



Treball Fi de Grau - Curs 2023/2024

Propietats Universals de Límits i Colímits en Lean

Autora: **Laura Maria Pons Isidro**

Tutor: **Enric Cosme Llópez**

*Al meu germà, que espere que estiga orgullós des del cel.
Espere arribar algun dia tan lluny, que quasi ens puguem vore.*

Índex

Capítol 1. Introducció	3
Capítol 2. Preliminars	5
1. Categories	5
2. Functors entre categories	10
3. Transformacions naturals	16
4. Equivalència de categories	20
5. 2-categories	27
Capítol 3. Lema de Yoneda	35
1. Functors representables	35
2. Lema de Yoneda	41
3. Propietat universal	46
Capítol 4. Límits i colímits	57
1. Límits i colímits	57
2. Exemples de límits	64
3. Exemples de colímits	72
4. Categories completes i cocompletes	80
Capítol 5. Conclusions	83
Capítol 6. Apèndix	85
1. Codi en LEAN	85
Bibliografia	99

CAPÍTOL 1

Introducció

La paraula categoria es defineix segons l'AVL: "Grup en què es poden classificar diversos objectes tenint en compte alguna propietat o condició que tenen en comú". Resulta que aquest concepte matemàtic té una forta relació amb la filosofia, ja que l'ésser humà tendeix a classificar tot allò que l'envolta. Aquest concepte el van introduir, des del punt de vista filosòfic, grans pensadors com *Aristòtil* i *Immanuel Kant*. Per això és important començar aquest treball des d'aquest punt de vista, per mantindre clar l'objectiu: estudiar, abstraure i relacionar les distintes teories de les matemàtiques.

Tornant a la part matemàtica, el matemàtic alemany *George Cantor* (1845-1918) i el matemàtic italià *Giuseppe Peano* (1858-1932) van desenvolupar primer la teoria de conjunts. No fou fins 1945 que la Teoria de Categories es va formalitzar, gràcies a un article publicat per *Samuel Eilenberg* i *Saunders Mac Lane* [ME45]. Aquest article pretenia generalitzar certes construccions que els mateixos autors havien introduït en els seus estudis de grups d'homologies. Gran part de la comunitat matemàtica creia que aquests conceptes no transcendirien molt més enllà de ser un llenguatge convenient. No obstant, tenim bons exemples que confirmen que no va passar el que es pensava: "Homological Algebra" (1956) de *Cartan* i *Eilenberg* [CE56] o l'article "Sur quelques points d'algèbre homologique" (1957) d'*Alexander Grothendieck* [Gro57] i les aportacions de *David Kan*, van donar pas a l'estudi de les categories àmpliament. Des d'aquest moment, gràcies al gran nivell d'abstracció d'aquesta teoria, les aplicacions i utilitats han sigut múltiples, igual que les àrees de les matemàtiques on s'empren resultats de la Teoria de Categories.

L'estructura d'aquest treball es pot dividir en tres blocs. En el primer bloc s'introdueixen els conceptes més bàsics de la Teoria de Categories, com poden ser les categories i les relacions entre aquestes, els functors. A continuació, es presenta la definició de transformació natural, que serà la forma en què es relacionen els functors. Seguidament, definim l'isomorfisme i l'equivalència de categories. Finalment, es defineixen les 2-categories, que sorgeixen de forma natural si ens qüestionem si les categories funcionen també com a categories. A més, en aquesta secció acompanyem aquests conceptes amb molts exemples i figures amb l'objectiu d'assolir millor els conceptes.

D'altra banda, el segon bloc té com a objectiu principal enunciar i demostrar el lema de Yoneda. Gràcies a tot el treball previ realitzat al primer bloc, podem introduir els conceptes necessaris per a poder plantejar el mencionat lema, com per exemple els functors representables i els objectes inicials/finals. Amb tot açò, aconseguim enunciar i demostrar el lema de Yoneda, que serà un resultat fonamental d'aquesta teoria i serà de gran utilitat per a l'última part d'aquest bloc. Posteriorment, es defineixen les propietats universals i les categories d'elements. Tanquem el bloc amb un resultat essencial: la relació entre els functors representables i les categories d'elements, on apareixeran els objectes finals i inicials.

En el tercer i últim bloc, s'estudiaran els límits i colímits categorials, utilitzant l'últim resultat esmentat. Es donaran diversos exemples de límits, com el producte, l'igualador i el producte fibrat, i els seus respectius duals, el coproducte, el coigualador i la suma amalgamada. A més a més, aquests límits i colímits els vorem en els casos particulars de la categoria de conjunts i la categoria tipus, implementant aquesta última en Lean 4, estudi que motiva el nom i l'objectiu d'aquest treball. Lean és un llenguatge de programació funcional de codi obert amb suport en GitHub. Inclourem figures en l'apèndix amb la implementació del codi en Lean dels exemples. No obstant, el codi també està disponible al repositori de GitHub.

En aquest treball, utilitzarem la tipografia sense serifa per a denotar les categories ($\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \dots$). Amb el mateix format esmentarem algunes categories en particular ($\mathbf{Set}, \mathbf{Type}, \mathbf{Mon}, \dots$). Els functors, es denotaran amb lletra majúscula en cursiva ($F, G, H, \dots$) i, de la mateixa forma, els objectes i els conjunts ($X, Y, Z, W, A, B, \dots$). Respecte als morfismes, i en concret les aplicacions també, es denotaran amb lletres minúscules en cursiva ($f, g, h, \dots$), mentre que les transformacions naturals seran denotades per lletres gregues ($\alpha, \beta, \lambda, \dots$). D'altra banda, els elements de les categories i els noms concrets de functors s'anomenaran amb la primera lletra en majúscula i amb estil romànic ($\mathbf{Obj}, \mathbf{Hom}, \dots$). Per últim, les estructures algebraïques, com els grups, es denoten amb negreta ($\mathbf{M}, \mathbf{N}, \dots$).

Les referències on ens hem basat han sigut principalment *Category Theory in context* d'Emily Riehl [Rie16] i també, *Categories for the working mathematician* de Saunders Mac Lane [Mac13]. Altre que ens ha guiat també per als conceptes i exemples és *Introduction to Category Theory and Categorical Logic* de Thomas Streicher [Str04]. Per últim, una referència bàsica per a repassar la Teoria de Conjunts ha sigut [Vid10].

CAPÍTOL 2

Preliminars

1. Categories

En aquest capítol comencem exposant les definicions i conceptes bàsics que conformen la Teoria de Categories. Cal esmentar que una de les principals dificultats que podem trobar a l'hora d'entendre aquestes nocions pot ser la notació i la nomenclatura dels conceptes, ja que és una teoria abstracta que n'engloba d'altres. Definirem els conceptes de categoria, functors entre categories, transformacions naturals, equivalència de categories i composicions d'aquestes. A més, donarem exemples per a millorar la comprensió.

DEFINICIÓ 2.1 (Categoria). Una **categoria** $\mathbf{C}$ és una col·lecció d'objectes, denotada per $\text{Obj}(\mathbf{C})$, i una col·lecció de morfismes (o fletxes) denotada per $\text{Mor}(\mathbf{C})$. Tot morfisme en $\text{Mor}(\mathbf{C})$ té associat un domini i un codomini, que són objectes en $\mathbf{C}$. Denotarem els morfismes com $f: X \longrightarrow Y$, on X és el domini d' f i Y el codomini. També, podem dir indistintament que tenim f en $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ o f en $\mathbf{C}(X, Y)$. Els morfismes verifiquen:

- (1) Donats dos morfismes $f: X \longrightarrow Y$ i $g: Y \longrightarrow Z$, sempre tenim definida la seua *composició*, denotada $g \circ f$, que és un morfisme amb domini X i codomini Z , és a dir, $g \circ f: X \longrightarrow Z$. A més, aquesta composició, on estiga definida, és associativa. És a dir, donats els morfismes $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ i $h: Z \longrightarrow W$, es té que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- (2) Per a cada X en $\text{Obj}(\mathbf{C})$ existeix el *morfisme identitat* $\text{id}_X: X \longrightarrow X$, satisfent que, per a tot Y en $\text{Obj}(\mathbf{C})$ i tot morfisme $f: X \longrightarrow Y$, es té que

$$f \circ \text{id}_X = f \quad \text{i} \quad \text{id}_Y \circ f = f.$$

Una vegada hem definit el concepte de categories, anem a donar exemples concrets de categories.

EXEMPLE 2.2. Durant la carrera hem treballat amb algunes de les següents categories:

- **Categoria trivial**, denotada per $\mathbf{0}$, sense objectes ni morfismes.

- **Categoria unitat**, denotada per $\mathbf{1}$, formada per un únic objecte i el morfisme identitat sobre aquest.
- **Categoria dels conjunts**, denotada per $\mathbf{Set}$, on els objectes són els conjunts i els morfismes són les aplicacions entre conjunts. La composició de morfismes es correspon amb la composició d'aplicacions.
- **Categoria dels grups**, denotada per $\mathbf{Group}$, on els objectes són els grups i els morfismes són els homomorfismes de grups.
- **Categoria dels anells**, denotada per $\mathbf{Ring}$, on els objectes són els anells amb identitat i els morfismes són els homomorfismes d'anells.
- **Categoria dels espais topològics**, denotada per $\mathbf{Top}$, on els objectes són els espais topològics i els morfismes les aplicacions contínues.
- **Categoria dels espais vectorials**, denotada per $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, amb $\mathbb{K}$ un cos, on els objectes són $\mathbb{K}$ -espais vectorials i els morfismes aplicacions lineals.

Presentem un altre exemple que farem servir més endavant.

EXEMPLE 2.3 (Categoria discreta). Donada una categoria $\mathbf{C}$ qualsevol, podem definir la **categoria discreta** $\mathbf{C}_d$ de forma que els objectes són tots els objectes de $\mathbf{C}$ i els morfismes en $\mathbf{C}_d$ són únicament els morfismes identitat, per a cada objecte en $\mathbf{C}$. Aquesta definició satisfà les condicions per a ser una categoria.

Introduïm una categoria amb una estructura més complexa que les que hem vist fins ara, però que serà rellevant més endavant.

EXEMPLE 2.4 (Categoria sota un objecte). Donada una categoria $\mathbf{C}$ i un objecte C en $\mathbf{C}$, es pot definir la **categoria sota** C , denotada per $C/\mathbf{C}$. Els objectes d'aquesta categoria són els morfismes amb domini C , és a dir, els morfismes en $\mathbf{C}$ de la forma $f: C \rightarrow X$. D'altra banda, els morfismes en $C/\mathbf{C}$ són els següents: donats dos objectes en $C/\mathbf{C}$, és a dir, $f: C \rightarrow X$ i $g: C \rightarrow Y$, un morfisme d' f a g és un morfisme $h: X \rightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ de forma que el diagrama de la Figura (1) commuta.

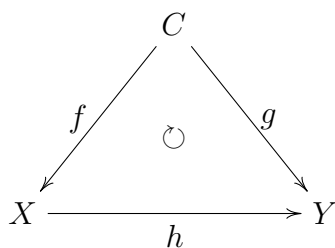


FIGURA 1. Morfisme en la categoria $C/\mathbf{C}$.

és a dir, $h \circ f = g$. Vegem que, efectivament, la categoria C/C satisfà les condicions per a ser una categoria.

Morfisme identitat: Siga $f: C \rightarrow X$ un objecte en C/C . Definim el seu morfisme identitat com al morfisme identitat en X en C . És a dir, $\text{id}_f^{C/C} = \text{id}_X^C$. Efectivament, id_X^C fa commutatiu el diagrama de la Figura (2).

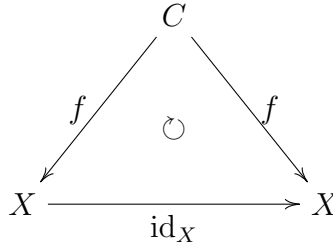


FIGURA 2. Morfisme identitat en f en C/C .

Composició de morfismes: Siguen $f: C \rightarrow X$, $g: C \rightarrow Y$ i $h: C \rightarrow Z$ objectes en C/C , i $p: f \rightarrow g$ i $q: g \rightarrow h$ morfismes en C que, recordem, p i q són morfismes $p: X \rightarrow Y$ i $q: Y \rightarrow Z$ en C , tals que:

$$p \circ f = g, \quad q \circ g = h.$$

Aleshores definim la composició de p amb q en C/C com la composició $q \circ p: X \rightarrow Z$ en C . Notem que $q \circ p$ és efectivament un morfisme en C/C ja que:

$$(q \circ p) \circ f = q \circ (p \circ f) = q \circ g = h.$$

gràcies a l'associativitat en C i a com hem definit els morfismes en C/C .

A més, com podem vore, aquesta composició també és associativa gràcies a que la respectiva composició en C ho és. I, de la mateixa manera, ocorre amb la identitat. Siguen $f: C \rightarrow X$ i $g: C \rightarrow Y$ objectes en C/C i siga $h: f \rightarrow g$ un morfisme en C/C , és a dir, un morfisme $h: X \rightarrow Y$ en C que verifica $h \circ f = g$, aleshores:

$$\text{id}_g^{C/C} \circ h = \text{id}_Y^C \circ h = h, \quad h \circ \text{id}_f^{C/C} = h \circ \text{id}_X^C = h.$$

Sembla lògic plantejar-se si podem definir una categoria contrària a la que hem vist en l'exemple previ, com vegem a continuació.

EXEMPLE 2.5 (Categoria sobre un objecte). Existeix la categoria contrària a la que hem definit en l'anterior exemple. Siga C una categoria i C un objecte en C . Definim la **categoria sobre C** , denotada per C/C . Els objectes d'aquesta categoria són els morfismes amb codomini C , és a dir, els morfismes en C de la forma $f: X \rightarrow C$. D'altra banda, els morfismes en C/C són els següents. Donats dos objectes en C/C , $f: X \rightarrow C$ i $g: Y \rightarrow C$, un morfisme d' f a g és un morfisme

$h: X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ de forma que el diagrama de la Figura (3) commuta.

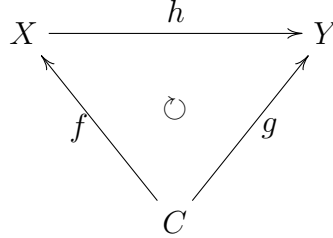


FIGURA 3. Morfisme en la categoria $\mathbf{C}/\mathbf{C}$.

És a dir, $h \circ f = g$. La demostració de que, efectivament, la categoria $\mathbf{C}/\mathbf{C}$ satisfà les condicions per a ser una categoria, és anàloga a la de l'exemple anterior.

Presentem l'últim exemple de categoria, que serà essencial per al treball.

EXEMPLE 2.6 (Categoria `Type`). En aquest projecte, tenim l'objectiu d'estudiar la categoria de tipus, `Type`, en el llenguatge de programació funcional Lean. Aquesta categoria té per objectes els tipus en Lean i els morfismes d'un tipus a un altre tipus en Lean.

La paradoxa de Russell estipula que no existeix el conjunt de tots els conjunts. Per aquest motiu hem definit les categories com a col·lecció d'objectes i morfismes i no hem mencionat la paraula *conjunt*. Per tal de solucionar aquesta paradoxa a nivell teòric, distingim entre classe i conjunt o diferenciem les categories grans de les categories xicotetes. Introduïm aquests conceptes a continuació.

DEFINICIÓ 2.7 (Categoria xicoteta). Una categoria $\mathbf{C}$ s'anomena **xicoteta** si $\text{Obj}(\mathbf{C})$ és un conjunt i, per a cada parell d'objectes X, Y en $\text{Obj}(\mathbf{C})$, tenim que $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ també és un conjunt. Una categoria s'anomena categoria **gran** si no és xicoteta.

Una categoria $\mathbf{C}$ s'anomena **localment xicoteta** si, per a cada parell d'objectes X, Y en $\text{Obj}(\mathbf{C})$, tenim que $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ és un conjunt. És a dir, no és necessari que els objectes de la categoria formen un conjunt.

Vegem un exemple senzill per a diferenciar bé cada definició.

EXEMPLE 2.8. Un exemple de categoria xicoteta és la categoria discreta sobre un conjunt. La categoria `Set` que hem vist en l'Exemple 2.2 és una categoria gran, però, localment xicoteta.

Ens podem preguntar com es poden comparar dos objectes d'una categoria. Intuïtivament pensem que ha de fer-se mitjançant els

morfismes. Doncs bé, anàlogament a com fem en altres camps de les Matemàtiques, afirmem que dos elements són isomorfs si existeix un isomorfisme entre ells. Extenem aquest concepte a les categories.

DEFINICIÓ 2.9 (Isomorfisme). Un **isomorfisme** en una categoria $\mathbf{C}$ és un morfisme $f: X \longrightarrow Y$ (amb X, Y en $\text{Obj}(\mathbf{C})$) per al què existeix un morfisme $g: Y \longrightarrow X$ tal que:

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y.$$

Aleshores, direm que X i Y són **isomorfs** i ho denotarem per $X \cong Y$.

EXEMPLE 2.10. En la categoria **Set** els isomorfismes són les bijeccions i en la categoria **Top**, els isomorfismes són els homeomorfismes (funcions contínues amb inversa contínua).

Si pensem en una categoria com una col·lecció d'objectes i fletxes que els relacionen, podem preguntar-nos què passa si invertim la direcció de dites fletxes. Ho formalitzem amb el següent concepte, que ens estalviarà temps per a no demostrar el mateix per a categories que siguin oposades.

DEFINICIÓ 2.11 (Categoria oposada). Siga $\mathbf{C}$ una categoria. Definim la **categoria oposada**, denotada per $\mathbf{C}^{\text{op}}$, com la categoria que té els mateixos objectes que $\mathbf{C}$ i els morfismes $f^{\text{op}}: Y \longrightarrow X$ en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ són els morfismes $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{C}$. És a dir, només hem invertit de forma abstracta el domini i el codomini dels morfismes en $\mathbf{C}$.

PROPOSICIÓ 2.12. *Donada una categoria $\mathbf{C}$, la seua categoria oposada $\mathbf{C}^{\text{op}}$ és també una categoria.*

DEMOSTRACIÓ. Notem que els objectes d'ambdues categories són els mateixos. Per a cada objecte X en $\mathbf{C}^{\text{op}}$, definim el **morfisme identitat** en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ com a l'oposat del respectiu morfisme identitat en $\mathbf{C}$. És a dir, tenim $\text{id}_X^{\mathbf{C}^{\text{op}}} = \text{id}_X^{\mathbf{C}}$. Notem que $\text{id}_X^{\mathbf{C}^{\text{op}}}: X \longrightarrow X$ està ben definit.

Només ens queda introduir la **composició de morfismes** i veure que se satisfan les condicions per a ser categoria. Siguen $f^{\text{op}}: Y \longrightarrow X$ i $g^{\text{op}}: X \longrightarrow Z$ morfismes en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ associats als morfismes $f: X \longrightarrow Y$ i $g: Z \longrightarrow X$ en $\mathbf{C}$. Definim la composició de g^{op} amb f^{op} en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ com $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}$, és a dir, el morfisme oposat a la composició $f \circ g$ en $\mathbf{C}$. Notem que està ben definida perquè tenim $f \circ g: Z \longrightarrow Y$ i $(f \circ g)^{\text{op}}: Y \longrightarrow Z$ i és associativa. Siguen $f^{\text{op}}: Y \longrightarrow X$, $g^{\text{op}}: X \longrightarrow Z$ i $h^{\text{op}}: Z \longrightarrow W$ morfismes en $\mathbf{C}^{\text{op}}$

$$\begin{aligned} h^{\text{op}} \circ (g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}}) &= h^{\text{op}} \circ (f \circ g)^{\text{op}} && \text{(definició composició)} \\ &= ((f \circ g) \circ h)^{\text{op}} && \text{(definició composició)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f \circ (g \circ h))^{\text{op}} && \text{(composició associativa en } \mathbf{C} \text{)} \\
&= (g \circ h)^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} && \text{(definició composició)} \\
&= (h^{\text{op}} \circ g^{\text{op}}) \circ f^{\text{op}}. && \text{(definició composició)}
\end{aligned}$$

Només ens queda veure que, donat un objecte X en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ i un morfisme $f^{\text{op}}: Y \longrightarrow X$, es té que $\text{id}_X^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = f^{\text{op}}$ i $f^{\text{op}} \circ \text{id}_Y^{\text{op}} = f^{\text{op}}$, però només cal utilitzar, de nou, la definició de composició en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ i de la identitat en $\mathbf{C}$

$$\text{id}_X^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = (f \circ \text{id}_X)^{\text{op}} = f^{\text{op}}.$$

Açò conclou la demostració. $\square$

NOTA 2.13. *Donada una categoria $\mathbf{C}$, podem considerar $\mathbf{C}^{\text{op}}$ i l'oposada d'aquesta última, però, evidentment és igual a la categoria inicial, és a dir, $(\mathbf{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathbf{C}$.*

EXEMPLE 2.14. Siga $\mathbb{K}$ un cos, considerem $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$, la categoria on els objectes són els enters positius i els morfismes de n a m són les matrius $m \times n$ amb entrades en $\mathbb{K}$. $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}^{\text{op}}$ és la categoria que té per objectes els enters positius i els morfismes de n a m són les matrius $n \times m$ amb entrades en $\mathbb{K}$.

2. Functors entre categories

En l'anterior secció hem vist què són les categories i com es relacionen els objectes d'aquestes amb els morfismes. A continuació, estudiarem un concepte important de la Teoria de Categories, els functors. Aquests ens permeten relacionar les categories, com un *nivell superior* als morfismes. A més a més, exemplificarem aquest concepte amb alguns functors bàsics.

DEFINICIÓ 2.15 (Functor covariant). Donades dues categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, un **functor covariant** (o només, functor) és una assignació $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, que envia objectes de $\mathbf{C}$ en objectes de $\mathbf{D}$ i morfismes $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ en morfismes $F(f): F(X) \longrightarrow F(Y)$ en $\mathbf{D}$. A més, F preserva la identitat i la composició, és a dir, verifica:

- (1) $F(\text{id}_X^{\mathbf{C}}) = \text{id}_{F(X)}^{\mathbf{D}}$, per a tot objecte X de $\mathbf{C}$.
- (2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, per a tot $f: X \longrightarrow Y$ i $g: Y \longrightarrow Z$ morfismes en $\mathbf{C}$.

Realment, podríem distingir el functor en dues components, una que actua sobre objectes i una altra que actua sobre els morfismes, però per comoditat, se sobreentén i només l'anomenem F . Podem visualitzar com actua un functor en la Figura (4) i en la Figura (5).

Introduïm un exemple de functor covariant que farem servir més endavant.

$$\begin{array}{ccc}
F: \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\
\\
\begin{array}{ccc}
X & & F(X) \\
\downarrow f & \longmapsto & \downarrow F(f) \\
Y & & F(Y)
\end{array}
\end{array}$$

FIGURA 4. Representació d'un functor covariant entre categories.

$$\begin{array}{ccc}
F: \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\
\\
\begin{array}{ccc}
X & & F(X) \\
\downarrow \text{id}_X & \longmapsto & \downarrow \text{id}_{F(X)} \\
X & & F(X)
\end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
F: \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\
\\
\begin{array}{ccc}
X & & F(X) \\
\downarrow f & \longmapsto & \downarrow F(f) \\
Y & & F(Y) \\
\downarrow g & \longmapsto & \downarrow F(g) \\
Z & & F(Z)
\end{array}
\end{array}$$

$g \circ f$ (curved arrow from X to Z) $F(g \circ f)$ (curved arrow from $F(X)$ to $F(Z)$)

FIGURA 5. Transformació de la identitat i la composició (respectivament) mitjançant un functor covariant.

EXEMPLE 2.16 (Functor d'oblit). Hi ha un tipus de functor, anomenat **functor d'oblit** que assigna a una estructura algebraica el seu conjunt subjacent, i s'anomena així precisament perquè fa *perdre* informació sobre l'estructura algebraica de la categoria. Un exemple senzill és el functor $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, de la categoria d'espais vectorials a la de grups abelians, o també, $\mathbf{Group} \longrightarrow \mathbf{Set}$, que envia els grups als conjunts subjacents i els morfismes passen de ser homomorfismes a simplement aplicacions entre conjunts. Clarament, aquest functor només té sentit per a certes categories.

A més a més, també podem definir un functor amb el mateix domini i codomini, presentem un exemple.

EXEMPLE 2.17 (Endofunctor). Hi ha un exemple d'*endofunctor*, és a dir, un functor que té el mateix domini i codomini, que és el següent: $\mathcal{P}: \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$, que envia a cada conjunt A en $\mathbf{Set}$ el seu conjunt de parts $\mathcal{P}(A) = \{A' \mid A' \subseteq A\}$ i a cada morfisme $f: A \longrightarrow B$ al morfisme $f_*: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$, ja que envia $A' \subseteq A$ a $f[A'] \subseteq B$.

Seguidament, podem introduir altres functors que no són covariants, que ens relacionen una categoria amb la seua oposada.

DEFINICIÓ 2.18 (Functor contravariant). Donades dues categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, un **functor contravariant** és un functor covariant de la forma $F: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$. Explicitament, envia objectes de $\mathbf{C}$ en objectes de $\mathbf{D}$ i morfismes $f: X \rightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ a morfismes $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$ en $\mathbf{D}$. A més, F preserva la identitat i la composició, és a dir, ha de verificar:

- $F(\text{id}_X^{\mathbf{C}}) = \text{id}_{F(X)}^{\mathbf{D}}$, per a tot objecte X de $\mathbf{C}$.
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, per a tot $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ morfismes en $\mathbf{C}$.

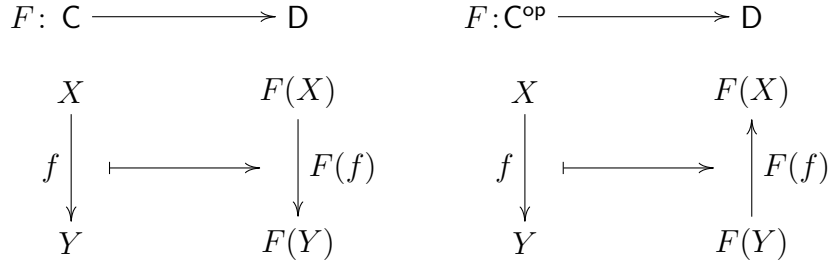


FIGURA 6. Functor covariant i functor contravariant.

NOTA 2.19. *Si no s'especifica, els functors que considerarem en el treball seran sempre covariants. En el cas dels contravariants, s'expliciten considerant la categoria oposada en el domini.*

Introduïm un exemple senzill de functor contravariant.

EXEMPLE 2.20. Un exemple de functor contravariant que es veu en Àlgebra Lineal I és, donat un cos $\mathbb{K}$, considerem $F: \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, de forma que envia un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V en el seu **espai dual** $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K}) = \{f: V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ és una aplicació lineal}\}$.

Continuarem aquesta secció definint functors importants que després utilitzarem per a introduir nous conceptes i per als resultats del següent capítol.

DEFINICIÓ 2.21 (Functor composició). Siguen $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ i $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ dos functors. Considerem l'assignació $G \circ F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ definida com vegem en la Figura (7).

D'aquesta manera, estem assignant a cada objecte X en $\mathbf{C}$ l'objecte $G(F(X))$ en $\mathbf{E}$ i al morfisme $f: X \rightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ el morfisme $G(F(f)): G(F(X)) \rightarrow G(F(Y))$ en $\mathbf{E}$. Vegem en la següent proposició que, efectivament, el functor composició de G amb F és un functor.

$$\begin{array}{ccc}
G \circ F: & \mathbf{C} & \longrightarrow \mathbf{E} \\
\\
\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} G(F(X)) \\ \downarrow G(F(f)) \\ G(F(Y)) \end{array}
\end{array}$$

FIGURA 7. Functor composició.

PROPOSICIÓ 2.22. *Siguen $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ i $G: \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{E}$ dos functors, aleshores $G \circ F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{E}$ és un functor.*

DEMOSTRACIÓ. Per vore que aquest és un functor, hem de demostrar que conserva el morfisme identitat i la composició de morfismes, és a dir, els dos punts que hem vist en la Definició 2.15. Ho comprovem.
Preserva la identitat: Siga X un objecte en $\mathbf{C}$ i siga el morfisme identitat $\text{id}_X: X \longrightarrow X$, notem que:

$$\begin{aligned}
G \circ F(\text{id}_X) &= G(F(\text{id}_X)) && \text{(definició functor composició)} \\
&= G(\text{id}_{F(X)}) && \text{(axioma identitat per a } F) \\
&= \text{id}_{G(F(X))} && \text{(axioma identitat per a } G) \\
&= \text{id}_{G \circ F(X)}. && \text{(definició functor composició)}
\end{aligned}$$

Preserva la composició: Siguen $f: X \longrightarrow Y$ i $g: Y \longrightarrow Z$ dos morfismes en $\mathbf{C}$, aleshores:

$$\begin{aligned}
G \circ F(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) && \text{(definició functor composició)} \\
&= G(F(g) \circ F(f)) && \text{(axioma composició per a } F) \\
&= G(F(g)) \circ G(F(f)) && \text{(axioma composició per a } G) \\
&= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f). && \text{(functor composició)}
\end{aligned}$$

I a més, gràcies a les propietats dels functors, tindrem que la composició de functors és associativa. $\square$

EXEMPLE 2.23 (Functor identitat). Podem definir també el **functor identitat** $\text{Id}^{\mathbf{C}}$ d'una categoria $\mathbf{C}$ en ella mateixa. Ho podem visualitzar en la Figura (8).

Aquesta assignació envia objectes i morfismes de $\mathbf{C}$ en ells mateixa.

NOTA 2.24. *Escrivim el functor identitat amb la I majúscula per a no confondre'l amb el morfisme identitat.*

PROPOSICIÓ 2.25. *Donada una categoria $\mathbf{C}$, $\text{Id}^{\mathbf{C}}: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ és un functor.*

DEMOSTRACIÓ. Igual que abans, per vore que aquest és un functor, hem de demostrar que conserva el morfisme identitat i la composició

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \\ \begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} \end{array}$$

FIGURA 8. Functor identitat d'una categoria $\mathcal{C}$.

de morfismes. Ho comprovem.

Preserva la identitat: Siga X un objecte en $\mathcal{C}$ i siga el morfisme identitat $\text{id}_X : X \longrightarrow X$, notem que:

$$\text{Id}^{\mathcal{C}}(\text{id}_X^{\mathcal{C}}) = \text{id}_X^{\mathcal{C}}.$$

Per la definició del functor identitat.

Preserva la composició: Siguen $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ dos morfismes en $\mathcal{C}$, aleshores:

$$\begin{aligned} \text{Id}^{\mathcal{C}}(g \circ f) &= g \circ f \\ &= \text{Id}^{\mathcal{C}}(g) \circ \text{Id}^{\mathcal{C}}(f). \end{aligned}$$

Igual que abans, per la definició del functor identitat.

I a més, aquest functor identitat és la *identitat* respecte de la composició de functors. $\square$

A continuació introduïm el functor constant.

EXEMPLE 2.26 (Functor constant). Siguen $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ categories i D un objecte en $\mathcal{D}$, el **functor constant** a D es defineix com l'assignació que envia qualsevol objecte en $\mathcal{C}$ a D i qualsevol morfisme en $\mathcal{C}$ a id_D en $\mathcal{D}$. És a dir, com es veu en la Figura (9).

$$\begin{array}{ccc} K^{\mathcal{D}} : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \\ \begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} D \\ \downarrow \text{id}_D \\ D \end{array} \end{array}$$

FIGURA 9. Functor constant a D en $\mathcal{D}$.

Tenim que, efectivament, és un functor i la demostració és molt similar a les que acabem de fer.

Ja que en la Definició 2.9 hem introduït els isomorfismes, ara volem comprovar que els functors preserven aquesta noció.

PROPOSICIÓ 2.27. *Els functors preserven isomorfismes.*

DEMOSTRACIÓ. Siga un functor $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$, com en la Figura (10).

$$\begin{array}{ccc}
 & F: \mathbf{C} & \longrightarrow \mathbf{D} \\
 & & \\
 X & & F(X) \\
 \downarrow f & \longmapsto & \downarrow F(f) \\
 Y & & F(Y)
 \end{array}$$

FIGURA 10. Functor covariant.

Siga $f: X \longrightarrow Y$ un isomorfisme en $\mathbf{C}$, això vol dir que existeix $g: Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$ i $f \circ g = \text{id}_Y$. Volem demostrar que $F(f)$ és també un isomorfisme. Considerem $F(g)$ i notem que:

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}.$$

Només hem utilitzat la definició de functor. D'igual forma es demostra que $F(g) \circ F(f) = \text{id}_{F(Y)}$. $\square$

Introduïm un dels functors més importants en aquest treball, que l'utilitzarem en el següent capítol per a presentar un resultat important, el Lema de Yoneda.

DEFINICIÓ 2.28 (Functor de representació). Per a una categoria localment xicoteta $\mathbf{C}$ i per a un objecte C de $\mathbf{C}$, definim el **functor de representació** com l'assignació que envia un objecte X de $\mathbf{C}$ al conjunt $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, X)$ i un morfisme $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ a $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, f)$. En el cas del functor de representació contravariant, envia un objecte X de $\mathbf{C}$ al conjunt $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, C)$ i un morfisme $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ a $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(f, C)$. Representem aquests functor en la Figura (11) i en la Figura (12), respectivament. Tenim que $f_* = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, f)$ de forma que si $g: C \longrightarrow X$, aleshores $f_*(g) = f \circ g$ i $f^* = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(f, C)$ de forma que si $g: Y \longrightarrow C$, aleshores $f^*(g) = g \circ f$.

Notem que, com $\mathbf{C}$ és una categoria localment xicoteta, té sentit pensar en un functor que assigna a un objecte el conjunt de morfismes amb domini o codomini aquest objecte.

PROPOSICIÓ 2.29. *Per a una categoria localment xicoteta $\mathbf{C}$ i per a un objecte C de $\mathbf{C}$, les assignacions $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -)$ i $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, C)$ són functors covariant i contravariant, respectivament.*

DEMOSTRACIÓ. Anem a demostrar que $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -)$ és un functor covariant, ja que la demostració per a veure que $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, C)$ és un functor contravariant és anàloga.

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -): \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} X & & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, X) \\ f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f_* \\ Y & & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, Y) \end{array}$$

FIGURA 11. Functor de representació covariant.

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, C): \mathbf{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} X & & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, C) \\ f \downarrow & \longmapsto & \uparrow f^* \\ Y & & \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, C) \end{array}$$

FIGURA 12. Functor de representació contravariant.

Preserva la identitat: Sigui X un objecte en $\mathbf{C}$ i sigui el morfisme identitat id_X . Donada $g: C \longrightarrow X$, notem que:

$$(\text{id}_X)_*(g) = \text{id}_X \circ g = g = \text{id}_{\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, X)}(g).$$

Preserva la composició: Siguen $f: X \longrightarrow Y$ i $g: Y \longrightarrow Z$ dos morfismes compostables en $\mathbf{C}$, aleshores donada $h: C \longrightarrow X$, tenim que:

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*(h) &= (g \circ f) \circ h && \text{(definició de } (g \circ f)_*) \\ &= g \circ (f \circ h) && \text{(associativitat composició)} \\ &= g_*(f \circ h) && \text{(definició de } g_*) \\ &= g_*(f_*(h)) && \text{(definició de } f_*) \\ &= (g_* \circ f_*)(h). && \text{(composició)} \end{aligned}$$

Açò conclou la demostració. $\square$

3. Transformacions naturals

De la mateixa forma que els functors van sorgir naturalment per a poder relacionar les categories, com ho havíem fet amb els objectes d'aquestes, ara ens podem preguntar si hi ha un *nivell superior* que ens permeti comparar els functors. Aquesta és la noció de transformació natural entre functors i, a més, en el següent capítol vorem com de rellevant és.

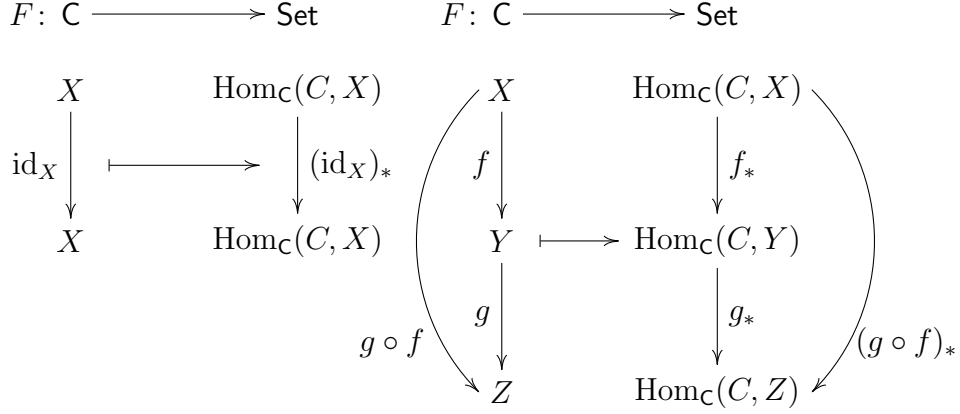


FIGURA 13. Transformació de la identitat i la composició (respectivament) mitjançant el functor de representació covariant $F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$.

DEFINICIÓ 2.30 (Transformació natural). Siguen $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ categories i siguen $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ functors. Una **transformació natural** de F en G , denotada per $\alpha: F \Rightarrow G$, és una col·lecció indexada $\alpha = (\alpha^X)_{X \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$, on per a cada objecte X de $\mathcal{C}$, α^X és un morfisme en $\mathcal{D}$ de la forma $\alpha^X: F(X) \rightarrow G(X)$. A més, es verifica que el diagrama de la Figura (14), anomenat **diagrama de naturalitat**, commuta. És a dir, es té que, per a qualsevol morfisme $f: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, es verifica:

$$G(f) \circ \alpha^X = \alpha^Y \circ F(f).$$

A més a més, si per a cada objecte X de $\mathcal{C}$, α^X és un isomorfisme en $\mathcal{D}$, direm que α és un **isomorfisme natural**, i ho denotem per $\alpha: F \cong G$.

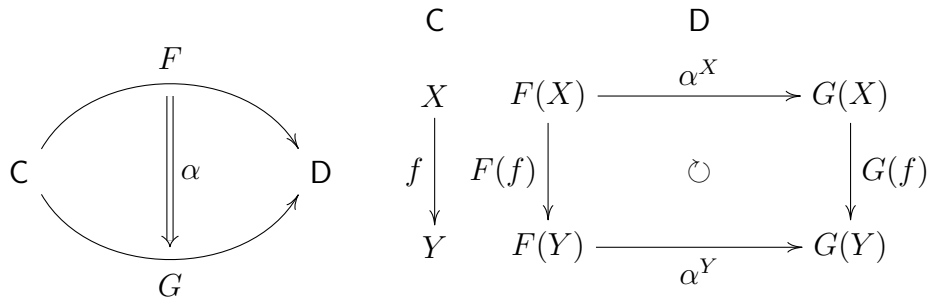


FIGURA 14. Transformació natural α i el seu diagrama de naturalitat.

Podem resumir la idea de transformació natural com aquella que relaciona la imatge d'un objecte en un functor a la imatge d'així mateix objecte però mitjançant altre functor, fent que aquesta relació siga

compatible amb la composició per les imatges dels morfismes.

Per tal d'aclarir aquests conceptes, vegem uns exemples senzills.

EXEMPLE 2.31 (Transformació natural identitat). Podem definir la **transformació natural identitat**, associada a un functor F de $\mathbf{C}$, denotada per $\text{id}_F = (\text{id}_F^X)_{X \in \text{Obj}(\mathbf{C})}$. Per a cada objecte X en $\mathbf{C}$, definim $\text{id}_F^X = \text{id}_{F(X)}: F(X) \longrightarrow F(X)$, que són morfismes en $\mathbf{D}$. Vegem el seu diagrama de naturalitat en la Figura (15).

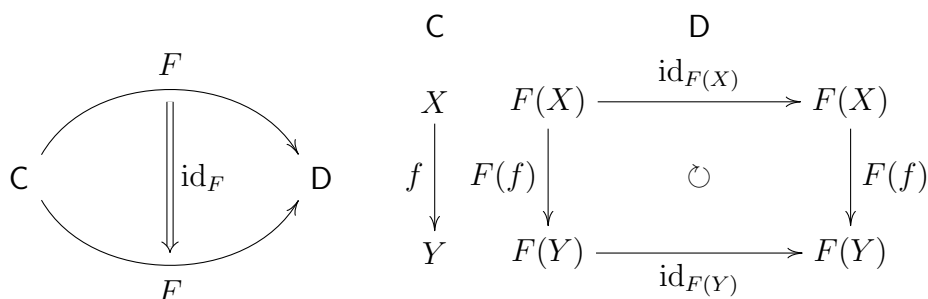


FIGURA 15. Transformació natural identitat i el seu diagrama de naturalitat.

EXEMPLE 2.32. Siga la categoria unitat $\mathbf{1}$, de l'Exemple (2.2). Per a qualsevol functor $F: \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{Set}$, tenim que $F(1)$ és un conjunt, denotant 1 a l'únic objecte en la categoria. Així, per a qualsevol objecte S en $\mathbf{Set}$, podem establir un functor $F_S: \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{Set}$ tal que $F_S(1) = S$. Així, és com si identificàrem cada functor amb un conjunt, per tant, una transformació natural entre aquests functors, és simplement una aplicació entre els conjunts.

Ara vegem dos exemples de transformacions naturals, un que sí és isomorfisme natural i l'altre que no ho és.

EXEMPLE 2.33 (Isomorfismes naturals). Tornem a l'Exemple (2.20), donat un cos $\mathbb{K}$, considerem el functor contravariant $F: \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, de forma que envia un $\mathbb{K}$ -espai vectorial V al seu espai dual $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K}) = \{f: V \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ és una aplicació lineal}\}$. Notem que $\text{Hom}(V, \mathbb{K})$ evidentment és un espai vectorial (suma d'aplicacions i aplicació nul·la) amb la mateixa dimensió que V , així $V \cong V^*$. Açò últim es demostra definint un isomorfisme, fent una elecció concreta d'una base de V i enviant-la a una altra concreta en el dual, i després extenent l'aplicació lineal.

Ara, el que fem és considerar el dual del dual, el que anomenarem el **dobte dual**, construint-lo com un functor covariant amb les característiques:

$$\begin{array}{ccc}
(\cdot)^{**}: \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \\
\\
\begin{array}{ccc}
V & & V^{**} \\
\downarrow f & \longmapsto & \downarrow f^{**} \\
W & & W^{**}
\end{array}
\end{array}$$

FIGURA 16. Functor covariant anomenat doble dual.

Amb $V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}(V^*, \mathbb{K})$ i si, $h \in V^{**}$ és una aplicació lineal $h: V^* \rightarrow \mathbb{K}$ verifica que per a qualsevol aplicació lineal $f^*: V^* \rightarrow W^*$, $f^{**}(h) = h \circ f^*$.

Com que el functor identitat i aquest functor $(\cdot)^{**}$ són dos endofunctors de $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, podem intentar establir una transformació natural i veure si és un isomorfisme natural. Definim la transformació natural d'**avaluació**, av , de la següent forma:

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Id}^{\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}} & \\
\text{Vect}_{\mathbb{K}} & \begin{array}{c} \downarrow \text{av} \\ \downarrow \end{array} & \text{Vect}_{\mathbb{K}} \\
& (\cdot)^{**} &
\end{array}$$

FIGURA 17. Transformació natural av .

on la transformació av és la col·lecció indexada $\text{av} = (\text{av}^V)_{V \in \text{Obj}(\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}})}$. Per a cada $\mathbb{K}$ -espai vectorial V , l'aplicació av^V ve donada per:

$$\begin{array}{ccc}
\text{av}^V: & V & \longrightarrow & V^{**} \\
& v & \longmapsto & \text{av}^V(v)
\end{array}$$

I per a cada $v \in V$, es defineix $\text{av}^V(v)$ com segueix:

$$\begin{array}{ccc}
\text{av}^V(v): & V^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
& h & \longmapsto & h(v).
\end{array}$$

Resulta que, per a cada $\mathbb{K}$ -espai vectorial V , l'aplicació av^V és un isomorfisme de $\mathbb{K}$ -espais vectorials. A més, donats V i W dos $\mathbb{K}$ -espais vectorials i una aplicació $f: V \rightarrow W$, el diagrama de la Figura (18) commuta.

Per tant, tenim que la transformació natural av és un isomorfisme natural.

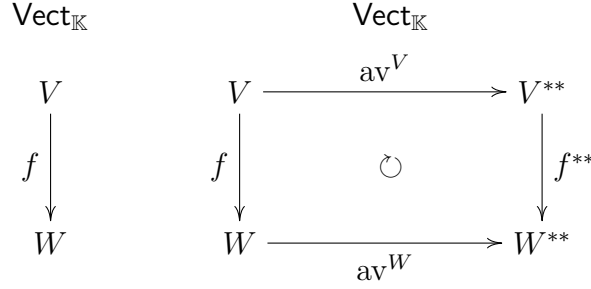


FIGURA 18. Diagrama de naturalitat d'av.

Per contra, el functor identitat i el functor $(\cdot)^*$ associat a l'espai dual (no al doble) no són naturalment isomorfs. El primer obstacle tècnic que trobem és que el functor identitat és covariant, mentre que el dual és contravariant. A més, encara que férem una generalització de les transformacions naturals i permetérem functors contra i covariants, no podria ser tampoc, perquè per a dimensions finites requereix l'elecció d'una base, i serà preservada bàsicament per aplicacions no lineals. Es pot vore una prova en [ME45], en la pàgina 234.

4. Equivalència de categories

Com en la majoria de teories matemàtiques, busquem establir relacions entre els elements que les componen. En general, la relació d'igualtat és molt forta, per tant, busquem condicions més dèbils com la d'isomorfisme, com per exemple en la Definició (2.9).

Fixant-nos en el context de les categories, donades dues categories C i D , direm que són *iguals* si $C = D$, però esta relació no té cap interès. Encara que aquesta relació és la més forta, busquem vore com seria un isomorfisme entre elles.

DEFINICIÓ 2.34 (Isomorfia de categories). Siguen dues categories C i D , direm que són **isomorfs** si existeixen $F: C \rightarrow D$ i $G: D \rightarrow C$ functors tals que $F \circ G = \text{Id}^D$ i $G \circ F = \text{Id}^C$.

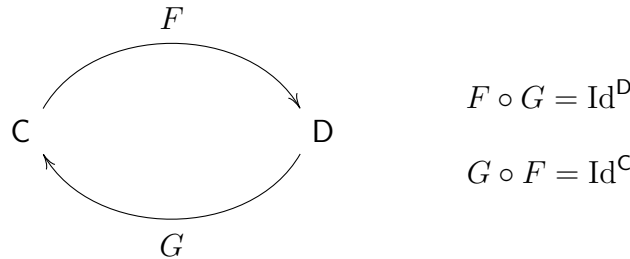


FIGURA 19. Isomorfisme entre categories.

No obstant, a vegades aquesta condició és massa estricta i podem relaxar-la una mica més. Encara que aquesta relació és més dèbil que la isomorfia entre categories, preserva bones propietats. La aconseguim demanant que la composició dels functors siguem isomorfs a les identitats, no iguals, com en el cas anterior. Ho formalitzem com:

DEFINICIÓ 2.35 (Equivalència entre categories). Donades $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ dues categories, direm que són **equivalents** si existeixen $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ i $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ functors i isomorfismes naturals $\eta: \text{Id}^{\mathbf{C}} \cong G \circ F$ i $\varepsilon: F \circ G \cong \text{Id}^{\mathbf{D}}$.

Anomenarem a F i G com **pseudoinversos** entre ells i també els denominem com **equivalència entre categories**.

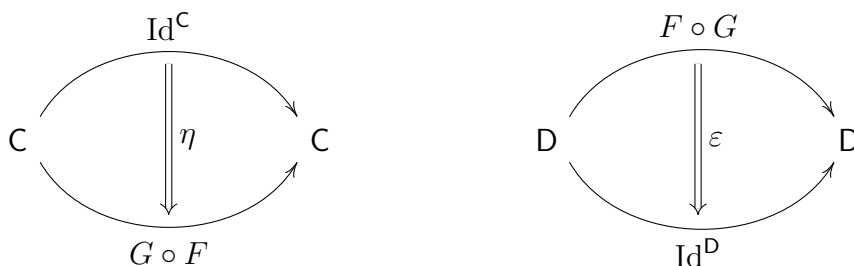


FIGURA 20. Equivalència entre categories.

Notem que si dos categories són isomorfs, aleshores són equivalents, però el recíproc no sempre és cert.

EXEMPLE 2.36 (Categories equivalents). Anem a veure un exemple de categories equivalents però no isomorfs, i altre de categories que no són equivalents.

Siga 1 la categoria unitat amb un únic objecte c i un únic morfisme, id_c i siga 2 la categoria amb dos objectes, d_1 i d_2 , i quatre morfismes, els dos morfismes identitat, id_{d_1} i id_{d_2} i dos isomorfismes, $\alpha: d_1 \rightarrow d_2$ i $\beta: d_2 \rightarrow d_1$. Notem que aquestes categories són equivalents, ja que podem definir un functor $F: 1 \rightarrow 2$, de forma que envia c a d_1 i id_c a id_{d_1} i altre functor $G: 2 \rightarrow 1$, de forma que envia tant d_1 com d_2 a c i tots els morfismes a id_c .

Notem que aquestes categories són equivalents, però no són isomorfs, ja que prenent d_2 en 2, si apliquem $(F \circ G)(d_2) = F(c) = d_1 \neq d_2$, però podem aplicar l'isomorfisme natural que ve donat per α i β i ja arribem a que $F \circ G \cong \text{Id}^2$.

D'altra banda, notem que amb les categories 1 i 2 que hem definit dalt, si en 2 llevem els dos isomorfismes α i β , no podríem establir els isomorfismes naturals. Per tant, aquestes categories no serien equivalents.

Ara, ja sabem quan dues categories són equivalents. No obstant, hi ha una caracterització sobre els functors que són equivalències de

categories, que ens facilitarà la feina. Introduïm primer els conceptes que necessitem.

DEFINICIÓ 2.37. Siga un functor $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$:

- Direm que és **ple** si, per a cada X, Y objectes en $\mathbf{C}$, l'assignació $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ és sobrejectiva. És a dir, donat $g: F(X) \longrightarrow F(Y)$ morfisme en $\mathbf{D}$, aleshores existeix un morfisme $h: X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ tal que $F(h) = g$.
- Direm que és **fidel** si, per a cada X, Y objectes en $\mathbf{C}$, l'assignació $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ és injectiva. És a dir, donats $f: X \longrightarrow Y$ i $f': X \longrightarrow Y$ morfismes en $\mathbf{C}$ tals que $F(f) = F(f')$, aleshores, $f = f'$.
- Direm que és **essencialment sobrejectiu sobre els objectes** si, per a tot objecte D en $\mathbf{D}$, existeix un objecte X en $\mathbf{C}$ de forma que $D \cong F(X)$. És a dir, existeixen $f: D \longrightarrow F(X)$ i $g: F(X) \longrightarrow D$ amb $f \circ g = \text{id}_{F(X)}$ i $g \circ f = \text{id}_D$.

Amb el següent resultat, presentem una propietat bona que tenen els functors que acabem de definir, que *creen* i *reflecteixen* isomorfismes.

PROPOSICIÓ 2.38. *Siguen $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ dues categories qualsevol i siga $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ un functor ple i fidel. Aleshores, F reflecteix i crea isomorfismes. És a dir,*

- (1) *Si $f: X \longrightarrow Y$ és un morfisme en $\mathbf{C}$ tal que $F(f)$ és un isomorfisme en $\mathbf{D}$, aleshores f és un isomorfisme.*
- (2) *Si X i Y són objectes en $\mathbf{C}$ tal que $F(X) \cong F(Y)$ en $\mathbf{D}$, aleshores $X \cong Y$ en $\mathbf{C}$.*

Notem que per la Proposició (2.27), tenim el recíproc d'aquesta proposició.

DEMOSTRACIÓ. Siga $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ un functor ple i fidel. Comprovem que verifica les dues propietats.

Siga f un morfisme en $\mathbf{C}$ de forma que $F(f)$ és un isomorfisme en $\mathbf{D}$. Aleshores, com F és ple i fidel, per a tot $f: X \longrightarrow Y$ existeix un únic morfisme $g: Y \longrightarrow X$ tal que $F(g) = (F(f))^{-1}$. Per tant,

$$\begin{aligned} F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) \\ &= (F(f))^{-1} \circ F(f) \\ &= \text{id}_{F(X)} \\ &= F(\text{id}_X). \end{aligned}$$

Com que F és fidel, tenim que $g \circ f = \text{id}_X$. De forma anàloga, podem arribar a que $F(f \circ g) = F(\text{id}_Y)$ i de nou, apliquem que F és fidel i obtenim que $f \circ g = \text{id}_Y$. Així, ja tenim que f és un isomorfisme en $\mathbf{C}$.

Com F és ple, si existeix un isomorfisme $g: F(X) \longrightarrow F(Y)$ en D , aleshores existeix un morfisme $f: X \longrightarrow Y$ en C tal que $F(f) = g$. Per l'apartat anterior, $f: X \longrightarrow Y$ és isomorfisme en C i es dóna que $X \cong Y$. $\square$

Com veníem buscant en aquest apartat, anem a utilitzar la definició i el resultat que acabem de vore per a establir una caracterització per a trobar equivalències de categories. Ens serà útil perquè en la definició de categories equivalents, apareixen dos functors, un d'anada i un de tornada, i dos isomorfismes naturals, mentre que en la caracterització apareix només un functor.

TEOREMA 2.39 (Caracterització de l'equivalència de categories). *Donades dues categories C i D , un functor $F: C \longrightarrow D$ defineix una equivalència entre les categories C i D si, i només si, el functor F és ple, fidel i essencialment sobrejectiu sobre els objectes.*¹

DEMOSTRACIÓ. Siguen C i D dues categories equivalents, aleshores existeixen functors $F: C \longrightarrow D$ i $G: D \longrightarrow C$ i isomorfismes naturals $\eta: \text{Id}^C \cong G \circ F$ i $\varepsilon: F \circ G \cong \text{Id}^D$. Anem a provar que F és ple, fidel i essencialment sobrejectiu sobre els objectes.

F és fidel: Siguen X, Y objectes en C i $f: X \longrightarrow Y$ i $f': X \longrightarrow Y$ morfismes en C , tals que $F(f) = F(f')$. És a dir, com vegem en la Figura (21).

$$\begin{array}{ccc}
 F: C & \longrightarrow & D \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 X & & F(X) \\
 \downarrow f & \longmapsto & \downarrow F(f) \\
 Y & & F(Y)
 \end{array}
 \end{array}$$

FIGURA 21. Functor F .

Alhora, el functor $G: D \longrightarrow C$, verifica que, donats X, Y objectes en C i $f: X \longrightarrow Y$ i $f': X \longrightarrow Y$ morfismes en C tals que $F(f) = F(f')$, aleshores $G(F(f)) = G(F(f'))$. Ho vegem en la Figura (22).

Siga ara l'isomorfisme natural $\eta: \text{Id}^C \cong G \circ F$, aleshores η^X és un isomorfisme en C . És a dir, existeix un isomorfisme invers $(\eta^X)^{-1}$ tal que $(\eta^X)^{-1} \circ \eta^X = \text{id}_X$.

Per una banda, per definició d'isomorfisme natural, tenim que:

$$G(F(f)) \circ \eta^X = \eta^Y \circ f, \text{ aleshores, } f = (\eta^Y)^{-1} \circ G(F(f)) \circ \eta^X.$$

¹La part necessària de l'equivalència entre categories per un functor sempre es dóna, però per a la part suficient cal assumir l'Axioma d'Elecció.

$$\begin{array}{ccc}
G: \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\
\\
\begin{array}{ccc}
F(X) & & G(F(X)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F(f) & \xrightarrow{\quad} & G(F(f)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F(Y) & & G(F(Y))
\end{array}
\end{array}$$

FIGURA 22. Functor G .

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\eta^X} & G(F(X)) \\
\downarrow f & & \downarrow G(F(f)) \\
Y & \xrightarrow{\eta^Y} & G(F(Y))
\end{array}$$

FIGURA 23. Isomorfisme natural η .

I d'igual forma, per l'altra banda:

$$G(F(f')) \circ \eta^X = \eta^Y \circ f', \text{ aleshores, } G(F(f')) = \eta^Y \circ f' \circ (\eta^X)^{-1}.$$

Com que $G(F(f)) = G(F(f'))$, substituïm una expressió en l'altra:

$$\begin{aligned}
f &= (\eta^Y)^{-1} \circ G(F(f')) \circ \eta^X \\
&= (\eta^Y)^{-1} \circ \eta^Y \circ f' \circ (\eta^X)^{-1} \circ \eta^X \\
&= f'.
\end{aligned}$$

Per tant, F és fidel. De manera anàloga, es pot demostrar que G també és fidel.

F és ple: Siguen X, Y objectes en $\mathbf{C}$ i $g: F(X) \rightarrow F(Y)$ morfisme en $\mathbf{D}$. Volem arribar a que existeix un morfisme $h: X \rightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ tal que $F(h) = g$. Notem que, aplicant G sobre g , obtenim $G(g): G(F(X)) \rightarrow G(F(Y))$. Ja sabem que $\eta: \text{Id}^{\mathbf{C}} \cong G \circ F$ és isomorfisme natural. Per tant, podem assegurar l'existència d'un únic morfisme $h: X \rightarrow Y$, definit per $h = (\eta^Y)^{-1} \circ G(g) \circ \eta^X$, com vegem en la Figura (24).

Així, per una banda tenim $G(g) = \eta^Y \circ h \circ (\eta^X)^{-1}$. Per altra banda, en ser η isomorfisme natural $G(F(h)) = \eta^Y \circ h \circ (\eta^X)^{-1}$. D'aquesta forma, $G(g) = G(F(h))$. Com que en l'apartat anterior hem vist que G és fidel, ja tenim $F(h) = h$. Per tant, F és ple.

Essencialment sobrejectiu sobre els objectes: Notem que, per a tot objecte D en $\mathbf{D}$, la component $\varepsilon^D: F(G(D)) \rightarrow D$ és un isomorfisme. Per definició, F és essencialment sobrejectiu sobre els objectes.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\eta^X} & G(F(X)) \\
h \downarrow & & \downarrow G(g) \\
Y & \xrightarrow{\eta^Y} & G(F(Y))
\end{array}$$

FIGURA 24. Definició de la funció h .

Ara, siga $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ un functor ple, fidel i essencialment sobrejectiu sobre els objectes, hem de vore que és una equivalència entre categories.

Siga D un objecte en $\mathbf{D}$. Emprant l'Axioma d'Elecció, com F és essencialment sobrejectiu sobre els objectes, existeix un objecte $G(D)$ en $\mathbf{C}$ i un isomorfisme $\varepsilon^D: F(G(D)) \rightarrow D$ en $\mathbf{D}$. Donat un morfisme $g: D \rightarrow D'$ en $\mathbf{D}$, com que $F(G(D))$ és isomorf a D mitjançant ε^D i $F(G(D'))$ ho és a D' mitjançant $\varepsilon^{D'}$, podem definir un morfisme entre $F(G(D))$ i $F(G(D'))$ de la següent forma:

$$(\varepsilon^{D'})^{-1} \circ g \circ \varepsilon^D: F(G(D)) \rightarrow F(G(D')).$$

A més, fa que el diagrama de la Figura (25) commute.

$$\begin{array}{ccc}
F(G(D)) & \xrightarrow{\varepsilon^D} & D \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g \\
F(G(D')) & \xrightarrow{\varepsilon^{D'}} & D'
\end{array}$$

FIGURA 25. Construcció del morfisme de $F(G(D))$ a $F(G(D'))$.

Com F és fidel, existeix un únic morfisme $G(g): G(D) \rightarrow G(D')$ de forma que $F(G(g)) = (\varepsilon^{D'})^{-1} \circ g \circ \varepsilon^D$. D'aquesta forma, hem construït les components d'una transformació natural $\varepsilon: F \circ G \cong \text{Id}_{\mathbf{D}}$. Haurem de definir l'altra $\eta: \text{Id}_{\mathbf{C}} \cong G \circ F$, a més de demostrar que G és un functor, amb G definit com en la Figura (26).

Ara, vegem que G és un functor, ja hem vist abans que, per construcció, utilitzant isomorfismes i que F és fidel, G està ben definit. Hem de vore que preserva el morfisme identitat i la composició de morfismes.

Preserva la identitat: Volem provar que $G(\text{id}_D) = \text{id}_{G(D)}$. Emprarem que F és fidel. Així, considerem $F(G(\text{id}_D)): F(G(D)) \rightarrow F(G(D))$ i $F(\text{id}_{G(D)}): F(G(D)) \rightarrow F(G(D))$ en $\mathbf{D}$ i notem que el diagrama de la Figura (27) commuta.

$$\begin{array}{ccc}
G: D & \longrightarrow & C \\
D & & G(D) \\
\downarrow g & \longmapsto & \downarrow G(g) \\
D' & & G(D')
\end{array}$$

FIGURA 26. Definició del functor G .

$$\begin{array}{ccc}
F(G(D)) & \xrightarrow{\varepsilon^D} & D \\
\downarrow F(G(\text{id}_D)) & & \downarrow \text{id}_D \\
F(G(D)) & \xrightarrow{\varepsilon^D} & D
\end{array}
\quad \circlearrowleft$$

FIGURA 27. Diagrama de naturalitat d' ε .

Com ja vam vore en l'anterior implicació d'aquesta demostració, a l'apartat (2.39), repetint el raonament arribem a que $F(G(\text{id}_D)) = F(\text{id}_{G(D)})$. Com que F és fidel, ja tenim que $G(\text{id}_D) = \text{id}_{G(D)}$.

Preserva la composició: Siguen $h: D \rightarrow D'$ i $h': D' \rightarrow D''$ dos morfismes en D . Considerem $F(G(h') \circ G(h)): F(G(D)) \rightarrow F(G(D''))$ i $F(G(h' \circ h)): F(G(D)) \rightarrow F(G(D''))$ en D i notem que el diagrama de la Figura (28) commuta.

$$\begin{array}{ccc}
F(G(D)) & \xrightarrow{\varepsilon^D} & D \\
\downarrow F(G(h') \circ G(h)) & & \downarrow h' \circ h \\
F(G(D'')) & \xrightarrow{\varepsilon^{D''}} & D''
\end{array}
\quad \circlearrowleft$$

FIGURA 28. Diagrama de naturalitat d' ε .

Igual que abans, arribem a que $F(G(h') \circ G(h)) = F(G(h' \circ h))$. Com que F és fidel, ja tenim que $G(h') \circ G(h) = G(h' \circ h)$.

Així, queda demostrat que G és un functor, només cal definir ara l'isomorfisme natural corresponent.

Definició dels isomorfismes naturals: Ja havíem dit que ε era un d'ells per construcció, ara tractem de definir $\eta: \text{Id}^C \cong G \circ F$. Com F és ple i fidel, definim η a partir de les seues components $\eta^X: X \rightarrow G(F(X))$, i gràcies a la Proposició (2.27), especificant només isomorfismes $F \circ \eta^X: F(X) \rightarrow F(G(F(X)))$. Definim $F \circ \eta^X = (\varepsilon^{F(X)})^{-1}$.

Per a tot morfisme $f: X \rightarrow Y$ en $\mathbf{C}$, el diagrama de la Figura (29) commuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow{F \circ \eta^X} & F(G(F(X))) & \xrightarrow{\varepsilon^{F(X)}} & F(X) \\
 \downarrow F(f) & & \downarrow F(G(F(f))) & & \downarrow F(f) \\
 F(Y) & \xrightarrow{F \circ \eta^Y} & F(G(F(Y))) & \xrightarrow{\varepsilon^{F(Y)}} & F(Y)
 \end{array}$$

FIGURA 29. Functor F ple i fidel.

En efecte, el diagrama commuta gràcies a que el quadrat de la dreta commuta per la naturalitat de ε , i el de l'esquerra perquè $\varepsilon^{F(X)}$ és un isomorfisme.

Així, com F és fidel, es dona que $\eta^Y \circ f = G(F(f)) \circ \eta^X$. Per tant, per definició, η és una transformació natural amb components donades per isomorfismes, és a dir, és un isomorfisme natural. Concloem que $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ defineix una equivalència de categories. $\square$

Anem a veure que, donades unes categories, aplicar aquesta caracterització potser resulta més senzill que aplicar la definició de categories equivalents.

EXEMPLE 2.40. Siguen les categories $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$, la categoria de les matrius amb entrades en el cos $\mathbb{K}$; $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{fd}}$, la categoria dels $\mathbb{K}$ -espais vectorials de dimensió finita; i per últim, $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{basis}}$, la categoria de les bases dels $\mathbb{K}$ -espais vectorials de dimensió finita. Ens preguntem si aquestes categories són equivalents, ja que sabem que algebraicament estan força relacionades. Doncs emprant la caracterització, és molt senzill veure que, efectivament, aquestes categories sí són equivalents. Tanmateix, comprovar-ho amb la definició és molt més costós. Es pot trobar la demostració en [Rie16].

5. 2-categories

Hem vist que les categories estan formades per objectes i morfismes. Posteriorment, hem estudiat un pas més enllà, com relacionar dues categories mitjançant els functors, fins arribar a com es relacionaven aquests, amb les transformacions naturals. Ara, és moment d'introduir una abstracció més, com un tipus superior de categories. Ens referim a les **2-categories**, on les relacions són de 2 natures distintes, una que relaciona objectes (functors) i altra que relaciona morfismes (transformacions naturals).

Ens podem preguntar com es componen les transformacions naturals, i la resposta és que ja no és similar amb els functors. Apareixen

dos tipus de composició, la *composició vertical*, amb objectes de nivell 1, és a dir, functors; i la *composició horitzontal*, amb objectes de nivell 0, és a dir, objectes de categories. Ho definim formalment i ho visualitzem amb diagrames.

DEFINICIÓ 2.41 (Composició vertical). Siguen $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ dues categories, siguen $F, G, H: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ functors i siguen dues transformacions naturals $\alpha: F \Rightarrow G$ i $\beta: G \Rightarrow H$. La **composició vertical** d' α i β , denotada per $\beta \circ \alpha: F \Rightarrow H$, és una transformació natural que ve definida per

$$\begin{aligned}\beta \circ \alpha &= ((\beta \circ \alpha)^X)_{X \in \text{Obj}(\mathbf{C})} \\ &= (\beta^X \circ \alpha^X)_{X \in \text{Obj}(\mathbf{C})}.\end{aligned}$$

És a dir, per a un objecte X en $\mathbf{C}$, la component X de la transformació natural $\beta \circ \alpha$, és a dir $(\beta \circ \alpha)^X$, ve donada per la composició de les respectives components X de β i α , és a dir, $\beta^X \circ \alpha^X$.

Ho visualitzem primer en la Figura (30) i en la Figura (31) i després vegem que està ben definida la composició vertical $\beta \circ \alpha$.

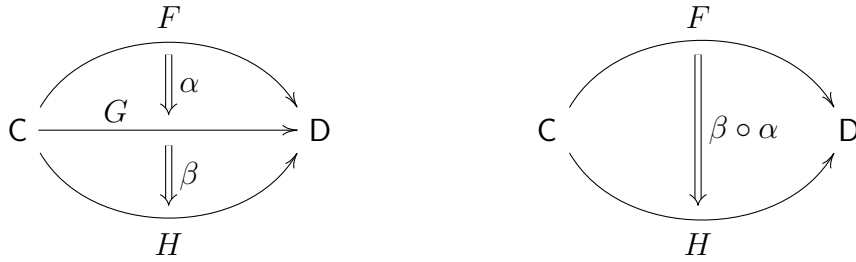


FIGURA 30. A l'esquerra, dues transformacions naturals i a la dreta, la composició vertical d'aquestes.

Sabem que la transformació natural $\beta \circ \alpha$ està ben definida perquè el diagrama de la Figura (31) commuta, ja que per dins commuta en ser β i α dues transformacions naturals. Ho comprovem.

$$\begin{aligned}H(f) \circ (\beta^X \circ \alpha^X) &= (H(f) \circ \beta^X) \circ \alpha^X && \text{(associativitat)} \\ &= (\beta^Y \circ G(f)) \circ \alpha^X && (\beta \text{ trans. nat.}) \\ &= \beta^Y \circ (G(f) \circ \alpha^X) && \text{(associativitat)} \\ &= \beta^Y \circ (\alpha^Y \circ F(f)) && (\alpha \text{ trans. nat.}) \\ &= (\beta^Y \circ \alpha^Y) \circ F(f). && \text{(associativitat)}\end{aligned}$$

Ja tenim que la composició vertical de dues transformacions naturals és transformació natural. Seguidament, presentem la composició horitzontal de transformacions naturals.

DEFINICIÓ 2.42 (Composició horitzontal). Siguen $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ tres categories, $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, $H, K: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ functors i dues transformacions

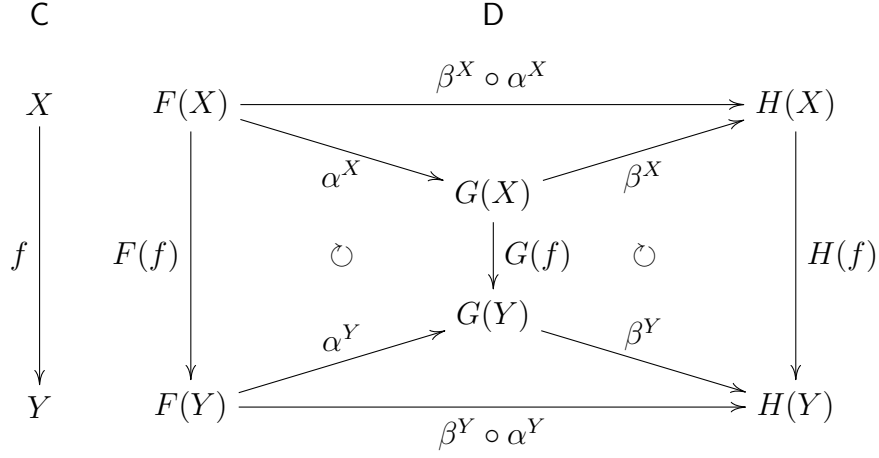


FIGURA 31. Diagrama de naturalitat de la composició vertical.

naturals $\alpha: F \Rightarrow G$ i $\beta: H \Rightarrow K$. La **composició horitzontal**, denotada per $\beta \star \alpha: H \circ F \Rightarrow J \circ G$, és una transformació natural que ve definida per

$$\begin{aligned}\beta \star \alpha &= ((\beta \star \alpha)^X)_{X \in \text{Obj}(\mathcal{C})} \\ &= (\beta^{G(X)} \circ H(\alpha^X))_{X \in \text{Obj}(\mathcal{C})}.\end{aligned}$$

És a dir, per a un objecte X en $\mathcal{C}$, la component X de la transformació natural $\beta \star \alpha$, és a dir $(\beta \star \alpha)^X$, ve donada per la composició de la component $G(X)$ de β i de la component X de α mitjançant el functor H , és a dir, $\beta^{G(X)} \circ H(\alpha^X)$.

Igual que abans, ho visualitzem primer en la Figura (32) i en la Figura (33) i després vegem que està ben definida la composició horitzontal $\beta \star \alpha$.

Sabem que la transformació natural $\beta \star \alpha$ està ben definida perquè el diagrama de la Figura (33) commuta, ja que per dins commuta en ser β i α dues transformacions naturals. Ho comprovem.

$$\begin{aligned}K(G(f)) \circ (\beta^{G(X)} \circ H(\alpha^X)) &= \\ &= (K(G(f)) \circ \beta^{G(X)}) \circ H(\alpha^X) && \text{(associativitat)} \\ &= (\beta^{G(Y)} \circ H(G(f))) \circ H(\alpha^X) && (\beta \text{ trans. nat.}) \\ &= \beta^{G(Y)} \circ (H(G(f)) \circ H(\alpha^X)) && \text{(associativitat)} \\ &= \beta^{G(Y)} \circ (H(G(f) \circ \alpha^X)) && (H \text{ functor}) \\ &= \beta^{G(Y)} \circ (H(\alpha^Y \circ F(f))) && (\alpha \text{ trans. nat.}) \\ &= \beta^{G(Y)} \circ (H(\alpha^Y) \circ H(F(f))) && (H \text{ functor}) \\ &= (\beta^{G(Y)} \circ H(\alpha^Y)) \circ H(F(f)). && \text{(associativitat)}\end{aligned}$$

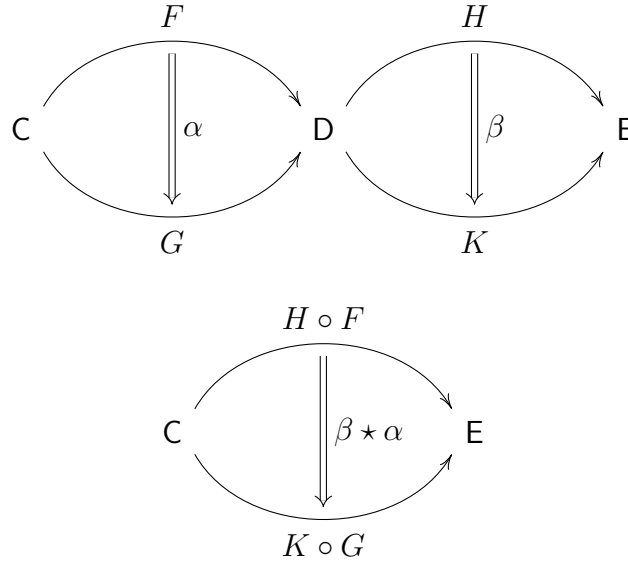


FIGURA 32. Dalt, dues transformacions naturals i baix, la composició horitzontal d'aquestes.

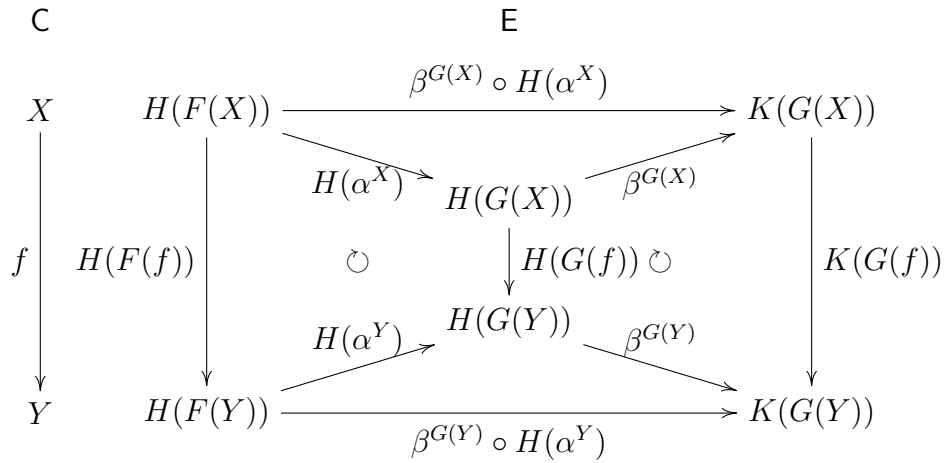


FIGURA 33. Diagrama de naturalitat de la composició horitzontal.

DEFINICIÓ 2.43 (Categoria de functors). Donades dues categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, definim la **categoria de functors** de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$, denotada per $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, com la categoria que té per objectes functors de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ i per morfismes transformacions naturals, amb la composició vertical.

Per últim, ara que tenim definits dos tipus de composició, és interessant buscar quina relació hi ha entre aquestes. La resposta ens la proporciona la **Llei d'intercanvi**, o també anomenada *Llei de Godement*.

PROPOSICIÓ 2.44 (Llei d'intercanvi). *Siguen les categories $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$, els functors F, G i H de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ i els functors I, J i K de $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$. Siguen també les transformacions naturals α , de F en G , β de G en H , γ de I en J i δ de J en K . És a dir, tenim la situació de la Figura (34).*

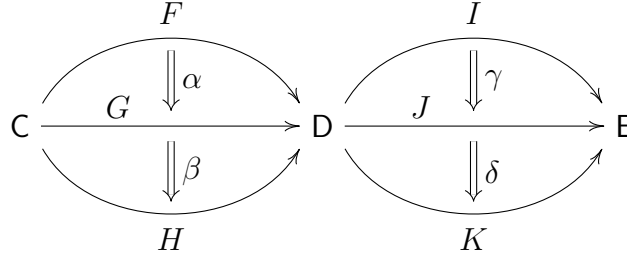


FIGURA 34. Llei d'intercanvi.

Aleshores, es verifica que:

$$(\delta \circ \gamma) \star (\beta \circ \alpha) = (\delta \star \beta) \circ (\gamma \star \alpha).$$

DEMOSTRACIÓ. Anem a fer una demostració similar a la de [Spi14], fent cada composició per separat i comprovant que arribem al mateix lloc.

Anem a fer primer la primera part de la igualtat, fem les composicions verticals $\beta \circ \alpha$ i $\delta \circ \gamma$. Donat qualsevol morfisme $f: X \rightarrow Y$ en $\mathbf{C}$ i qualsevol $g: A \rightarrow B$ en $\mathbf{D}$ ens trobem en la situació de la Figura (35).

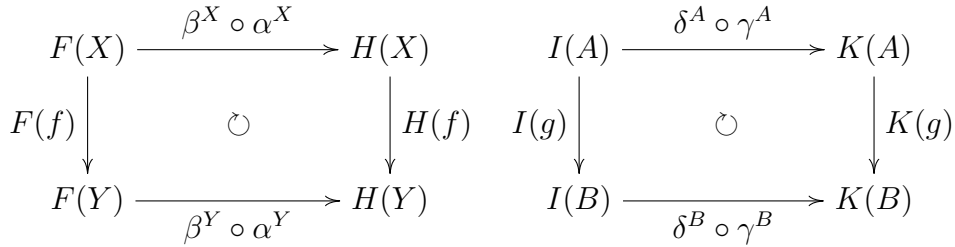


FIGURA 35. Composicions verticals $\beta \circ \alpha$ i $\delta \circ \gamma$.

Amb açò, notem que podem compondre horitzontalment, ja que ens trobem en la situació de la Figura (36).

Composant horitzontalment, obtenim el diagrama commutatiu de la Figura (37).

Ara, construïm la part de la dreta de la igualtat que enuncia la Llei d'intercanvi per a veure que obtenim el mateix diagrama. Anem a compondre horitzontalment $\delta \star \beta$ i $\gamma \star \alpha$, ho veiem en la Figura (38).

Amb açò, notem que podem compondre verticalment, ja que ens trobem en la situació de la Figura (39).

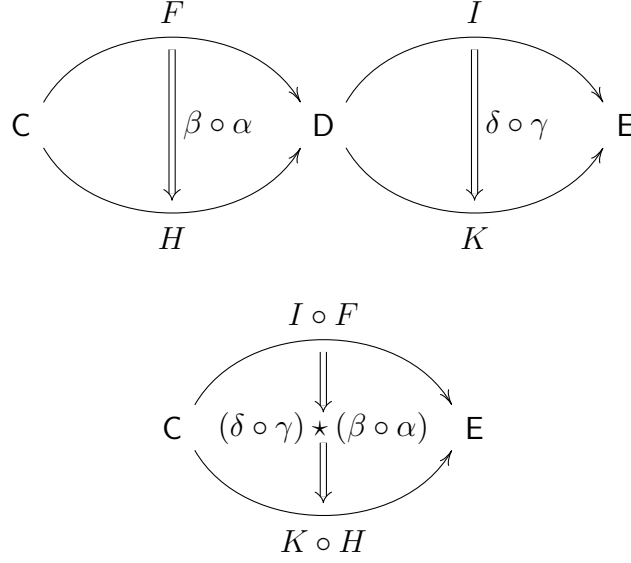


FIGURA 36. Composició horitzontal $(\delta \circ \gamma) \star (\beta \circ \alpha)$.

$$\begin{array}{ccc}
 I(F(X)) & \xrightarrow{(\delta \circ \gamma)^{H(X)} \star I((\beta \circ \alpha)^X)} & K(H(X)) \\
 I(F(f)) \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow K(H(f)) \\
 I(F(Y)) & \xrightarrow{(\delta \circ \gamma)^{H(Y)} \star I((\beta \circ \alpha)^Y)} & K(H(Y))
 \end{array}$$

FIGURA 37. Diagrama de naturalitat de la composició horitzontal $(\delta \circ \gamma) \star (\beta \circ \alpha)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 C & & E & & E \\
 X & \xrightarrow{I(F(X)) \gamma^{G(X)} \circ I(\alpha^X)} & J(G(X)) & \xrightarrow{J(G(X)) \delta^{H(X)} \circ J(\beta^X)} & K(H(X)) \\
 f \downarrow & \downarrow I(F(f)) & \downarrow J(G(f)) & \downarrow J(G(f)) & \downarrow K(H(f)) \\
 Y & \xrightarrow{I(F(Y)) \gamma^{G(Y)} \circ I(\alpha^Y)} & J(G(Y)) & \xrightarrow{J(G(Y)) \delta^{H(Y)} \circ J(\beta^Y)} & K(H(Y))
 \end{array}$$

FIGURA 38. Composicions horitzontals $\delta \star \beta$ i $\gamma \star \alpha$.

Composant verticalment, obtenim el diagrama commutatiu de la Figura (40).

Açò ens diu que ambdues composicions de les transformacions naturals ens duen a la mateixa gràfica commutativa. Amb això, hem

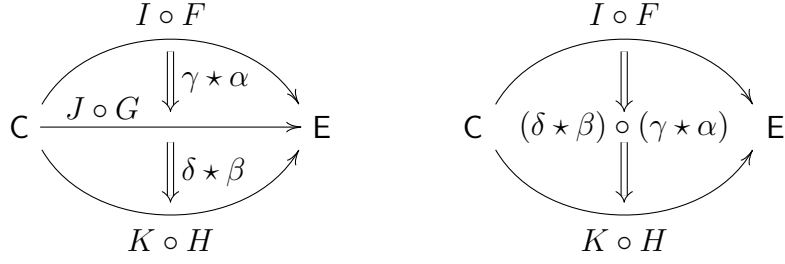


FIGURA 39. Composició vertical $(\delta \star \beta) \circ (\gamma \star \alpha)$.

$$\begin{array}{ccc}
 I(F(X)) & \xrightarrow{(\gamma^{G(X)} \circ I(\alpha^X)) \circ (\delta^{H(X)} \circ J(\beta^X))} & K(H(X)) \\
 \downarrow I(F(f)) & \circlearrowleft & \downarrow K(H(f)) \\
 I(F(Y)) & \xrightarrow{(\gamma^{G(Y)} \circ I(\alpha^Y)) \circ (\delta^{H(Y)} \circ J(\beta^Y))} & K(H(Y))
 \end{array}$$

FIGURA 40. Diagrama de naturalitat de la composició vertical $(\delta \star \beta) \circ (\gamma \star \alpha)$.

arribat a que les composicions

$$(\delta \circ \gamma) \star (\beta \circ \alpha) = (\delta \circ \gamma)^{H(Y)} \star I((\beta \circ \alpha)^Y), \quad X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$$

$$(\delta \star \beta) \circ (\gamma \star \alpha) = (\gamma^{G(X)} \circ I(\alpha^X)) \circ (\delta^{H(X)} \circ J(\beta^X)), \quad X \in \text{Obj}(\mathbf{C}).$$

Açò conclou la demostració. $\square$

Lema de Yoneda

En aquest capítol utilitzarem les definicions i resultats vist en l'anterior capítol i introduïrem altres conceptes nous, amb l'objectiu d'arribar a estudiar els límits i els colímits. Vorem un resultat fonamental de la Teoria de Categories, el *Lema de Yoneda*, que dona nom a aquest capítol, i altres conceptes primordials com els functors representables (Definició 3.8) i la propietat universal (Definició 3.16).

1. Functors representables

DEFINICIÓ 3.1 (Objectes inicials i finals). Siga $\mathbf{C}$ una categoria i siga C un objecte en $\mathbf{C}$,

- Direm que C és **inicial** si, per a tot altre objecte X en $\mathbf{C}$, existeix un únic morfisme $f: C \rightarrow X$ en $\mathbf{C}$.
- Direm que C és **final** o *terminal* si, per a tot altre objecte X en $\mathbf{C}$, existeix un únic morfisme $f: X \rightarrow C$ en $\mathbf{C}$.

NOTA 3.2. *Notem que els conceptes d'objecte inicial i final són duals. O siga, si C és final en $\mathbf{C}$, aleshores C és objecte inicial en $\mathbf{C}^{\text{op}}$ i a l'inrevés.*

Ara, vegem alguns exemples d'objectes inicials i finals.

EXEMPLE 3.3 (**Type**). Recordem la categoria **Type** de l'Exemple (2.6). Estudiem si té objectes inicials, finals, o cap d'ells. Observem que *Empty* és inicial en **Type**, ja que per a tot altre tipus X en **Type**, només podem definir l'aplicació nul·la:

$$\text{Empty}: \text{Empty} \rightarrow X.$$

I d'igual forma, *Unit* és final en **Type**, ja que per a tot tipus objecte X en **Type**, només podem definir l'aplicació d'aquesta forma:

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \text{Unit} \\ x &\mapsto \text{Unit}. \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.4 (**Set**). Notem que l'anterior exemple té molt de paral·lisme amb la categoria de conjunts, ja que el buit, $\emptyset$ també és inicial en **Set** i qualsevol singleton, $\{*\}$, és final en **Set**, per les mateixes raons.

Els objectes inicials i terminals formen la primera base per a comprendre les propietats universals, que vorem més avant, ja que introdueixen també el concepte de functors representables. Vegem primer una

caracterització d'aquests conceptes utilitzant els functors de representació, covariants i contravariants, vists en la Definició (2.28).

PROPOSICIÓ 3.5 (Caracterització d'objectes inicials i finals). *Per a una categoria $\mathcal{C}$ i un objecte C en $\mathcal{C}$, tenim que:*

- (1) C és **inicial** si, i només si, el functor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -): \mathcal{C} \longrightarrow \text{Set}$ és naturalment isomorf al functor constant $*$ covariant de la Figura(1), a l'esquerra.
- (2) C és **final** si, i només si, el functor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C): \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}$ és naturalment isomorf al functor constant $*$ contravariant de la Figura(1), a la dreta.

$$\begin{array}{ccc}
 *: \mathcal{C} & \longrightarrow & \text{Set} \\
 \begin{array}{ccc}
 X & & \{*\} \\
 f \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \text{id}_{\{*\}} \\
 Y & & \{*\}
 \end{array} & &
 \begin{array}{ccc}
 *: \mathcal{C}^{\text{op}} & \longrightarrow & \text{Set} \\
 \begin{array}{ccc}
 X & & \{*\} \\
 f \downarrow & \dashrightarrow & \uparrow \text{id}_{\{*\}} \\
 Y & & \{*\}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

FIGURA 1. Functors constants $*$, a l'esquerra el covariant, i a la dreta, el contravariant.

El functor $$ envia cada objecte en $\mathcal{C}$ en un singleton en Set .*

La demostració d'aquesta proposició és conseqüència directa de les definicions.

A més, la característica de ser un functor ple i fidel permet preservar, crear i reflexar moltes propietats. En particular, estudiem com es relacionen amb els objectes inicials i finals.

PROPOSICIÓ 3.6. *Un functor ple i fidel reflexa objectes inicials i finals.*

DEMOSTRACIÓ. Recordem la Definició (2.37). Considerem $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor ple i fidel, i siga Z un objecte en $\mathcal{C}$, de forma que $F(Z)$ és final en $\mathcal{D}$. Volem vore que Z és final en $\mathcal{C}$.

Siga X un altre objecte en $\mathcal{C}$, aleshores $F(X)$ és objecte en $\mathcal{D}$, i com $F(Z)$ és final, existeix un únic morfisme $f_{F(X)}: F(X) \longrightarrow F(Z)$ morfisme en $\mathcal{D}$. Com que F és ple, existeix un morfisme $f_X: X \longrightarrow Z$ en $\mathcal{C}$, de forma que $F(f_X) = f_{F(X)}$.

Per a demostrar la unicitat, considerem $g: X \longrightarrow Z$ un altre morfisme en $\mathcal{C}$. Apliquem F sobre g , i obtenim el morfisme $F(g): F(X) \longrightarrow F(Z)$ en $\mathcal{D}$, però com que $F(Z)$ és un objecte final, $F(g) = F(f_X)$. I com F és fidel, ja tenim que $g = f_X$. La demostració per a objectes inicials és anàloga per dualitat. $\square$

Una vegada ja hem vist aquestes definicions, sembla intuïtiu que la relació entre dos objectes inicials, respectivament finals, d'una mateixa categoria ha de ser forta. En efecte, donats dos objectes inicials (finals), en una categoria seran únics tret d'isomorfisme únic.

PROPOSICIÓ 3.7. *Els objectes inicials, respectivament finals, en una categoria $\mathcal{C}$ són únics tret d'isomorfisme únic.*

DEMOSTRACIÓ. Siguen C i C' dos objectes inicials en la categoria $\mathcal{C}$. Com C és inicial, existeix un únic morfisme $f: C \rightarrow C'$ en $\mathcal{C}$. D'igual forma, com C' és inicial, existeix un únic morfisme $g: C' \rightarrow C$ en $\mathcal{C}$.

Notem que la composició $g \circ f: C \rightarrow C$ és un morfisme en $\mathcal{C}$, i com C és un objecte inicial, només pot existir un morfisme de C en C , aleshores $g \circ f = \text{id}_C$. Raonant de la mateixa forma, arribem a que $f \circ g = \text{id}_{C'}$. Per tant, C i C' són isomorfs. La demostració per a objectes finals és anàloga. $\square$

Ja havíem introduït el concepte de functor de representació en la Definició (2.28), que relaciona una categoria localment xicoteta arbitrària amb la categoria dels conjunts. Ara, volem introduir un concepte un poc més general, que és el de functor representable, que és un functor qualsevol F amb codomini en **Set**, de tal forma que és naturalment isomorf a un functor de representació. L'avantatge d'estudiar aquests functors és que ens permeten implementar tot allò que coneguem de la categoria **Set** en altres categories.

DEFINICIÓ 3.8 (Functor representable). Siga $\mathcal{C}$ una categoria localment xicoteta. Un functor covariant $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, s'anomena **representable** si existeix un objecte C de $\mathcal{C}$ i un isomorfisme natural de F a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$. Anàlogament, un functor contravariant $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, s'anomena **representable** si existeix un objecte C de $\mathcal{C}$ i un isomorfisme natural de F a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, C)$.

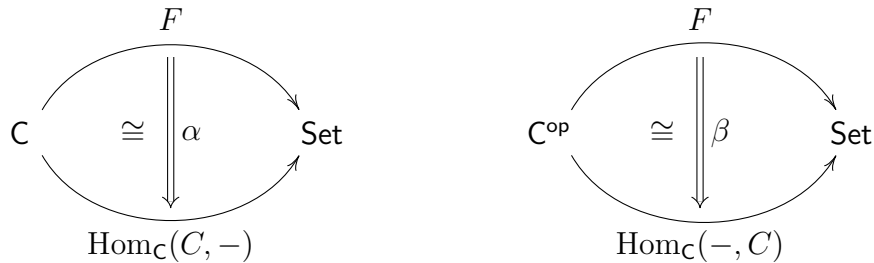


FIGURA 2. Functors representables, a l'esquerra el functor covariant i a la dreta, el contravariant.

Vegem a continuació un exemple de functor representable.

EXEMPLE 3.9 (Monoide lliure). Siga X un conjunt. Denotem per X^* el conjunt de totes les paraules de longitud n sobre X , o siga, les aplicacions d'alguna $n \in \mathbb{N}$ en X . Per exemple, si X és un conjunt de tres lletres, $X = \{a, b, c\}$, aleshores la paraula abb representa la següent aplicació:

$$\begin{aligned} abb: \quad 3 &\longrightarrow X \\ 0 &\longmapsto a \\ 1 &\longmapsto b \\ 2 &\longmapsto b. \end{aligned}$$

Ara, considerant totes les aplicacions de $n \in \mathbb{N}$ en X com $\text{Hom}(n, X)$, podem redefinir el conjunt

$$X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(n, X).$$

En X^* existeix la paraula buida, denotada per λ , que és l'única aplicació de $0 = \emptyset$ en X , o siga, l'única paraula de longitud 0.

Ara, donats $v, w \in X$ dos paraules de longitud m i n , respectivament, podem efectuar l'operació binària de *concatenació*, de forma que vw té longitud $m + n$, i la definim:

$$\begin{aligned} vw: \quad m + n &\longrightarrow X \\ j &\longmapsto \begin{cases} v(j) & \text{si } j \in [0, m - 1]; \\ w(j - m) & \text{si } j \in [m, m + n - 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Aleshores, $\mathbf{X}^* = (X^*, \cdot, \lambda)$ defineix un monoide no commutatiu, anomenat **monoide lliure generat per X** . Aquest monoide té la següent propietat universal.

Per a tot monoide $\mathbf{M} = (M, \cdot, 1)$, i tota aplicació $f: X \longrightarrow M$, existeix un únic homomorfisme de monoides $f^\sharp: \mathbf{X}^* \longrightarrow \mathbf{M}$, de forma que $f^\sharp \circ \text{in}_X = f$, on in_X és la inclusió canònica de X en X^* , que a cada lletra de X li assignem la paraula corresponent de longitud 1, és a dir, tenim les aplicacions, següents. Per a cada x en X , definim

$$\begin{aligned} (x): \quad 1 &\longrightarrow X & \text{in}_X: \quad X &\longrightarrow X^* \\ 0 &\longmapsto x. & x &\longmapsto (x). \end{aligned}$$

Així, l'homomorfisme de monoides $f^\sharp$ ve donat per

$$\begin{aligned} f^\sharp: \quad \mathbf{X}^* &\longrightarrow \mathbf{M} \\ (w_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longmapsto \prod_{i \in \mathbb{N}} w_i. \end{aligned}$$

Amb tot el que hem vist, podem considerar un **functor d'oblit**, entre la categoria **Mon**, amb objectes monoides i morfismes els homomorfismes de monoides, i la categoria **Set**. És a dir, el functor de la Figura (3).

Volem vore que U és **representable**. Per a demostrar-ho, anem a prendre $X = 1$, de forma que notem que el monoide lliure associat a X és $\mathbf{X}^* \cong \mathbb{N}$ en **Mon**. Establim un isomorfisme natural entre U i

$$\begin{array}{ccc}
U: \mathbf{Mon} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
\\
\begin{array}{ccc}
\mathbf{M} & & M \\
\downarrow f & \longmapsto & \downarrow f \\
\mathbf{N} & & N
\end{array}
\end{array}$$

FIGURA 3. Functor d'oblit sobre la categoria de monoides.

$\text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbb{N}, -)$. És a dir, busquem trobar α de forma que verifiqui el diagrama de la Figura (4).

$$\begin{array}{ccc}
& U & \\
\text{Mon} & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & \text{Set} \\
& \text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbb{N}, -) &
\end{array}$$

FIGURA 4. Isomorfisme natural entre U i $\text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbb{N}, -)$.

Anem a definir la transformació natural $\alpha = (\alpha^{\mathbf{M}})_{\mathbf{M} \in \mathbf{Mon}}$ com segueix. Siga un monoide $\mathbf{M} = (M, \cdot, 1)$ i siga $m \in M$ un element. Considerem l'aplicació constant a M ,

$$\begin{array}{ccc}
k_m: & 1 & \longrightarrow M \\
& 0 & \longmapsto m.
\end{array}$$

Per la propietat universal del monoide lliure $\mathbb{N}$, existeix un únic homomorfisme de monoides $k_m^\sharp: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{M}$ tal que $k_m^\sharp \circ \text{in}_1 = k_m$, notem que

$$\begin{array}{ccc}
k_m^\sharp: & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbf{M} \\
& n & \longmapsto m^n.
\end{array}$$

Prenem $\alpha = (\alpha^{\mathbf{M}})_{\mathbf{M} \in \mathbf{Mon}}$ de forma que,

$$\begin{array}{ccc}
\alpha^{\mathbf{M}}: & M & \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathbb{N}, \mathbf{M}) \\
& m & \longmapsto k_m^\sharp.
\end{array}$$

Notem que per a cada monoide $\mathbf{M}$ en $\mathbf{Mon}$, l'aplicació $\alpha^{\mathbf{M}}$ és bijectiva.

- $\alpha^{\mathbf{M}}$ és sobrejectiva, ja que tots els homomorfismes de monoides d' $\mathbb{N}$ en $\mathbf{M}$ estan completament determinats per la imatge de l'1.

- $\alpha^{\mathbf{M}}$ és injectiva, perquè donats dos elements m i m' de M , si

$$\begin{aligned}\alpha^{\mathbf{M}}(m) &= \alpha^{\mathbf{M}}(m') \\ \Downarrow & \quad \Downarrow \\ k_m^\# &= k_{m'}^\#\end{aligned}$$

aleshores, $m = k_m^\#(1) = k_{m'}^\#(1) = m'$.

A més, per a qualsevol homomorfisme de monoides $f: \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$, el diagrama de la Figura (5) commuta.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mon} & & \text{Set} & & \\ \mathbf{M} & M & \xrightarrow{\alpha^{\mathbf{M}}} & \text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{N}, \mathbf{M}) & \\ f \downarrow & f \downarrow & \circlearrowright & \downarrow f_* & \\ \mathbf{N} & N & \xrightarrow{\alpha^{\mathbf{N}}} & \text{Hom}_{\text{Mon}}(\mathbb{N}, \mathbf{N}) & \end{array}$$

FIGURA 5. Transformació natural identitat i el seu diagrama de naturalitat.

Per a vore que, efectivament, el diagrama commuta, siga $m \in M$, aleshores,

$$\begin{aligned}\alpha^{\mathbf{N}}(f(m)) &= k_{f(m)}^\# \\ &= f_*(k_m^\#) && \text{(homomorfisme)} \\ &= f_*(\alpha^{\mathbf{M}}(m)).\end{aligned}$$

I amb açò, queda demostrat que el functor d'oblit $U: \text{Mon} \longrightarrow \text{Set}$ és representable.

Anem a donar altres exemples de functors representables covariants i contravariants. No obstant, no ens extendrem tant com en l'anterior exemple, per a major detalls cal consultar [Rie16].

EXAMPLE 3.10 (Functors representables covariants). El functor d'oblit $U: \text{Group} \longrightarrow \text{Set}$ ve representat pel grup $\mathbb{Z}$, és a dir, és un functor covariant representable. Altre exemple és el functor $ob: \text{Cat} \longrightarrow \text{Set}$ que envia una categoria xicoteta al seu conjunt d'objectes, ve representat per la categoria $\mathbb{1}$ (un functor $\mathbb{1} \longrightarrow C$ només l'elecció d'un objecte en C), és a dir, és un functor covariant representable.

EXAMPLE 3.11 (Functors representables contravariants). El functor $\mathcal{O}: \text{Top}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}$, que envia un espai topològic al seu conjunt de subconjunts oberts, ve representat per l'espai de Sierpinski S (espai topològic amb dos punts, un obert i l'altre tancat), és a dir, és un functor contravariant representable. Altre exemple és el functor

$U(-)^*: \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$, que envia un espai vectorial al conjunt de vectors en el seu espai dual, ve representat per l'espai vectorial $\mathbb{K}$, és a dir, és un functor contravariant representable.

2. Lema de Yoneda

En aquesta secció, anem a estudiar un dels resultats fonamentals en la teoria de categories i en la búsqueda de límits i colímits categorials, que és el lema de Yoneda. Cal tindre presents les Definicions (2.28) i (3.8).

NOTA 3.12. *En aquest apartat, farem un canvi de notació per fer més còmoda la lectura. Denotarem $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(C, -)$ per $\mathbf{C}(C, -)$, ja que utilitzarem Hom en el lema de Yoneda per a referir-nos a les transformacions naturals, i podríem utilitzar la notació que hem emprant fins ara perquè és correcta, però seria menys lleuger de llegir.*

Aquest resultat és rellevant perquè ens diu on trobar les transformacions naturals que ens interessin. Ens diu que, per a un functor $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ i un objecte X de $\mathbf{C}$, les transformacions naturals entre el functor de representació $\mathbf{C}(X, -)$ i F es troben en correspondència bijectiva amb els objectes del conjunt $F(X)$. Anem a veure primer la versió covariant.

TEOREMA 3.13 (Lema de Yoneda). *Siga $\mathbf{C}$ una categoria localment xicoteta i $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ un functor covariant. Aleshores, per a tot objecte X de $\mathbf{C}$ existeix una bijecció*

$$\text{Hom}(\mathbf{C}(X, -), F) \cong F(X)$$

que a una transformació natural $\alpha: \mathbf{C}(X, -) \Longrightarrow F$ li associa l'element $\alpha^X(\text{id}_X)$ en $F(X)$. Aquesta correspondència és natural tant en X com en F .

DEMOSTRACIÓ. Com que $\mathbf{C}$ és localment xicoteta, podem considerar la següent aplicació entre conjunts:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y}: & \text{Hom}(\mathbf{C}(X, -), F) & \longrightarrow F(X) \\ & \alpha & \longmapsto \alpha^X(\text{id}_X), \end{array}$$

de forma que α és una transformació natural amb domini $\mathbf{C}(X, -)$ i codomini F , com es mostra en la Figura (6).¹

I pel fet de ser transformació natural, fa commutar el diagrama de la Figura (7).

En primer lloc, volem provar que $\mathfrak{Y}$ és **bijectiva**. El nostre objectiu és definir una aplicació inversa $\Psi: F(X) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbf{C}(X, -), F)$. Aquesta aplicació assigna a un element W del conjunt $F(X)$ una transformació natural $\Psi(W) = (\Psi(W)^A)_{A \in \text{Obj}(\mathbf{C})}$, de forma que, per a cada

¹Hem emprat $\mathfrak{Y}$, que és el caràcter “yo” de l'alfabet japonés hiragana, en honor a Yoneda.

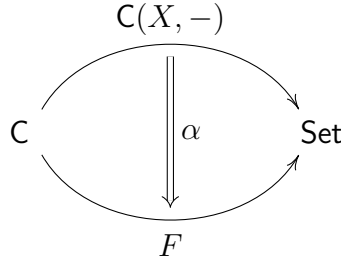


FIGURA 6. Transformació natural α .

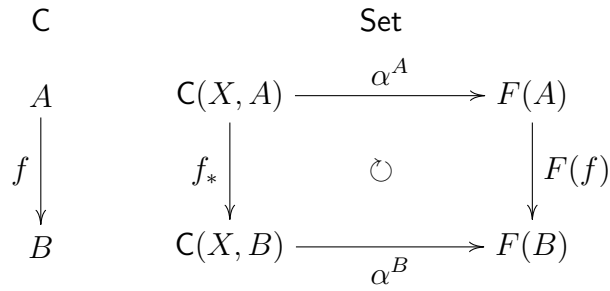


FIGURA 7. Diagrama de naturalitat d' α .

objecte A en la categoria $\mathbf{C}$, la component $\Psi(W)^A: \mathbf{C}(X, A) \longrightarrow F(A)$ faça que el diagrama de la Figura (8) commute.

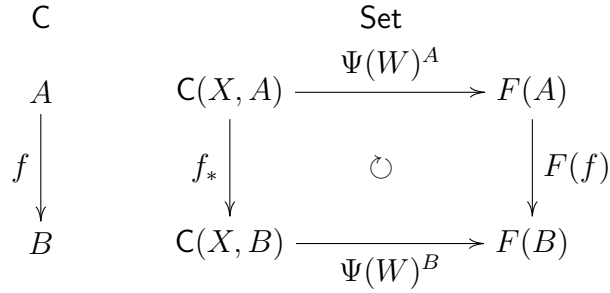


FIGURA 8. Diagrama de naturalitat de la transformació natural Ψ .

Considerem la situació particular de la Figura (9).

Està clar que $\text{id}_X \in \mathbf{C}(X, X)$, i a més a més, la seua imatge per la composició de la banda inferior-esquerra ve donada per:

$$\Psi(W)^D(f_*(\text{id}_X)) = \Psi(W)^D(f).$$

Mentre que la composició de la banda superior-dreta ve donada per

$$F(f)(\Psi(W)^D(\text{id}_X)).$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Set} & & \\
& & \Psi(W)^X & & \\
\text{C} & & & & \\
X & \xrightarrow{\quad} & \text{C}(X, X) & \xrightarrow{\quad} & F(X) \\
\downarrow f & & \downarrow f_* & \circlearrowleft & \downarrow F(f) \\
D & \xrightarrow{\quad} & \text{C}(X, D) & \xrightarrow{\quad} & F(D) \\
& & \Psi(W)^D & &
\end{array}$$

FIGURA 9. Diagrama de naturalitat de la transformació natural Ψ .

Notem que, per a que Ψ siga l'aplicació inversa de $\mathfrak{L}$, ha d'ocórrer que $\Psi(W)^X(\text{id}_X) = W$. Açò ens força naturalment a definir

$$\Psi(W)^D(f) = F(f)(W).$$

Per tant, ja tenim definida cada component de $\Psi(W)$, només ens queda vore la seua naturalitat. És a dir que, donat un morfisme arbitrari $f: A \longrightarrow B$ en C , el diagrama de la Figura (10) commuta.

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Set} & & \\
& & \Psi(W)^A & & \\
\text{C} & & & & \\
A & \xrightarrow{\quad} & \text{C}(X, A) & \xrightarrow{\quad} & F(A) \\
\downarrow f & & \downarrow f_* & & \downarrow F(f) \\
B & \xrightarrow{\quad} & \text{C}(X, B) & \xrightarrow{\quad} & F(B) \\
& & \Psi(W)^B & &
\end{array}$$

FIGURA 10. Diagrama de naturalitat de Ψ .

Ho comprovem. Siga $g \in \text{C}(X, A)$, és a dir, un morfisme en C de la forma $g: X \longrightarrow A$. Per la banda inferior-esquerra, tenim:

$$\begin{aligned}
\Psi(W)^B(f_*(g)) &= \Psi(W)^B(f \circ g) && \text{(definició } f_*) \\
&= F(f \circ g)(W) && \text{(definició } \Psi(W)^B) \\
&= F(F)(F(g)(W)). && \text{(F és functor)}
\end{aligned}$$

Per la banda superior-dreta:

$$F(f)(\Psi(W)^A(g)) = F(f)(F(g)(W)). \quad \text{(definició } \Psi(W)^A)$$

Per tant, es verifica que el diagrama commuta. Ja tenim que $\Psi(W)$ és una transformació natural de $\text{C}(X, -)$ a F . Ara ens queda per provar que Ψ és la inversa de $\mathfrak{L}$. Donat un element W de $F(X)$,

es verifica que

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(\Psi(W)) &= (\Psi(W)^X)(\text{id}_X) && \text{(definició } \mathfrak{J}) \\ &= W. && \text{(definició } \Psi)\end{aligned}$$

Així, sabem que Ψ és la inversa de $\mathfrak{J}$ per la dreta ($\mathfrak{J} \circ \Psi = \text{id}_{F(X)}$). Comprovem ara que també ho és per l'esquerra. Siga $\alpha: \mathbb{C}(X, -) \Rightarrow F$ una transformació natural, per definició, tenim que $\Psi(\mathfrak{J}(\alpha)) = \Psi(\alpha^X(\text{id}_X))$.

Ara, donat un objecte D en $\mathbb{C}$, volem vore que $\Psi(\alpha^X(\text{id}_x))^D = \alpha^D$. Notem que per definició, tenim que

$$\Psi(\alpha^X(\text{id}_x))^D: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}(C, D) & \longrightarrow & F(D) \\ f & \longmapsto & F(f)(\alpha^X(\text{id}_X)). \end{array}$$

Com que α és una transformació natural, el diagrama de la Figura (11) commuta.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & & \text{Set} & & \\ X & & \mathbb{C}(X, X) & \xrightarrow{\alpha^X} & F(X) \\ \downarrow f & & \downarrow f_* & \circlearrowleft & \downarrow F(f) \\ D & & \mathbb{C}(X, D) & \xrightarrow{\alpha^D} & F(D) \end{array}$$

FIGURA 11. Diagrama de naturalitat d' α .

Per tant, obtenim

$$\begin{aligned}F(f)(\alpha^X(\text{id}_X)) &= \alpha^D(f_*(\text{id}_D)) \\ &= \alpha^D(f \circ \text{id}_D) \\ &= \alpha^D(f).\end{aligned}$$

Hem arribat a que $\Psi(\mathfrak{J}(\alpha)) = \alpha$, és a dir, $\Psi \circ \mathfrak{J} = \text{id}_{\text{Hom}(\mathbb{C}(X, -), F)}$ i així Ψ és la inversa de $\mathfrak{J}$ per l'esquerra. Ja tenim provat que $\mathfrak{J}$ és bijectiva.

D'altra banda, provem ara que $\mathfrak{J}$ és **natural**. En primer lloc, demostrem que és natural per a F , és a dir, donada una transformació natural $\beta: F \Rightarrow G$, volem vore que el diagrama de naturalitat de $\mathfrak{J}$ commuta, Figura (12).

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(X, -), F) & \xrightarrow[\cong]{\mathfrak{J}^F} & F(X) \\
\beta_* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \beta^X \\
\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(X, -), G) & \xrightarrow[\mathfrak{J}^G]{\cong} & G(X)
\end{array}$$

FIGURA 12. Naturalitat del lema Yoneda en functors.

Donada α una transformació natural en $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(X, -), F)$, tenim que

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{J}^G \circ \beta_*)(\alpha) &= (\beta \circ \alpha)^X(\mathrm{id}_X) && \text{(definició } \mathfrak{J} \text{)} \\
&= \beta^X(\alpha^X(\mathrm{id}_X)) && \text{(composició vertical (2.41))} \\
&= \beta^X(\mathfrak{J}^F(\alpha)). && \text{(definició } \mathfrak{J} \text{)}
\end{aligned}$$

Per tant, ja tenim que el diagrama de la Figura (12) commuta. Ara volem demostrar la naturalitat per a l'objecte X . Donat $f: X \rightarrow D$ un morfisme en $\mathbf{C}$, notem que l'element de $F(D)$ que representa la transformació natural composta

$$\alpha \circ f^*: \mathbf{C}(D, -) \Rightarrow \mathbf{C}(C, -) \Rightarrow F,$$

és la imatge sota $F(f): F(X) \rightarrow F(D)$ de l'element de $F(X)$ representant α . És a dir, es resumeix a provar que el diagrama de la Figura (13) commuta.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(X, -), F) & \xrightarrow[\cong]{\mathfrak{J}^X} & F(X) \\
(f^*)^* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow F(f) \\
\mathrm{Hom}(\mathbf{C}(X, -), G) & \xrightarrow[\mathfrak{J}^D]{\cong} & G(X)
\end{array}$$

FIGURA 13. Naturalitat del lema Yoneda en objectes.

Notem que la banda inferior-esquerra verifica que:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}^D \circ (f^*)^*(\alpha) &= \mathfrak{J}^D(\alpha \circ f^*) && \text{(definició } (f^*)^* \text{)} \\
&= (\alpha \circ f^*)^D(\mathrm{id}_D) && \text{(definició } \mathfrak{J} \text{)} \\
&= \alpha^D(f). && \text{(composició vertical (2.41))}
\end{aligned}$$

Per la banda superior-dreta, tenim que:

$$\begin{aligned} F(f) \circ \mathfrak{L}(\alpha) &= F(f)(\alpha^X(\text{id}_X)) && (\text{definició } \mathfrak{L}) \\ &= \alpha^D(f). && (\alpha \text{ transf. nat.}) \end{aligned}$$

D'aquesta manera, hem vist que $\mathfrak{L}$ és natural per a X i per a F . Finalment, queda demostrat el lema de Yoneda. $\square$

Hem vist la versió covariant, ara podem enunciar la versió contravariant, que no la provarem perquè per dualitat la tenim.

TEOREMA 3.14 (Lema de Yoneda, versió contravariant). *Siga $\mathbf{C}$ una categoria localment xicoteta i $F: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ un functor contravariant. Aleshores, per a tot objecte X de $\mathbf{C}$ existeix una bijecció*

$$\text{Hom}(\mathbf{C}(-, X), F) \cong F(X)$$

que a una transformació natural $\alpha: \mathbf{C}(-, X) \Rightarrow F$ li associa l'element $\alpha^X(\text{id}_X)$ en $F(X)$. Aquesta correspondència és natural tant en X com en F .

COROLLARI 3.15. Donada una categoria localment xicoteta $\mathbf{C}$, els següents functors, anomenats Imbibicions de Yoneda, són plens i fidels:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}(-, \cdot): \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} \\ \begin{array}{ccc} X & & \mathbf{C}(-, X) \\ f \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow f_* \\ Y & & \mathbf{C}(-, Y) \end{array} & & \begin{array}{ccc} X & & \mathbf{C}(X, -) \\ f \downarrow & \dashrightarrow & \uparrow f^* \\ Y & & \mathbf{C}(Y, -) \end{array} \end{array}$$

FIGURA 14. Imbibicions de Yoneda.

3. Propietat universal

Podem trobar propietats universals en diverses teories matemàtiques, per exemple, només començar el grau es veu una en Àlgebra Lineal I. Aquestes ens permeten descriure objectes a partir dels morfismes que relacionen l'objecte. Un clar exemple són els objectes inicials i finals (Definició 3.1). Farem ús del lema de Yoneda (3.13) per a formalitzar la definició.

DEFINICIÓ 3.16 (Propietat universal). Direm que un objecte X d'una categoria $\mathbf{C}$ localment xicoteta té la **propietat universal** per a un functor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, si existeix un element A en $F(X)$ de forma que A defineix un isomorfisme natural entre $\mathbf{C}(X, -)$ i F a través del lema de Yoneda (3.13). És a dir, direm que (X, F) té la propietat

universal si existeix A en $F(X)$ tal que $\mathcal{Y}(A)$ és un isomorfisme natural.

Aquesta és la versió covariant, la contravariant seria simplement canviar F , que seria un functor contravariant i l'isomorfisme natural seria entre $\mathcal{C}(-, X)$ i F a través del lema de Yoneda en versió contravariant.

Presentem un exemple d'un objecte junt a un functor, de forma que té la propietat universal.

EXEMPLE 3.17 (Monoide lliure). Continuem amb l'Exemple (3.9), anem a veure que $(\mathbb{N}, U)$ té la propietat universal. Recordem que $U: \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ és un functor d'oblit. Pel lema de Yoneda, existeix un isomorfisme natural:

$$\mathcal{Y}: \text{Hom}(\mathbf{Mon}(\mathbf{M}, -), U) \cong U(\mathbf{M}).$$

Notem que l'objecte $\mathbb{N}$ en $\mathbf{Mon}$ té la propietat universal per a U , perquè per a l'element $1 \in \mathbb{N} = U(\mathbb{N})$ es té que la transformació natural associada a 1 seguint el lema de Yoneda, és a dir, $\Psi(1)^{\mathbf{M}}(g) = U(g)(1) = g(1)$, per a qualsevol morfisme g en $\mathbf{Mon}(\mathbb{N}, \mathbf{M})$, verifica que el diagrama de la Figura (15) commuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{Set} & & \\
 & & \Psi(1)^{\mathbf{M}} & & \\
 \mathbf{Mon} & & & & \\
 \mathbf{M} & \mathbf{Mon}(\mathbb{N}, \mathbf{M}) & \xrightarrow{\quad} & M & \\
 \downarrow f & \downarrow f_* & \circlearrowleft & \downarrow f & \\
 \mathbb{N} & \mathbf{Mon}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) & \xrightarrow{\quad \Psi(1)^{\mathbb{N}} \quad} & N &
 \end{array}$$

FIGURA 15. Diagrama de naturalitat de Ψ .

Ho comprovem, en primer lloc per la banda inferior-esquerra:

$$\begin{aligned}
 \Psi(1)^{\mathbb{N}}(f_*(g)) &= \Psi(1)^{\mathbb{N}}(f \circ g)(1) && \text{(definició } f_*) \\
 &= (f \circ g) && \text{(definició } \Psi) \\
 &= f(g(1)).
 \end{aligned}$$

I per la banda superior-dreta:

$$f(\Psi(1)^{\mathbf{M}}(g)) = f(g(1)). \quad \text{(definició } \Psi)$$

I només ens queda veure que $\Psi(1)$ defineix un isomorfisme natural en $\mathbf{Set}$, és a dir, veure que per a cada monoide $\mathbf{M}$, es compleix que $\Psi(1)^{\mathbf{M}}$ és una aplicació bijectiva.

Siguen g, h en $\mathbf{Mon}(\mathbb{N}, \mathbf{M})$ i suposem que $\Psi(1)^{\mathbf{M}}(g) = \Psi(1)^{\mathbf{M}}(h)$, volem veure que $g = h$, ho demostrarem per inducció sobre $\mathbb{N}$.

Notem que $g(0) = h(0) = 1$, en ser g, h homomorfismes. Per a $n = 1$:

$$g(1) = \Psi(1)^{\mathbf{M}}(g) = \Psi(1)^{\mathbf{M}}(h) = h(1).$$

Suposem que és cert per a n , ho vegem per a $n + 1$:

$$\begin{aligned} g(n+1) &= g(n) g(1) && (g \text{ homomorfisme}) \\ &= h(n) h(1) && (\text{hipòtesi d'inducció i cas base}) \\ &= h(n+1). && (h \text{ homomorfisme}) \end{aligned}$$

Així, ja hem vist que $\Psi(1)^{\mathbf{M}}$ és injectiva, queda vore que és sobrejectiva. Siga m un element d' M , hem de trobar $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{M}$ un homomorfisme de monoides tal que $\Psi(1)^{\mathbf{M}}(g) = m$. Recordem que teníem definides dues aplicacions, la segona gràcies a la propietat universal del monoide lliure $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} k_m: & 1 & \longrightarrow M \\ & 0 & \longmapsto m. \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} k_m^\sharp: & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbf{M} \\ & n & \longmapsto m^n. \end{array}$$

Aplicant ara Ψ :

$$\Psi(1)^{\mathbf{M}}(k_m^\sharp) = k_m^\sharp(1) = m^1 = m.$$

Per tant, concloem que la transformació natural $\Psi(1)$ és un isomorfisme natural en **Set**. Així, l'objecte $\mathbb{N}$ en **Mon** compleix amb la propietat universal per a U amb l'element 1.

Seguidament, introduïm un concepte que serà fonamental per al resultat més important d'aquest capítol. Bàsicament, relaciona que un functor siga representable amb que una categoria associada a aquest functor tinga un objecte inicial. En el cas dels functors contravariants, el resultat és amb un objecte final.

DEFINICIÓ 3.18 (Categoria d'elements). Donat un functor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, definim la **categoria d'elements** associada, denotada per $\int^{\mathbf{C}} F$, com aquella categoria que té per objecte als parells de la forma (C, X) , amb C un objecte de $\mathbf{C}$ i X és un element en $F(C)$. Prenent dos objectes (C, X) i (D, Y) en aquesta categoria d'elements, un morfisme entre aquests és de la forma $f: C \rightarrow D$ que compleix que $F(f)(X) = Y$.

$$\begin{array}{ccccc} (C, X) & C & & F(C) & \\ f \downarrow & f \downarrow & \longmapsto & \downarrow F(f) & \\ (D, Y) & D & & F(D) & \end{array}$$

FIGURA 16. Categoria d'elements.

Donat un objecte (C, X) en $\int^C F$, definim el morfisme identitat $\text{id}_{(C,X)}^{\int^C F}$ com id_C^C , el morfisme identitat de C en la categoria C , que notem que $F(\text{id}_C)(X) = X$. D'altra banda, definim la composició en $\int^C F$ com la composició en C . És senzill i rutinari comprovar que aquesta composició està ben definida i que, efectivament, la categoria d'elements és una categoria.

En el cas d'un functor F contravariant, denotarem la categoria d'element associada per $\int_C F$.

L'interés d'aquesta categoria, com ja hem mencionat, ve donat pel següent resultat.

PROPOSICIÓ 3.19. *Siga C una categoria i siga $F: C \rightarrow \text{Set}$ un functor. Aleshores, F és representable si, i només si, $\int^C F$ té un objecte inicial.*

Presentem també la versió contravariant, encara que no la demostrarem per dualitat.

PROPOSICIÓ 3.20. *Siga C una categoria i siga $F: C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ un functor contravariant. Aleshores, F és representable si, i només si, $\int_C F$ té un objecte final.*

Demostrem la versió covariant.

DEMOSTRACIÓ. Suposem que F és representable, és a dir, existeix un objecte C de C i un isomorfisme natural $\alpha: F \cong C(C, -)$, és a dir, ens trobem en la situació de la Figura (17).

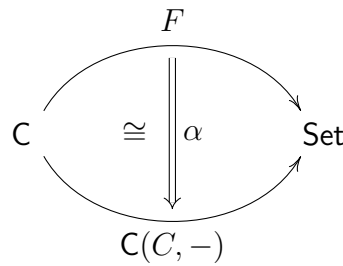


FIGURA 17. Transformació natural α .

Volem vore primer que les tres categories següents són isomorfes:

$$\int^C F \cong \int^C C(C, -) \cong C/C.$$

Una vegada ho tinguem demostrat, el resultat es desprèn del fet que la categoria sota C (recordem l'Exemple 2.4) té al morfisme identitat id_C com a objecte inicial.

Per tal de demostrar que aquestes categories són isomorfes entre elles, primer definirem un functor $G: \int^{\mathbf{C}} F \longrightarrow \int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -)$ de forma que envia els objectes (A, X) en $\int^{\mathbf{C}} F$ als objectes $(A, \alpha^A(X))$ en $\int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -)$ i els morfismes els deixa igual. Aquesta definició es pot vore en la Figura (18).

$$\begin{array}{ccc}
G: \int^{\mathbf{C}} F & \longrightarrow & \int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -) \\
(A, X) & & (A, \alpha^A(X)) \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f \\
(B, Y) & & (B, \alpha^B(Y))
\end{array}$$

FIGURA 18. Functor G .

Per la definició de categoria d'elements, es dona que $F(f)(X) = Y$ i la transformació natural $\alpha: F \cong \mathbf{C}(C, -)$ ve donada per la col·lecció indexada $\alpha = (\alpha^A)_{A \in \text{Obj}(\mathbf{C})}$, de forma que el diagrama de la Figura (19) commuta.

$$\begin{array}{ccccc}
& \mathbf{C} & & \text{Set} & \\
A & F(A) & \xrightarrow{\alpha^A} & \mathbf{C}(C, A) & \\
f \downarrow & F(f) \downarrow & & \circlearrowleft & \downarrow f_* \\
B & F(B) & \xrightarrow{\alpha^B} & \mathbf{C}(C, B) &
\end{array}$$

FIGURA 19. Diagrama de naturalitat d' α .

Anem a vore que el functor G està ben definit. És a dir, necessitem vore que donats dos objectes $(A, \alpha^A(X))$ i $(B, \alpha^B(Y))$ en la categoria $\int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -)$, el morfisme $G(f) = f: (A, \alpha^A(X)) \longrightarrow (B, \alpha^B(Y))$ compleix que $f(\alpha^A(X)) = \alpha^B(Y)$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha^A(X)) &= f_*(\alpha^A(X)) && \text{(definició } f_*) \\
&= \alpha^B(F(f)(X)) && (\alpha \text{ transformació natural}) \\
&= \alpha^B(Y). && (f \text{ morfisme en } \int^{\mathbf{C}} F)
\end{aligned}$$

Una vegada ja hem vist que G està ben definit, anem a vore que és un functor.

Preserva la identitat: Siga (A, X) un objecte en $\int^{\mathbf{C}} F$, aleshores tenim que G actua sobre la identitat $\text{id}_{(A, X)}$ com en la Figura (20).

$$\begin{array}{ccc}
G: \int^{\mathbb{C}} F & \longrightarrow & \int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -) \\
(A, X) & & (A, \alpha^A(X)) \\
\text{id}_{(A, X)} \downarrow & \longmapsto & \downarrow \text{id}_{(A, \alpha^A(X))} \\
(A, X) & & (A, \alpha^A(X))
\end{array}$$

FIGURA 20. Cas particular del diagrama de naturalitat d' α .

És a dir,

$$\begin{aligned}
G(\text{id}_{(A, X)}) &= G(\text{id}_A) && \text{(identitat en } \int^{\mathbb{C}} F) \\
&= \text{id}_A && \text{(definició } G) \\
&= \text{id}_{(A, \alpha^A(X))} && \text{(identitat en } \int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)) \\
&= \text{id}_{G(A, X)}. && \text{(definició } G)
\end{aligned}$$

Preserva la composició: Siguen $f: (A, X) \longrightarrow (B, Y)$ i $g: (B, Y) \longrightarrow (C, Z)$ dos morfismes en $\int^{\mathbb{C}} F$:

$$\begin{aligned}
G(g \circ f) &= g \circ f && \text{(definició } G) \\
&= G(g) \circ G(f). && \text{(definició } G)
\end{aligned}$$

Ja tenim que G és un functor. Ara, anem a construir el functor H en el sentit contrari, i volem arribar a vore que és el functor invers de G . Definim aquest functor de forma que envia els objectes (A, p) en $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$ als objectes $(A, (\alpha^A)^{-1}(p))$ en $\int^{\mathbb{C}} F$ i els morfismes els deixa igual. Aquesta definició es pot vore en la Figura (21).

$$\begin{array}{ccc}
H: \int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -) & \longrightarrow & \int^{\mathbb{C}} F \\
(A, p) & & (A, (\alpha^A)^{-1}(p)) \\
f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f \\
(B, q) & & (B, (\alpha^B)^{-1}(q))
\end{array}$$

FIGURA 21. Functor H .

Notem que els objectes de $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$ són parells de la forma (A, p) , amb A objecte de $\mathbb{C}$ i p un element de $\mathbb{C}(C, A)$, és a dir, un morfisme $p: C \longrightarrow A$ en $\mathbb{C}$. Com α és un isomorfisme natural de F en $\mathbb{C}(C, -)$, per definició α^A és un isomorfisme de la forma $\alpha^A: F(A) \longrightarrow \mathbb{C}(C, A)$. Per tant, té sentit considerar l'element $(\alpha^A)^{-1}(p)$, que pertany a $F(A)$

en **Set**. Així, per a cada objecte (A, p) en $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$, tenim que $(A, (\alpha^A)^{-1}(p))$ és un objecte ben definit en $\int^{\mathbb{C}} F$.

A més, per a cada morfisme $f: (A, p) \rightarrow (B, q)$ en $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$, és a dir, un morfisme $f: A \rightarrow B$ en $\mathbb{C}$ que verifica

$$\mathbb{C}(C, f)(p) = f_*(p) = f \circ p = q,$$

hem definit $H(f) = f$. Notem que:

$$\begin{aligned} F(f)((\alpha^A)^{-1}(p)) &= (\alpha^B)^{-1}(f_*(p)) && (\alpha \text{ transformació natural}) \\ &= (\alpha^B)^{-1}(f \circ p) && (\text{definició } f_*) \\ &= (\alpha^B)^{-1}(q). && (f \text{ morfisme en } \int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)) \end{aligned}$$

Així, H està ben definit. Hem de comprovar que és un functor.

Preserva la identitat: Siga (A, p) un objecte en $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$, aleshores tenim que H actua sobre la identitat $\text{id}_{(A, p)}$ de la següent forma:

$$\begin{aligned} H(\text{id}_{(A, p)}) &= H(\text{id}_A) && (\text{identitat en } \int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)) \\ &= \text{id}_A && (\text{definició } H) \\ &= \text{id}_{(A, (\alpha^A)^{-1}(p))} && (\text{identitat en } \int^{\mathbb{C}} F) \\ &= \text{id}_{H(A, p)}. && (\text{definició } H) \end{aligned}$$

Preserva la composició: Siguen $f: (A, p) \rightarrow (B, q)$ i $g: (B, q) \rightarrow (C, r)$ dos morfismes en $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$:

$$\begin{aligned} H(g \circ f) &= g \circ f && (\text{definició } H) \\ &= G(g) \circ G(f). && (\text{definició } H) \end{aligned}$$

Ja tenim que H és un functor. Per construcció i definició, tenim que $G \circ H = \text{Id}^{\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)}$ i $H \circ G = \text{Id}^{\int^{\mathbb{C}} F}$. Per tant, (recordem la Definició 2.34) $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -) \cong \int^{\mathbb{C}} F$ i ja tenim demostrat el primer isomorfisme.

Tractem d'establir ara l'isomorfisme entre les categories $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$ i C/C . Comencem definint el functor $I: \int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -) \rightarrow C/C$ de forma que envia els objectes (A, p) en $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$ als objectes p en C/C i els morfismes els deixa igual. Aquesta definició es pot veure en el diagrama de la Figura (22).

Recordem que si $f: (A, p) \rightarrow (B, q)$ és un morfisme en $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$, es verifica que $p: C \rightarrow A$ i $q: C \rightarrow B$ són morfismes en $\mathbb{C}$ i $f: A \rightarrow B$ és un morfisme en $\mathbb{C}$ que verifica $f \circ p = f_*(p) = \mathbb{C}(C, f)(p) = q$.

Per tant, l'assignació I envia objectes de la forma (A, p) en la categoria $\int^{\mathbb{C}} \mathbb{C}(C, -)$ en la seua segona component, i recordem que és de la forma $p: C \rightarrow A$ en $\mathbb{C}$, és a dir, per definició és un objecte en la categoria C/C . A més a més, el morfisme f l'envia de nou a f , que ja hem vist que verifica que $f \circ p = q$, és a dir, els morfismes de f en

$$\begin{array}{ccc}
I: \int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -) & \longrightarrow & C/\mathbf{C} \\
(A, p) & & p \\
\downarrow f & \longmapsto & \downarrow f \\
(B, q) & & q
\end{array}$$

FIGURA 22. Functor I .

$\int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -)$ s'envien a morfismes en la categoria $C/\mathbf{C}$, ja que satisfan la condició de la Figura (23).

$$\begin{array}{ccc}
& C & \\
p \swarrow & \circlearrowleft & \searrow q \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

FIGURA 23. Morfisme en $C/\mathbf{C}$.

Concloem que I està ben definit. Hem de comprovar que, efectivament, és un functor.

Preserva la identitat: Siga (A, p) un objecte en $\int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -)$, aleshores tenim que I actua sobre la identitat $\text{id}_{(A,p)}$ de la següent forma:

$$\begin{aligned}
I(\text{id}_{(A,p)}) &= I(\text{id}_A) && \text{(identitat en } \int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -)) \\
&= \text{id}_A && \text{(definició } I) \\
&= \text{id}_p && \text{(identitat en } C/\mathbf{C}) \\
&= \text{id}_{I(A,p)}. && \text{(definició } I)
\end{aligned}$$

Preserva la composició: Siguen $f: (A, p) \longrightarrow (B, q)$ i $g: (B, q) \longrightarrow (C, r)$ dos morfismes en $\int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -)$:

$$\begin{aligned}
I(g \circ f) &= g \circ f && \text{(definició } I) \\
&= I(g) \circ I(f). && \text{(definició } I)
\end{aligned}$$

Ja tenim que I és un functor. Ara, anem a construir el functor J en el sentit contrari, i volem arribar a vore que és el functor invers de I . Definim aquest functor de forma que envia els objectes p en $C/\mathbf{C}$ als objectes (A, p) en $\int^{\mathbf{C}} \mathbf{C}(C, -)$ i els morfismes els deixa igual. Aquesta definició es pot vore en el diagrama de la Figura (24).

Notem que aquest functor actua sobre l'objecte p en $C/\mathbf{C}$ (recordem que és un morfisme $p: C \longrightarrow A$ en $\mathbf{C}$), i l'envia al parell (A, p) , objecte

$$J: C/C \longrightarrow \int^C \mathbb{C}(C, -)$$

$$\begin{array}{ccc} p & & (A, p) \\ \downarrow f & \dashrightarrow & \downarrow f \\ q & & (A, q) \end{array}$$

FIGURA 24. Functor J .

$\int^C \mathbb{C}(C, -)$. A més, donat un morfisme $f: p \longrightarrow q$ en C/C , es té que $f: A \longrightarrow B$ és un morfisme en $\mathbb{C}$ que verifica $p \circ f = q$. Com $J(f) = f$ i f és un morfisme de (A, p) a (B, q) en $\int^C \mathbb{C}(C, -)$, concloem que J està ben definit. Hem de comprovar que és un functor.

Preserva la identitat: Siga $p: C \longrightarrow A$ un objecte en C/C , aleshores tenim que J actua sobre la identitat id_p de la següent forma:

$$\begin{aligned} J(\text{id}_p) &= J(\text{id}_A) && \text{(identitat en } C/C) \\ &= \text{id}_A && \text{(definició } J) \\ &= \text{id}_{(A, p)} && \text{(identitat en } \int^C \mathbb{C}(C, -)) \\ &= \text{id}_{J(p)}. && \text{(definició } J) \end{aligned}$$

Preserva la composició: Siguen $f: p \longrightarrow q$ i $g: q \longrightarrow r$ dos morfismes en C/C :

$$\begin{aligned} J(g \circ f) &= g \circ f && \text{(definició } J) \\ &= J(g) \circ J(f). && \text{(definició } J) \end{aligned}$$

Ja tenim que J és un functor. Per construcció i definició, tenim que $I \circ J = \text{Id}^{C/C}$ i $J \circ I = \text{Id}^{\int^C \mathbb{C}(C, -)}$. Per tant, $\int^C \mathbb{C}(C, -) \cong C/C$ i ja tenim demostrat el segon isomorfisme.

Comprovem finalment que C/C té un objecte inicial. Considerem el morfisme identitat id_C en $\mathbb{C}$, que és un objecte de C/C . Donat un objecte qualsevol $p: C \longrightarrow A$ en C/C , existeix un únic morfisme de id_C en p en la categoria C/C , que és precisament p , ja que s'ha de verificar $p \circ \text{id}_C = p$, com es mostra en la Figura (25).

Si existira algun altre morfisme $t: \text{id}_C \longrightarrow p$, hauria de verificar que $t \circ \text{id}_C = p$ així, $t = p$. Concloem que id_C és un objecte inicial en C/C .

Com que tenim un isomorfisme entre les categories C/C i $\int^C F$, i sabem que id_C és un objecte inicial en C/C , aleshores $\int^C F$ també té un objecte inicial.

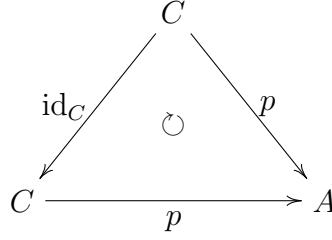


FIGURA 25. Morfisme en C/C .

Suposem ara que (A, X) en $\int^C F$ és un objecte inicial. Anem a comprovar que la transformació natural $\Psi(X): C(A, -) \Rightarrow F$ definida pel lema de Yoneda (3.13) és un isomorfisme natural.

Donat qualsevol altre objecte (B, Y) en la categoria $\int^C F$, en ser (A, X) un objecte inicial, existeix un únic morfisme $f: (A, X) \rightarrow (B, Y)$. Equivalentment, existeix un únic morfisme $f: A \rightarrow B$ en C tal que $F(f)(X) = Y$. Aquesta condició ens diu exactament que la component $\Psi(X)^B: C(A, B) \rightarrow F(B)$ és un isomorfisme:

$$\Psi(X)^B: C(A, B) \rightarrow F(B).$$

En la prova del lema de Yoneda, vam definir $\Psi(X)^B(f) = F(f)(X)$, i per a aquest cas, es té que $F(f)(X) = Y$. L'existència del morfisme $f: (A, X) \rightarrow (B, Y)$ ens assegura que $\Psi(X)^B$ és sobrejectiva, perquè donat qualsevol Y element en $F(B)$, sabem que existeix $f: A \rightarrow B$ amb $\Psi(X)^B(f) = F(f)(X) = Y$, i la unicitat (donada per l'objecte inicial), ens diu que és injectiva.

Així, $\Psi(X): C(A, -) \rightarrow F$ és un isomorfisme natural amb A objecte en C i aquesta una categoria localment xicoteta, per tant, es compleix la Definició (3.8) i tenim que F és un functor representable. $\square$

NOTA 3.21. En la definició en realitat vam dir que l'isomorfisme natural anava de F a $C(A, -)$ per visualitzar-ho, però s'admet en la majoria de llibres la definició amb l'isomorfisme natural en qualsevol direcció, com en aquest cas.

Límits i colímits

En aquest capítol introduïm les nocions de límit i colímit en una categoria. Donarem exemples concrets de límits com els productes, els igualadors i els productes fibrats, i de colímits, com els coproductes, els coigualadors i les sumes amalgamades. En particular estudiarem la construcció d'aquests conceptes en la categoria **Set** i **Type**. Com a conseqüència, demostrarem que aquestes dues categories són completes i cocompletes. És a dir, que tenen tots els límits i colímits.

1. Límits i colímits

Els límits i colímits es poden presentar en qualsevol categoria, i és un concepte que recull altres conceptes ja vists, com el de functor representable i propietat universal. A continuació, presentem un concepte que ens ajudarà a construir la definició de límit.

DEFINICIÓ 4.1 (Diagrama). Un **diagrama** en una categoria $\mathbf{C}$ és un functor $F: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$, on $\mathbf{J}$ és una **categoria d'índexs**, és a dir, una categoria xicoteta.

Per visualitzar el concepte de forma senzilla, presentem el següent exemple.

EXEMPLE 4.2 (Diagrama). Considerem $\mathbf{J}$ una categoria d'índexs amb tres objectes i morfismes no trivials entre aquests que commuten. Sigui $F: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ el diagrama de la Figura (1).

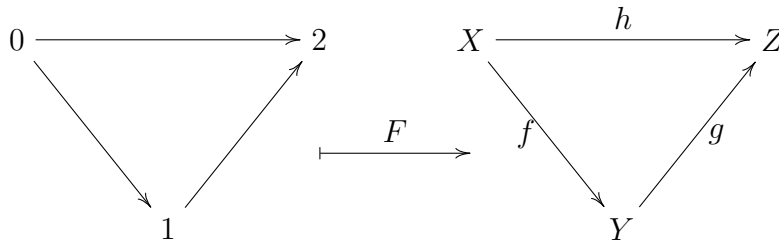


FIGURA 1. Diagrama F .

Es compleix que $F(0) = X$, $F(1) = Y$ i $F(2) = Z$ són objectes en la categoria $\mathbf{C}$, mentre que els morfismes per la imatge del functor verifiquen que $h = f \circ g$. Així, efectivament vegem que F és un diagrama en la categoria $\mathbf{C}$.

NOTA 4.3. *Habitualment la categoria d'índexs $\mathbf{J}$ no tindrà una estructura especialment complicada, ho vorem en els exemples d'aquest capítol, simplement ho utilitzem per a indexar. Per aquesta raó, denotarem per $i, j, k \dots$ als objectes d'aquesta categoria, i als morfismes, si cal denotarlos, per $f, g, h \dots$*

PROPOSICIÓ 4.4. *Si $\mathbf{J}$ és una categoria d'índexs no buida, $\mathbf{C}$ una categoria i X un objecte de $\mathbf{C}$, aleshores el functor constant (Exemple 2.26) defineix una imbibició (un functor injectiu sobre els morfismes) com la de la Figura (2).*

$$\begin{array}{ccc} K: \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}^J \\ \begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} K^X \\ \Downarrow K(f) \\ K^Y \end{array} \end{array}$$

FIGURA 2. Functor constant K.

Amb $K(f)$ una transformació natural constant $K(f): K^X \Rightarrow K^Y$, amb K^X i K^Y els functors constants a X i Y en $\mathcal{C}$, respectivament. És a dir, $K(f) = (K(f)^j)_{j \in \text{Obj}(\mathcal{J})}$, i definim $K(f)^j = f$.

DEMOSTRACIÓ. Cal tindre present la Definició (2.43). Recordem també l'Exemple (2.26), on vam definir el functor constant K^X . Notem que l'assignació K està ben definida perquè $K(f): K^X \Rightarrow K^Y$ defineix una transformació natural com es veu en la Figura (3).

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{J} & & \mathbf{C} & & \\
i \downarrow & & X \xrightarrow{K(f)^i = f} Y & & \\
& \text{id}_X \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \text{id}_Y & \\
j \downarrow & & X \xrightarrow{K(f)^j = f} Y & &
\end{array}$$

FIGURA 3. Diagrama de naturalitat de $K(f)$.

És senzill comprovar que K defineix un functor. A més a més, com que J és una categoria no buida, tenim que K és fidel, ja que per a dos morfismes $f, g \in C(X, Y)$ amb $K(f) = K(g)$, considerant un objecte j de J , obtenim que $K(f)^j = K(g)^j$. Per tant,

$$f = K(f)^j = K(g)^j = g.$$

□

Seguidament, introduïm el concepte de con a partir del concepte de diagrama, i vorem que en aquesta secció els cons jugaran un paper important.

DEFINICIÓ 4.5 (Con). Un **con** sobre un diagrama $F: J \longrightarrow C$ amb cim X en $\text{Obj}(C)$ és una transformació natural $\lambda: K^X \Longrightarrow F$ que es defineix de forma que, donat un morfisme $g: i \longrightarrow j$ en J , envia els objectes X en C als objectes $F(i)$ en C mitjançant la component λ^i i els morfismes id_X en $F(g)$, en C tots dos. Aquesta definició es pot vore en la Figura (4).

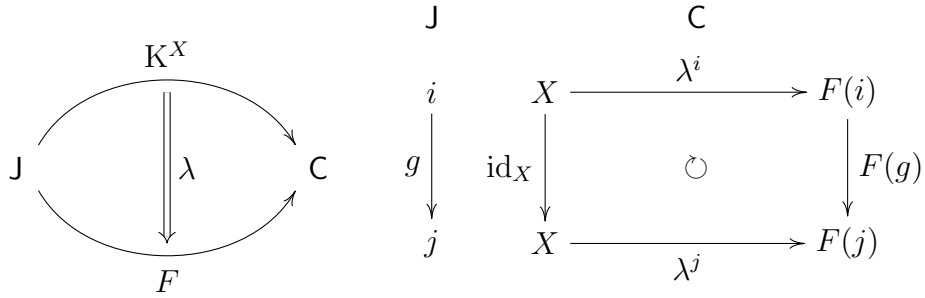


FIGURA 4. Transformació natural α que defineix un con amb cim X i el seu diagrama de naturalitat.

Anomenem a les components de la transformació natural λ les **ca-mes** del con (és, a dir, les λ^i , amb i en J). S'anomena con amb cim X , ja que notem que per a cada morfisme $g: i \longrightarrow j$, el triangle de la Figura (5) commuta.

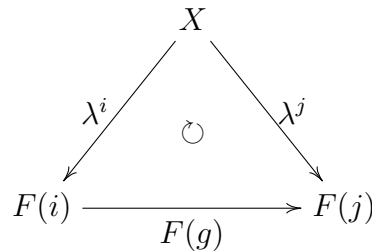


FIGURA 5. Con amb cim X .

Un morfisme d'un con amb cim X , $\lambda: K^X \Longrightarrow F$, a un con amb cim Y , $\mu: K^Y \Longrightarrow F$, és un morfisme $f: X \longrightarrow Y$ en C de forma que per a cada índex j de J es té que $\mu^j \circ f = \lambda^j$. Ho vegem en la Figura (6).

I a més, verifica que, per a cada índex j de J , el diagrama de la Figura (7) commuta.

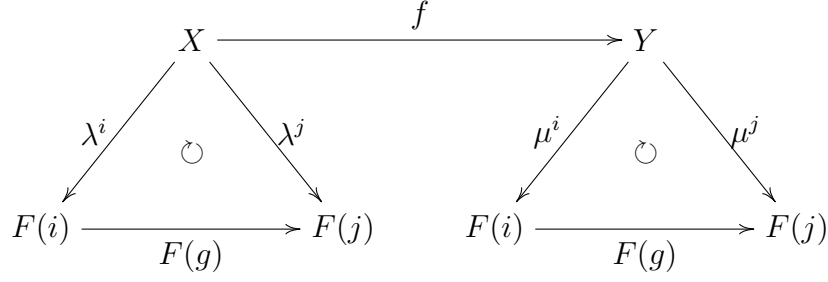


FIGURA 6. Morfisme entre cons.

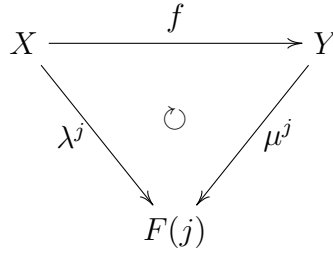


FIGURA 7. Commutativitat del morfisme entre cons.

Presentem la definició dual.

DEFINICIÓ 4.6 (Cocon). Un **con** sobre un diagrama $F: J \rightarrow C$ amb nadir X en $\text{Obj}(C)$, també anomenat **cocon**, és una transformació natural $\lambda: F \Rightarrow K^X$ que es defineix de forma que, donat un morfisme $g: i \rightarrow j$ en J , envia els objectes $F(i)$ en C als objectes X en C mitjançant la component λ^i i els morfismes $F(g)$ en id_X , en C tots dos. Aquesta definició es pot veure en la Figura (8).

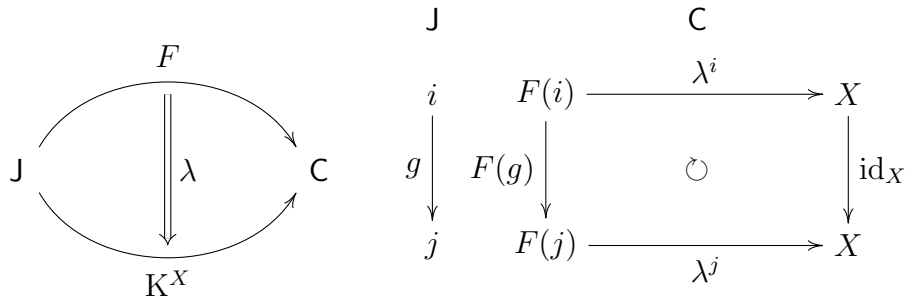


FIGURA 8. Transformació natural α que defineix un cocon amb nadir X i el seu diagrama de naturalitat.

També anomenem a les components de la transformació natural λ les **cames** del cocon (és, a dir, les λ^i , amb i en J). S'anomena con amb nadir X , ja que notem que per a cada morfisme $g: i \rightarrow j$, el triangle de la Figura (9) commuta.

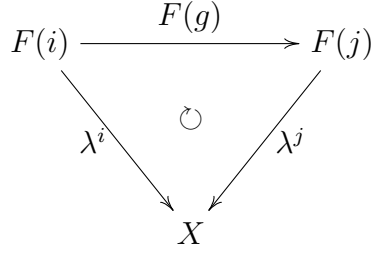


FIGURA 9. Con amb nadir X .

Un morfisme d'un cocon amb nadir X , $\lambda: F \Rightarrow K^X$, a un cocon amb nadir Y , $\mu: F \Rightarrow K^Y$, és un morfisme $f: X \rightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ de forma que per a cada índex j de J es té que $f \circ \lambda^j = \mu^j$. Ho vegem en la Figura (10).

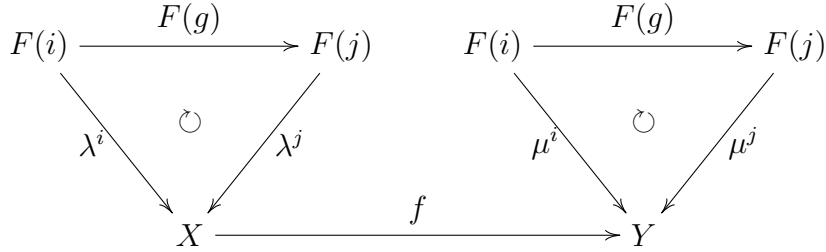


FIGURA 10. Morfisme entre cocons.

I a més, verifica que, per a cada índex j de J , el diagrama de la Figura (11) commuta.

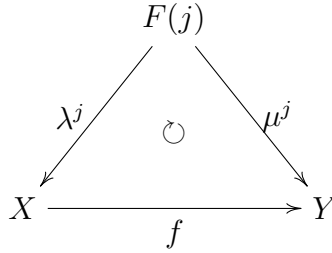


FIGURA 11. Commutativitat del morfisme entre cocons.

Amb aquesta noció de con i cocon, construïm un functor que envia objectes d'una categoria qualsevol, al conjunt de cons amb cim l'objecte corresponent.

PROPOSICIÓ 4.7. *Donat una diagrama $F: J \rightarrow \mathcal{C}$, existeix un functor contravariant $\text{Cons}(-, F)$, que envia un objecte X de $\mathcal{C}$ al conjunt de cons amb cim X .*

Per a cada objecte X en $\mathcal{C}$, definim el següent conjunt

$$\text{Cons}(X, F) = \{\lambda: K^X \Rightarrow F \mid \lambda \text{ transformació natural}\}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Cons}(-, F): & \mathbf{C} & \longrightarrow \mathbf{Set} \\
\\
X & & \text{Cons}(X, F) \\
\downarrow f & \longmapsto & \uparrow \text{Cons}(f, F) \\
Y & & \text{Cons}(Y, F)
\end{array}$$

FIGURA 12. Definició del functor $\text{Cons}(-, F)$.

I definim també el següent morfisme, amb $(\mu \circ f)^i = \mu^i \circ f$.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Cons}(f, F): & \text{Cons}(Y, F) & \longrightarrow \text{Cons}(X, F) \\
\mu & \longmapsto & \mu \circ f = ((\mu \circ f)^i)_{i \in \text{Obj}(\mathbf{J})}.
\end{array}$$

Dualment, per a un diagrama $F: \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$, existeix un functor covariant $\text{Cons}(F, -)$, que envia un objecte X de $\mathbf{C}$ al conjunt de cons amb nadir X .

$$\begin{array}{ccc}
\text{Cons}(F, -): & \mathbf{C} & \longrightarrow \mathbf{Set} \\
\\
X & & \text{Cons}(F, X) \\
\downarrow f & \longmapsto & \downarrow \text{Cons}(F, f) \\
Y & & \text{Cons}(F, Y)
\end{array}$$

FIGURA 13. Definició del functor $\text{Cons}(F, -)$.

DEMOSTRACIÓ. Farem únicament la demostració de que $\text{Cons}(-, F)$ és un functor, ja que l'altra és anàloga. Hem de vore que l'assignació $\text{Cons}(f, F)$ està ben definida i que $\text{Cons}(-, F)$ preserva la identitat i la composició.

Siga μ una transformació natural en $\text{Cons}(Y, F)$, és a dir, és una transformació natural de la forma $\mu: K^Y \Longrightarrow F$. Per tant, fa que, per a qualsevol morfisme $g: i \longrightarrow j$ en $\mathbf{J}$, el diagrama de la Figura (14) commute.

Siga $f: X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{C}$. Recordem que hem definit $\text{Cons}(f, F)(\mu) = (\mu^j \circ f)_{j \in \text{Obj}(\mathbf{J})}$. Notem que per a cada índex j en $\mathbf{J}$, es té que $\mu^j \circ f: X \longrightarrow F(j)$. A més, per a cada parell d'índexs i, j en $\mathbf{J}$ i per a cada morfisme $g: i \longrightarrow j$ en $\mathbf{J}$, comprovem que el diagrama de la Figura (15) commuta.

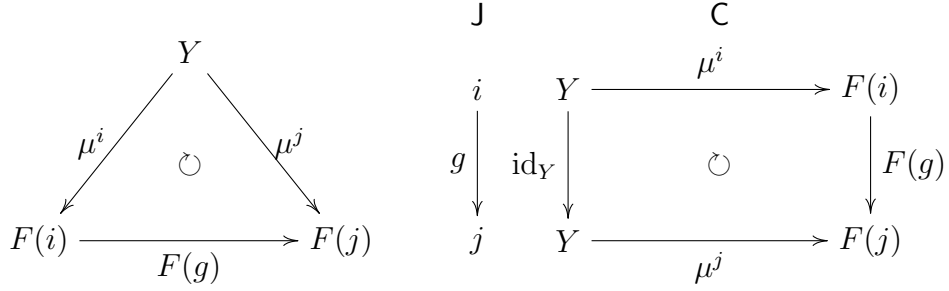


FIGURA 14. Transformació natural μ que defineix un con amb cim Y i el seu diagrama de naturalitat.

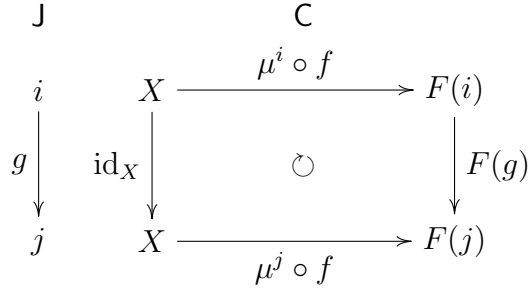


FIGURA 15. Transformació natural $\text{Cons}(f, F)(\mu)$.

La commutativitat se segueix de la següent cadena d'igualtats

$$\begin{aligned}
 F(g) \circ \mu^i \circ f &= \text{id}_Y \circ \mu^j \circ f && (\mu \text{ transformació natural}) \\
 &= \mu^j \circ f && (\text{id}_Y) \\
 &= \mu^j \circ f \circ \text{id}_X. && (\text{id}_X)
 \end{aligned}$$

Així, el diagrama de la Figura (15) commuta i queda demostrat que l'assignació $\text{Cons}(-, F)$ està ben definida, perquè ens envia un con a altre con. Ara hem de veure que és un functor contravariant.

Preserva la identitat: Siga X un objecte de $\mathbf{C}$ i siga $\text{id}_X: X \rightarrow X$ el morfisme identitat d' X en $\mathbf{C}$. Siga μ un con de $\text{Cons}(X, F)$. Aleshores, per a cada j en $\mathbf{J}$ es té que:

$$\text{Cons}(\text{id}_X, F)(\mu)^j = \mu^j \circ \text{id}_X = \mu^j.$$

Com que, per a tota transformació natural μ en $\text{Cons}(X, F)$ es té que $\text{Cons}(\text{id}_X, F)(\mu) = \mu$, acabem de veure que

$$\text{Cons}(\text{id}_X, F) = \text{id}_{\text{Cons}(X, F)}.$$

Preserva la composició: Siguen $f: X \longrightarrow Y$ i $h: Y \longrightarrow Z$ morfismes en $\mathbf{C}$. Siga γ un con en $\text{Cons}(Z, F)$ i siga j en $\mathbf{J}$, aleshores

$$\begin{aligned} \text{Cons}(h \circ f, F)(\gamma)^j &= \gamma^j \circ h \circ f && (\text{Def. } \text{Cons}(h \circ f, F)) \\ &= \text{Cons}(h, F)(\gamma)^j \circ f && (\text{Def. } \text{Cons}(h, F)) \\ &= \text{Cons}(f, F)(\text{Cons}(h, F)(\gamma))^j. && (\text{Def. } \text{Cons}(f, F)) \end{aligned}$$

Per tant, queda demostrat que $\text{Cons}(h \circ f, F) = \text{Cons}(f, F) \circ \text{Cons}(h, F)$. I acabem de veure que $\text{Cons}(-, F)$ és un functor contravariant. $\square$

Notem que el functor contravariant $\text{Cons}(-, F): \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ té domini $\mathbf{C}$ i codomini $\mathbf{Set}$. Per tant, podem preguntar-nos si és un functor representable, és a dir, si satisfà les condicions de la Definició (3.8). O el que és el mateix, si existeix un objecte C de $\mathbf{C}$ de forma que $\text{Cons}(-, F)$ és naturalment isomorf a $\mathbf{C}(-, C)$. Introduïm la definició de límit, que serà senzillament l'objecte C en cas que $\text{Cons}(-, F)$ siga representable.

DEFINICIÓ 4.8 (Límits i colímits). Per a un diagrama $F: \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$, un **límit** d' F és, si existeix, un element de $\mathbf{C}$ que representa al functor contravariant $\text{Cons}(-, F)$. Pel lema de Yoneda (3.14) versió contravariant, un límit és un objecte de $\mathbf{C}$, denotat per $\lim F$, de forma que

$$\mathbf{C}(-, \lim F) \cong \text{Cons}(-, F).$$

Dualment, un **colímit** d' F és, si existeix, un element de $\mathbf{C}$ que representa al functor covariant $\text{Cons}(F, -)$. Pel lema de Yoneda (3.13), un colímit és un objecte de $\mathbf{C}$, denotat per $\lim F$, de forma que

$$\mathbf{C}(\lim F, -) \cong \text{Cons}(F, -).$$

Notem que gràcies a les Proposicions (3.19) i (3.20), podem entendre els límits i els colímits d'una forma diferent, ja que els podem definir com objectes finals o inicials d'una categoria adequada. Per aquest motiu, podem presentar les següents definicions.

DEFINICIÓ 4.9 (Límits i colímits). Per a qualsevol diagrama $F: \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$, un **límit** és, si existeix, un objecte terminal per a la categoria de cons sobre F , és a dir, un objecte terminal en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$. Dualment, un **colímit** és, si existeix, un objecte inicial per a la categoria de cons sobre F , és a dir, un objecte inicial en $\int_{\mathbf{C}} \text{Cons}(F, -)$.

2. Exemples de límits

En aquesta secció estudiem la construcció d'alguns límits, que estan presents en la categoria **Set** i també en la categoria **Type**. Per a la part de conjunts, ens basarem en la referència [Vid10]. Es poden veure més resultats i exemples concrets, tant de límits com de colímits en [Sim11].

2.1. Producte.

DEFINICIÓ 4.10 (Producte). Considerem J una categoria discreta (Exemple 2.3). Així, un diagrama $F: J \longrightarrow C$ és una col·lecció d'objectes en C indexada per J , és a dir, $(F(j))_{j \in J}$. Un con sobre este diagrama amb cim Z (objecte en C) és una transformació natural $\lambda: K^Z \Longrightarrow F$, recordem que $\lambda = (\lambda^j)_{j \in J}$, on $\lambda^j: Z \longrightarrow F(j)$ és un morfisme en C . És a dir, un con sobre F amb cim Z és una família J -indexada $(\lambda^j: Z \longrightarrow F(j))_{j \in J}$, satisfent que el diagrama de la Figura (16) commuta.

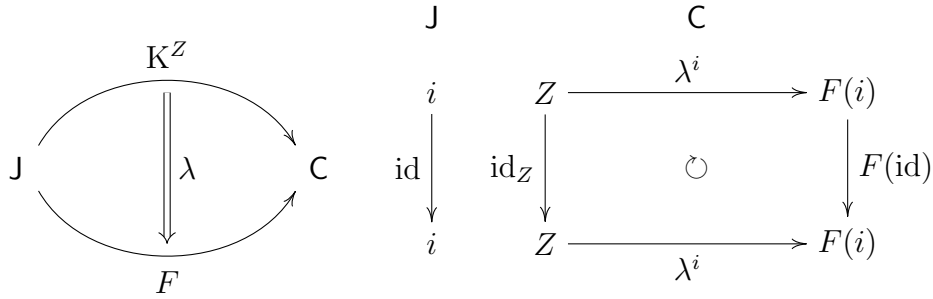


FIGURA 16. Transformació natural α que defineix un con amb cim Z i el seu diagrama de naturalitat.

Però, notem que açò és una condició buida, no cal imposar res. Per tant, un con sobre F amb cim Z és una família de morfismes $(\lambda^j: Z \longrightarrow F(j))_{j \in J}$.

El diagrama $F: J \longrightarrow C$ té límit si, i només si, existeix un objecte final en $\int^C \text{Cons}(-, F)$. Recordem que $\int^C \text{Cons}(-, F)$ és la categoria que té com a objectes parells de la forma (C, X) , on C és objecte de C i X és un con en $\text{Cons}(C, F)$, i morfismes $f: (C, X) \longrightarrow (D, Y)$, amb f un morfisme en C , de C a D satisfent $\text{Cons}(f, F)(X) = Y$. Un objecte (C, X) és final en $\int^C \text{Cons}(-, F)$ si per a tot altre parell (D, Y) en $\int^C \text{Cons}(-, F)$ existeix un únic morfisme $f: (D, Y) \longrightarrow (C, X)$ en $\int^C \text{Cons}(-, F)$.

Per al cas que ens ocupa, si existeix el límit, es denota per $\prod_{j \in J} F(j)$, que és un objecte concret de C i s'anomena **producte de la família** $(F(j))_{j \in J}$. Ha d'anar acompanyat d'una elecció de con concreta, en aquest cas són les anomenades **projeccions** de la família $(F(j))_{j \in J}$

$$(\pi_j: \prod_{i \in J} F(i) \longrightarrow F(j))_{j \in J}.$$

Així, el límit és la tupla $(\prod_{j \in J} F(j), (\pi_j: \prod_{i \in J} F(i) \longrightarrow F(j))_{j \in J})$.

Recordem que ser final en $\int^C \text{Cons}(-, F)$ significa que si ens donen un objecte Z de C i una elecció concreta λ de con sobre F amb cim Z , tenim que (Z, λ) pertany a $\int^C \text{Cons}(-, F)$, aleshores per la condició de

ser final per a $(\prod_{j \in J} F(j), (\pi_j: \prod_{i \in J} F(i) \longrightarrow F(j))_{j \in J})$, existeix un únic morfisme en $\mathbb{C}$, $!: Z \longrightarrow \prod_{j \in J} F(j)$, tal que

$$\text{Cons}(!, F)(\lambda) = \pi.$$

És a dir, el diagrama de la Figura (17) commuta.

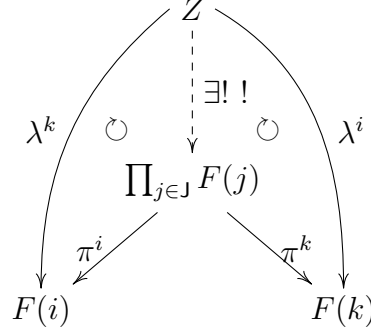


FIGURA 17. Propietat universal del producte.

En **Set** i en **Type** existeixen els productes. A continuació, vegem com es defineix el producte en **Set**.

EXAMPLE 4.11 (Producte en **Set**). Com ja hem dit, en **Set** els productes arbitraris sobre conjunts d'índexs arbitraris existeixen. Siga J un conjunt d'índexs i siga $\{A_j \mid j \in J\}$ una família de conjunts. Es defineix el seu producte com:

$$\prod_{j \in J} A_j = \{f: J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \mid \forall j \in J, f(j) \in A_j\}.$$

Per a cada índex $j \in J$, es té l'aplicació anomenada projecció j -èssima:

$$\begin{array}{ccc} \pi_j: & \prod_{j \in J} A_j & \longrightarrow A_j \\ & f & \longmapsto f(j) \end{array}$$

El producte de conjunts té la següent propietat universal: Per a $\{A_j \mid j \in J\}$, el conjunt $\prod_{j \in J} A_j$ satisfà que, per a tot altre conjunt Z i tota altra família d'aplicacions $(\lambda_j: Z \longrightarrow A_j)_{j \in J}$, existeix una única aplicació $\langle \lambda_j \rangle_{j \in J}: Z \longrightarrow \prod_{j \in J} A_j$ que satisfà $\pi_j \circ \langle \lambda_j \rangle_{j \in J} = \lambda_j$, per a tot $j \in J$. Aquesta aplicació es defineix com segueix

$$\begin{array}{ccc} \langle \lambda_j \rangle_{j \in J}: & Z & \longrightarrow \prod_{j \in J} A_j \\ z & \longmapsto & \langle \lambda_j \rangle_{j \in J}(z) \end{array}$$

Per a cada $z \in Z$, es defineix $\langle \lambda_j \rangle_{j \in J}(z)$ de la següent manera

$$\begin{array}{ccc} \langle \lambda_j \rangle_{j \in J}(z): & J & \longrightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \\ j & \longmapsto & \lambda_j(z). \end{array}$$

És senzill comprovar que està ben definida, satisfà $\pi_j \circ \langle \lambda_j \rangle_{j \in J} = \lambda_j$, per a tot $j \in J$ i és la única que verifica aquestes condicions.

En la Figura (18) podem veure un exemple concret del producte en **Set**, on hem considerat el diagrama

$$\begin{array}{rcl} F: & 2 & \longrightarrow \text{Set} \\ & 0 & \longmapsto A \\ & 1 & \longmapsto B \end{array}$$

i es pot veure que el límit és $(A \times B, (\pi_1, \pi_2))$.

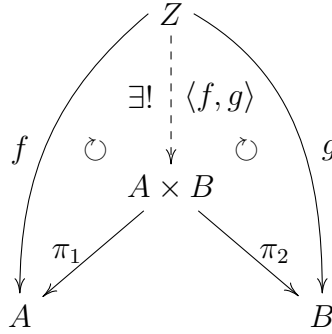


FIGURA 18. Propietat universal del producte, exemple concret per al producte de dos conjunts.

Vegem com es defineix el producte en **Type**.

EXEMPLE 4.12 (Producte en **Type**). El codi es troba en l'apèndix, és el de la Figura (1.1).

De la mateixa forma que hem introduït el producte, presentem ara la noció d'igualador.

2.2. Igualador.

DEFINICIÓ 4.13 (Igualador). Considerem la categoria **J** de **parell paral·lel**. És la categoria que té dos objectes, 0 i 1, i dos morfismes paral·lels, és a dir, amb mateix domini i mateix codomini. Com que no importa el nom que tinguen, només escrivim fletxes.

$$0 \rightrightarrows 1$$

FIGURA 19. La categoria de parell paral·lel **J**.

Així, un diagrama $F: \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$ consisteix simplement en donar dos objectes X i Y en $\mathbf{C}$, juntament amb dos morfismes paral·lels, $f, g: X \longrightarrow Y$. Un con sobre este diagrama amb cim Z (objecte en $\mathbf{C}$) és una transformació natural $\lambda: K^Z \Longrightarrow F$, recordem que $\lambda = (\lambda^j)_{j \in \mathbf{J}}$, on $\lambda^j: Z \longrightarrow F(j)$ és un morfisme en $\mathbf{C}$. És a dir, un con sobre F amb

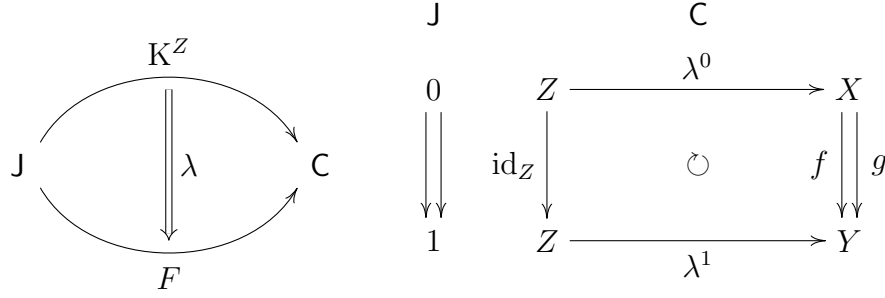


FIGURA 20. Transformació natural λ i el seu diagrama de naturalitat.

cim Z ve donat per dos morfismes, $\lambda^0: Z \rightarrow X$ i $\lambda^1: Z \rightarrow Y$ que satisfan que el diagrama de la Figura (20) commuta.

Que el diagrama de la Figura (20) commute vol dir que $f \circ \lambda^0 = \lambda^1$ i $g \circ \lambda^0 = \lambda^1$, que ho podem resumir dient que s'ha de verificar $f \circ \lambda^0 = g \circ \lambda^0$. Per tant, donar un con sobre F amb cim Z és equivalent a donar un morfisme $h: Z \rightarrow X$ tal que $f \circ h = g \circ h$.

El diagrama $F: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ té límit si, i només si, existeix un objecte final en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$. Recordem que $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$ és la categoria que té com a objectes parells de la forma (C, X) , on C és objecte de $\mathbf{C}$ i X és un con en $\text{Cons}(C, F)$, i morfismes $f: (C, X) \rightarrow (D, Y)$, amb f un morfisme en $\mathbf{C}$, de C a D satisfent $\text{Cons}(f, F)(X) = Y$. Un objecte (C, X) és final en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$ si per a tot altre parell (D, Y) en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$ existeix un únic morfisme $f: (D, Y) \rightarrow (C, X)$ en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$.

Per al cas que ens ocupa, si existeix el límit, es denota per $\text{Eq}(f, g)$, anomenat **igualador** d' f i g , juntament amb el morfisme anomenat **inclusió**:

$$\text{in}: \text{Eq}(f, g) \rightarrow X.$$

Així, el límit és $(\text{Eq}(f, g), \text{in})$.

Recordem que ser final en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$ significa que, si ens donen un objecte Z de $\mathbf{C}$ i una elecció concreta λ de con sobre F amb cim Z (que hem vist que és equivalent a donar un morfisme $h: Z \rightarrow X$ tal que $f \circ h = g \circ h$), és a dir, si (Z, λ) pertany a $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$, aleshores per la condició de ser final per a $(\text{Eq}(f, g), \text{in})$, existeix un únic morfisme en $\mathbf{C}$, $!: Z \rightarrow \text{Eq}(f, g)$, tal que $\text{Cons}(!, F)(\lambda) = \text{in}$. És a dir, el diagrama de la Figura (21) commuta.

En **Set** i en **Type** existeixen els igualadors. A continuació, vegem com es defineix l'igualador en **Set**.

EXEMPLE 4.14 (Igualador en **Set**). Com ja hem dit, en **Set** els igualadors existeixen. Siguen X, Y conjunts i $f: X \rightarrow Y$ i $g: X \rightarrow Y$ aplicacions paral·leles (tenim un diagrama $F: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Set}$). Es defineix

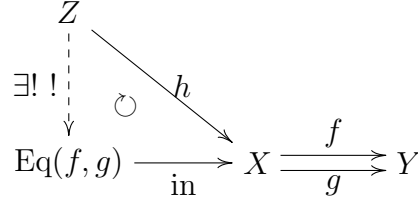


FIGURA 21. Propietat universal de l'igualador.

el seu igualador com

$$\text{Eq}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Juntament amb l'aplicació inclusió (notem que té sentit perquè es té que $\text{Eq}(f, g) \subseteq X$):

$$\begin{array}{ccc} \text{in}: & \text{Eq}(f, g) & \longrightarrow X \\ & x & \longmapsto x. \end{array}$$

Òbviament es té que $f \circ \text{in} = g \circ \text{in}$. L'igualador d' f i g té la següent propietat universal: si Z és un conjunt i $h: Z \longrightarrow X$ satisfent $f \circ h = g \circ h$, aleshores existeix una única aplicació, que anomenarem $\text{corest}(h)$, la correstricció d' h de Z en $\text{Eq}(f, g)$ satisfent que $\text{in} \circ \text{corest}(h) = h$. Aquesta aplicació es defineix com segueix

$$\begin{array}{ccc} \text{corest}(h): & Z & \longrightarrow \text{Eq}(f, g) \\ & z & \longmapsto h(z). \end{array}$$

És senzill comprovar que està ben definida, ja que verifica que $f(h(z)) = g(h(z))$ perquè, per hipòtesi h compleix $f \circ h = g \circ h$, aleshores es té que $\text{in} \circ \text{corest}(h) = h$ i és la única que verifica aquestes condicions.

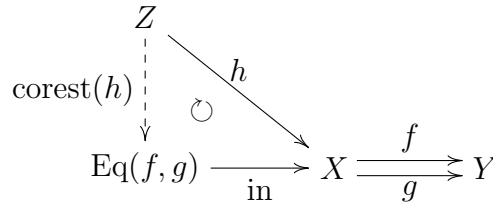


FIGURA 22. Propietat universal de l'igualador en **Set**.

Vegem com es defineix l'igualador en **Type**.

EXEMPLE 4.15 (Igualador en **Type**). El codi es troba en l'apèndix, és el de la Figura (1.2).

Presentem l'últim exemple de límit, el producte fibrat, també anomenat pullback.

2.3. Producte fibrat.

DEFINICIÓ 4.16 (Producte fibrat). Considerem la categoria $\mathbf{J}$ de **parell d'entrada**. És la categoria que té tres objectes, 0, 1 i 2, i dos morfismes no trivials com els de la Figura (23).

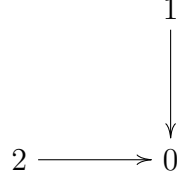


FIGURA 23. La categoria de parell d'entrada $\mathbf{J}$.

Així, un diagrama $F: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ ve donat per tres objectes X, Y i Z en $\mathbf{C}$, juntament amb dos morfismes d'entrada, $f: X \rightarrow Z$ i $g: Y \rightarrow Z$. Un con sobre este diagrama amb cim W (objecte en $\mathbf{C}$) és una transformació natural $\lambda: K^W \Rightarrow F$, recordem que $\lambda = (\lambda^j)_{j \in \mathbf{J}}$, on $\lambda^j: W \rightarrow F(j)$ és un morfisme en $\mathbf{C}$. És a dir, un con sobre F amb cim W ve donat per tres morfismes, $\lambda^0: W \rightarrow Z$, $\lambda^1: W \rightarrow X$ i $\lambda^2: W \rightarrow Y$ que satisfan que el diagrama de la Figura (24) commuta.

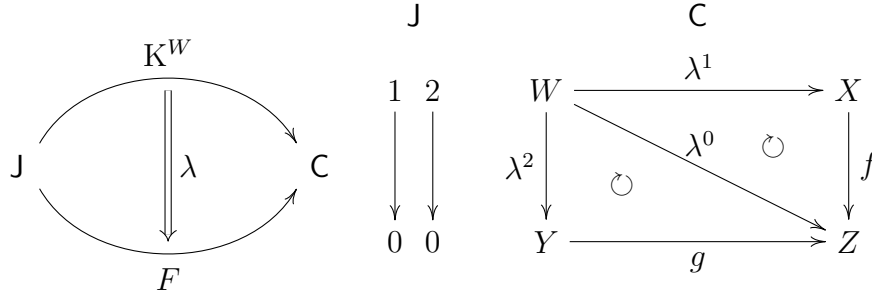


FIGURA 24. Transformació natural λ i el seu diagrama de naturalitat.

Que el diagrama de la Figura (24) commute vol dir que $f \circ \lambda^1 = \lambda^0$ i $g \circ \lambda^2 = \lambda^0$, és a dir, que s'ha de verificar $f \circ \lambda^1 = g \circ \lambda^2$. Per tant, donar un con sobre F amb cim W és equivalent a donar dos morfismes $\lambda^1: W \rightarrow X$ i $\lambda^2: W \rightarrow Y$ que satisfan que $f \circ \lambda^1 = g \circ \lambda^2$.

El diagrama $F: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ té límit si, i només si, existeix un objecte final en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$. Recordem que $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$ és la categoria que té com a objectes parells de la forma (C, X) , on C és objecte de $\mathbf{C}$ i X és un con en $\text{Cons}(C, F)$, i morfismes $f: (C, X) \rightarrow (D, Y)$, amb f un morfisme en $\mathbf{C}$, de C a D satisfent $\text{Cons}(f, F)(X) = Y$. Un objecte (C, X) és final en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$ si per a tot altre parell (D, Y) en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$ existeix un únic morfisme $f: (D, Y) \rightarrow (C, X)$ en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$.

Per al cas que ens ocupa, si existeix el límit, es denota per $X \times_Z Y$, anomenat **producte fibrat** d' f i g , o pullback d' f i g , juntament amb les cames del con, anomenades **projeccions canòniques**:

$$\pi_1: X \times_Z Y \longrightarrow X \qquad \pi_2: X \times_Z Y \longrightarrow Y.$$

Així, el límit és $(X \times_Z Y, (\pi_1, \pi_2))$.

Recordem que ser final en $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$ significa que, si ens donen un objecte W de $\mathbf{C}$ i una elecció concreta de con sobre F amb cim W , que anomenem (λ_1, λ_2) , és a dir, que $(W, (\lambda_1, \lambda_2))$ pertany a $\int^{\mathbf{C}} \text{Cons}(-, F)$, aleshores per la condició de ser final per a $((X \times_Z Y, (\pi_1, \pi_2)))$, existeix un únic morfisme en $\mathbf{C}$, $! : W \longrightarrow X \times_Z Y$, tal que $\text{Cons}(!, F)(\lambda_1, \lambda_2) = (\pi_1, \pi_2)$. És a dir, el diagrama de la Figura (25) commuta.

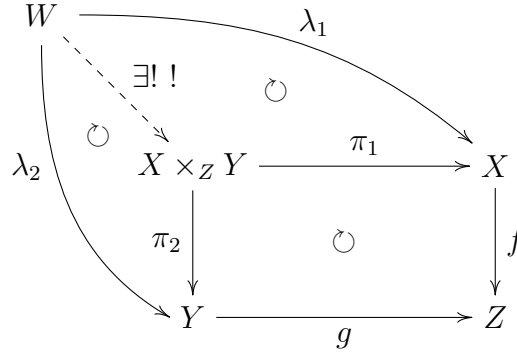


FIGURA 25. Propietat universal del producte fibrat.

En **Set** i en **Type** existeixen els productes fibrats. A continuació, vegem com es defineix el producte fibrat en **Set**.

EXEMPLE 4.17 (Producte fibrat en **Set**). Com ja hem dit, en **Set** els productes fibrats existeixen. Siguen X, Y i Z conjunts i $f: X \longrightarrow Z$ i $g: Y \longrightarrow Z$ aplicacions (tenim un diagrama $F: \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Set}$). Es defineix el seu producte fibrat com:

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}.$$

Juntament amb les projeccions habituals:

$$\begin{aligned} \pi_1: X \times_Z Y &\longrightarrow X & \pi_2: X \times_Z Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto x. & (x, y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

Òbviament es té que $f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$, per a tot $(x, y) \in X \times_Z Y$. El producte fibrat d' f i g té la següent propietat universal: si W és un conjunt i $\lambda^1: W \longrightarrow X$ i $\lambda^2: W \longrightarrow Y$ que satisfan que $f \circ \lambda^1 = g \circ \lambda^2$, aleshores existeix una única aplicació, que anomenarem $\langle u, v \rangle_Z$, de W en $X \times_Z Y$ satisfent que $\pi_1 \circ \langle u, v \rangle_Z = \lambda^1$ i $\pi_2 \circ \langle u, v \rangle_Z = \lambda^2$. Aquesta

aplicació es defineix com segueix

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_Z: W &\longrightarrow X \times_Z Y \\ w &\longmapsto (\lambda_1(w), \lambda_2(w)). \end{aligned}$$

És senzill comprovar que està ben definida, ja que es verifica que $f(\lambda_1(w)) = g(\lambda_2(w))$, perquè per hipòtesi λ_1 i λ_2 verifiquen que $f \circ \lambda_1 = g \circ \lambda_2$, aleshores es té que $\pi_1 \circ \langle u, v \rangle_Z = \lambda_1$ i $\pi_2 \circ \langle u, v \rangle_Z = \lambda_2$, i és la única que verifica aquestes condicions.

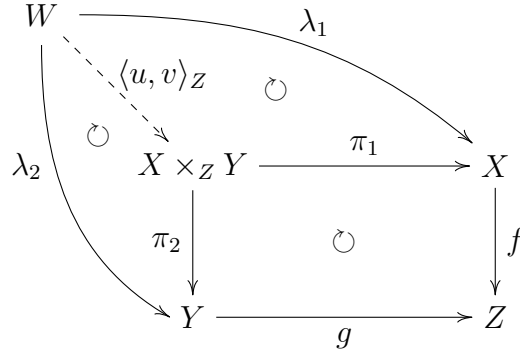


FIGURA 26. Propietat universal del producte fibrat en **Set**.

Vegem com es defineix el producte fibrat en **Type**.

EXEMPLE 4.18 (Producte fibrat en **Type**). El codi es troba en l'apèndix, és el de la Figura (1.3).

Gràcies a tindre els límits que hem vist, en **Set** i en **Type**, aquestes categories tenen tots els límits per a qualsevol diagrama sobre una categoria xicoteta d'índexs. Més avant enunciem aquest resultat.

3. Exemples de colímits

En aquesta secció anem a presentar les definicions duals per als límits que hem estudiat en l'anterior secció. També, vorem les construccions concretes dels colímits en les categories **Set** i **Type**. Per a la part de conjunts, seguirem basant-nos en la referència [Vid10].

3.1. Coproducte.

DEFINICIÓ 4.19 (Coproducte). Considerem J una categoria discreta (Exemple 2.3). Així, un diagrama $F: J \longrightarrow C$ és una col·lecció d'objectes en C indexada per J , és a dir, $(F(j))_{j \in J}$. Un con sobre este diagrama (cocon) amb nadir Z (objecte en C) és una transformació natural $\lambda: F \Longrightarrow K^Z$. Recordem que $\lambda = (\lambda^j)_{j \in J}$, on $\lambda^j: F(j) \longrightarrow Z$ és un morfisme en C . És a dir, un con sobre F amb nadir Z és una

família J –indexada $(\lambda^j: F(j) \longrightarrow Z)_{j \in J}$, satisfent que el diagrama de la Figura (27) commuta.

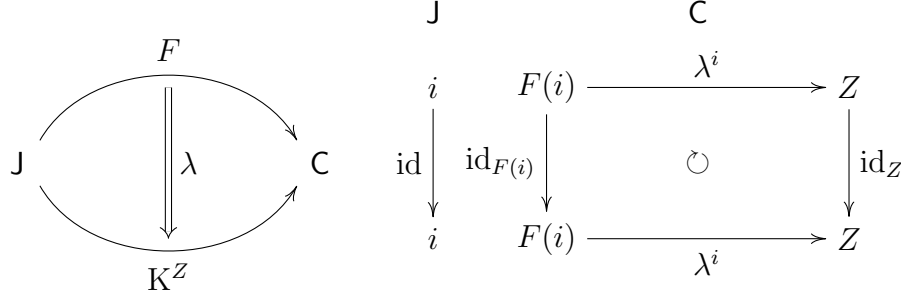


FIGURA 27. Transformació natural α que defineix un con amb nadir Z i el seu diagrama de naturalitat.

Però, notem que açò és una condició buida, no cal imposar res. Per tant, un con sobre F amb nadir Z és una família de morfismes $(\lambda^j: F(j) \longrightarrow Z)_{j \in J}$.

El diagrama $F: J \longrightarrow C$ té colímit si, i només si, existeix un objecte inicial en $\int_C \text{Cons}(F, -)$. Recordem que $\int_C \text{Cons}(F, -)$ és la categoria que té com a objectes parells de la forma (C, X) , on C és objecte de C i X és un con en $\text{Cons}(F, C)$, i morfismes $f: (C, X) \longrightarrow (D, Y)$, amb f un morfisme en C , de C a D satisfent $\text{Cons}(F, f)(X) = Y$. Un objecte (C, X) és inicial en $\int_C \text{Cons}(F, -)$ si per a tot altre parell (D, Y) en $\int_C \text{Cons}(F, -)$ existeix un únic morfisme $f: (C, X) \longrightarrow (D, Y)$ en $\int_C \text{Cons}(F, -)$.

Per al cas que ens ocupa, si existeix el colímit, es denota per $\coprod_{j \in J} F(j)$, que és un objecte concret de C i s'anomena **coproducte de la família** $(F(j))_{j \in J}$. Ha d'anar acompanyat d'una elecció de cocon concreta, en aquest cas són les anomenades **inclusions** o injeccions, de la família $(F(j))_{j \in J}$:

$$(\iota_j: F(j) \longrightarrow \coprod_{j \in J} F(j))_{j \in J}.$$

Així, el colímit és la tupla $(\coprod_{j \in J} F(j), (\iota_j: F(j) \longrightarrow \coprod_{j \in J} F(j))_{j \in J})$.

Recordem que ser inicial en $\int_C \text{Cons}(F, -)$ significa que si ens donen un objecte Z de C i una elecció concreta λ de con sobre F amb nadir Z , és a dir, si (Z, λ) pertany a $\int_C \text{Cons}(F, -)$, aleshores per la condició de ser inicial per a $(\coprod_{j \in J} F(j), (\iota_j: F(j) \longrightarrow \coprod_{j \in J} F(j))_{j \in J})$, existeix un únic morfisme en C , $!: \coprod_{j \in J} F(j) \longrightarrow Z$, tal que $\text{Cons}(F, !)(\lambda) = \iota$. És a dir, el diagrama de la Figura (28) commuta.

En **Set** i en **Type** existeixen els coproductes. A continuació, vegem com es defineix el coproducte en **Set**.

EXEMPLE 4.20 (Coproducte en **Set**). Com ja hem dit, en **Set** els coproductes arbitraris sobre conjunts d'índexs arbitraris existeixen. Siga

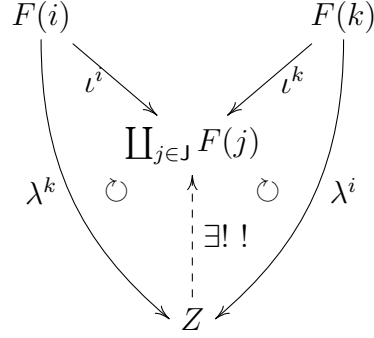


FIGURA 28. Propietat universal del coproducte.

J un conjunt d'índexs i siga $\{A_j \mid j \in J\}$ una família de conjunts. Es defineix el seu coproducte com:

$$\coprod_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} (A_j \times \{j\}).$$

Per a cada índex $j \in J$, es té l'aplicació anomenada inclusió j -èssima:

$$\begin{aligned} \iota_j: A_j &\longrightarrow \coprod_{j \in J} A_j \\ a &\longmapsto (a, j). \end{aligned}$$

El coproducte de conjunts té la següent propietat universal: Per a $\{A_j \mid j \in J\}$, el conjunt $\coprod_{j \in J} A_j$ satisfà que, per a tot altre conjunt Z i tota altra família d'aplicacions $(\lambda_j: A_j \longrightarrow Z)_{j \in J}$, existeix una única aplicació $[\lambda_j]_{j \in J}: \coprod_{j \in J} A_j \longrightarrow Z$ que satisfà $[\lambda_j]_{j \in J} \circ \iota_j = \lambda_j$, per a tot $j \in J$. Aquesta aplicació es defineix com segueix

$$\begin{aligned} [\lambda_j]_{j \in J}: \coprod_{j \in J} A_j &\longrightarrow Z \\ (a, j) &\longmapsto [\lambda_j]_{j \in J}(a, j) \end{aligned}$$

Per a cada $(a, j) \in \coprod_{j \in J} A_j$, es defineix $[\lambda_j]_{j \in J}(a, j)$ de la següent manera:

$$\begin{aligned} [\lambda_j]_{j \in J}(a, j): \coprod_{j \in J} A_j &\longrightarrow Z \\ (a, j) &\longmapsto \lambda_j(a). \end{aligned}$$

És senzill comprovar que està ben definida, satisfà $[\lambda_j]_{j \in J} \circ \iota_j = \lambda_j$, per a tot $j \in J$ i és la única que verifica aquestes condicions.

En la Figura (29) podem veure un exemple concret del coproducte en **Set**, on hem considerat $A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ i les aplicacions:

$$\begin{aligned} \text{in}_A: A &\longrightarrow A \sqcup B & \text{in}_B: B &\longrightarrow A \sqcup B \\ a &\longmapsto (a, 0) & b &\longmapsto (b, 1) \end{aligned}$$

Donat un altre conjunt Z i les aplicacions $f: A \longrightarrow Z$, $g: B \longrightarrow Z$, existeix una única aplicació

$$[f, g]: A \sqcup B \longrightarrow Z$$

$$m \longmapsto \begin{cases} f(a), & m = (a, 0) \\ g(b), & m = (b, 1). \end{cases}$$

Es pot veure que el colímit és $(A \sqcup B, (\text{in}_A, \text{in}_B))$.

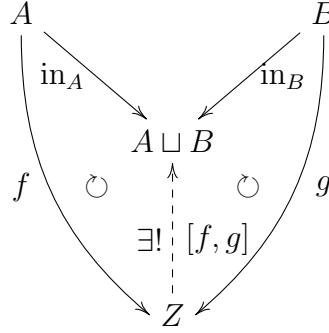


FIGURA 29. Propietat universal del coproducte, exemple concret per al coproducte de dos conjunts.

Vegem com es defineix el coproducte en **Type**.

EXEMPLE 4.21 (Coproducte en **Type**). El codi es troba en l'apèndix, és el de la Figura (1.4).

De la mateixa forma que hem introduït el coproducte, presentem ara la noció de coigualador.

3.2. Coigualador.

DEFINICIÓ 4.22 (Coigualador). Considerem la categoria **J** de **parell paral·lel**. És la categoria que té dos objectes, 0 i 1, i dos morfismes paral·lels, és a dir, amb mateix domini i mateix codomini. Com que no importa el nom que tinguen, només escrivim fletxes.

$$0 \rightrightarrows 1$$

FIGURA 30. La categoria de parell paral·lel **J**.

Així, un diagrama $F: \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{C}$ consisteix simplement en donar dos objectes X i Y en $\mathbf{C}$, juntament amb dos morfismes paral·lels, $f, g: X \longrightarrow Y$. Un con sobre este diagrama amb nadir Z (objecte en $\mathbf{C}$) és una transformació natural $\lambda: F \Longrightarrow K^Z$. Recordem que $\lambda = (\lambda^j)_{j \in \mathbf{J}}$, on $\lambda^j: F(j) \longrightarrow Z$ és un morfisme en $\mathbf{C}$. És a dir, un

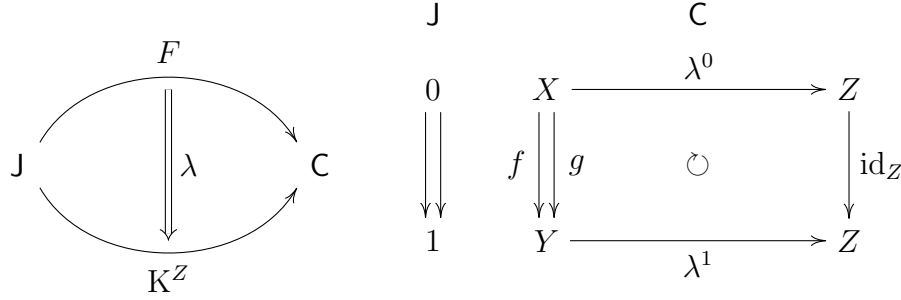


FIGURA 31. Transformació natural λ i el seu diagrama de naturalitat.

con sobre F amb nadir Z ve donat per dos morfismes, $\lambda^0: X \rightarrow Z$ i $\lambda^1: Y \rightarrow Z$ que satisfan que el diagrama de la Figura (31) commuta.

Que el diagrama de la Figura (31) commute vol dir que $\lambda^1 \circ f = \lambda^0$ i $\lambda^1 \circ g = \lambda^0$, que ho podem resumir dient que s'ha de verificar $\lambda^1 \circ f = \lambda^1 \circ g$. Per tant, donar un con sobre F amb nadir Z és equivalent a donar un morfisme $h: Y \rightarrow Z$ tal que $h \circ f = h \circ g$.

El diagrama $F: J \rightarrow C$ té colímit si, i només si, existeix un objecte inicial en $\int_C \text{Cons}(F, -)$. Recordem que $\int_C \text{Cons}(F, -)$ és la categoria que té com a objectes parells de la forma (C, X) , on C és objecte de C i X és un con en $\text{Cons}(F, C)$, i morfismes $f: (C, X) \rightarrow (D, Y)$, amb f un morfisme en C , de C a D satisfent $\text{Cons}(F, f)(X) = Y$. Un objecte (C, X) és inicial en $\int_C \text{Cons}(F, -)$ si per a tot altre parell (D, Y) en $\int_C \text{Cons}(F, -)$ existeix un únic morfisme $f: (C, X) \rightarrow (D, Y)$ en $\int_C \text{Cons}(F, -)$.

Per al cas que ens ocupa, si existeix el colímit, es denota per $\text{CoEq}(f, g)$, anomenat **coigualador** d' f i g , juntament amb el morfisme anomenat **projecció canònica**:

$$\pi: Y \rightarrow \text{CoEq}(f, g).$$

Així, el colímit és $(\text{CoEq}(f, g), \pi)$.

Recordem que ser inicial en $\int_C \text{Cons}(F, -)$ significa que si ens donen un objecte Z de C i una elecció concreta λ de con sobre F amb nadir Z (que hem vist que és equivalent a donar un morfisme $h: Y \rightarrow Z$ tal que $h \circ f = h \circ g$), és a dir, si (Z, λ) pertany a $\int_C \text{Cons}(F, -)$, aleshores per la condició de ser inicial per a $(\text{CoEq}(f, g), \pi)$, existeix un únic morfisme en C , $!: \text{CoEq}(f, g) \rightarrow Z$, tal que $\text{Cons}(F, !)(\lambda) = \pi$. És a dir, el diagrama de la Figura (32) commuta.

En **Set** i en **Type** existeixen els coigualadors. A continuació, vegem com es defineix el coigualador en **Set**.

EXEMPLE 4.23 (Coigualador en **Set**). Com ja hem dit, en **Set** els coigualadors existeixen. Siguen X, Y conjunts i $f: X \rightarrow Y$ i $g: X \rightarrow Y$ aplicacions paral·leles (tenim un diagrama $F: J \rightarrow \text{Set}$).

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow[f]{g} & Y & \xrightarrow{\pi} & \text{CoEq}(f, g) \\
& & \searrow h & \circlearrowleft & \downarrow \exists! \\
& & & & Z
\end{array}$$

FIGURA 32. Propietat universal del coigualador.

Definim $\theta_{f,g}$ com la mínima relació d'equivalència en Y que relaciona $f(x)$ i $g(x)$ per a tot $x \in X$. Es defineix el seu coigualador com:

$$\text{CoEq}(f, g) = Y/\theta_{f,g}.$$

Juntament amb l'aplicació projecció canònica (notem que té sentit perquè es té que $\text{CoEq}(f, g) \subseteq Y \times Y$):

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{\theta_{f,g}}: & Y & \longrightarrow \text{CoEq}(f, g) \\
& y & \longmapsto [y]_{\theta_{f,g}}.
\end{array}$$

Notem que està ben definida i que òbviament es té que $\pi_{\theta_{f,g}} \circ f = \pi_{\theta_{f,g}} \circ g$. El coigualador d' f i g té la següent propietat universal: si Z és un conjunt i $h: Y \longrightarrow Z$ satisfent $h \circ f = h \circ g$, aleshores existeix una única aplicació, que anomenarem $\text{ast}(h)$, l'astricció d' h de $\text{CoEq}(f, g)$ en Z satisfent que $\text{ast}(h) \circ \pi = h$. Aquesta aplicació es defineix com segueix

$$\begin{array}{ccc}
\text{ast}(h): & \text{CoEq}(f, g) & \longrightarrow Z \\
& [y]_{\theta_{f,g}} & \longmapsto h(y).
\end{array}$$

És senzill comprovar que està ben definida, perquè per hipòtesi h compleix $h \circ f = h \circ g$; satisfà que $\text{ast}(h) \circ \pi = h$ i és la única que verifica aquestes condicions.

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow[f]{g} & Y & \xrightarrow{\pi} & \text{CoEq}(f, g) \\
& & \searrow h & \circlearrowleft & \downarrow \text{ast}(h) \\
& & & & Z
\end{array}$$

FIGURA 33. Propietat universal del coigualador en **Set**.

Vegem com es defineix el coigualador en **Type**.

EXEMPLE 4.24 (Coigualador en **Type**). El codi es troba en l'apèndix, és el de la Figura (1.5).

Presentem l'últim exemple de colímit, la suma amalgamada, també anomenada pushout.

3.3. Suma amalgamada.

DEFINICIÓ 4.25 (Suma amalgamada). Considerem la categoria J de **parell d'eixida**. És la categoria que té tres objectes, 0, 1 i 2, i dos morfismes no trivials com els de la Figura (34).

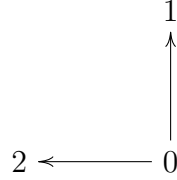


FIGURA 34. La categoria de parell d'eixida J .

Així, un diagrama $F: J \rightarrow C$ consisteix simplement en donar tres objectes X, Y i Z en C , juntament amb tres morfismes d'eixida, $f: Z \rightarrow X$ i $g: Z \rightarrow Y$. Un con sobre este diagrama amb nadir W (objecte en C) és una transformació natural $\lambda: F \Rightarrow K^W$. Recordem que $\lambda = (\lambda^j)_{j \in J}$, on $\lambda^j: F(j) \rightarrow W$ és un morfisme en C . És a dir, un con sobre F amb nadir W ve donat per tres morfismes, $\lambda^0: Z \rightarrow W$, $\lambda^1: X \rightarrow W$ i $\lambda^2: Y \rightarrow W$ que satisfan que el diagrama de la Figura (35) commuta.

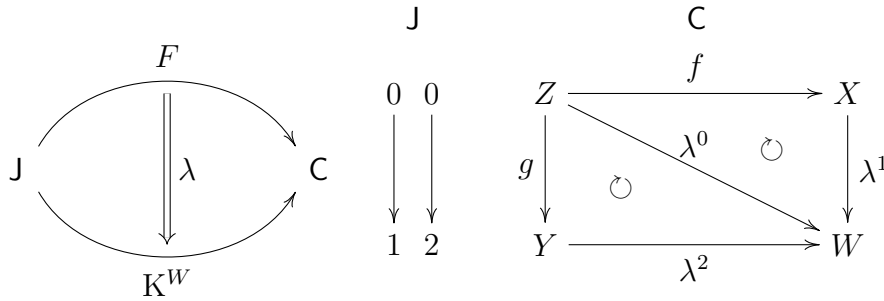


FIGURA 35. Transformació natural λ i el seu diagrama de naturalitat.

Que el diagrama de la Figura (35) commute vol dir que $\lambda^1 \circ f = \lambda^0$ i $\lambda^2 \circ g = \lambda^0$, és a dir, que s'ha de verificar $\lambda^1 \circ f = \lambda^2 \circ g$. Per tant, donar un con sobre F amb nadir W és equivalent a donar dos morfismes $\lambda^1: X \rightarrow W$ i $\lambda^2: Y \rightarrow W$ que satisfan que $\lambda^1 \circ f = \lambda^2 \circ g$.

El diagrama $F: J \rightarrow C$ té colímit si, i només si, existeix un objecte inicial en $\int_C \text{Cons}(F, -)$. Recordem que $\int_C \text{Cons}(F, -)$ és la categoria que té com a objectes parells de la forma (C, X) , on C és objecte de C i X és un con en $\text{Cons}(F, C)$, i morfismes $f: (C, X) \rightarrow (D, Y)$, amb f un morfisme en C , de C a D satisfent $\text{Cons}(F, f)(X) = Y$. Un objecte (C, X) és inicial en $\int_C \text{Cons}(F, -)$ si per a tot altre parell (D, Y)

en $\int_{\mathbf{C}} \text{Cons}(F, -)$ existeix un únic morfisme $f: (C, X) \longrightarrow (D, Y)$ en $\int_{\mathbf{C}} \text{Cons}(F, -)$.

Per al cas que ens ocupa, si existeix el colímit, es denota per $X \amalg_Z Y$, anomenat **suma amalgamada** d' f i g , o pushout d' f i g , juntament amb les comes del con, anomenades **inclusions**:

$$\begin{aligned} \iota_1: X &\longrightarrow X \amalg_Z Y \\ \iota_2: Y &\longrightarrow X \amalg_Z Y. \end{aligned}$$

Així, el colímit és $(X \amalg_Z Y, (\iota_1, \iota_2))$.

Recordem que ser inicial en $\int_{\mathbf{C}} \text{Cons}(F, -)$ significa que si ens donen un objecte W de $\mathbf{C}$ i una elecció concreta de con sobre F amb nadir W , que anomenem (λ_1, λ_2) , és a dir, si $(W, (\lambda_1, \lambda_2))$ pertany a $\int_{\mathbf{C}} \text{Cons}(F, -)$, aleshores per la condició de ser inicial per a $(X \amalg_Z Y, (\iota_1, \iota_2))$, existeix un únic morfisme en $\mathbf{C}$, $!: X \amalg_Z Y \longrightarrow W$, tal que $\text{Cons}(F, !)(\lambda_1, \lambda_2) = (\iota_1, \iota_2)$. És a dir, el diagrama de la Figura (36) commuta.

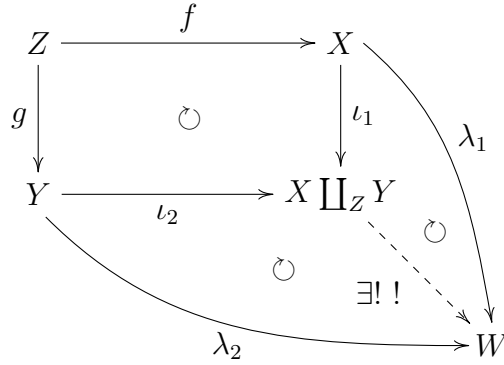


FIGURA 36. Propietat universal del pushout.

En **Set** i en **Type** existeixen les sumes amalgamades. A continuació, vegem com es defineix la suma amalgamada en **Set**.

EXAMPLE 4.26 (La suma amalgamada en **Set**). Com ja hem dit, en **Set** les sumes amalgamades existeixen. Siguen X, Y i Z conjunts i $f: Z \longrightarrow X$ i $g: Z \longrightarrow Y$ aplicacions (tenim un diagrama $F: \mathbf{J} \longrightarrow \text{Set}$).

Definim $\theta_{f,g}$ com la mínima relació d'equivalència en Z que relaciona $\iota_1(f(z))$ i $\iota_2(g(z))$ per a tot $z \in Z$. Es defineix la seua suma amalgamada com segueix

$$X \amalg_Z Y = (X \amalg Y) / \theta_{f,g}.$$

On $X \amalg Y$ és el coproducte d' X i Y , juntament amb les aplicacions inclusions, que són les composicions de les inclusions canòniques de X i Y en $X \amalg Y$ i de les projeccions canòniques $X \amalg Y$ en $X \amalg_Z Y$:

$$\begin{aligned} \iota_1: X &\longrightarrow X \amalg_Z Y & \iota_2: Y &\longrightarrow X \amalg_Z Y \\ x &\longmapsto [(x, 0)]_{\theta_{f,g}} & y &\longmapsto [(y, 1)]_{\theta_{f,g}}. \end{aligned}$$

Òbviament es té que $\iota_1 \circ f = \iota_2 \circ g$, per a tot $z \in Z$, gràcies a $\theta_{f,g}$. La suma amalgamada d' f i g té la següent propietat universal: si W és un conjunt i $\lambda^1: X \rightarrow W$ i $\lambda^2: Y \rightarrow W$ que satisfan que $\lambda^1 \circ f = \lambda^2 \circ g$, aleshores existeix una única aplicació, que anomenarem $[\lambda^1, \lambda^2]_Z$, de $X \amalg_Z Y$ en W satisfent que $[\lambda^1, \lambda^2]_Z \circ \iota_1 = \lambda_1$ i $[\lambda^1, \lambda^2]_Z \circ \iota_2 = \lambda_2$. Aquesta aplicació es defineix com segueix:

$$[\lambda^1, \lambda^2]_Z: X \amalg_Z Y \rightarrow W$$

$$m \mapsto \begin{cases} \lambda_1(x), & m = [(x, 0)]_{\theta_{f,g}} \\ \lambda_2(y), & m = [(y, 1)]_{\theta_{f,g}}. \end{cases}$$

Hem utilitzat l'aplicació de la propietat universal del coproducte per a construir aquesta. És senzill comprovar que està ben definida, gràcies a $\theta_{f,g}$; satisfà que $[\lambda^1, \lambda^2]_Z \circ \iota_1 = \lambda_1$ i $[\lambda^1, \lambda^2]_Z \circ \iota_2 = \lambda_2$, i és la única que verifica aquestes condicions.

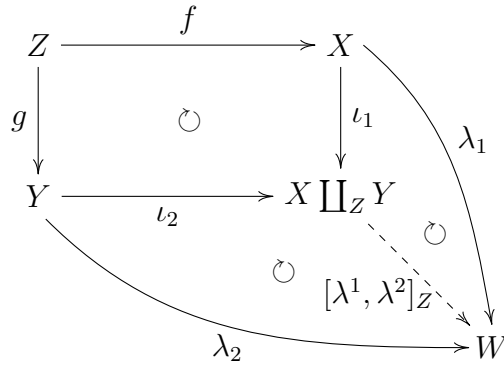


FIGURA 37. Propietat universal de la suma amalgamada en **Set**.

Vegem com es defineix la suma amalgamada en **Type**.

EXEMPLE 4.27 (Suma amalgamada en **Type**). El codi es troba en l'apèndix, és el de la Figura (1.6).

Dualment als límits, gràcies a tindre els colímits que hem vist, en **Set** i en **Type**, aquestes categories tenen tots els colímits per a qualsevol diagrama sobre una categoria xicoteta d'índexs.

4. Categories completes i cocompletes

En aquesta secció presentem alguns resultats interessants de límits i colímits categorials. D'una banda, vegem la unicitat dels límits i colímits. D'altra banda, estudiem l'existència d'aquests. Finalitzem amb un resultat important que enuncia que en les categories **Set** i **Type** existeixen tots els respectius límits i colímits xicotets.

PROPOSICIÓ 4.28 (Unicitat de límits i colímits). *Per a qualsevol diagrama $F: J \longrightarrow C$, si el límit o el colímit existeixen, aleshores són únics trets d'isomorfisme únic.*

DEMOSTRACIÓ. Se segueix de la Definició (4.9) i de la Proposició (3.7). $\square$

Ens podem preguntar si les categories **Set** i **Type**, tenen tots els límits i colímits. Per a enunciar aquest resultat, seran necessàries les següents definicions.

DEFINICIÓ 4.29 (Diagrama menut). Un diagrama es denomina **menut** si està indexat per una categoria xicoteta.

DEFINICIÓ 4.30 (Categoria completa i cocompleta). Una categoria **C** s'anomena **completa** si per a tots els seus diagrames menuts existeixen tots els respectius límits. Dualment, la categoria **C** s'anomena **cocompleta** si per a tots els seus diagrames menuts existeixen tots els respectius colímits.

Enunciem una caracterització fonamental per a la búsqueda de límits i colímits en una categoria donada. No provarem aquests últims resultats, però la demostració es pot vore en [Rie16].

PROPOSICIÓ 4.31. *Una categoria localment xicoteta és completa si, i només si, té productes i igualadors.*

PROPOSICIÓ 4.32. *Una categoria localment xicoteta és cocompleta si, i només si, té coproductes i coigualadors.*

Finalment, presentem els resultats que buscàvem.

COROLLARI 4.33. La categoria **Set** és completa i cocompleta.

COROLLARI 4.34. La categoria **Type** és completa i cocompleta.

CAPÍTOL 5

Conclusions

Com a conclusió del treball, anem a reflexionar sobre l'assoliment dels objectius i el procés d'aprenentatge realitzats. Respecte als objectius plantejats inicialment, hem aconseguit arribar a entendre i visualitzar els límits i els colímits en Lean i en **Set**, que era el que ens havíem proposat. Per aconseguir-ho, ha sigut necessari exposar els coneixements bàsics de la Teoria de Categories al Capítol 2, que en realitat, és una introducció amena i enriquidora que pot complementar i servir per a qualsevol estudiant del Grau en Matemàtiques. Si bé és cert que a partir d'aquest capítol el seguiment del treball pot resultar costós si no estem familiaritzats amb aquests conceptes i resultats, l'ús dels diagrames i exemples ha sigut fonamental per tal de facilitar la comprensió d'aquestes nocions tan abstractes.

A més d'adquirir els coneixements d'aquesta teoria, hem pogut comprendre millor altres àrees de les Matemàtiques, com pot ser la topologia, gràcies a les relacions amb altres categories. Més encara, la recerca prèvia per a la realització d'aquest projecte, deixa clar que les possibilitats d'investigació en aquesta àrea són múltiples: l'exploració sobre les implicacions filosòfiques del desenvolupament de la Teoria de Categories; l'estudi d'altres àrees amb perspectiva categòrica, com l'Àlgebra Homològica; desenvolupaments d'aplicacions més pràctiques, com pot ser a la computació... Així mateix, també hem après nous comandaments i hem ampliat la nostra experiència emprant $\text{\LaTeX}$. Per exemple, el paquet **tikzcd** ha jugat un paper fonamental a l'hora de confeccionar les figures d'una forma agradable i neta. Finalment, hem creat un projecte a llarg termini que requereix confeccionar un discurs coherent i adequat al món acadèmic. Per tant, ha sigut una experiència distinta a la resta d'assignatures del Grau, que ens permet iniciar-nos en la redacció d'articles, on s'han de transmetre les nostres idees, intuïcions i cal cercar una bibliografia.

Per concloure, no només hem estudiat els conceptes de límit i colímit de forma abstracta, sinó que els hem particularitzat al cas de la categoria de conjunts que, en gran part són els límits més coneguts per tothom, i en la categoria de tipus, que ens ha permès implantar els resultats a l'ordinador. A més, hem vist que són categories completes i cocompletes. D'altra banda, cal esmentar que el Capítol 3 ha sigut el més costós d'entendre i escriure, però ha resultat ser essencial per al nostre estudi, i en general per a la búsqueda de límits i colímits en

qualsevol categoria. En [Rie16] es poden estudiar aquests conceptes en altres categories, com la dels espais topològics, però també altres conceptes de gran interès que s'escapen a l'abast d'aquest treball, i es poden veure des d'altres aplicacions i perspectives.

CAPÍTOL 6

Apèndix

1. Codi en LEAN

1.1. Producte.

```
1 -- Definim un tipus I que fa d'index
2 variable (I : Type)
3 -- Llavors una familia de tipus indexada per I es una
  variable
4 variable (X : I → Type)
5 -- Donat un element del producte podem considerar la
  projeccio a la component i-essima
6 def π {I : Type} {X : I → Type} (i : I) : (∀(i:I), X i)
  → X i := by
7   intro f
8   exact f i
9 -- En la categoria de Tipus, el producte verifica la
  Propietat Universal
10 def PUniv {I Z : Type} X : I → Type} f : ∀(i:I), Z →
  X i ) : Z → (∀(i:I), X i) := by
11   intro z
12   intro i
13   exact f i z
14 -- Comprovem que l'aplicacio esta ben definida i fa que
  el diagrama commute
15 theorem TComm {I Z : Type} X : I → Type} f : ∀(i:I), Z
  → X i ) (i : I) : (π i) ∘ (PUniv f = f i := by
16   apply funext
17   intro z
18   exact rfl
19 -- Comprovem que l'aplicacio PUniv es la unica que
  satisfi les condicions anteriors per a tot i en I
20 theorem TUniv {I Z : Type} X : I → Type} f : ∀(i:I), Z
  → X i ) (h : Z → (∀(i:I), X i)) (hi : ∀(i:I) , (π
  i) ∘ h = f i) : h = PUniv f := by
21   apply funext
22   intro z
23   apply funext
24   intro i
25   specialize hi i
26   calc
27     h z i = (π i ∘ h) z := by exact rfl
```

```

28   _ = f i) z := by exact congrFun hi z
29   _ = PUniv f z i := by exact rfl
30 -- Així, hem comprovat que el producte es un limit en la
    categoria de Tipus (el limit es el parell format per
    el producte i l'aplicació  $\pi$ ).

```

1.2. Igualador.

```

1 -- Definim l'igualador com
2 def Ig {X Y: Type} (f: X → Y) (g: X → Y) : Type :=
3   {x : X // f x = g x}
4 -- Donat un element de l'igualador, podem definir l'
    aplicació inclusió com
5 def inc {X Y: Type} (f g: X → Y): (Ig f g) → X := by
6   intro h
7   exact h.val
8 -- Demostrem que el diagrama commuta, es a dir, el con
    esta ben definit
9 theorem TCon {X Y: Type} {f g: X → Y}: f ∘ (inc f g) =
    g ∘ (inc f g) := by
10  apply funext
11  intro x
12  calc
13    (f ∘ inc f g) x = f x.val :=by exact rfl
14    _ = g x.val := by exact x.property
15    _ = (g ∘ inc f g) x := by exact rfl
16 -- En la categoria de Tipus, l'igualador verifica la
    Propietat Universal.
17 def PUniv {X Y: Type} {f g: X → Y} {Z: Type} (h: Z → X
    ) (h1: f ∘ h = g ∘ h): Z → Ig f g:= by
18  intro z
19  apply Subtype.mk (h z)
20  calc
21    f (h z) = (f ∘ h) z := by exact rfl
22    _ = (g ∘ h) z := by exact congrFun h1 z
23    _ = g (h z) := by exact rfl
24 -- Comprovem que l'aplicació esta ben definida i,
    efectivament, fa que el diagrama commute
25 theorem TComm {X Y: Type} {f g: X → Y} (Z: Type) (h: Z
    → X) (h1: f ∘ h = g ∘ h): inc f g ∘ PUniv h h1 = h:=
    by
26  apply funext
27  intro z
28  exact rfl
29 -- Vegem que PUniv es la única aplicació que satisfi les
    anteriors condicions
30 theorem TUniv {X Y: Type} {f g: X → Y} (Z: Type) (h: Z
    → X) (h1: f ∘ h = g ∘ h) (l: Z → Ig f g) (h2: inc f
    g ∘ l = h): l = PUniv h h1:= by

```

```

31   apply funext
32   intro z
33   apply Subtype.eq
34   calc
35     (l z).val = (inc f g ∘ l) z := by exact rfl
36     _ = h z := by exact congrFun h2 z
37     _ = (PUniv h h1 z).val := by exact rfl
38 -- Així, hem comprovat que el igualador es un limit en la
   categoria de Tipus (el limit es el parell format per
   l'igualador i l'aplicació inc).

```

1.3. Producte fibrat.

```

1  -- Definim el producte fibrat com
2  def ProdFib {X Y Z: Type} (f: X → Z) (g: Y → Z) :=
3    {p : X × Y // f p.1 = g p.2}
4    -- p de parell
5  -- Donat un element del producte fibrat, podem definir la
   projecció a la primera component com
6  def π1 {X Y Z: Type} (f: X → Z) (g: Y → Z): ProdFib f
   g → X := by
7    intro p
8    exact p.val.1
9  -- Donat un element del producte fibrat, podem definir la
   projecció a la segona component com
10 def π2 {X Y Z: Type} (f: X → Z) (g: Y → Z): ProdFib f
   g → Y := by
11   intro p
12   exact p.val.2
13 -- Demostrem que el diagrama commuta, es a dir, el con
   esta ben definit
14 theorem TCon {X Y Z: Type} (f: X → Z) (g: Y → Z): f ∘
   π1 f g = g ∘ π2 f g := by
15   apply funext
16   intro p
17   calc
18     (f ∘ π1 f g) p = f p.val.1 := by exact rfl
19     _ = g p.val.2 := by exact p.property
20     _ = (g ∘ π2 f g) p := by exact rfl
21 -- En la categoria de Tipus, el producte fibrat verifica
   la Propietat Universal
22 def PUniv {X Y Z W: Type} (f: X → Z) (g: Y → Z) (h1: W
   → X) (h2: W → Y) (h3: f ∘ h1 = g ∘ h2): W →
   ProdFib f g := by
23   intro w
24   apply Subtype.mk (h1 w, h2 w) -- demos propietat
25   calc
26     f (h1 w, h2 w).fst = (f ∘ h1) w := by exact rfl
27     _ = (g ∘ h2) w := by exact congrFun h3 w

```

```

28   _ = g (h1 w, h2 w).snd := by exact rfl
29 -- Comprovem que les aplicacions projeccio estan ben
    definides i fan que el diagrama commute
30 theorem TComm1 {X Y Z W: Type} (f: X → Z) (g: Y → Z) (
    h1: W → X) (h2: W → Y) (h3: f ∘ h1 = g ∘ h2):  $\pi_1$  f
    g ∘ PUniv f g h1 h2 h3 = h1 := by
31   apply funext
32   intro w
33   exact rfl
34 theorem TComm2 {X Y Z W: Type} (f: X → Z) (g: Y → Z) (
    h1: W → X) (h2: W → Y) (h3: f ∘ h1 = g ∘ h2):  $\pi_2$  f
    g ∘ PUniv f g h1 h2 h3 = h2 := by
35   apply funext
36   intro w
37   exact rfl
38 -- Vegem que PUniv es la unica aplicacio que satisfi les
    anteriors condicions
39 theorem TUniv {X Y Z W: Type} (f: X → Z) (g: Y → Z) (
    h1: W → X) (h2: W → Y) (h3: f ∘ h1 = g ∘ h2) (l: W
    → ProdFib f g) (l1:  $\pi_1$  f g ∘ l = h1) (l2:  $\pi_2$  f g ∘ l
    = h2) : l = PUniv f g h1 h2 h3 := by
40   apply funext
41   intro w
42   apply Subtype.eq
43   have h4: (l w).val.1 = (PUniv f g h1 h2 h3 w).val.1 :=
    by
44     calc
45       (l w).val.fst = ( $\pi_1$  f g ∘ l) w := by exact rfl
46       _ = h1 w := by exact congrFun l1 w
47       _ = (PUniv f g h1 h2 h3 w).val.1 := by exact rfl
48   have h5: (l w).val.2 = (PUniv f g h1 h2 h3 w).val.2 :=
    by
49     calc
50       (l w).val.snd = ( $\pi_2$  f g ∘ l) w := by exact rfl
51       _ = h2 w := by exact congrFun l2 w
52       _ = (PUniv f g h1 h2 h3 w).val.2 := by exact rfl
53   exact Prod.ext h4 h5
54 -- Així, hem comprovat que el pullback es un limit en la
    categoria de Tipus (el limit es el parell format pel
    pullback junt a les aplicacions  $\pi_1$  i  $\pi_2$ ).

```

1.4. Coproducte.

```

1 -- Definim un tipus I que fara d'index
2 variable (I : Type)
3 -- Llavors una familia de tipus indexada per I es una
    variable
4 variable ( $\mathbb{X}$  : I → Type)

```

```

5 -- El coproducte de la familia  $\mathbb{X}$  es denota com  $\sum(i:I), \mathbb{X}$ 
   i
6 -- Donat un element d'una component podem considerar la
   inclusio i-essima
7 def  $\iota$  {I : Type} { $\mathbb{X}$  : I  $\rightarrow$  Type} (i : I) :  $\mathbb{X}$  i  $\rightarrow$  ( $\sum(i$  :
   I),  $\mathbb{X}$  i) := by
8   intro x
9   exact  $\langle i, x \rangle$ 
10 -- En la categoria de Tipus, el coproducte verifica la
    Propietat Universal
11 def PUniv {I Z : Type} { $\mathbb{X}$  : I  $\rightarrow$  Type} (f :  $\forall(i:I), \mathbb{X}$  i
     $\rightarrow$  Z) : ( $\sum(i:I), \mathbb{X}$  i)  $\rightarrow$  Z := by
12   intro  $\langle i, x \rangle$ 
13   exact f i x
14 -- Comprovem que l'aplicacio esta ben definida i fa que
    el diagrama commute
15 theorem TComm {I Z : Type} { $\mathbb{X}$  : I  $\rightarrow$  Type} (f :  $\forall(i:I), \mathbb{X}$ 
    i  $\rightarrow$  Z) (i : I) : (PUniv f)  $\circ$  ( $\iota$  i) = f i := by
16   apply funext
17   intro z
18   exact rfl
19 -- Comprovem que l'aplicacio PUniv es la unica que
    satisfi les condicions anteriors per a tot i en I
20 theorem TUniv {I Z : Type} { $\mathbb{X}$  : I  $\rightarrow$  Type} (f :  $\forall(i:I),$ 
     $\mathbb{X}$  i  $\rightarrow$  Z) (h : ( $\sum(i:I), \mathbb{X}$  i)  $\rightarrow$  Z) (hi :  $\forall(i:I),$ 
    h  $\circ$  ( $\iota$  i) = f i) : h = PUniv f := by
21   apply funext
22   intro  $\langle i, x \rangle$ 
23   calc
24     h { fst := i, snd := x } = (h  $\circ$  ( $\iota$  i)) x := by exact
    rfl
25     _ = (f i) x := by exact congrFun (hi i) x
26     _ = PUniv f { fst := i, snd := x } := by exact rfl
27 -- Aixi, hem comprovat que el coproducte es un colimit en
    la categoria de Tipus (el colimit es el parell
    format pel coproducte i l'aplicacio  $\iota$ ).

```

1.5. Coigualador.

```

1 import Mathlib.data.setoid.basic
2 -- Paquet per a emprar el quocient
3 -- Definim la minima relacio d'equivalencia que conte una
    relacio donada
4 inductive Eqvgen {X : Type} (R : X  $\rightarrow$  X  $\rightarrow$  Prop) : X  $\rightarrow$ 
    X  $\rightarrow$  Prop where
5   | base :  $\forall \{x y : X\}, R x y \rightarrow Eqvgen R x y$ 
6   | rfl :  $\forall (x : X), Eqvgen R x x$ 
7   | sim :  $\forall \{x y : X\}, Eqvgen R x y \rightarrow Eqvgen R y x$ 

```

```

8 | trans :  $\forall \{x\ y\ z : X\}, \text{Eqvgen } R\ x\ y \longrightarrow \text{Eqvgen } R\ y\ z$ 
   $\longrightarrow \text{Eqvgen } R\ x\ z$ 
9 -- Definim  $\theta$  de forma que ens relaciona  $f(x)$  i  $g(x)$  per a
  tot  $x$  en el tipus  $X$ 
10 def  $\theta \{X\ Y : \text{Type}\} (f : X \longrightarrow Y) (g : X \longrightarrow Y) : Y \longrightarrow Y \longrightarrow$ 
  Prop := by
11   intro y1 y2
12   exact  $\exists (x : X), (y1 = f\ x \wedge y2 = g\ x)$ 
13 -- Ara, definim la relacio d'equivalencia  $\Theta$ . Es la
  minima relacio d'equivalencia generada per  $\theta$ 
14 def  $\Theta \{X\ Y : \text{Type}\} (f : X \longrightarrow Y) (g : X \longrightarrow Y) : Y \longrightarrow Y \longrightarrow$ 
  Prop := Eqvgen ( $\theta\ f\ g$ )
15 -- Comprovem que, efectivament, es una relacio d'
  equivalencia
16 theorem iseqv  $\{X\ Y : \text{Type}\} (f : X \longrightarrow Y) (g : X \longrightarrow Y) :$ 
  Equivalence ( $\Theta\ f\ g$ ) := by
17   refine { refl := ?refl, symm := ?symm, trans := ?trans
  }
18   -- cas reflexiu
19   exact Eqvgen.rfl
20   -- cas simetric
21   exact Eqvgen.sim
22   -- cas transitiu
23   exact Eqvgen.trans
24 -- Un setoid es un parell  $(\Omega, R)$  on  $\Omega$  es un tipus i  $R$  una
  relacio d'equivalencia sobre  $\Omega$ .
25 -- Definim el setoide com  $Y$  el nostre tipus i  $\Theta$  la
  relacio sobre  $Y$ 
26 def Setoide  $\{X\ Y : \text{Type}\} (f : X \longrightarrow Y) (g : X \longrightarrow Y) : \text{Setoid}$ 
  Y := by
27   apply Setoid.mk ( $\Theta\ f\ g$ ) (iseqv  $f\ g$ )
28 -- Definim el coigualador com el quotient de  $Y$  per la
  relacio d'equivalencia  $\Theta$ 
29 def CoIg  $\{X\ Y : \text{Type}\} (f : X \longrightarrow Y) (g : X \longrightarrow Y) : \text{Type} :=$ 
  Quotient (Setoide  $f\ g$ )
30 -- Donat un element d' $Y$ , podem considerar la projeccio
  canonica al coigualador
31 def proj  $\{X\ Y : \text{Type}\} (f\ g : X \longrightarrow Y) : Y \longrightarrow (\text{CoIg } f\ g) :=$ 
  by
32   intro y
33   exact Quotient.mk (Setoide  $f\ g$ ) y
34 -- Demostrem que el diagrama commuta, es a dir, el cocon
  esta ben definit
35 theorem TCocon  $\{X\ Y : \text{Type}\} \{f\ g : X \longrightarrow Y\} : (\text{proj } f\ g) \circ f$ 
  = ( $\text{proj } f\ g$ )  $\circ g$  := by
36   apply funext
37   intro x
38   apply Quotient.sound

```

```

40   apply Eqvgen.base
41   use x
42 -- En la categoria de Tipus, el coigualador verifica la
   Propietat Universal.
43 -- Per a poder definir l'aplicacio de la propietat
   universal, necessitem definir previamente
44 -- com es defineix una aplicacio d'un quocient a un tipus
   Z
45 -- Comencem per definir el nucli, tambe anomenat Kernel,
   d'una aplicacio h
46 def Ker {X Y: Type} (h: X → Y): X → X → Prop := by
47   intro x1 x2
48   exact h x1 = h x2
49 -- Comprovem que pertanyer al nucli d'una aplicacio es
   una relacio d'equivalencia
50 theorem KerEquiv {X Y: Type} (h: X → Y): Equivalence (
   Ker h) := by
51   refine { refl := ?refl, symm := ?symm, trans := ?trans
   }
52   -- reflexiva
53   intro x
54   exact rfl
55   -- simetrica
56   intro x1 x2
57   intro h1
58   exact h1.symm
59   -- transitiva
60   intro x1 x2 x3
61   intro h1 h2
62   exact h1.trans h2
63 -- Comprovem que si ens donen un cocon (equivalent a
   donar h de forma que  $h \circ f = h \circ g$ ), aleshores
64 --  $f(x)$  i  $g(x)$  es troben al nucli d'h
65 theorem PUniv1 {X Y: Type} {f g: X → Y} {Z: Type} (h: Y
   → Z) (h1:  $h \circ f = h \circ g$ ):  $\forall x: X, (Ker h) (f x) (g$ 
   x) := by
66   intro x
67   rw [Ker]
68   calc
69     h (f x) = (h ∘ f) x := by exact rfl
70     _ = (h ∘ g) x := by exact congrFun h1 x
71     _ = h (g x) := by exact rfl

```

```

72 -- Comprovem que si dos tipus pertanyen a la mateixa
    classe en el coigualador, aleshores van a tindre la
    mateixa imatge amb l'aplicacio que intentem definir.
    Es a dir, estem comprovant que definir l'aplicacio
    aixi fara que estiga ben definida, ja que si estan
    relacionades per  $\Theta$ , pel Kernel d'h tambe ho estaran,
    es a dir, efectivament,  $\Theta$  es la minima relacio d'
    equivalencia que relaciona f(x) i g(x)
73 theorem PUniv2 {X Y: Type} {f g: X  $\longrightarrow$  Y} {Z: Type} (h: Y
     $\longrightarrow$  Z) (h1: h  $\circ$  f = h  $\circ$  g):  $\forall$  (y1 y2: Y), (( $\Theta$  f g) y1
    y2)  $\longrightarrow$  ((Ker h) y1 y2) := by
74   intro y1 y2
75   intro h2
76   induction h2
77   -- cas base
78   rename_i y3 y4 h2
79   rw [0] at h2
80   apply Exists.elim h2
81   intro x
82   intro < h3, h4 >
83   rw [h3, h4]
84   exact PUniv1 h h1 x
85   -- cas refl
86   rename_i y3
87   exact rfl
88   -- cas sim
89   rename_i y3 y4 h2 h3
90   exact Equivalence.symm (KerEquiv h) h3
91   -- cas transitiu
92   rename_i y3 y4 y5 h2 h3 h4 h5
93   exact Equivalence.trans (KerEquiv h) h4 h5
94 -- Definim un setoide com X el nostre tipus i pertanyer
    al Kernel, la relacio sobre X
95 def SKer {X Y: Type}(h: X  $\longrightarrow$  Y) : Setoid X := by
96   apply Setoid.mk (Ker h) (KerEquiv h)
97 -- Definim el quocient QKer de X per la relacio d'
    equivalencia del Kernel
98 def QKer {X Y: Type}(h: X  $\longrightarrow$  Y) : Type :=
99   Quotient (SKer h)
100 -- Definirem l'aplicacio PUniv del Coigualador a un tipus
    Z, la que estem buscant per vore que efectivament,
    el coigualador te la propietat universal, com la
    composicio de dos aplicacions.

```

```

101 -- La primera es la inclusio del coigualador en el Kernel
    d'h, ho vorem en Puniv3. Ho podem fer perquè  $\Theta$  es la
    mínima relació entre  $f(x)$  i  $g(x)$ , vist en PUniv2. La
    segona es la que tractem de definir ara, volem
    establir una aplicació entre el Kernel i un tipus
    donat  $Z$ , de forma que enviï una classe  $[b]$  en el
    Kernel d'h (siguent  $h: X \rightarrow Z$ ) a  $h(b)$ , i així veiem
    que està ben definida
102 def Mon {X Y: Type}(h: X  $\rightarrow$  Y) : (QKer h)  $\rightarrow$  Y := by
103   intro cx
104   have h1 :  $\forall$  (x1 x2: X), ((SKer h).r x1 x2)  $\rightarrow$  (h x1 =
    h x2) := by
105     intro x1 x2 h1
106     exact h1
107   apply Quotient.lift h h1
108   exact cx
109 -- Donat un element d'X, podem considerar la projecció
    canònica al Kernel
110 def projKer {X Y: Type} (h: X  $\rightarrow$  Y): X  $\rightarrow$  (QKer h) := by
111   intro x
112   exact Quotient.mk (SKer h) x
113 -- Com hem dit, definim la primera aplicació es la
    inclusió del coigualador en el Kernel d'h
114 def PUniv3 {X Y: Type} {f g: X  $\rightarrow$  Y} {Z: Type} (h: Y  $\rightarrow$ 
    Z) (h1: h  $\circ$  f = h  $\circ$  g): CoIg f g  $\rightarrow$  (QKer h) := by
115   intro cy
116   have h1 :  $\forall$  (y1 y2: Y), ((Setoide f g).r y1 y2)  $\rightarrow$  (
    projKer h y1 = projKer h y2) := by
117     intro y1 y2
118     intro h2
119     have h3 : (( $\Theta$  f g) y1 y2) := by exact h2
120     have h4 : ((Ker h) y1 y2) := by exact PUniv2 h h1 y1
    y2 h2
121     apply Quotient.sound
122     exact h4
123   apply Quotient.lift (projKer h) h1
124   exact cy
125 -- Ja podem definir la PUniv que busquem, que és la
    composició de Mon i PUniv3
126 def PUniv {X Y: Type} {f g: X  $\rightarrow$  Y} {Z: Type} (h: Y  $\rightarrow$  Z)
    (h1: h  $\circ$  f = h  $\circ$  g): CoIg f g  $\rightarrow$  Z := (Mon h)  $\circ$  (
    PUniv3 h h1)
127 -- Comprovem que l'aplicació estigui ben definida i,
    efectivament, fa que el diagrama commut
128 theorem TComm {X Y: Type} {f g: X  $\rightarrow$  Y} (Z: Type) (h: Y
     $\rightarrow$  Z) (h1: h  $\circ$  f = h  $\circ$  g): PUniv h h1  $\circ$  proj f g = h :=
    by
129   apply funext

```

```

130   intro y
131   exact rfl
132 -- Vegem que PUniv es la unica aplicacio que satisfi les
    anteriors condicions
133 theorem TUniv {X Y: Type} {f g: X → Y} (Z: Type) (h: Y
    → Z) (h1: h ∘ f = h ∘ g) (l: CoIg f g → Z) (h2: l ∘
    proj f g = h): l = PUniv h h1:= by
134   apply funext
135   intro cy
136   have h3 : ∃ (y : Y), Quotient.mk (Setoide f g) y = cy
    := by
137     exact Quot.exists_rep cy
138   apply Exists.elim h3
139   intro y
140   intro h4
141   rw [h4.symm]
142   calc
143     l (Quotient.mk (Setoide f g) y) = l ((proj f g) y)
    := by exact rfl
144     _ = (l ∘ proj f g) y := by exact rfl
145     _ = h y := by exact congrFun h2 y
146     _ = PUniv h h1 (Quotient.mk (Setoide f g) y) := by
    exact rfl
147 -- Així, hem comprovat que el coigualador es un colimit
    en la categoria de Tipus (el colimit es el parell
    format pel coigualador i l'aplicacio proj)

```

1.6. Suma amalgamada.

```

1 import Mathlib.data.setoid.basic
2 -- Paquet per a emprar el quocient
3 -- Definim la minima relacio d'equivalencia que conte una
    relacio donada
4 inductive Eqvgen {X : Type} (R : X → X → Prop) : X →
    X → Prop where
5   | base : ∀ {x y: X}, R x y → Eqvgen R x y
6   | rfl : ∀ (x:X), Eqvgen R x x
7   | sim : ∀ {x y:X}, Eqvgen R x y → Eqvgen R y x
8   | trans : ∀ {x y z: X}, Eqvgen R x y → Eqvgen R y z
    → Eqvgen R x z
9 -- Definim θ de forma que ens relaciona ι1(f(x)) i ι2(g(x))
    per a tot x en el tipus X, siguent ι1 i ι2 les
    inclusions canoniques de X i Y al coproducte de X i Y
    , respectivament.
10 -- Notem que hem denotat al coproducte de X i Y com Sum X
    Y
11 def θ {X Y Z: Type} (f: Z → X) (g: Z → Y) : Sum X Y
    → Sum X Y → Prop := by
12   intro w1 w2

```

```

13   exact  $\exists (z : Z), (w1 = \text{Sum.inl } (f \ z) \ \wedge \ w2 = \text{Sum.inr } (g$ 
       $z))$ 
14 -- Ara, definim la relacio d'equivalencia  $\Theta$ . Es la
      minima relacio d'equivalencia generada per  $\theta$ .
15 def  $\Theta \{X \ Y \ Z : \text{Type}\} (f : Z \longrightarrow X) (g : Z \longrightarrow Y) : \text{Sum } X \ Y$ 
       $\longrightarrow \text{Sum } X \ Y \longrightarrow \text{Prop} := \text{Eqvgen } (\theta \ f \ g)$ 
16 -- Comprovem que, efectivament, es una relacio d'
      equivalencia
17 theorem iseqv  $\{X \ Y \ Z : \text{Type}\} (f : Z \longrightarrow X) (g : Z \longrightarrow Y) :$ 
      Equivalence  $(\Theta \ f \ g) := \text{by}$ 
18   refine { refl := ?refl, symm := ?symm, trans := ?trans
      }
19   -- cas reflexiu
20   exact Eqvgen.rfl
21   -- cas simetric
22   exact Eqvgen.sim
23   -- cas transitiu
24   exact Eqvgen.trans
25 -- Un setoid es un parell  $(\Omega, R)$  on  $\Omega$  es un tipus i  $R$  una
      relacio d'equivalencia sobre  $\Omega$ .
26 -- Definim el setoide com el coproducte de  $X$  i  $Y$  el
      nostre tipus i  $\Theta$  la relacio sobre aquest
27 def Setoide  $\{X \ Y \ Z : \text{Type}\} (f : Z \longrightarrow X) (g : Z \longrightarrow Y) :$ 
      Setoid  $(\text{Sum } X \ Y) := \text{by}$ 
28   apply Setoid.mk  $(\Theta \ f \ g) (\text{iseqv } f \ g)$ 
29 -- Definim el pushout o suma amalgamada com el quocient
      del coproducte de  $X$  i  $Y$ ,  $\text{Sum } X \ Y$ , per la relacio d'
      equivalencia  $\Theta$ 
30 def SumAm  $\{X \ Y \ Z : \text{Type}\} (f : Z \longrightarrow X) (g : Z \longrightarrow Y) : \text{Type}$ 
      :=
31   Quotient  $(\text{Setoide } f \ g)$ 
32 -- Donat un element de  $\text{Sum } X \ Y$ , podem considerar la
      projeccio canonica al pushout
33 def proj  $\{X \ Y \ Z : \text{Type}\} (f : Z \longrightarrow X) (g : Z \longrightarrow Y) : \text{Sum } X \ Y$ 
       $\longrightarrow \text{SumAm } f \ g := \text{by}$ 
34   intro w
35   exact Quotient.mk  $(\text{Setoide } f \ g) \ w$ 
36 -- Definim les inclusions de  $X$  i  $Y$  al pushout, que seran
      les aplicacions que formen part del colimit, junt amb
      el pushout
37 def  $\iota_1 \{X \ Y \ Z : \text{Type}\} (f : Z \longrightarrow X) (g : Z \longrightarrow Y) : X \longrightarrow$ 
      SumAm  $f \ g := (\text{proj } f \ g) \circ \text{Sum.inl}$ 
38 def  $\iota_2 \{X \ Y \ Z : \text{Type}\} (f : Z \longrightarrow X) (g : Z \longrightarrow Y) : Y \longrightarrow$ 
      SumAm  $f \ g := (\text{proj } f \ g) \circ \text{Sum.inr}$ 
39 -- Demostrem que el diagrama commuta, es a dir, el cocon
      esta ben definit
40 theorem TCocon  $\{X \ Y \ Z : \text{Type}\} \{f : Z \longrightarrow X\} \{g : Z \longrightarrow Y\} : ($ 
       $\iota_1 \ f \ g) \circ f = (\iota_2 \ f \ g) \circ g := \text{by}$ 

```

```

41   apply funext
42   intro z
43   apply Quotient.sound
44   apply Eqvgen.base
45   use z
46 -- En la categoria de Tipus, el pushout verifica la
   Propietat Universal, definim l'aplicacio que ho
   demostra. Definim aquesta aplicacio definint primer
   una aplicacio l de Sum X Y al tipus W, el tipus on
   voliem arribar, de forma que donat un l en el
   coproducte, si l pertany al tipus X, l es de la forma
   l = f(z), aleshores se li assigna el valor h1(f(z)),
   i d'igual manera si l peryany al tipus Y, que es de
   la forma l = g(z) se li assigna el valor h2(g(z)).
   Una vegada tenim aquesta aplicacio l definida, la
   PUniv que busquem es aquella que verifica l = PUniv o
   proj
47 def PUniv {X Y Z W: Type} (f: Z → X) (g: Z → Y) (h1: X
   → W) (h2: Y → W) (h3: h1 o f = h2 o g): (SumAm f g
   ) → W := by
48   let l : (Sum X Y) → W := by
49     intro t
50     cases t with
51     | inl x => exact (h1 x)
52     | inr y => exact (h2 y)
53   have h: ∀ (p q : Sum X Y), (Setoide f g).r p q → (l p
   = l q) := by
54     intro h4
55     intro h5
56     intro h6
57     induction h6
58     -- Cas base
59     rename_i j k h8
60     apply Exists.elim h8
61     intro z
62     intro ⟨ h9, h10 ⟩
63     calc
64       l j = l (Sum.inl (f z)) := by exact congrArg l h9
65       _ = h1 (f z) := by exact rfl
66       _ = (h1 o f) z := by exact rfl
67       _ = (h2 o g) z := by exact congrFun h3 z
68       _ = h2 (g z) := by exact rfl
69       _ = l (Sum.inr (g z)) := by exact rfl
70       _ = l k := by exact congrArg l (id h10.symm)
71     -- Cas rfl
72     rename_i j
73     exact rfl
74     -- Cas sim

```

```

75   rename_i j k h6 h7
76   exact id h7.symm
77   -- Cas trans
78   rename_i x y z j k h6 h7
79   exact h6.trans h7
80   apply Quotient.lift l h
81 -- Comprovem que les aplicacions inclusions estan ben
    definides i, efectivament, fan que el diagrama
    commute
82 theorem TComm1 {X Y Z W: Type} (f: Z → X) (g: Z → Y) (
    h1: X → W) (h2: Y → W) (h3: h1 ∘ f = h2 ∘ g):
    PUniv f g h1 h2 h3 ∘ !1 f g = h1 := by
83   apply funext
84   intro x
85   exact rfl
86 theorem TComm2 {X Y Z W: Type} (f: Z → X) (g: Z → Y) (
    h1: X → W) (h2: Y → W) (h3: h1 ∘ f = h2 ∘ g):
    PUniv f g h1 h2 h3 ∘ !2 f g = h2 := by
87   apply funext
88   intro y
89   exact rfl
90 -- Vegem que PUniv es la unica aplicacio que satisfi les
    anteriors condicions
91 theorem TUniv {X Y Z W: Type} (f: Z → X) (g: Z → Y) (
    h1: X → W) (h2: Y → W) (h3: h1 ∘ f = h2 ∘ g) (l:
    SumAm f g → W) (l1: l ∘ !1 f g = h1) (l2: l ∘ !2 f g
    = h2) : l = PUniv f g h1 h2 h3 := by
92   apply funext
93   intro ct
94   have h4 : ∃ (t : Sum X Y), Quotient.mk (Setoide f g) t
    = ct := by
95     exact Quot.exists_rep ct
96   apply Exists.elim h4
97   intro t
98   cases t
99   -- cas x
100  rename_i x
101  intro h5
102  calc
103    l ct = l ((!1 f g) x) := by exact congrArg l (id h5.
    symm)
104    _ = (l ∘ (!1 f g)) x := by exact rfl
105    _ = h1 x := by exact congrFun l1 x
106    _ = PUniv f g h1 h2 h3 (!1 f g (x)) := by exact rfl
107    _ = PUniv f g h1 h2 h3 ct := by exact congrArg (PUniv
    f g h1 h2 h3) h5
108  -- cas y
109  rename_i y

```

```

110   intro h5
111   calc
112     1 ct = 1 ((ι2 f g) y) := by exact congrArg 1 (id h5.
      symm)
113     _ = (1 ∘ (ι2 f g)) y := by exact rfl
114     _ = h2 y := by exact congrFun 12 y
115     _ = PUniv f g h1 h2 h3 (ι2 f g (y)) := by exact rfl
116     _ = PUniv f g h1 h2 h3 ct := by exact congrArg (PUniv
      f g h1 h2 h3) h5
117 -- Així, hem comprovat que el pushout es un colimit en la
      categoria de Tipus (el colimit es el parell format
      pel pushout i les aplicacions ι1 i ι2).

```

Bibliografia

- [CE56] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Franklin Classics, 1956.
- [Gro57] A. Grothendieck. *Sur quelques points d'algèbre homologique, I*, volume 9. Tohoku University, Mathematical Institute, 1957.
- [Mac13] S. MacLane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [ME45] S. MacLane and S. Eilenberg. *General theory of natural equivalences*, volume 58. American Mathematical Society, 1945.
- [Rie16] E. Riehl. *Category Theory in context*. Dover publications, 2016.
- [Sim11] H. Simmons. *An introduction to category theory*. Cambridge University Press, 2011.
- [Spi14] D. I. Spivak. *Category Theory for the Sciences*. MIT press books, 2014.
- [Str04] T. Streicher. *Introduction to Category Theory and Categorical Logic*. 2004.
- [Vid10] J. Climent Vidal. *Teoría de Conjuntos*. Universitat de València, 2010.