\sigma\Delta$ és un factor de $\pm\Delta$. A més, cap factor es repeteix atès que σ és una bijecció. Concloem que $\sigma = \pm\Delta$. $\square$

Aquesta proposició ens assegura que la definició de signe té sentit.

DEFINICIÓ 6.20. *Definim el **signe** d'una permutació $\sigma \in \Sigma_m$ i el denotem per $\text{sign}(\sigma)$ com al factor 1 o -1 tal que $\sigma\Delta = \text{sign}(\sigma)\Delta$.*

És clar que, per a cada permutació, aquesta té un únic signe assignat. Una bona propietat del signe és que el signe de la composició és el producte dels signes. És a dir, manté l'estructura de grup.

PROPOSICIÓ 6.21. *Si $\sigma, \tau \in \Sigma_m$, llavors*

$$\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\tau\sigma) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau).$$

DEMOSTRACIÓ. Primer, verifiquem que $(\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta)$.

$$\begin{aligned} (\sigma\tau)\Delta(x_1, \dots, x_m) &= \Delta(x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(m))}) && \text{(Def. } (\sigma\tau)\Delta) \\ &= (\sigma\Delta)(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(m)}) && \text{(Def. } \sigma\Delta) \\ &= (\sigma(\tau\Delta))(x_1, \dots, x_m). && \text{(Def. } \tau\Delta) \end{aligned}$$

Arran d'açò, la comprovació de la proposició és directa, ja que,

$$\text{sign}(\sigma\tau)\Delta = (\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta) = \text{sign}(\sigma)\tau\Delta = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)\Delta.$$

És a dir, $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)$. De manera similar, s'obté que $\text{sign}(\tau\sigma) = \text{sign}(\tau)\text{sign}(\sigma)$. $\square$

A continuació, provem unes propietats bàsiques del signe que seran de molta utilitat.

PROPOSICIÓ 6.22. *El signe satisfà les següents propietats.*

- (1) $\text{sign}(\text{id}) = 1$.
- (2) Per a cada $\sigma \in \Sigma_m$, $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1})$.
- (3) Per a cada $\sigma, \tau \in \Sigma_m$, $\text{sign}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \text{sign}(\tau)$.
- (4) Tota transposició té signe -1 .

DEMOSTRACIÓ. (1) és evident ja que $\text{id}\Delta = \Delta$.

Siga $\sigma \in \Sigma_m$, com que $\sigma\sigma^{-1} = \text{id}$,

$$1 = \text{sign}(\text{id}) = \text{sign}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\sigma^{-1}).$$

D'ací se segueix que si $\text{sign}(\sigma) = 1$, necessàriament $\text{sign}(\sigma^{-1}) = 1$, mentre que si $\text{sign}(\sigma) = -1$, llavors $\text{sign}(\sigma^{-1}) = -1$. En altres paraules, sempre es té que $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1})$ i hem provat (2).

Com a conseqüència de (2), tenim (3), atés que

$$\text{sign}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) \text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)^2 \text{sign}(\tau) = \text{sign}(\tau).$$

Finalment, per provar (4), començarem amb veure-ho per a $\tau := (1, 2)$. Per definició,

$$\tau\Delta(x_1, \dots, x_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)}).$$

Si desenvolupem aquest productori, ens queda

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)}) \\ &= (x_{\tau(1)} - x_{\tau(2)}) \prod_{3 \leq j \leq m} (x_{\tau(1)} - x_{\tau(j)}) \prod_{3 \leq j \leq m} (x_{\tau(2)} - x_{\tau(j)}) \prod_{3 \leq i < j \leq m} (x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)}) \\ &= (x_2 - x_1) \prod_{3 \leq j \leq m} (x_2 - x_j) \prod_{3 \leq j \leq m} (x_1 - x_j) \prod_{3 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j) \\ &= - \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

Consegüentment, $\tau\Delta = -\Delta$ i $\text{sign}(\tau) = -1$.

Ara, siga (a, b) amb $a \neq b$ una transposició qualsevol en Σ_m . Definim $\sigma := (2, b)(1, a)$. En el cas que o bé $1 = a$, o bé $2 = b$, fem un abús de notació i entenem que o bé $(1, a) = \text{id}$, o bé $(2, b) = \text{id}$, respectivament. Veiem que aquesta permutació satisfà que $\sigma\tau\sigma = (a, b)$. Siga $i \in \{1, \dots, m\}$, si $i \notin \{1, 2, a, b\}$, aleshores és clar que $(\sigma\tau\sigma)(i) = i$. En canvi, per a $i \in \{1, 2, a, b\}$,

$$\begin{aligned} & \text{si } i = 1, \quad (\sigma\tau\sigma)(1) = \sigma(\tau(\sigma(1))) = \sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = 1, \\ & \text{si } i = 2, \quad (\sigma\tau\sigma)(2) = \sigma(\tau(\sigma(2))) = \sigma(\tau(b)) = \sigma(b) = 2, \\ & \text{si } i = a, \quad (\sigma\tau\sigma)(a) = \sigma(\tau(\sigma(a))) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(2) = b, \\ & \text{si } i = b, \quad (\sigma\tau\sigma)(b) = \sigma(\tau(\sigma(b))) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = a. \end{aligned}$$

Per tant, $\sigma\tau\sigma = (a, b)$ i, finalment,

$$\text{sign}(a, b) = \text{sign}(\sigma\tau\sigma) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) \text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\tau) = -1.$$

Concloem que tota transposició té signe -1 , provant així (4). $\square$

Del fet que les transposicions tinguen sempre signe -1 i tota composició es descomponga com a producte de transposicions, s'intueix el següent teorema. Aquest, ens resoldrà el dubte d'abans, el qual era si podem expressar la identitat com a una composició d'un nombre senar de transposicions.

TEOREMA 6.23. *No existeix cap permutació parella i senar al mateix temps.*

DEMOSTRACIÓ. Per reducció a l'absurd, suposem que existeix una permutació $\sigma \in \Sigma_m$ parella i senar, és a dir, $\sigma = \prod_{i=1}^k \tau_k = \prod_{j=1}^l \tilde{\tau}_j$ amb $\tau_i, \tilde{\tau}_j \in \Sigma_m$ transposicions, k parell i l senar.

Calculem el signe de σ . Per una part,

$$\text{sign}(\sigma) = \text{sign}\left(\prod_{i=1}^k \tau_k\right) = \prod_{i=1}^k \text{sign}(\tau) = \prod_{i=1}^k (-1) = (-1)^k = 1.$$

Però, per altra part, amb el mateix raonament,

$$\text{sign}(\sigma) = \text{sign}\left(\prod_{j=1}^l \tilde{\tau}_j\right) = (-1)^l = -1.$$

Com que el signe d'una permutació és únic, hem arribat a una contradicció. Per tant, σ ha de ser o bé parella, o bé senar, però no ambdues al mateix temps. $\square$

COROLLARI 6.24. *Tota permutació parella té signe 1 i tota permutació senar té signe -1 .*

DEMOSTRACIÓ. S'ha provat a la proposició anterior. $\square$

Notem que encara que la definició formal de signe pot resultar complicada, d'ara endavant podem pensar en el signe en el sentit de l'últim corollari vist. Endemés, podem verificar que hi ha la mateixa quantitat de permutacions parelles que de senars.

COROLLARI 6.25. *Composar per una transposició $\tau \in \Sigma_m$ qualsevol és una bijecció del conjunt de permutacions parelles de Σ_m al conjunt de les permutacions senars de Σ_m . Com a conseqüència, aquests dos conjunts tenen la mateixa quantitat d'elements.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen $\tau \in \Sigma_m$ transposició, A el conjunt de permutacions parelles en Σ_m i B el de les permutacions senars. Definim l'aplicació

$$\begin{aligned} (\cdot) \circ \tau &: A \longrightarrow B \\ \sigma &\longmapsto \sigma\tau. \end{aligned}$$

Primer hem de veure que està ben definida l'aplicació. Així, si $\sigma \in \Sigma_m$ és parella, com

$$\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) = -1,$$

$\sigma\tau$ és senar. Per tal causa, és ben definida.

Ara notem que és injectiva. Suposem $\sigma, \tilde{\sigma} \in A$ tals que

$$((\cdot) \circ \tau)(\sigma) = ((\cdot) \circ \tau)(\tilde{\sigma}), \quad \text{i.e., } \sigma\tau = \tilde{\sigma}\tau.$$

Si posem en dita igualtat τ^{-1} per la dreta, obtenim $\sigma\text{id} = \tilde{\sigma}\text{id}$. És a dir, $\sigma = \tilde{\sigma}$ i $(\cdot) \circ \tau$ és injectiva.

Finalment, per a la sobrejectivitat, si $\gamma \in \Sigma_m$ és senar, considerem $\gamma\tau$. Com que

$$\text{sign}(\gamma\tau) = \text{sign}(\gamma) \text{sign}(\tau) = (-1)(-1) = 1,$$

$\gamma\tau$ és parella. Però ja que, en ser τ transposició, $\tau^{-1} = \tau$. Llavors,

$$((\cdot) \circ \tau)(\gamma\tau) = (\gamma\tau)\tau = \gamma(\tau\tau^{-1}) = \gamma\text{id} = \gamma.$$

D'aquesta manera, $(\cdot) \circ \tau$ és sobrejectiva i, així, una bijecció. $\square$

COROL·LARI 6.26. Per a qualsevol $\tau \in \Sigma_m$,

$$\begin{array}{ccc} (\cdot) \circ \tau & \Sigma_m & \longrightarrow \Sigma_m \\ & \sigma & \longmapsto \sigma\tau. \end{array}$$

és una bijecció.

DEMOSTRACIÓ. La prova és similar a l'anterior. $\square$

3. Acció de grup

En la primera secció ens plantejàrem com li afectaven a les formes m -lineals alternades canviar l'ordre de les tuples a l'hora de calcular l'imatge. Ja hem vist que el grup simètric ens serveix per a canviar d'ordre les tuples. Per tant, com relacionem $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ amb Σ_m ? Amb dita finalitat, empremem les accions de grup.

DEFINICIÓ 6.27. Siga G un grup i siga Ω un conjunt no buit. Direm que $(\cdot): \Omega \times G \longrightarrow \Omega$ és una **acció de grup** a dreta de G en Ω si satisfà les següents dues propietats.

- (1) **Compatibilitat:** $\forall g, h \in G, \forall \omega \in \Omega, \omega \cdot (g \cdot h) = (\omega \cdot g) \cdot h$.
- (2) **Identitat:** $\forall \omega \in \Omega, \omega \cdot 1_G = \omega$.

Per a V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial, trobem primerament una acció de grup a dreta de Σ_m en $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^m)$. Així, definim l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} *: \text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^m) \times \Sigma_m & \longrightarrow & \text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^m) \\ (f, \sigma) & \longmapsto & f * \sigma := f^{\sigma}, \end{array}$$

on

$$\begin{array}{ccc} f^{\sigma}: & V^m & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_m) & \longmapsto & f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}). \end{array}$$

PROPOSICIÓ 6.28. L'aplicació $*$ és una acció de grup.

DEMOSTRACIÓ. Primer de tot hem de verificar que està ben definida, això és que, per a qualsevol $\sigma \in \Sigma_m$ i qualsevol $f \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^m)$, llavors $f^\sigma \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^m)$. Siguen $v_1, \dots, v_m, v'_1 \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Sabem que existeix $j \in \{1, \dots, m\}$ de manera que $\sigma(j) = 1$. Així,

$$\begin{aligned} f^\sigma(\lambda v_1 + \mu v'_1, v_2, \dots, v_m) &= f(v_{\sigma(1)}, \dots, \lambda v_{\sigma(j)} + \mu v'_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(m)}) && (\text{Def. } f^\sigma) \\ &= \lambda f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(m)}) && \\ &\quad + \mu f(v_{\sigma(1)}, \dots, v'_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(m)}) && (f \text{ } m\text{-lineal}) \\ &= \lambda f^\sigma(v_1, \dots, v_m) + \mu f^\sigma(v'_1, \dots, v_m). && (\text{Def. } f^\sigma) \end{aligned}$$

Per tant, és lineal en la primera component. La prova a la resta és anàloga i deduïm que $*$ està ben definida.

Comprovem que és compatible. Siguen $f \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^m)$ i $\sigma, \tau \in \Sigma_m$, volem verificar que

$$f * (\sigma\tau) = (f * \sigma) * \tau, \text{ i.e., } f^{\sigma\circ\tau} = (f^\sigma)^\tau.$$

Donat $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$,

$$\begin{aligned} f^{\sigma\circ\tau}(v_1, \dots, v_m) &= f(v_{(\sigma\circ\tau)(1)}, \dots, v_{(\sigma\circ\tau)(m)}) && (\text{Def. } f^{\sigma\circ\tau}) \\ &= f^\sigma(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(m)}) && (\text{Def. } f^\sigma) \\ &= (f^\sigma)^\tau(v_1, \dots, v_m). && (\text{Def. } (f^\sigma)^\tau) \end{aligned}$$

Així, $f^{\sigma\circ\tau} = (f^\sigma)^\tau$ i $*$ és compatible.

Finalment, per a qualsevol $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$

$$f^{\text{id}}(v_1, \dots, v_m) = f(v_{\text{id}(1)}, \dots, v_{\text{id}(m)}) = f(v_1, \dots, v_m).$$

És a dir, $f * \text{id} = f^{\text{id}} = f$ i concloem que $*$ és una acció de grup. $\square$

NOTA 6.29. Si fixem $\sigma \in \Sigma_m$, per l'estructura de les aplicacions, es comprova fàcilment que $(\cdot)^\sigma$ és lineal. Això és, que donats $f, g \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^m)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, llavors

$$(\lambda f + \mu g)^\sigma = \lambda f^\sigma + \mu g^\sigma.$$

Tot i que hem considerat el conjunt $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^m)$, aquesta acció de grup també és vàlida per a $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$.

PROPOSICIÓ 6.30. Podem considerar la mateixa acció de grup però en $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$, és a dir, $*$: $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V) \times \Sigma_m \longrightarrow \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$.

DEMOSTRACIÓ. Gràcies a la proposició anterior, si provem que per a tot $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ i tot $\sigma \in \Sigma_m$, $f^\sigma \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ hem acabat, ja que les propietats d'acció de grup s'hereten.

Siguen $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ i $\sigma \in \Sigma_m$, ja sabem que f^σ és m -lineal. Així, siga $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$ on almenys dues entrades coincideixen. Per tant, és clar que a $(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) \in V^m$ també coincideixen almenys dos i, en ser f alternada,

$$f^\sigma(v_1, \dots, v_m) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = 0.$$

Per tant, f^σ és alternada i $*$ és acció de grup en $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$. $\square$

Recordem que tota permutació és composició de transposicions. Així, podem estendre la Proposició 6.7 a qualsevol permutació.

PROPOSICIÓ 6.31. *Siguen V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$. Aleshores per a qualsevol $\sigma \in \Sigma_m$ es té que*

$$f^\sigma = \text{sign}(\sigma) f.$$

DEMOSTRACIÓ. Per una part, sabem que $\sigma \in \Sigma_m$ es pot descompondre com a producte de transposicions, o siga, $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ per a cert $k \in \mathbb{N}$. Per altra part, per a una transposició qualsevol $\tau \in \Sigma_m$ i un vector $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$, al vector $(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(m)})$ únicament s'han intercanviat dues entrades mentre que la resta romanen igual. Així per la Proposició 6.7, $f^\tau = -f$. Finalment, recordem que $\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$. Reunint tots aquests fets,

$$f^\sigma = f^{\tau_1 \cdots \tau_k} = (f^{\tau_1 \cdots \tau_{k-1}})^{\tau_k} = -f^{\tau_1 \cdots \tau_{k-1}} = \dots = (-1)^k f = \text{sign}(\sigma) f,$$

com volíem provar. $\square$

Si V és un $\mathbb{K}$ espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = m$, per a qualsevol $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$, és suficient conèixer l'imatge dels elements de la base, com veiem en el següent resultat.

PROPOSICIÓ 6.32. *Siga V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = m$. Considerem $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ base de V i $v_1, \dots, v_m \in V$. Per a qualsevol $k \in \{1, \dots, m\}$ existeixen únics $\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{m,k} \in \mathbb{K}$ tals que $v_k = \sum_{j_k=1}^m \lambda_{j_k,k} e_{j_k}$. Aleshores, per a qualsevol $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$,*

$$f(v_1, \dots, v_m) = f(e_1, \dots, e_m) \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \cdots \lambda_{\sigma(m),m}.$$

DEMOSTRACIÓ. Siga $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$, llavors,

$$\begin{aligned} & f(v_1, \dots, v_m) \\ &= f\left(\sum_{j_1=1}^m \lambda_{j_1,1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^m \lambda_{j_2,2} e_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^m \lambda_{j_m,m} e_{j_m}\right) \quad (\text{Def. } v_1, \dots, v_m) \\ &= \sum_{j_1=1}^m \lambda_{j_1,1} f\left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^m \lambda_{j_2,2} e_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^m \lambda_{j_m,m} e_{j_m}\right) \quad (f \text{ } m\text{-lineal}) \\ &= \sum_{j_1=1}^m \cdots \sum_{j_m=1}^m \lambda_{j_1,1} \cdots \lambda_{j_m,m} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}). \quad (\text{Iterem}) \end{aligned}$$

Fixem-nos que, en ser f alternada, si dues entrades són iguals, l'imatge és zero. Per tant, ens interessa els vectors $(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) \in V^m$ on $j_i \neq j_l$ si $i \neq l$. A més, sabem que $j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, m\}$. Així, els únics

subíndexs que ens interessin són les permutacions, i.e., $(j_1, \dots, j_m) \in \Sigma_m$. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned}
& f(v_1, \dots, v_m) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \lambda_{\sigma(1),1} \cdots \lambda_{\sigma(m),m} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(m)}) \quad (f \text{ alternada}) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \lambda_{\sigma(1),1} \cdots \lambda_{\sigma(m),m} f^\sigma(e_1, \dots, e_m) \quad (\text{Def. } f^\sigma) \\
&= f(e_1, \dots, e_m) \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \cdots \lambda_{\sigma(m),m}, \quad (f^\sigma = \text{sign}(\sigma) f)
\end{aligned}$$

com volíem demostrar. $\square$

La següent proposició ens servirà per a després, poder definir el determinant d'un endomorfisme.

PROPOSICIÓ 6.33. *Si V és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = m$, aleshores $\dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)) = 1$.*

DEMOSTRACIÓ. Començarem la prova veient que $\dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)) \leq 1$. Això equival a demostrar que no existeix cap conjunt de dos vectors de $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ linealment independents. És a dir, que donats dos vectors, sempre seran proporcionals. D'aquesta manera, siguin $f, f' \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ i suposem que $f \neq 0$. Volem veure que existeix $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $f' = \mu f$.

Com que $f \neq 0$, existeix $(e_1, \dots, e_m) \in V^m$ tal que $f(e_1, \dots, e_m) \neq 0$. Per la Proposició 6.5, $\{e_1, \dots, e_m\}$ és un conjunt de m vectors linealment independents de V . Com que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = m$, per la Proposició 2.33, $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_m\}$ és base de V .

A més, en ser $\mathbb{K}$ cos, existeix $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $f'(e_1, \dots, e_m) = \mu f(e_1, \dots, e_m)$. Així, donats $(v_1, \dots, v_m) \in V$, siguin $\lambda_{j_k,k} \in \mathbb{K}$ tals que, per a tot $k \in \{1, \dots, m\}$, $v_k = \sum_{j_k=1}^m \lambda_{j_k,k} e_{j_k}$. Se segueix que

$$\begin{aligned}
& f'(v_1, \dots, v_m) \\
&= f'(e_1, \dots, e_m) \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \cdots \lambda_{\sigma(m),m} \quad (\text{Prop. 6.32}) \\
&= \mu f(e_1, \dots, e_m) \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \cdots \lambda_{\sigma(m),m} \quad (\text{Def. } \mu) \\
&= \mu f(v_1, \dots, v_m). \quad (\text{Prop. 6.32})
\end{aligned}$$

Així, $f' = \mu f$ i $\dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)) \leq 1$.

La segona part de la demostració consisteix a demostrar que existeix $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ no nul·la, ja que amb açò, $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V) \neq \{0\}$ i $\dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)) = 1$. Considerem $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ una base de V i prenem la base dual $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \dots, e_m^*\}$. Recordem que si $v = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j \in V$, llavors $e_k^*(v) = \lambda_k$ per a cada $k \in \{1, \dots, m\}$. Per tant, $v = \sum_{j=1}^m e_j^*(v) e_j$.

Definim l'aplicació

$$f: \begin{array}{ccc} V^m & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_m) & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(v_1) \cdots e_{\sigma(m)}^*(v_m). \end{array} \quad (10)$$

Comprovarem primer que f és m -lineal. Siguen $j \in \{1, \dots, m\}$, $v_1, \dots, v_m, v'_j \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, \lambda v_j + \mu v'_j, \dots, v_m) &= \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(v_1) \cdots e_{\sigma(j)}^*(\lambda v_j + \mu v'_j) \cdots e_{\sigma(m)}^*(v_m) \quad (\text{Def. } f) \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(v_1) \cdots e_{\sigma(j)}^*(v_j) \cdots e_{\sigma(m)}^*(v_m) \\ &\quad + \mu \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(v_1) \cdots e_{\sigma(j)}^*(v'_j) \cdots e_{\sigma(m)}^*(v_m) \quad (e_{\sigma(j)}^* \text{ lineal}) \\ &= \lambda f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_m) + \mu f(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_m). \quad (\text{Def. } f) \end{aligned}$$

Per a veure que f és alternada, considerem $v_1, \dots, v_m \in V$ i suposem que existeixen $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i < j$, amb $v_i = v_j$. Hem de verificar que $f(v_1, \dots, v_m) = 0$. Observem que, per a cada $\sigma \in \Sigma_m$, podem aparellar-lo amb $\sigma \circ (i, j) \in \Sigma_m$. Aquest aparellament està ben definit, ja que

$$(\sigma \circ (i, j)) \circ (i, j) = \sigma \circ ((i, j) \circ (i, j)) = \sigma \circ \text{id} = \sigma.$$

També, és clar que $\text{sign}(\sigma \circ (i, j)) = -\text{sign}(\sigma)$. Llavors,

$$\begin{aligned} &\text{sign}(\sigma \circ (i, j)) e_{(\sigma \circ (i, j))(1)}^*(v_1) \cdots e_{(\sigma \circ (i, j))(m)}^*(v_m) \\ &= -\text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(v_1) \cdots e_{\sigma(j)}^*(v_i) \cdots e_{\sigma(i)}^*(v_j) \cdots e_{\sigma(m)}^*(v_m) \\ &= -\text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(v_1) \cdots e_{\sigma(i)}^*(v_i) \cdots e_{\sigma(j)}^*(v_j) \cdots e_{\sigma(m)}^*(v_m). \end{aligned}$$

Per tant, al sumatori definit en f , cada parella s'anul·la i es dedueix que $f(v_1, \dots, v_m) = 0$, això és, que f és alternada. Aleshores, $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$.

Per acabar, únicament hem d'assegurar-nos que $f \neq 0$. Amb aquest fi, bastarà trobar una m -tupla de vectors on f no s'anul·la. Considerem $(e_1, \dots, e_m) \in V^m$ la m -tupla associada a la base $\mathcal{B}$. Així,

$$\begin{aligned} f(e_1, \dots, e_m) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(e_1) \cdots e_{\sigma(m)}^*(e_m) \quad (\text{Def. } f) \\ &= \text{sign}(\text{id}) e_1^*(e_1) \cdots e_m^*(e_m) \quad (e_j^*(e_i) = 0 \text{ si } j \neq i) \\ &= 1. \quad (\text{sign}(\text{id}) = 1, \forall j, e_j^*(e_j) = 1) \end{aligned}$$

Concloem que $f \neq 0$ i $\dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)) = 1$. $\square$

4. L'aplicació determinant

El determinant, tot i la seua popularitat, és una aplicació amb una definició formal no trivial. Per acabar aquest capítol, el definirem, veient així que, de fet, és una forma multilinear alternada. Amb aquest objectiu, prèviament cal definir una altra acció, encara que, en aquest cas no d'un grup sinó d'un monoide. No obstant això, la definició d'acció és la mateixa.

DEFINICIÓ 6.34. Siga M un conjunt no buit i siga $(\cdot)$ una LCI, direm que $(M, \cdot)$ és un **monoide** si satisfà la propietat associativa i té element neutre. Normalment es diu simplement que M és un monoide.

És a dir, el que diferencia el monoide d'un grup és l'existència d'inversos.

DEFINICIÓ 6.35. Siguen M un monoide i Ω un conjunt no buit, direm que $(\cdot): \Omega \times M \rightarrow \Omega$ és una **acció de monoide** a dreta de M en Ω si satisfà les propietats de compatibilitat i identitat de la Definició 6.27.

Notem que el conjunt d'endomorfismes és un monoide amb la composició com a LCI i id_V com element neutre. Així, podem definir una acció de monoide dels endomorfismes.

PROPOSICIÓ 6.36. Siguen $m \in \mathbb{N}$ i V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial. El monoide d'endomorfismes $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ actua sobre $\bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$ de la següent manera.

$$\diamond: \begin{array}{ccc} \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V) \times \text{End}_{\mathbb{K}}(V) & \longrightarrow & \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V) \\ (f, T) & \longrightarrow & f \diamond T := f^T, \end{array}$$

on

$$f^T: \begin{array}{ccc} V^m & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_m) & \longrightarrow & f(T(v_1), \dots, T(v_m)). \end{array}$$

DEMOSTRACIÓ. Primer de tot cal demostrar que $f^T \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$. Considerem $j \in \{1, \dots, m\}$, $v_1, \dots, v_m, v'_j \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} f^T(v_1, \dots, \lambda v_j + \mu v'_j, \dots, v_m) & \\ &= f(T(v_1), \dots, T(\lambda v_j + \mu v'_j), \dots, T(v_m)) && (\text{Def. } f^T) \\ &= f(T(v_1), \dots, \lambda T(v_j) + \mu T(v'_j), \dots, T(v_m)) && (T \text{ lineal}) \\ &= \lambda f(T(v_1), \dots, T(v_j), \dots, T(v_m)) && \\ &\quad + \mu f(T(v_1), \dots, T(v'_j), \dots, T(v_m)) && (f \text{ } m\text{-lineal}) \\ &= \lambda f^T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_m) + \mu f^T(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_m). && (\text{Def. } f^T) \end{aligned}$$

Per tant, f^T és m -lineal. Ara veiem que és alternada. Siga $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$ amb $v_i = v_j$ per a certs $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i < j$. Com que

$$f \in \Lambda_{\mathbb{K}}^m(V),$$

$$f^T(v_1, \dots, v_m) = f(T(v_1), \dots, T(v_i), \dots, T(v_j), \dots, T(v_m)) = 0,$$

atés que $T(v_i) = T(v_j)$. Així, $f^T \in \Lambda_{\mathbb{K}}^m(V)$.

Per altra part, hem de verificar que $\diamond$ és compatible, és a dir, que donats $f \in \Lambda_{\mathbb{K}}^m(V)$ i $T, S \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, $f^{T \circ S} = (f^T)^S$. Siga $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$,

$$\begin{aligned} f^{T \circ S}(v_1, \dots, v_m) &= f((T(S(v_1)), \dots, T(S(v_m)))) && (\text{Def. } f^{T \circ S}) \\ &= f^T(S(v_1), \dots, S(v_m)) && (\text{Def. } f^T) \\ &= (f^T)^S(v_1, \dots, v_m). && (\text{Def. } (f^T)^S) \end{aligned}$$

Finalment, cal notar que, per a qualsevol $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$,

$$f^{\text{id}_V}(v_1, \dots, v_m) = f(\text{id}_V(v_1), \dots, \text{id}_V(v_m)) = f(v_1, \dots, v_m).$$

Concloem que $f^{\text{id}_V} = f$ i, per tant, que $\diamond$ és una acció d' $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ en $\Lambda_{\mathbb{K}}^m(V)$. $\square$

Suposem V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = m$. Ara fixem $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ i considerem l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} (\cdot)^T: & \Lambda_{\mathbb{K}}^m(V) & \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{K}}^m(V) \\ & f & \longmapsto f^T. \end{array}$$

La comprovació que $(\cdot)^T$ és lineal és conseqüència directa de l'estructura d' $\Lambda_{\mathbb{K}}^m(V)$. Per tant $(\cdot)^T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\Lambda_{\mathbb{K}}^m(V))$. Però, ara bé, per la Proposició 6.33, $\dim_{\mathbb{K}}(\Lambda_{\mathbb{K}}^m(V)) = 1$. Ja quasi podem definir el determinant, únicament necessitem d'un últim resultat.

LEMA 6.37. Si W és un $\mathbb{K}$ espai vectorial de dimensió 1, per a qualsevol $g \in \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ existeix un únic $\mu \in \mathbb{K}$ tal que per a tot $w \in W$ $g(w) = \mu w$.

DEMOSTRACIÓ. Com que $\dim_{\mathbb{K}}(W) = 1$, existeix $e \in W$ amb $\{e\}$ base de W . Com $g(e) \in W$, existeix un únic $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $g(e) = \mu e$. Eixe és l'escalar que buscàvem, ja que per a qualsevol $w \in W$, $w = \lambda e$ per a cert $\lambda \in \mathbb{K}$ i, si tenim en compte la linealitat de g ,

$$g(w) = g(\lambda e) = \lambda g(e) = \lambda \mu e = \mu w,$$

com volíem provar. $\square$

Ara sí, definim el determinant d'un endomorfisme.

DEFINICIÓ 6.38. Siguen V un $\mathbb{K}$ -espai vectorial amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = m$ i $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Definim el **determinant** de T i el denotem per $\det(T)$ com a l'únic escalar en $\mathbb{K}$ tal que, per a qualsevol $f \in \Lambda_{\mathbb{K}}^m(V)$,

$$f^T = \det(T) f.$$

Però ara bé, hem definit el determinant d'un endomorfisme, no el d'una matriu quadrada. No obstant això, com que cada matriu té un endomorfisme associat, té sentit que el determinant de la matriu siga el determinant d'aquest endomorfisme. Per tant:

DEFINICIÓ 6.39. Siga $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$, aleshores pel Corol·lari 3.19, existeix un únic endomorfisme $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tal que la seua matriu coordinada respecte a la base canònica de $\mathbb{K}^m$ és A . Definim el **determinant** d' A , també denotat com $\det(A)$, com $\det(A) := \det(f)$.

Comprovem que el determinant és de fet una forma m -lineal alternada.

TEOREMA 6.40. *L'aplicació*

$$\begin{aligned} \det: (\mathbb{K}^m)^m &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_m) &\longmapsto \det(v_1 \cdots v_m). \end{aligned}$$

és una forma m -lineal alternada.

DEMOSTRACIÓ. Siga $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^m$ i siga $\mathcal{B}_C^{(m)} = \{e_1, \dots, e_m\}$ la base canònica de $\mathbb{K}^m$. Considerem la funció $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tal que per a cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $T(e_j) = v_j$. Sabem que la matriu de T respecte a $\mathcal{B}_C^{(m)}$ és $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_C^{(m)}}(T) = (v_1 \cdots v_m)$. Per la definició de determinant, $\det(v_1 \cdots v_m) = \det(T)$.

Ara bé, per la demostració de la Proposició 6.33, sabem que existeix $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(\mathbb{K}^m)$ amb $f(e_1, \dots, e_m) = 1$. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_m) &= \det(v_1 \cdots v_m) && (\text{Def. } \det(v_1, \dots, v_m)) \\ &= \det(T) && (\mathcal{M}_{\mathcal{B}_C^{(m)}}(T) = (v_1 \cdots v_m)) \\ &= \det(T)f(e_1, \dots, e_m) && (f(e_1, \dots, e_m) = 1) \\ &= f(T(e_1), \dots, T(e_m)) && (\text{Def. } \det(T)) \\ &= f(v_1, \dots, v_m). && (\forall j, T(e_j) = v_j) \end{aligned}$$

Això és, $\det = f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(\mathbb{K}^m)$, pel que argüim que $\det$ és una forma m -lineal alternada. $\square$

Per concloure aquest capítol, trobem la fórmula per a calcular el determinant d'una matriu quadrada.

TEOREMA 6.41. (Fórmula del determinant d'una matriu): Siga $A = (\lambda_{k,j})_{k,j=1}^m \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ una matriu. Aleshores,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \cdots \lambda_{\sigma(m),m}.$$

DEMOSTRACIÓ. Considerem la base canònica de $\mathbb{K}^m$, $\mathcal{B}_C^{(m)} = \{e_1, \dots, e_m\}$, i per a cada $j \in \{1, \dots, m\}$, definim $v_j := (\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{m,j})$. És clar que $v_j = \sum_{k=1}^m \lambda_{k,j} e_k$.

Per altra part, per la proposició anterior sabem que existeix $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(\mathbb{K})$ amb $f(e_1, \dots, e_n) = 1$ tal que $\det(v_1 \cdots v_m) = f(v_1, \dots, v_m)$. Aplicant la Proposició 6.32,

$$f(v_1, \dots, v_m) = f(e_1, \dots, e_m) \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \text{sign}(\sigma) \lambda_{\sigma(1),1} \cdots \lambda_{\sigma(m),m}.$$

Com que f satisfà que $f(e_1, \dots, e_m) = 1$, s'obté la fórmula. $\square$

Observem que aquesta aplicació f coincideix amb la definida en (10) si la base triada és la canònica, perquè com per a cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $v_j = \sum_{k=1}^m \lambda_{k,j} e_k$, llavors $e_{\sigma(j)}^(v_j) = \lambda_{\sigma(j),j}$.*

Producte tensorial generalitzat

Al llarg dels capítols 4 i 5 hem treballat amb el producte tensorial d'un parell de $\mathbb{K}$ -espais vectorials. No obstant això, aquest concepte es pot generalitzar per a una família finita de $\mathbb{K}$ -espais vectorials, on l'aplicació assignada al producte tensorial ja no serà bilineal sinó multilíneal.

1. Construcció

Siga $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i siguin $V_1, \dots, V_n$ $\mathbb{K}$ -espais vectorials. La definició del producte tensorial de la família $V_1, \dots, V_n$, denotada per $\bigotimes_{i=1}^n V_i$, es pot fer tant a esquerra com a dreta, gràcies a la Proposició 5.12. En aquest treball, ho farem a esquerra. Així, recursivament definim

$$\bigotimes_{i=1}^k V_i := \left(\bigotimes_{i=1}^{k-1} V_i \right) \otimes V_n, \quad k \in \{2, \dots, n\},$$

on $\bigotimes_{i=1}^1 V_i := V_1$. Veiem la proposició que ens garanteix que aquesta definició té estructura de producte tensorial.

PROPOSICIÓ 7.1. Siguin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i $V_1, \dots, V_n$ una família finita de $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Llavors $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ és un $\mathbb{K}$ -espai vectorial que satisfà la **propietat universal del producte tensorial**: per a qualsevol $\mathbb{K}$ -espai vectorial Z i qualsevol aplicació n -lineal $f: \prod_{i=1}^n V_i \rightarrow Z$, existeix una única aplicació lineal $f^\flat$ de manera que el següent diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^n V_i & \xrightarrow{\otimes} & \bigotimes_{i=1}^n V_i \\ & \searrow f & \downarrow \exists! f^\flat \text{ lineal} \\ & & Z \end{array}$$

A més, l'aplicació $\otimes: \prod_{i=1}^n V_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ és n -lineal, on denotem

$$\otimes(v_1, \dots, v_n) := v_1 \otimes \dots \otimes v_n$$

per a cada $(v_1, \dots, v_n) \in \prod_{i=1}^n V_i$.

DEMOSTRACIÓ. Ho farem per inducció. Per al cas $n = 2$, notem que les aplicacions 2-multilineals corresponen a les bilineals i que es tracta de la definició de producte tensorial ja tractada al llarg d'aquest

treball. La seua existència i unicitat ja ha sigut provada a la secció 4.1. i la bilinealitat de $\otimes$ es té per definició de producte tensorial.

Ara per hipòtesi d'inducció suposem el resultat cert per a tot $n-1 \geq 2$. Veiem que aleshores també és cert per a n . Comencem amb la definició de l'aplicació multilinear $\otimes: \prod_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$. Així, com que per hipòtesi d'inducció sabem que existeix $\varphi: \prod_{i=1}^{n-1} V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{n-1} V_i$ $(n-1)$ -lineal i $\tilde{\varphi}: (\bigotimes_{i=1}^{n-1} V_i) \times V_n \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ bilinear, considerem $\psi := \tilde{\varphi} \circ \langle \varphi, \text{id}_{V_n} \rangle$. Verifiquem que és n -lineal. Ho farem únicament per a la primera i última component puix que la resta és anàloga a la primera. Siga per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i \in V_i$, $v'_1 \in V_1$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \psi(\lambda v_1 + \mu v'_1, v_2, \dots, v_n) &= \tilde{\varphi}(\varphi(\lambda v_1 + \mu v'_1, v_2, \dots, v_{n-1}), v_n) \quad (\text{Def. } \psi) \\ &= \tilde{\varphi}(\lambda \varphi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) + \mu \varphi(v'_1, v_2, \dots, v_{n-1}), v_n) \quad (\varphi \text{ } (n-1)\text{-lineal}) \\ &= \lambda \tilde{\varphi}(\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}), v_n) + \mu \tilde{\varphi}(\varphi(v'_1, v_2, \dots, v_{n-1}), v_n) \quad (\tilde{\varphi} \text{ bilinear}) \\ &= \lambda \psi(v_1, v_2, \dots, v_n) + \mu \psi(v'_1, v_2, \dots, v_n). \quad (\text{Def. } \psi) \end{aligned}$$

Per tant, és lineal en la primera component. Ara, siga per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i \in V_i$, $v'_n \in V_n$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \psi(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, \lambda v_n + \mu v'_n) &= \tilde{\varphi}(\varphi(v_1, \dots, v_{n-1}), \lambda v_n + \mu v'_n) \quad (\text{Def. } \psi) \\ &= \lambda \tilde{\varphi}(\varphi(v_1, \dots, v_{n-1}), v_n) + \mu \tilde{\varphi}(\varphi(v_1, \dots, v_{n-1}), v'_n) \quad (\tilde{\varphi} \text{ bilinear}) \\ &= \lambda \psi(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) + \mu \psi(v_1, \dots, v_{n-1}, v'_n). \quad (\text{Def. } \psi) \end{aligned}$$

Així, concloem que $\psi: \prod_{i=1}^n V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^n V_i$ és multilinear com volíem. Denotem $\otimes := \psi$ i fem l'abús de notació

$$\otimes(v_1, \dots, v_n) = v_1 \otimes \dots \otimes v_n$$

per a cada $(v_1, \dots, v_n) \in V_i$.

Falta per demostrar que aquesta nova aplicació n -lineal satisfà la propietat universal del producte tensorial. Amb aquest objectiu, siguen Z un $\mathbb{K}$ -espai vectorial i $f: \prod_{i=1}^n V_i \longrightarrow Z$ una aplicació n -lineal. Per a cada $v_n \in V_n$, definim l'aplicació

$$\begin{aligned} f_{v_n}: \prod_{i=1}^{n-1} V_i &\longrightarrow Z \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\longmapsto f(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n). \end{aligned}$$

Verifiquem que f_{v_n} és $(n-1)$ -lineal. Ho comprovarem únicament per a la primera component, per a la resta és anàleg. Així, siguen $v_1, v'_1 \in V_1$, $v_i \in V_i$ $i \in \{2, \dots, n-1\}$, i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f_{v_n}(\lambda v_1 + \mu v'_1, v_2, \dots, v_{n-1}) &= f(\lambda v_1 + \mu v'_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n) \quad (\text{Def. } f_{v_n}) \\ &= \lambda f(v_1, v_2, \dots, v_n) + \mu f(v'_1, v_2, \dots, v_n) \quad (f \text{ } n\text{-lineal}) \end{aligned}$$

$$= \lambda f_{v_n}(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) + \mu f_{v_n}(v'_1, v_2, \dots, v_n). \quad (\text{Def. } f_{v_n})$$

Per tant, per a cada $v_n \in V_n$, gràcies a la hipòtesi d'inducció, existeix una única aplicació lineal $f_{v_n}^b: \bigotimes_{i=1}^{n-1} V_i \longrightarrow Z$ tal que satisfà el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{n-1} V_i & \xrightarrow{\otimes} & \bigotimes_{i=1}^{n-1} V_i \\ & \searrow f_{v_n} & \downarrow \exists! f_{v_n}^b \text{ lineal} \\ & & Z \end{array}$$

Ara, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} h: \quad & \left(\bigotimes_{i=1}^{n-1} V_i \right) \times V_n \longrightarrow Z \\ & (t, v_n) \longmapsto f_{v_n}^b(t). \end{aligned}$$

Demostrem que h és bilineal. Per una part, considerem $t, t' \in \bigotimes_{i=1}^{n-1} V_i$, $v_n \in V_n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} h(\lambda t + \mu t', v_n) &= f_{v_n}^b(\lambda t + \mu t') & (\text{Def. } h) \\ &= \lambda f_{v_n}^b(t) + \mu f_{v_n}^b(t') & (f_{v_n}^b \text{ lineal}) \\ &= \lambda h(t, v_n) + \mu h(t', v_n) & (\text{Def. } h) \end{aligned}$$

Per altra part, per a facilitar la prova del fet que h és lineal en la segona component, verifiquem primer que, donats $v_n, v'_n \in V_n$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$f_{\lambda v_n + \mu v'_n} = \lambda f_{v_n} + \mu f_{v'_n}. \quad (11)$$

Així, per a tot $(v_1, \dots, v_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} V_i$,

$$\begin{aligned} f_{\lambda v_n + \mu v'_n}(v_1, \dots, v_{n-1}) &= f(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n + \mu v'_n) & (\text{Def. } f_{\lambda v_n + \mu v'_n}) \\ &= \lambda f(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) + \mu f(v_1, \dots, v_{n-1}, v'_n) & (f \text{ } n\text{-lineal}) \\ &= \lambda f_{v_n}(v_1, \dots, v_{n-1}) + \mu f_{v'_n}(v_1, \dots, v_{n-1}). & (\text{Def. } f_{v_n}, f_{v'_n}) \end{aligned}$$

D'aquesta manera, donats $t = \sum_{k=1}^l (v_1^k \otimes \dots \otimes v_{n-1}^k) \in \bigotimes_{i=1}^{n-1} V_i$, $v_n, v'_n \in V_n$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} & h\left(\sum_{k=1}^l (v_1^k \otimes \dots \otimes v_{n-1}^k), \lambda v_n + \mu v'_n\right) \\ &= f_{\lambda v_n + \mu v'_n}^b\left(\sum_{k=1}^l (v_1^k \otimes \dots \otimes v_{n-1}^k)\right) & (\text{Def. } h) \\ &= \sum_{k=1}^l f_{\lambda v_n + \mu v'_n}^b(v_1^k \otimes \dots \otimes v_{n-1}^k) & (f_{\lambda v_n + \mu v'_n}^b \text{ lineal}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^l f_{\lambda v_n + \mu v'_n}(v_1^k, \dots, v_{n-1}^k) & (f_{\lambda v_n + \mu v'_n} = f_{\lambda v_n}^b \circ \otimes) \\
&= \sum_{k=1}^l (\lambda f_{v_n}(v_1^k, \dots, v_{n-1}^k) + \mu f_{v'_n}(v_1^k, \dots, v_{n-1}^k)) & (\text{Equació (11)}) \\
&= \lambda \sum_{k=1}^l f_{v_n}^b(v_1^k \otimes \dots \otimes v_{n-1}^k) \\
&\quad + \mu \sum_{k=1}^l f_{v'_n}^b(v_1^k \otimes \dots \otimes v_{n-1}^k) & (f_{v_n}^b \circ = f_{v_n}, f_{v'_n}^b \circ = f_{v'_n}) \\
&= \lambda f_{v_n}^b \left(\sum_{k=1}^l (v_1^k \otimes \dots \otimes v_{n-1}^k) \right) \\
&\quad + \mu f_{v'_n}^b \left(\sum_{k=1}^l (v_1^k \otimes \dots \otimes v_{n-1}^k) \right) & (f_{v_n}^b, f_{v'_n}^b \text{ lineals}) \\
&= \lambda h(t, v_n) + \mu h(t, v'_n). & (\text{Def. } h)
\end{aligned}$$

Per tant, h és bilineal. Per la propietat universal del producte tensorial, existeix una única aplicació h^b de manera que:

$$\begin{array}{ccc}
\bigotimes_{i=1}^{n-1} V_i \times V_n & \xrightarrow{\otimes} & \bigotimes_{i=1}^n V_i \\
& \searrow h & \downarrow \exists! h^b \text{ lineal} \\
& & Z
\end{array}$$

Veiem que $h^b \circ \otimes = f$. Siga $(v_1, \dots, v_n) \in \prod_{i=1}^n V_i$, llavors:

$$\begin{aligned}
h^b(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &= h(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n-1}, v_n) & (h^b \circ \otimes = h) \\
&= f_{v_n}^b(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n-1}) & (\text{Def. } h) \\
&= f_{v_n}(v_1, \dots, v_{n-1}) & (f_{v_n}^b \circ \otimes = f_{v_n}) \\
&= f(v_1, \dots, v_n). & (\text{Def. } f_{v_n})
\end{aligned}$$

Així, queda demostrada la propietat universal del producte tensorial. $\square$

COROL·LARI 7.2. *L'assignació*

$$(\cdot)^b: \quad \text{Multi}_{\mathbb{K}} \left(\prod_{i=1}^n V_i, T \right) \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\mathbb{K}} \left(\bigotimes_{i=1}^n V_i, T \right) \xrightarrow{f^b}$$

és un isomorfisme.

DEMOSTRACIÓ. La prova és anàloga a la feta en 4.6, únicament cal tindre en compte ara la propietat universal del producte tensorial generalitzat. $\square$

Per tant, aquesta nova definició és similar a la tractada als anteriors capítols, la única diferència és que ja no parlem d'aplicacions bilineals sinó n -lineals. En la següent secció contemplarem com es relacionen les aplicacions multilineals en $\mathbb{K}$ amb el producte tensorial si els espais vectorials són finitament generats.

2. Aplicacions multilineals com a producte tensorial

NOTA 7.3. *D'ara endavant, tots els espais vectorials seran finitament generats.*

Siguen $V_1, \dots, V_m$ i $W_1, \dots, W_n$ dues famílies finites de $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Per facilitar la notació, denotarem $A := \prod_{i=1}^m V_i$ i $B := \prod_{j=1}^n W_j$. El nostre objectiu serà que, si tenim $f \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A)$ i $g \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B)$, obtindrem una aplicació en $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(A \times B)$. Amb eixe objectiu, definim l'aplicació

$$\begin{aligned} h: \quad \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A) \times \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B) &\longrightarrow \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A \times B) \\ (f, g) &\longmapsto h(f, g) \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} h(f, g): \quad A \times B &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) &\longmapsto f(v_1, \dots, v_n) g(w_1, \dots, w_m). \end{aligned}$$

En primer lloc verifiquem que $h(f, g)$ és multilineal. Si $i \in \{1, \dots, n\}$, donats $(v_1, \dots, v_n) \in A$, $(w_1, \dots, w_m) \in B$, $v'_i \in V_i$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} &h(f, g)(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) \\ &= f(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots, v_n) g(w_1, \dots, w_m) \quad (\text{Def. } h(f, g)) \\ &= (\lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \mu f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)) g(w_1, \dots, w_m) \quad (f \text{ } n\text{-lineal}) \\ &= \lambda h(f, g)(v_1, \dots, v_i, \dots, w_m) + \mu h(f, g)(v_1, \dots, v'_i, \dots, w_m). \quad (\text{Def. } h(f, g)) \end{aligned}$$

En cas que $i \in \{1, \dots, m\}$ i $w'_i \in W_i$, el raonament és anàleg tenint en compte que g és m -lineal. Per tant $h(f, g)$ és $(n+m)$ -lineal i h està ben definida.

En segon lloc, veiem que h és bilineal. Siga $f, f' \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A)$, $g \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Per a cada $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) \in A \times B$,

$$\begin{aligned} &h(\lambda f + \mu f', g)(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) \\ &= (\lambda f + \mu f')(v_1, \dots, v_n) g(w_1, \dots, w_m) \quad (\text{Def. } h(\lambda f + \mu f', g)) \\ &= (\lambda f(v_1, \dots, v_n) + \mu f'(v_1, \dots, v_n)) g(w_1, \dots, w_m) \quad (\text{Estr. aplicacions}) \\ &= \lambda h(f, g)(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) \\ &\quad + \mu h(f', g)(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m). \quad (\text{Def. } h(f, g), h(f', g)) \end{aligned}$$

Així, per la propietat universal del producte tensorial, existeix una única aplicació lineal

$$h^\flat: \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A) \otimes \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B) \longrightarrow \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A \times B)$$

tal que aquest diagrama commuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A) \times \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B) & \xrightarrow{\otimes} & \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A) \otimes \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B) \\ & \searrow h & \downarrow \exists! h^\flat \text{ lineal} \\ & & \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A \times B) \end{array}$$

Posteriorment comprovarem que $h^\flat$ és, de fet, un isomorfisme. És per això que, per comoditat, farem el següent abús de notació: $f \otimes g := h(f, g)$. De la mateixa manera que a la secció anterior, podem generalitzar aquesta operació, de manera que si $V_1, \dots, V_n$ és una família finita de $\mathbb{K}$ -espais vectorials i, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tenim $f_i \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_i, \mathbb{K})$, llavors per a cada $(v_1, \dots, v_n) \in \prod_{i=1}^n V_i$,

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)(v_1, \dots, v_n) := f_1(v_1) \cdots f_n(v_n) = \prod_{i=1}^n f_i(v_i). \quad (12)$$

Utilitzem aquesta nova definició per tal d'obtindre la dimensió de l'espai vectorial de les aplicacions multilineals.

PROPOSICIÓ 7.4. Siga $V_1, \dots, V_n$ una família finita de $\mathbb{K}$ -espais vectorials. Per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, siguen $d_i = \dim_{\mathbb{K}}(V_i)$ i $\mathcal{B}_i = \{e_1^i, \dots, e_{d_i}^i\}$ una base de V_i . Aleshores el conjunt

$$\mathcal{B} = \{(e_{j_1}^1)^* \otimes \dots \otimes (e_{j_n}^n)^* \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, 1 \leq j_i \leq d_i\}$$

és base de $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(\prod_{i=1}^n V_i)$. En particular,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Multi}_{\mathbb{K}}(\prod_{i=1}^n V_i)) = \prod_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(V_i).$$

DEMOSTRACIÓ. Recordem que, per a un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V , si $\{e_1, \dots, e_m\}$ és una base, aleshores la seua base dual $\{e_1^*, \dots, e_m^*\}$ compleix que, per a cada $v \in V$ amb $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$, llavors $e_j^*(v) = \lambda_j$ per a cada $j \in \{1, \dots, m\}$. Concretament,

$$e_j^*(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Per tant,

$$((e_{j_1}^1)^* \otimes \dots \otimes (e_{j_n}^n)^*)(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_n}^n) = \prod_{k=1}^n (e_{j_k}^k)^*(e_{i_k}^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall k, j_k = i_k \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

D'aquesta manera, comprovem que $\mathcal{B}$ és linealment independent. Siga una combinació lineal de la forma

$$\varphi := \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} \lambda_{j_1, \dots, j_n} ((e_{j_1}^1)^* \otimes \dots \otimes (e_{j_n}^n)^*) = 0, \text{ on } \lambda_{j_1, \dots, j_n} \in \mathbb{K}.$$

Per a cada $k \in \{1, \dots, n\}$, siguen $i_k \in \{1, \dots, d_k\}$. Així,

$$0 = \varphi(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_n}^n) = \lambda_{i_1, \dots, i_n}.$$

Deduïm que $\mathcal{B}$ és linealment independent. Per a comprovar que és sistema generador, siga $f \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A)$, considerem

$$\theta := \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} f(e_{j_1}^1, \dots, e_{j_n}^n) ((e_{j_1}^1)^* \otimes \dots \otimes (e_{j_n}^n)^*).$$

Si verifiquem que $\theta = f$, hem acabat. Així, per a un vector $(v_1, \dots, v_n) \in \prod_{i=1}^n V_i$, sabem que, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, v_i es pot expressar com $v_i = \sum_{j_1=1}^{d_j} \lambda_{j_i, i} e_{j_i}^i$ per a certs $\lambda_{j_i, i} \in \mathbb{K}$. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} & f(v_1, \dots, v_n) \\ &= f\left(\sum_{j_1=1}^{d_1} \lambda_{j_1, 1} e_{j_1}^1, \dots, \sum_{j_n=1}^{d_n} \lambda_{j_n, n} e_{j_n}^n\right) \quad (\text{Def. } v_1, \dots, v_n) \\ &= \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} \lambda_{j_1, 1} \cdots \lambda_{j_n, n} f(e_{j_1}^1, \dots, e_{j_n}^n) \quad (f \text{ } n\text{-lineal}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} (e_{j_1}^1)^*(v_1) \cdots (e_{j_n}^n)^*(v_n) f(e_{j_1}^1, \dots, e_{j_n}^n) \quad (\text{Nota}^1) \\ &= \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} f(e_{j_1}^1, \dots, e_{j_n}^n) ((e_{j_1}^1)^* \otimes \dots \otimes (e_{j_n}^n)^*) (v_1, \dots, v_n) \quad (\text{Nota}^2) \\ &= \theta(v_1, \dots, v_n). \quad (\text{Def. } \theta) \end{aligned}$$

Concloem que el conjunt $\mathcal{B}$ és sistema generador i, consegüentment, base. Notem que llavors,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Multi}_{\mathbb{K}}(\prod_{i=1}^n V_i)) = |\mathcal{B}| = \prod_{i=1}^n d_i = \prod_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(V_i),$$

com volíem demostrar. $\square$

Ara retornem a l'aplicació

$$h^b: \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A) \otimes \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B) \longrightarrow \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A \times B).$$

Pel Corol·lari 5.6 i la proposició anterior,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Multi}_{\mathbb{K}}(A) \otimes \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Multi}_{\mathbb{K}}(A)) \dim_{\mathbb{K}}(\text{Multi}_{\mathbb{K}}(B))$$

¹ $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $(e_{j_k}^k)^*(v_k) = \lambda_{j_k, k}$.

²Equació (12).

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(V_i) \prod_{j=1}^m \dim_{\mathbb{K}}(W_j) \\
&= \dim_{\mathbb{K}}(\text{Multi}_{\mathbb{K}}(A \times B)).
\end{aligned}$$

Així, com són espais amb la mateixa dimensió i $h^\flat$ és lineal, aleshores si és injectiva, pel Corol·lari 2.48 concloem que és un isomorfisme.

Provem que $h^\flat$ és injectiva. Siga $t \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A) \otimes \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B)$ tal que $h^\flat(t) = 0$, és suficient verificar que $t = 0$. Sabem que existeix una representació mínima de t com a suma de tensors elementals, o siga, $t = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ amb $f_i \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(A)$ i $g_i \in \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B)$ per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Llavors,

$$0 = h^\flat \left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i \right) = \sum_{i=1}^n h^\flat(f_i \otimes g_i) = \sum_{i=1}^n h(f_i, g_i).$$

Per a cada $(v_1, \dots, v_n) \in A$, es compleix que

$$\sum_{i=1}^n h(f_i, g_i)(v_1, \dots, v_n, \cdot) = \sum_{i=1}^n f_i(v_1, \dots, v_n) g_i(\cdot) = 0.$$

Pel Teorema 5.8, sabem que $\{g_1, \dots, g_n\}$ és un conjunt linealment independent i se segueix que $f_i(v_1, \dots, v_n) = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Com açò és cert per a cada $(v_1, \dots, v_n) \in A$, $f_i = 0$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, és a dir, $t = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i = 0$. Concloem que $h^\flat$ és injectiva i, d'aquesta manera, un isomorfisme.

NOTA 7.5. Per aquesta raó, identifiquem $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(A) \otimes \text{Multi}_{\mathbb{K}}(B)$ amb $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(A \times B)$ i fem l'abús de notació $h(f, g) = f \otimes g$. D'ara endavant, el "producte tensorial" farà referència a l'aplicació h .

És més, com que $\dim_{\mathbb{K}}(V_i)$ és finita per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, $\bigotimes_{i=1}^n V_i \cong (\bigotimes_{i=1}^n V_i)^*$. Però, pel Corol·lari 7.2,

$$\left(\bigotimes_{i=1}^n V_i \right)^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}} \left(\bigotimes_{i=1}^n V_i, \mathbb{K} \right) \cong \text{Multi}_{\mathbb{K}} \left(\prod_{i=1}^n V_i \right).$$

És per això que podem entendre el producte tensorial generalitzat com aplicacions multilíneals en $\mathbb{K}$. Per acabar aquest treball, estudiarem un exemple concret: els tensors covariants.

3. Tensors covariants

NOTA 7.6. Durant aquesta secció, V serà un $\mathbb{K}$ -espai vectorial finitament generat amb $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ i base $\{e_1, \dots, e_n\}$. A més, k i l denotaran nombres naturals.

DEFINICIÓ 7.7. Siga $k \in \mathbb{N}$, direm que els elements de $\text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^k)$ són **tensors k -covariants**. Gastarem la notació $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V) := \text{Multi}_{\mathbb{K}}(V^k)$.

NOTA 7.8. De vegades, s'anomenen k -tensors si no dona lloc a confusió.

Notem que per la Proposició 7.4, el conjunt

$$\mathcal{B} = \{e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^* \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, j_i \in \{1, \dots, n\}\}$$

és base de $\mathcal{L}^k(V)$. Així, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}^k(V)) = n^k$.

Recordem que un k -tensor covariant $f \in \mathcal{L}^k(V)$ es diu **alternat** si, per a qualsevol $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ tal que existeixen $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i < j$ tals que $v_i = v_j$, sempre es té que $f(v_1, \dots, v_k) = 0$. Gastem la mateixa notació del capítol anterior, és a dir, denotarem per $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$ el conjunt de tensors k -covariants alternats.

NOTA 7.9. En general, el producte de dos tensors alternats no és alternat.

Per exemple, si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 2$, com és el cas d' $\mathbb{R}^2$ com a $\mathbb{R}$ -espai vectorial, aleshores per la Proposició 6.33, $\dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge_{\mathbb{K}}^2(V)) = 1$. Per tant, existeix $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^2(V)$ amb $f \neq 0$, és a dir, hi ha almenys un cert $(u, v) \in V^2$ tal que $f(u, v) \neq 0$. Així,

$$(f \otimes f)(u, v, u, v) = f(u, v)f(u, v) \neq 0$$

i $f \otimes f$ no és alternat.

És per això que naix la idea de trobar una operació que, donats dos tensors alternats, sí retorne un tensor alternat. Amb aquest objectiu, definirem primerament l'alternador.

DEFINICIÓ 7.10. Siga $f \in \mathcal{L}^k(V)$, definim l'**alternador** de f com

$$\text{Alt}(f) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f^{\sigma}.$$

Veiem unes propietats de l'alternador.

PROPOSICIÓ 7.11. L'alternador és una aplicació lineal.

DEMOSTRACIÓ. Donats $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, llavors,

$$\begin{aligned} & \text{Alt}(\lambda f + \mu g) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) (\lambda f + \mu g)^{\sigma} && (\text{Def. Alt}(\lambda f + \mu g)) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) (\lambda f^{\sigma} + \mu g^{\sigma}) && ((\cdot)^{\sigma} \text{ lineal}) \\ &= \frac{\lambda}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f^{\sigma} + \frac{\mu}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) g^{\sigma} && (\text{Estr. aplicacions}) \\ &= \lambda \text{Alt}(f) + \mu \text{Alt}(g). && (\text{Def. Alt}(f), \text{Alt}(g)) \end{aligned}$$

Per tant, l'alternador és lineal. $\square$

Ara si, podem comprovar que l'alternador, com el seu nom indica, sempre retorna tensors alternats.

PROPOSICIÓ 7.12. *Per a cada $f \in \mathcal{L}^k(V)$ se satisfà que $\text{Alt}(f) \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$. A més, si $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$, $\text{Alt}(f) = f$. En particular, $\text{Alt}(\text{Alt}(f)) = \text{Alt}(f)$ per a tot $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$.*

DEMOSTRACIÓ. Notem que si f és k -lineal aleshores, per a qualsevol permutació $\sigma \in \Sigma_k$, f^σ ho és també. Així, és clar que $\text{Alt}(f) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$. Per tant, hem de veure que és alternada. La idea és la mateixa que la feta a la Proposició 6.33: donat $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ per a la qual existeixen $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i < j$ tals que $v_i = v_j$, emparellem una permutació $\sigma \in \Sigma_k$ amb $\sigma \circ (i, j)$. Notem que

$$\begin{aligned} & \text{sign}(\sigma \circ (i, j)) f^{\sigma \circ (i, j)}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= \text{sign}(\sigma) \text{sign}((i, j)) (f^\sigma)^{(i, j)}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \quad (\text{Nota}^3) \\ &= -\text{sign}(\sigma) f^\sigma(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \quad (\text{Nota}^4) \\ &= -\text{sign}(\sigma) f^\sigma(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k). \quad (v_i = v_j) \end{aligned}$$

Per tant, cada parella s'anul·la al sumatori, pel que

$$(\text{Alt}(f))(v_1, \dots, v_k) = 0$$

i així, $\text{Alt}(f) \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$.

Ara, si $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$, per la Proposició 6.31 tenim que, per a tot $\sigma \in \Sigma_m$, $f^\sigma = \text{sign}(\sigma) f$. Llavors,

$$\begin{aligned} \text{Alt}(f) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f^\sigma \quad (\text{Def. Alt}(f)) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma)^2 f \quad (f^\sigma = \text{sign}(\sigma) f) \\ &= \frac{1}{k!} f \sum_{\sigma \in \Sigma_k} 1 \quad (\forall \sigma \in \Sigma_k, \text{sign}(\sigma)^2 = 1) \\ &= f. \quad (|\Sigma_k| = k!) \end{aligned}$$

Per tant, $\text{Alt}(f) = f$ com volíem. $\square$

COROL·LARI 7.13. *Siga $f \in \mathcal{L}^k(V)$ i $\tau \in \Sigma_k$. Aleshores,*

$$(\text{Alt}(f))^\tau = \text{Alt}(f^\tau) = \text{sign}(\tau) \text{Alt}(f).$$

DEMOSTRACIÓ. D'una banda, en ser $\text{Alt}(f) \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^m(V)$, per la Proposició 6.31,

$$(\text{Alt}(f))^\tau = \text{sign}(\tau) \text{Alt}(f).$$

³Prop. 6.21, $f^{\sigma \circ (i, j)} = (f^\sigma)^{(i, j)}$.

⁴Def. $(f^\sigma)^{(i, j)}$, $\text{sign}((i, j)) = -1$.

D'altra banda, com que $(\cdot)^\tau$ és lineal,

$$\text{Alt}(f^\tau) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f^\tau = \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f \right)^\tau = (\text{Alt}(f))^\tau$$

com volíem. $\square$

D'aquesta manera, ara tenim una eina que ens permet definir una operació que mantinga la propietat de ser alternada: el producte exterior.

DEFINICIÓ 7.14. *Siguen $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$ i $g \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^l(V)$. Definim el seu **producte exterior** com l'aplicació*

$$\begin{aligned} \wedge: \quad \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V) \times \bigwedge_{\mathbb{K}}^l(V) &\longrightarrow \bigwedge_{\mathbb{K}}^{k+l}(V) \\ (f, g) &\longmapsto f \wedge g, \end{aligned}$$

amb

$$f \wedge g := \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(f \otimes g).$$

Notem que està ben definida, atès que $f \otimes g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{k+l}(V)$ i per la proposició anterior, $\text{Alt}(f \otimes g) \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^{k+l}(V)$.

Aquesta nova operació té propietats interessants com són les següents.

PROPOSICIÓ 7.15. *El producte exterior és bilineal i associatiu. En particular, si $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ i $f_i \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^{k_i}(V)$ per a cada $i \in \{1, \dots, r\}$, aleshores*

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_r = \frac{(\sum_{i=1}^r k_i)!}{\prod_{i=1}^r k_i!} \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_r). \quad (13)$$

DEMOSTRACIÓ. La bilinealitat és conseqüència directa de la bilinealitat del producte tensorial i la linealitat de l'alternador ja que, per a cada $f, f' \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$, $g \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^l(V)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu f') \wedge g &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}((\lambda f + \mu f') \otimes g) \quad (\text{Def. } (\lambda f + \mu f') \wedge g) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\lambda(f \otimes g) + \mu(f' \otimes g)) \quad (\otimes \text{ bilinear}) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} (\lambda \text{Alt}(f \otimes g) + \mu \text{Alt}(f' \otimes g)) \quad (\text{Alt lineal}) \\ &= \lambda(f \wedge g) + \mu(f' \wedge g). \quad (\text{Def. } f \wedge g, f' \wedge g) \end{aligned}$$

De manera anàloga es veu la linealitat a l'altra component.

Per a l'associativitat, siguen $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$, $g \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^l(V)$ i $h \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^q(V)$. Notem que

$$\text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g) - f \otimes g) = \text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g)) - \text{Alt}(f \otimes g) = 0. \quad (14)$$

ja que l'alternador és lineal i $\text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g)) = \text{Alt}(f \otimes g)$. Sabem que $0 \otimes h = 0$ i que $\text{Alt}(0) = 0$. D'aquesta manera,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Alt}((\text{Alt}(f \otimes g) - f \otimes g) \otimes h) && \text{(Equació (14))} \\ &= \text{Alt}((\text{Alt}(f \otimes g) \otimes h - f \otimes g \otimes h) && (\otimes \text{ bilinear}) \\ &= \text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g) \otimes h) - \text{Alt}(f \otimes g \otimes h). && (\text{Alt lineal}) \end{aligned}$$

És a dir,

$$\text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g) \otimes h) = \text{Alt}(f \otimes g \otimes h). \quad (15)$$

Per tant, reunint tot açò,

$$\begin{aligned} &(f \wedge g) \wedge h \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} (\text{Alt}(f \otimes g) \wedge h) && \text{(Def. } f \wedge g, \wedge \text{ bilinear)} \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \frac{(k+l+q)!}{(k+l)!q!} \text{Alt}(\text{Alt}(f \otimes g) \otimes h) && \text{(Def. } \text{Alt}(f \otimes g) \wedge h) \\ &= \frac{(k+l+q)!}{k!l!q!} \text{Alt}(f \otimes g \otimes h). && \text{(Equació (15))} \end{aligned}$$

Raonant de manera anàloga, arribem a la mateixa expressió per a $f \wedge (g \wedge h)$. Concloem que el producte exterior és associatiu.

Finalment comprovem que, donats $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K}$ i $f_i \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^{k_i}(V)$ per a cada $i \in \{1, \dots, r\}$, es té l'Equació (13). Ho demostrem per inducció. Per a $r = 2$ es té per definició i per $r = 3$ ho acabem de verificar. Així, suposem cert el resultat per a $r - 1 \geq 3$. Aleshores,

$$\begin{aligned} &f_1 \wedge \dots \wedge f_r \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^{r-1} k_i)!}{\prod_{i=1}^{r-1} k_i!} (\text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_r) \wedge f_r) && \text{(Hipòtesi inducció, } \wedge \text{ bilinear)} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^{r-1} k_i)!}{\prod_{i=1}^{r-1} k_i!} \frac{(\sum_{i=1}^{r-1} k_i + k_r)!}{(\sum_{i=1}^{r-1} k_i)!k_r!} \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_r) && \text{(Def. } \wedge) \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^r k_i)!}{\prod_{i=1}^r k_i!} \text{Alt}(f_1 \otimes \dots \otimes f_r), && \text{(Simplifiquem)} \end{aligned}$$

com volíem provar. □

Una altra propietat que té el producte exterior és que canviar d'ordre els factors afecta el resultat en un factor de ± 1 . És més, podem precisar quan serà -1 i quan 1 .

PROPOSICIÓ 7.16. *Donats $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$ i $g \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^l(V)$, llavors $\text{Alt}(g \otimes f) = (-1)^{kl} \text{Alt}(f \otimes g)$. En particular, $g \wedge f = (-1)^{kl} f \wedge g$.*

DEMOSTRACIÓ. Definim la següent permutació en Σ_{k+l} .

$$\tau := \prod_{i=0}^{k-1} \left(\prod_{j=0}^{l-1} (j+k-i, (j+k-i)+1) \right).$$

Veiem com actua. Estudiem primer el cas $t \in \{1, \dots, k\}$. Si $t = k$, quan $i = 0$, el segon productori mou a k . Notem que comença a moure des de $j = 0$ ja que és el cicle $(k, k+1)$. I així, en cada producte, mou a la posició següent. Com que el segon productori té l iteracions, és clar que aquest en conjunt mou k a $k+l$. Després, per a $i = 1$, el nombre més gran que apareix al segon productori és $k+l-1$. Per tant, $k+l$ és fixat. Es raona anàlogament per a la resta d'índexs, deduint així que $\tau(k) = k+l$.

Ara, suposem $t < k$. Per a $i = 0$, com que, per a tot $j \in \{0, \dots, l-1\}$, $j+k-i = j+k > t$, t és fixat al segon productori. De manera similar, passa amb la resta d'índexs i tals que $k-i > t$. Com que $t \in \{1, \dots, k-1\}$, existeix un $i_t \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $k-i_t = t$. Notem que per a aquest i_t , el segon productori mou t a $t+l$, si raonem com al cas $t = k$ i notem a més que, per als índexs posteriors, $t+l$ és fixat. Així, $\tau(t) = t+l$.

Per altra part, suposem ara $t \in \{k+1, \dots, k+l\}$. Siga $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Els nombres que apareixen al segon productori varien de $k-i$ a $l+(k-i)$. Suposem que per a eixe i , el segon productori mou t . Com que $k-i < t$, la primera vegada que aparega t en una transposició, serà una del tipus $(t-1, t)$, és a dir, t retrocedirà una posició. Com les següents transposicions després d'eixa apareixeran nombres més grans, $t-1$ serà fixat. És a dir, si per a un cert índex i , el segon productori mou a t , llavors el mou a $t-1$.

Però veiem que tota $i \in \{0, \dots, k-1\}$ mou a t . Per a $i = 0$, els números que apareixen a la transposició varien de k a $k+l$, per tant, siga quin siga t , el segon productori el mou a $t-1$. Després, per a $i = 1$, els números de les transposicions disminueixen en una unitat, és a dir, varien entre $k-1$ i $k+l-1$. Consegüentment $t-1$ es mou a $t-2$. Si raonem de manera similar per a la resta d'índexs, arribem que $\tau(t) = t-k$.

En definitiva,

$$\tau(1, \dots, k, k+1, \dots, k+l) = (k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k).$$

A més, fixem-nos que, com tenim la descomposició de τ com a producte de kl transposicions, $\text{sign}(\tau) = (-1)^{kl}$. Per tant, per a qualsevol $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \in V^{k+l}$,

$$\begin{aligned} (g \otimes f)^\tau(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ &= (g \otimes f)(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}, v_{\tau(k+1)}, \dots, v_{\tau(k+l)}) \quad (\text{Def. } (g \otimes f)^\tau) \\ &= (g \otimes f)(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}, v_1, \dots, v_k) \quad (\text{Def. } \tau) \end{aligned}$$

$$= g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) f(v_1, \dots, v_k) \quad (\text{Def. } g \otimes f)$$

$$= (f \otimes g)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}). \quad (\text{Def. } f \otimes g)$$

Això és, $f \otimes g = (g \otimes f)^\tau$. Així, pel Corol·lari 7.13,

$$\text{Alt}(g \otimes f) = \text{Alt}((f \otimes g)^\tau) = \text{sign}(\tau) \text{Alt}(f \otimes g) = (-1)^{kl} \text{Alt}(f \otimes g).$$

Llavors, $\text{Alt}(g \otimes f) = (-1)^{kl} \text{Alt}(f \otimes g)$. Finalment, veiem que

$$g \wedge f = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(g \otimes f) = \frac{(k+l)!}{k!l!} (-1)^{kl} \text{Alt}(g \otimes f) = (-1)^{kl} f \wedge g,$$

com volíem demostrar. $\square$

A continuació, presentem un tipus concret de tensor, la propietat del qual ens serà d'utilitat més tard per trobar una base de $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$.

DEFINICIÓ 7.17. Un tensor k -covariant $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$ es diu **simètric** si, per a qualsevol permutació $\sigma \in \Sigma_k$, $f^\sigma = f$. Al conjunt de tensors k -covariants simètrics el denotarem per $\text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V)$.

En altres paraules, un tensor covariant és simètric si en avaluar en un vector, l'ordre de les seues components no influeix en el resultat.

Notem que $\text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V)$ és clarament un subespai vectorial de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$. Per una part, evidentment l'aplicació nul·la satisfà que $0^\sigma = 0$ per a qualsevol $\sigma \in \Sigma_k$. Per altra part, donat $f, g \in \text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, per a qualsevol $\sigma \in \Sigma_k$,

$$(\lambda f + \mu g)^\sigma = \lambda f^\sigma + \mu g^\sigma = \lambda f + \mu g.$$

És a dir, $\lambda f + \mu g \in \text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V)$ i deduïm que $\text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V) \leq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$.

PROPOSICIÓ 7.18. $\text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V)$ és un subespai vectorial de $\text{Ker}(\text{Alt})$. A més, si $k = 2$, es té la igualtat.

DEMOSTRACIÓ. Únicament hem de provar la inclusió, és a dir, que si $f \in \text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V)$, llavors $\text{Alt}(f) = 0$. En efecte,

$$\text{Alt}(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f^\sigma \quad (\text{Def. Alt}(f))$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f \quad (f \in \text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V))$$

$$= \frac{1}{k!} f \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) \right). \quad (\text{Factor comú})$$

Com pel Corol·lari 6.25 sabem que hi ha la mateixa quantitat de permutacions parelles i senars i aquestes tenen signe oposat. Per aquesta raó, $\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) = 0$. Per tant, $\text{Alt}(f) = 0$ i, així, deduïm que $\text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V) \leq \text{Ker}(\text{Alt})$.

Si $k = 2$, aleshores per a provar que $\text{Sym}_{\mathbb{K}}^k(V) = \text{Ker}(\text{Alt})$, solament hem de verificar que si $f \in \text{Ker}(\text{Alt})$, llavors és simètric. Sabem que $\Sigma_2 = \{\text{id}, (1, 2)\}$. Per tant, f és simètric si $f^{(1,2)} = f$. Així,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Alt}(f) && (f \in \text{Ker}(\text{Alt})) \\ &= \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in \Sigma_2} \text{sign}(\sigma) f^\sigma && (\text{Def. Alt}(f)) \\ &= \frac{1}{2} (\text{sign}(\text{id}) f^{\text{id}} + \text{sign}((1, 2)) f^{(1,2)}) && (\Sigma_2 = \{\text{id}, (1, 2)\}) \\ &= \frac{1}{2} (f - f^{(1,2)}). && (\text{Prop. 6.22}) \end{aligned}$$

D'aquesta manera, $f = f^{(1,2)}$ i f és simètrica. Això és, $\text{Sym}_{\mathbb{K}}^2(V) = \text{Ker}(\text{Alt})$, com volíem. $\square$

Encara que coneguem una base per a $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$ i podem expressar qualsevol $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$ de manera única com una combinació lineal d'aquests elements, com que $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V) \leq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$, seria de molt interès cercar una base de $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$.

NOTA 7.19. Treballarem amb $k \leq \dim_{\mathbb{K}}(V)$ ja que pel Corol·lari 6.6, en cas contrari, $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V) = \{0\}$.

NOTA 7.20. Per compactar la notació, escriurem

$$\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n := \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n.$$

PROPOSICIÓ 7.21. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ és base de V i $k \leq n$, el conjunt

$$\mathcal{B} := \{e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^* \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n\}$$

és base de $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$.

DEMOSTRACIÓ. D'una banda veiem que és sistema generador. Donat $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$, com que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$, aleshores existeixen únics $\lambda_{j_1, \dots, j_k} \in \mathbb{K}$ amb $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ tals que

$$f = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \lambda_{j_1, \dots, j_k} (e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^*).$$

Com que $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$, per la Proposició 7.12, $\text{Alt}(f) = f$. Així,

$$\begin{aligned} f &= \text{Alt} \left(\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \lambda_{j_1, \dots, j_k} (e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^*) \right) && (\text{Def. } f, \text{Alt}(f) = f) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \lambda_{j_1, \dots, j_k} \text{Alt}(e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^*) && (\text{Alt lineal}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \lambda_{j_1, \dots, j_k} (e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*). \quad (\text{Prop. 7.15})$$

Per una part, provem que podem llevar els sumands on algun subíndex coincideix. Siga $(j_1, \dots, j_k)$ on existeixen $a, b \in \{1, \dots, k\}$, $a < b$, tals que $j_a = j_b$. Llavors per la Proposició 7.16 i l'associativitat del producte exterior,

$$e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_a}^* \wedge \dots \wedge e_{j_b}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^* = \varepsilon (e_{j_a}^* \wedge e_{j_b}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*).$$

amb $\varepsilon = \pm 1$. Com que $e_{j_a}^* = e_{j_b}^*$, clarament $e_{j_a}^* \otimes e_{j_b}^*$ és simètrica i així,

$$e_{j_a}^* \wedge e_{j_b}^* = 2! \text{Alt} (e_{j_a}^* \otimes e_{j_b}^*) = 0$$

per la Proposició 7.18. En aquest cas,

$$e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_a}^* \wedge \dots \wedge e_{j_b}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^* = \varepsilon (0 \wedge (e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*)^*) = 0.$$

Per tant, podem llevar tots els sumands on no tots els índexs són diferents.

Per altra part, hem de verificar que és suficient que $(j_1, \dots, j_k)$ satisfacen que $j_1 < \dots < j_k$. Seguint el mateix raonament d'abans, en reordenar els índexs, continuem tenint el mateix element multiplicat o no per un factor -1 . Per tant, és clar que $\mathcal{B}$ genera a f , i.e., $\mathcal{B}$ és sistema generador de $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$.

D'altra banda, comprovem que $\mathcal{B}$ és un conjunt linealment independent. Siga la combinació lineal

$$\varphi := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \lambda_{j_1, \dots, j_k} (e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*) = 0.$$

$$\begin{aligned} & \text{Per a cada } 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n \text{ i per a cada } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \\ & (e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= k! \text{Alt} (e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^*)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \quad (\text{Prop. 7.15}) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) (e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^*)^\sigma(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \quad (\text{Def. Alt} (e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^*)) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) \prod_{l=1}^k e_{j_l}^*(e_{\sigma(i_l)}). \quad (\text{Def. } (e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_k}^*)^\sigma) \end{aligned}$$

Com que $e_j^*(e_i) = 1$, si $j = i$, i $e_j^*(e_i) = 0$, si $j \neq i$, únicament ens interessa el cas $j_l = \sigma(i_l)$ per a tot $l \in \{1, \dots, k\}$. Com que $(j_l)_{l=1}^k$ i $(i_l)_{l=1}^k$ són creixents, si $\sigma \neq \text{id}$, no es té la igualtat, atès que $(\sigma(i_l))_{l=1}^k$ no seria creixent. Per tant, com $\text{sign}(\text{id}) = 1$,

$$(e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^*)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \prod_{l=1}^k e_{j_l}^*(e_{i_l}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall l, j_l = i_l \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

En resum, per a cada $i_1 < \dots < i_k$ es té que

$$0 = \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \lambda_{i_1, \dots, i_k},$$

i concloem que $\mathcal{B}$ és linealment independent, D'aquesta manera, $\mathcal{B}$ és base de $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$. $\square$

Gràcies a aquesta proposició, podem obtindre la dimensió de $\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$. El nombre d'elements de la base $\mathcal{B}$ correspon a la quantitat de k índexs que podem agafar del conjunt $\{1, \dots, n\}$. Això és,

$$\dim_{\mathbb{K}} \left(\bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V) \right) = \binom{n}{k}.$$

De fet, si ens adonem, 6.33 se segueix d'aquest resultat, ja que si $k = n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$, $\dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge_{\mathbb{K}}^n(V)) = \binom{n}{n} = 1$.

De la mateixa manera que vam fer al capítol anterior definint una acció de monoide, ací definirem una aplicació similar. El nostre objectiu és de nou arribar a la definició de determinant, però ara, des de la perspectiva del producte tensorial.

DEFINICIÓ 7.22. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $T: V \longrightarrow W$ una aplicació lineal i $f \in \mathcal{L}^k(W)$. Definim el **pull-back** d' f per T com l'aplicació

$$\begin{aligned} T^*f: \quad V^k &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_k) &\longmapsto f(T(v_1), \dots, T(v_k)). \end{aligned}$$

Notem que $T^*f \in \mathcal{L}^k(V)$ ja que, per a cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_1, \dots, v_k, v'_i \in V$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} T^*f(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots, v_k) &= f(T(v_1), \dots, T(\lambda v_i + \mu v'_i), \dots, T(v_k)) && (\text{Def. } T^*f) \\ &= f(T(v_1), \dots, \lambda T(v_i) + \mu T(v'_i), \dots, T(v_k)) && (T \text{ lineal}) \\ &= \lambda f(T(v_1), \dots, T(v_i), \dots, T(v_k)) && \\ &\quad + \mu f(T(v_1), \dots, T(v'_i), \dots, T(v_k)) && (f \in \mathcal{L}^k(W)) \\ &= \lambda T^*f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \mu T^*f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k). && (\text{Def. } T^*f) \end{aligned}$$

A més, si $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$, és evident que $T^*f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^k(V)$, ja que si en un vector $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ existeixen $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i < j$, amb $v_i = v_j$, aleshores $T(v_i) = T(v_j)$. Així,

$$T^*f(v_1, \dots, v_k) = f(T(v_1), \dots, T(v_k)) = 0$$

en ser f alternada.

Provem una sèrie de propietats del pull-back que seran d'utilitat perquè el determinant siga ben definit.

PROPOSICIÓ 7.23. Siguen V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials, $T, S: V \longrightarrow W$ dues aplicacions lineals i siguin $f \in \mathcal{L}^k(W)$ i $g \in \mathcal{L}^l(W)$. Aleshores se satisfan les següents propietats.

$$(1) \quad T^*(f \otimes g) = T^*f \otimes T^*g.$$

- (2) $T^* \text{Alt}(f) = \text{Alt}(T^* f)$.
- (3) $T^*(f \wedge g) = T^* f \wedge T^* g$.
- (4) $(T \circ S)^* f = S^*(T^* f)$.

DEMOSTRACIÓ. Siga $(v_1, \dots, v_{k+l}) \in V^{k+l}$, (1) es comprova directament, ja que

$$\begin{aligned}
 T^*(f \otimes g)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) &= (f \otimes g)(T(v_1), \dots, T(v_k), T(v_{k+1}), \dots, T(v_{k+l})) \quad (\text{Def. } T^*(f \otimes g)) \\
 &= f(T(v_1), \dots, T(v_k)) g(T(v_{k+1}), \dots, T(v_{k+l})) \quad (\text{Def. } f \otimes g) \\
 &= T^* f(v_1, \dots, v_k) T^* g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}). \quad (\text{Def. } T^* f, T^* g)
 \end{aligned}$$

Per altra part, verifiquem (2). Siga $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$,

$$\begin{aligned}
 (T^* \text{Alt}(f))(v_1, \dots, v_k) &= (\text{Alt}(f))(T(v_1), \dots, T(v_k)) \quad (\text{Def. } T^* \text{Alt}(f)) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f^\sigma(T(v_1), \dots, T(v_k)) \quad (\text{Def. } \text{Alt}(f)) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f(T(v_{\sigma(1)}), \dots, T(v_{\sigma(k)})) \quad (\text{Def. } f^\sigma) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) T^* f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad (\text{Def. } T^* f) \\
 &= \text{Alt}(T^* f)(v_1, \dots, v_k). \quad (\text{Def. } \text{Alt}(T^* f))
 \end{aligned}$$

Per tant, $T^* \text{Alt}(f) = \text{Alt}(T^* f)$. Com a conseqüència directa d'(1) i (2), se segueix (3), atès que per a $(v_1, \dots, v_{k+l}) \in V^{k+l}$ qualsevol,

$$\begin{aligned}
 (T^*(f \wedge g))(v_1, \dots, v_{k+l}) &= (f \wedge g)(T(v_1), \dots, T(v_{k+l})) \quad (\text{Def. } T^*(f \wedge g)) \\
 &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(f \otimes g)(T(v_1), \dots, T(v_{k+l})) \quad (\text{Def. } f \wedge g) \\
 &= \frac{(k+l)!}{k!l!} T^* \text{Alt}(f \otimes g)(v_1, \dots, v_{k+l}) \quad (\text{Def. } T^* \text{Alt}(f \otimes g)) \\
 &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(T^*(f \otimes g))(v_1, \dots, v_{k+l}) \quad (\text{Propietat (2)}) \\
 &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(T^* f \otimes T^* g)(v_1, \dots, v_{k+l}) \quad (\text{Propietat (1)}) \\
 &= (T^* f \wedge T^* g)(v_1, \dots, v_{k+l}). \quad (\text{Def. } T^* f \wedge T^* g)
 \end{aligned}$$

D'aquesta manera, $T^*(f \wedge g) = T^* f \wedge T^* g$.

Finalment, quant a (4), és una comprovació directa. Siga $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$,

$$\begin{aligned}
 (T \circ S)^* f(v_1, \dots, v_k) &= f(T(S(v_1)), \dots, T(S(v_k))) \quad (\text{Def. } (T \circ S)^* f) \\
 &= T^* f(S(v_1), \dots, S(v_k)) \quad (\text{Def. } T^* f)
 \end{aligned}$$

$$= S^*(T^*f)(v_1, \dots, v_k). \quad (\text{Def. } S^*(T^*f))$$

Concloem que $(T \circ S)^*f = S^*(T^*f)$ i les quatre propietats queden provades. $\square$

Sabem que si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge_{\mathbb{K}}^n(V)) = \binom{n}{n} = 1$ i que si $T: V \rightarrow V$ és una aplicació lineal, T^ és una aplicació de $\bigwedge_{\mathbb{K}}^n(V)$ sobre si mateixa. Tot això és coherent amb el que hem vist al capítol anterior, on recordem que denotàrem T^*f per f^T . Així, de nou, tenim la noció de determinant.*

DEFINICIÓ 7.24. Siga $T: V \rightarrow V$ un endomorfisme i $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Definim el **determinant** de T , $\det(T)$, com l'únic escalar $\det(T) \in \mathbb{K}$ tal que, per a tota $f \in \bigwedge_{\mathbb{K}}^n(V)$, $T^*f = \det(T)f$.

PROPOSICIÓ 7.25. Si T i S són endomorfismes de V , llavors

$$\det(T \circ S) = \det(T) \det(S).$$

DEMOSTRACIÓ. Donat $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^k(V)$, aleshores per definició, $\det(T \circ S)$ és l'únic escalar tal que

$$(T \circ S)^*(f) = \det(T \circ S) f.$$

Però, com que per la proposició anterior, $(T \circ S)^*f = S^*(T^*f)$,

$$(T \circ S)^*f = S^*(T^*f) = \det(S) T^*f = \det(S) \det(T) f.$$

Com els determinants són escalars, $\det(S) \det(T) = \det(T) \det(S)$ i el resultat queda provat. $\square$

Veiem que amb aquesta nova teoria, podem obtindre la mateixa fórmula del determinant. Siguen V, W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials de dimensió n i siga $T: V \rightarrow W$ una aplicació lineal. Siguen a més $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V i $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ una base de W . Sabem que existeixen escalars $\lambda_{i,j}$ de manera que $T(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} \tilde{e}_i$ per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$. De fet, la matriu $(\lambda_{i,j})_{i,j=1}^n$ és la matriu associada a T .

Provem primerament dos lemes.

LEMA 7.26. Per a cada $j \in \{1, \dots, n\}$, es compleix que $T^* \tilde{e}_j^* = \sum_{i=1}^n \lambda_{j,i} e_i^*$.

DEMOSTRACIÓ. És una comprovació directa. Siga $j \in \{1, \dots, n\}$, si $v \in V$, aleshores existeixen uns únics $\mu_i \in \mathbb{K}$ tals que $v = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$, i.e., $e_i^*(v) = \mu_i$, per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$. Per tant,

$$\begin{aligned} T^* \tilde{e}_j^*(v) &= \tilde{e}_j^* \left(T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i e_i \right) \right) && (\text{Def. } T^* \tilde{e}_j^*, v) \\ &= \tilde{e}_j^* \left(\sum_{i=1}^n \mu_i T(e_i) \right) && (T \text{ lineal}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \mu_i \tilde{e}_j^* \left(\sum_{s=1}^n \lambda_{s,i} \tilde{e}_s \right) && (\text{Def. } T(e_i), \tilde{e}_j^* \text{ lineal}) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{s=1}^n \lambda_{s,i} \tilde{e}_j^*(\tilde{e}_s) && (\tilde{e}_j^* \text{ lineal}) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_{j,i} && (\tilde{e}_j^*(\tilde{e}_j) = 1 \text{ i si } j \neq s, \tilde{e}_j^*(\tilde{e}_s) = 0) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_{j,i} e_i^*(v). && (\mu_i = e_i^*(v))
\end{aligned}$$

Concloem que $T^* \tilde{e}_j^* = \sum_{i=1}^n \lambda_{j,i} e_i^*$. $\square$

LEMA 7.27. *Siguen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^1(V)$ i $\sigma \in \Sigma_n$, es té que*

$$f_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(n)} = (f_1 \otimes \dots \otimes f_n)^{\sigma^{-1}}.$$

DEMOSTRACIÓ. Siga $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$. Per una part,

$$(f_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(n)})(v_1, \dots, v_n) = f_{\sigma(1)}(v_1) \cdots f_{\sigma(n)}(v_n) = \prod_{i=1}^n f_{\sigma(i)}(v_i).$$

En canvi, per l'altra,

$$\begin{aligned}
(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)^{\sigma^{-1}}(v_1, \dots, v_n) &= (f_1 \otimes \dots \otimes f_n)(v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= \prod_{i=1}^n f_i(v_{\sigma^{-1}(i)}).
\end{aligned}$$

Però, ara bé, al productori, i varia d'1 a n . D'aquesta manera, en ser $\sigma \in \Sigma_n$, el mateix ocorre amb $\sigma(i)$. Per tant, podem canviar al productori i per $\sigma(i)$ i així,

$$\prod_{i=1}^n f_i(v_{\sigma^{-1}(i)}) = \prod_{i=1}^n f_{\sigma(i)}(v_{\sigma^{-1}(\sigma(i))}) = \prod_{i=1}^n f_{\sigma(i)}(v_i).$$

Consegüentment, es té que

$$f_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes f_{\sigma(n)} = (f_1 \otimes \dots \otimes f_n)^{\sigma^{-1}},$$

com volíem provar. $\square$

Ara sí, podem trobar la fórmula del determinant, que com constatarem, està relacionada amb el producte exterior. Així, pel Lema 7.26 i per la Proposició 7.23, com que el producte exterior és associatiu,

$$T^*(\tilde{e}_1^* \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n^*) = T^* \tilde{e}_1 \wedge \dots \wedge T^* \tilde{e}_n = \sum_{i_1=1}^n (\lambda_{1,i_1} e_{i_1}^*) \wedge \dots \wedge \sum_{i_n=1}^n (\lambda_{n,i_n} e_{i_n}^*).$$

Notem que per propietats del producte exterior, podem treure a fora els escalars.

$$T^*(\tilde{e}_1^* \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n^*) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \lambda_{1,i_1} \cdots \lambda_{n,i_n} (e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_n}^*).$$

Ara bé, sabem que si algun subíndex coincideix, el producte exterior és nul. Per tant, únicament considerem els casos on $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$, és a dir, on els subíndexs venen donats per permutacions. Així,

$$T^*(\tilde{e}_1^* \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n^*) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_{1,\sigma(1)} \cdots \lambda_{n,\sigma(n)} (e_{\sigma(1)}^* \wedge \dots \wedge e_{\sigma(n)}^*). \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Però, pel Lema 7.27, } e_{\sigma(1)}^* \otimes \dots \otimes e_{\sigma(n)}^* &= (e_1^* \otimes \dots \otimes e_n^*)^{\sigma^{-1}}. \text{ Llavors,} \\ e_{\sigma(1)}^* \wedge \dots \wedge e_{\sigma(n)}^* &= k! \text{Alt} (e_{\sigma(1)}^* \otimes \dots \otimes e_{\sigma(n)}^*) \quad (\text{Prop. 7.15}) \\ &= k! \text{Alt} \left((e_1^* \otimes \dots \otimes e_n^*)^{\sigma^{-1}} \right) \quad (\text{Lema 7.27}) \\ &= k! \text{sign} (\sigma^{-1}) \text{Alt} (e_1^* \otimes \dots \otimes e_n^*) \quad (\text{Corol·lari 7.13}) \\ &= \text{sign} (\sigma) (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*). \quad (\text{Props. 6.22, 7.15}) \end{aligned}$$

D'aquesta manera, ajuntant això amb l'Equació (16),

$$T^*(\tilde{e}_1^* \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n^*) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_{1,\sigma(1)} \cdots \lambda_{n,\sigma(n)} \text{sign} (\sigma) (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*).$$

Finalment, si definim

$$\det(\lambda_{i,j}) := \text{sign} (\sigma) \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_{1,\sigma(1)} \cdots \lambda_{n,\sigma(n)},$$

se satisfà que

$$T^*(\tilde{e}_1^* \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n^*) = \det(\lambda_{i,j}) (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*). \quad (17)$$

És a dir, hem obtingut la mateixa fórmula del determinant d'una matriu que al Teorema 6.41. Però això no és la definició de determinant, ja que T no és necessàriament un endomorfisme i les bases són distintes.

En canvi, si $V = W$ i $e_i = \tilde{e}_i$ per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denotant $f := e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^n(V)$, se segueix per la definició de determinant d'un endomorfisme que

$$T^*f = \det(T)f.$$

Però, com per l'Equació (17),

$$T^*f = \det(\lambda_{i,j})f,$$

llavors $\det(T) = \det(\lambda_{i,j})$. Concloem que el determinant d'un endomorfisme correspon al determinant de la seua matriu associada i, a més, és independent de la base triada.

Conclusions

Al llarg d'aquest treball hem treballat amb el producte tensorial, introduint cada concepte necessari progressivament. Així, la voluntat principal era que un lector alié a les ciències matemàtiques siga capaç, mitjançant aquest document, d'arribar a entendre què és un producte tensorial. El producte tensorial és una eina molt incompresa per molts estudiants, especialment de física o d'enginyeria, els quals fan servir-lo sense haver estudiat la seua definició formal matemàtica. Per tant, aquest TFG vol ser d'ajuda per a ells o per a qualsevol persona interessada a comprendre el concepte.

Per eixa raó, ens hem centrat en dos aspectes a l'hora de redactar el present treball. Per una part, que el lector no requerisca bibliografies complementàries i, per altra part, que les demostracions siguen amb el màxim detall possible. Consegüentment, això ha resultat en un treball amb més pàgines de les esperades, però, tot i això, més fàcil de llegir.

*Pel que fa als coneixements adquirits, la majoria de les demostracions aportades han sigut pròpies o amb l'ajuda del tutor. Per tant, ens ha aportat una major desimboltura per a resoldre un problema matemàtic. Endemés, hem après a utilitzar el paquet **tikzcd** de $\text{\LaTeX}$ per a poder dibuixar els diagrames commutatius que caracteritzen a les propietats universals i, en especial, la del producte tensorial. També, destaquem que ens ha fet millorar la nostra fluïdesa en la llengua valenciana, un objectiu personal més enllà dels matemàtics.*

Quant a les dificultats trobades, han sigut principalment dos. D'una banda, el fet d'escriure un document que incloga tota la informació ha sigut una tasca pesada, ja que cal considerar constantment si les propietats gastades s'han esmentat abans. D'altra banda, la major part de les bibliografies respecte a productes tensorials estan, o bé enfocades a la física, o bé a altres branques de les matemàtiques com la Teoria de Mòduls o la Geometria Diferencial.

En definitiva, considerem que aquest treball ha aconseguit el seu objectiu. Hem après al llarg d'aquest camí sobre les propietats del producte tensorial i fins i tot hem arribat a definir l'aplicació determinant. La idea original del treball comprenia els primers cinc capítols, però decidirem ampliar-la per examinar què succeeix en considerar més de dos espais vectorials. En resum, el producte tensorial és una ferramenta que ens permet treballar amb aplicacions lineals en lloc de bilineals o multilíneals.

Bibliografia

- [AH22] S. Andrilli and D. Hecker. *Elementary linear algebra*. Academic Press, 2022.
- [Axl24] S. Axler. *Linear algebra done right*. Springer Nature, 2024.
- [Bou48] N. Bourbaki. Livre ii algebre chapitre iii (état 4) algebre multilinéaire, 1948.
- [BR13] T. S. Blyth and E. F. Robertson. *Basic linear algebra*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Con18] K. Conrad. Tensor products. *Notes of course, available on-line*, 2018.
- [dM] Universidad Complutense de Madrid. Rudimentos del álgebra de tensores. <https://www.mat.ucm.es/~rutwig/TensorA.pdf>.
- [GH19] V. Guillemin and P. Haine. *Differential forms*. World Scientific, 2019.
- [Kra] I. Kra. Abstract algebra with applications. <https://www.math.stonybrook.edu/~irwin/algbk.pdf>.
- [MN36] F. J. Murray and J. V. Neumann. On rings of operators. *Annals of Mathematics*, pages 116–229, 1936.
- [RLC00] M. M. G. Ricci and T. Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54(1):125–201, 1900.
- [Rya02] R. A. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces*, volume 73. Springer, 2002.
- [Tas13] S. Taschuk. A short introduction to tensor products of vector spaces, 2013.