



Treball Fi de Màster - Curs 2019/ 2020

El teorema de Kleene per a àlgebres heterogènies

Autor: Nofre Sanmartín Vich

Tutor: ENRIC COSME LLÓPEZ

Introducció

El nostre treball se centra en l'estudi dels llenguatges formals. Els llenguatges formals i el concepte relacionat d'autòmats formen el nucli teòric de les ciències de la computació. La descripció abstracta de la informació manipulada pels autòmats ha estat un element bàsic i fonamental per al desenvolupament d'aquest camp. Per aquest motiu, s'han emprat diferents tècniques per al seu estudi.

Els autòmats són una de les ferramentes per a l'estudi de la reconeixibilitat de paraules. Donada una paraula d'entrada, l'autòmat recorre els seus estats interns d'acord a les lletres que la componen i si aquest camí acaba en un estat final, aleshores diem que l'autòmat accepta la paraula. Direm, així, que un llenguatge L (és a dir, un subconjunt de paraules sobre un alfabet A) és reconeixible per un autòmat si totes les seues paraules són reconeixibles.

Aquesta noció de computació admet caracteritzacions equivalents, on les ferramentes bàsiques per a discernir si un llenguatge és reconeixible o no deixen de ser autòmats i passen a ser altres estructures. Així, per exemple, el teorema de Myhill-Nerode [9, 10] afirma que un llenguatge L és reconeixible si existeixen un monoide finit $\mathbf{M}$ i un homomorfisme de monoides f d' $\mathbf{A}^*$ (el monoide lliure sobre l'alfabet A) en $\mathbf{M}$ de forma que, per a un subconjunt C d' M , es té que $L = f^{-1}[C]$. Pel primer teorema d'isomorfisme, aquesta caracterització és equivalent a demostrar l'existència d'una congruència d'índex finit sobre $\mathbf{A}^*$ per a la qual L és un subconjunt saturat.

El teorema de Myhill-Nerode explica la relació que hi ha entre autòmats i monoides. Podem pensar un autòmat com una estructura que canvia d'estat en resposta a l'acció de les lletres d'una paraula d'acord a la seua configuració interna. Un autòmat accepta una paraula si la transformació induïda per la paraula transforma un estat inicial en un de final. A més, la caracterització dels llenguatges reconeixibles com a subconjunts saturats per a congruències d'índex finit obre la porta a processos de minimització, on podem trobar autòmats equivalents a un de donat però que tenen menor tamany. Associat a aquest procés de minimització trobem la noció de congruència sintàctica associada a un llenguatge, que serà la major congruència que satura el conjunt donat i que, per tant, té menor quocient. Com a conseqüència del teorema de Myhill-Nerode podem afirmar que un llenguatge és reconeixible si, i només si, la seua congruència sintàctica té índex finit.

Donat un llenguatge o família de llenguatges reconeixibles existeixen certes transformacions que preserven la reconeixibilitat. Per exemple es pot demostrar que els llenguatges reconeixibles estan tancats per a les operacions d'unió, intersecció, diferència, concatenació o producte estrela. Aquestes propietats de clausura permeten trobar una altra caracterització equivalent a la noció de reconeixibilitat. El teorema de Kleene [6] afirma que un llenguatge és reconeixible si, i només si, admet una expressió regular, és a dir, si es pot denotar per un terme format a partir de les paraules i les operacions anteriorment mencionades.

El teorema de Kleene permet un tractament sintàctic de la noció de reconeixibilitat. En aquest

teorema, una de les implicacions és conseqüència de les propietats de clausura anteriors (tot terme escrit amb estes operacions denotarà un llenguatge regular). En canvi l'altra implicació és més costosa i sol fer-se simulant de forma sintàctica les transformacions internes d'un autòmat que reconega un llenguatge donat, tot seguint la demostració estàndard del teorema [8], obra de McNaughton i Yamada.

La definició de llenguatge reconeixible es pot estendre a estructures més complexes com poden ser els termes per a una signatura algebraica donada, és a dir, subconjunts de l'àlgebra lliure $\mathbf{T}_\Sigma(X)$, per a una signatura Σ . Notem que, en aquest cas, la noció d'autòmat continua existint així com les caracteritzacions de reconeixibilitat per a àlgebres finites (o congruències sintàctiques) o mitjançant expressions regulars, gràcies a les corresponents versions dels Teoremes de Myhill-Nerode i Kleene [5] per a termes. Cal notar que aquests resultats suposen un bot conceptual, ja que aquestes caracteritzacions de la noció de reconeixibilitat en el monoide lliure $\mathbf{A}^*$ es preserven en l'àlgebra completament lliure, o àlgebra de termes, $\mathbf{T}_\Sigma(X)$.

En el nostre treball donem un pas més en aquest procés d'abstracció amb la presentació d'aquests resultats per al cas de les àlgebres heterogènies. Fixat un conjunt de tipus S , i un conjunt d'operacions formals heterogènies Σ , una àlgebra heterogènia sobre aquesta signatura és un S -conjunt A amb la corresponent interpretació d'aquestes operacions formals. La diferència fonamental entre aquesta noció i la noció d'àlgebra usual (la versió homogènia) és la capacitat d'aquestes estructures de modelar situacions que requerisquen l'utilització d'elements de diferent natura. Aquestes situacions es donen fonamentalment en el camp de les ciències de la computació, on podem treballar amb variables de diferents tipus.

Així, doncs, en el nostre treball presentarem les nocions fonamentals de les àlgebres heterogènies, així com les nocions d'homomorfisme, subàlgebra, congruència i àlgebra quocient. A partir d'aquestes nocions introduïrem el concepte de reconeixibilitat d'un llenguatge en una àlgebra heterogènia, així com la construcció de la congruència sintàctica associada a aquest llenguatge. Emprarem aquests conceptes per presentar la versió heterogènia del teorema de Myhill-Nerode, com també les propietats de clausura dels llenguatges reconeixibles per a les operacions booleanes d'unió, intersecció i complement.

En una segona part, ens centrarem en l'estudi de l'àlgebra de termes heterogènia i demostrarem propietats específiques de clausura de llenguatges reconeixibles en aquesta àlgebra. En particular provarem la clausura de la reconeixibilitat per a les operacions de substitució i producte estrela. Per a la demostració d'aquests resultats de clausura ens hem ajudat dels resultats presentats en [3] que utilitzen una tècnica purament algebraica on, a partir de les congruències sintàctiques dels llenguatges d'entrada, es crea un refinament que és congruència, té índex finit i satura el llenguatge resultant de la transformació dels llenguatges donats.

Aquests resultats ens permetran presentar la versió heterogènia del teorema de Kleene. En primer lloc presentarem la sintaxi adient per a construir expressions regulars, que estarà basada en les operacions de Σ i en les operacions abans tractades d'unió, substitució i producte estrela. Aquesta versió heterogènia del teorema de Kleene és l'aportació més important d'aquest treball, ja que és la primera vegada que apareix en la literatura. Per a la seua demostració en hem basat en el treball de Gécseg i Steinby [5] i en la seua versió del teorema de Kleene per a termes homogenis en una signatura donada.

Hem estructurat el treball en quatre capítols. En el primer capítol, de preliminars, introduïm les nocions de conjunt heterogeni, relacions d'equivalència en conjunts heterogenis, el monoide lliure per a un alfabet donat, les nocions d'àlgebra heterogènia, subàlgebra, homomorfisme, congruències i àlgebra heterogènia quocient. Acabem el capítol introduint la noció de translació i la noció de congruència cogenerateda o congruència sintàctica.

En el capítol segon, tractem la noció de reconeixibilitat en àlgebres heterogènies i presentem la versió heterogènia del teorema de Myhill-Nerode que caracteritza els llenguatges reconeixibles com a llenguatges saturats per a una congruència d'índex finit. Acabem aquest capítol presentant les propietats de clausura per a les operacions booleanes d'unió, intersecció i complement.

En el capítol tercer, introduïm l'àlgebra de termes heterogènia $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ i presentem propietats de clausura de la noció de reconeixibilitat per a conjunts bàsics de termes i les operacions de substitució i producte estrela.

Finalment, en el capítol quart, presentem la noció d'expressió regular associada a una signatura heterogènia i demostrem la versió heterogènia del teorema de Kleene per a llenguatges en $\mathbf{T}_\Sigma(X)$.

En aquest treball assumim els postulats del sistema axiomàtic **ZFSk** per a la teoria de conjunts i assumirem l'existència d'un univers de Grothendieck fixat $\mathcal{U}$. A més, hem adoptat les següents convencions. Un ordinal α és un conjunt transitiu ben ordenat per a $\in$, així $\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\}$. El primer ordinal infinit ω_0 el denotarem per $\mathbb{N}$, el conjunt dels nombres naturals. D'aquesta manera, per a cada $n \in \mathbb{N}$, n fa referència al conjunt $n = \{0, \dots, n-1\}$. Una funció d' A a B la denotarem per $(F_x)_{x \in A}$. Denotarem per $\text{Sub}(A)$ el conjunt format per tots els subconjunts d' A i si $X \subseteq A$, aleshores denotarem per $\mathbb{C}_A(X)$ o $A - X$ al complement d' X en A .

Índex

1	Preliminars	9
1.1	<i>S</i> -conjunts	9
1.2	Relacions d'equivalència	12
1.3	Monoide lliure	14
1.4	Àlgebres i signatures	16
1.5	Congruències i àlgebra quocient	21
1.6	Translacions i congruència cogenerateda	21
2	Reconeixibilitat	27
3	Àlgebra de termes	33
3.1	Subconjunts reconeixibles en l'àlgebra de termes	36
3.1.1	Termes bàsics	36
3.1.2	Substitució	38
3.1.3	Producte estrela	50
4	Llenguatges regulars	55

Capítol 1

Preliminars

En aquest capítol veurem els conceptes bàsics per poder entendre l'àlgebra de termes i les seues propietats de reconeixibilitat. Hi recopilarem resultats bàsics de conjunts heterogenis, relacions d'equivalència en conjunts heterogenis, el monoide lliure per a un alfabet donat. A més, introduïrem els conceptes d'àlgebres heterogènies, subàlgebres, homomorfisme, congruència i àlgebra quocient. Per finalitzar presentem la noció de translació i congruència sintàctica.

1.1 S -conjunts

En aquesta secció definirem el concepte de conjunt heterogeni i donarem la generalització de les operacions bàsiques entre conjunts per a conjunts heterogenis.

Definició 1.1. Siga S un conjunt d' $\mathcal{U}$. Anomenarem S el conjunt de tipus. Un **S -conjunt** (també anomenat **conjunt heterogeni** o **conjunt S -tipificat**) és una aplicació $A = (A_s)_{s \in S}$ de S a $\mathcal{U}$. Si A i B són dos S -conjunts, una **S -aplicació** és una família S -indexada $(f_s)_{s \in S}$ on, per a cada $s \in S$, f_s és una aplicació d' A_s a B_s . D'aquesta manera una S -aplicació d' A a B és un element de $\prod_{s \in S} \text{Hom}(A_s, B_s)$ on, per a cada $s \in S$, el conjunt $\text{Hom}(A_s, B_s)$ és el conjunt de totes les aplicacions amb domini A_s i codomini B_s . Denotarem per $\text{Hom}(A, B)$ el conjunt de totes les S -aplicacions entre A i B .

Observem que si el conjunt de tipus S és finit aleshores podríem dir que estem definint una tupla de conjunts on, cada entrada de la tupla seria d'un tipus s particular.

Farem ara una generalització de les operacions conjuntistes que siguen vàlides per als conjunts heterogenis.

Definició 1.2. Siga I un conjunt d'índexs en $\mathcal{U}$ i siga $(A^i)_{i \in I}$ una família I -indexada de S -conjunts. Aleshores el **producte** dels $(A^i)_{i \in I}$, denotat per $\prod_{i \in I} A^i$, és el S -conjunt definit de la següent manera, per a cada $s \in S$

$$\left(\prod_{i \in I} A^i \right)_s = \prod_{i \in I} A_s^i.$$

A més, per a cada $i \in I$, la i -èsima projecció canònica, $\text{pr}^i = (\text{pr}_s^i)_{s \in S}$, és la S -aplicació de $\prod_{i \in I} A^i$ a A^i que, per a cada $s \in S$, envia $(a_s^i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_s^i$ a $a_s^i \in A_s^i$.

Les altres operacions conjuntistes: $\times$ (producte cartesià), $\coprod$ (coproducte), $\cup$ (unió), $\cap$ (intersecció), $\cap$ (intersecció binària), $\complement_A$ (el S -conjunt complementari respecte d'un S -conjunt A donat), i $-$ (la diferència) es defineixen d'una manera similar, component a component.

Exemple 1.3. Siga $S = 2 = \{0, 1\}$. Definim $A = (A_s)_{s \in S}$ de la forma:

$$A_s = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } s = 0; \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Més endavant seguirem amb aquest S -conjunt ja que tindrà una estructura d'àlgebra particular. Definim també els S -conjunts $B = (B_s)_{s \in S}$ i $C = (C_s)_{s \in S}$ com segueixen:

$$B_s = \begin{cases} \{a, b, ab, ba, aa, bb\} & \text{si } s = 0; \\ \emptyset & \text{si } s = 1. \end{cases} \quad C_s = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } s = 0; \\ (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^3 & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Podem fer la unió i la intersecció d' A i C i obtenim:

$$(A \cup C)_s = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } s = 0; \\ \mathbb{R}^3 & \text{si } s = 1. \end{cases} \quad (A \cap C)_s = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } s = 0; \\ \emptyset & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Calculem ara el producte cartesià d' A per B .

$$(A \times B)_s = \begin{cases} \mathbb{Q} \times B_0 & \text{si } s = 0; \\ \emptyset & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Definim la següent S -aplicació d' A a C , $f : A \longrightarrow C$, per a cada tipus $s \in S$, de la següent manera:

$$\begin{array}{ccc} f_0 : A_0 & \longrightarrow & C_0 \\ \frac{p}{q} & \longmapsto & |p| \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f_1 : & \mathbb{Q}^3 & \longrightarrow (\mathbb{R} - \mathbb{Q})^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + \sqrt{2}, \pi, e) \end{array}$$

Notem que en un conjunt heterogeni pot haver-hi un coordenada buida, com podem observar al conjunt B , car $B_1 = \emptyset$.

Definició 1.4. Un S -conjunt A s'anomena **subfinal** si, per a cada tipus $s \in S$, $\text{card}(A_s) \leq 1$. Denotem per 1^S , o a vegades per abreviar 1 , al S -conjunt final definit com $1^S = (1)_{s \in S}$. I denotem per $\emptyset^S$, abreviat $\emptyset$, al S -conjunt inicial $\emptyset^S = (\emptyset)_{s \in S}$.

Definició 1.5. Siguen A, B dos S -conjunts. Direm que A és un **S -subconjunt** o, si se sobreentén, un **subconjunt** de B si, per a cada tipus $s \in S$, $A_s \subseteq B_s$ i escriurem $A \subseteq B$. Denotarem per $\text{Sub}(A)$ al conjunt format per tots els S -subconjunts d' A .

Definirem a continuació un S -conjunt particular com és la delta de Kronecker.

Definició 1.6. Siga $t \in S$ un tipus. Anomenem **delta de Kronecker en t** al S -conjunt $\delta^t = (\delta_s^t)_{s \in S}$, definit per a cada $s \in S$, de la següent manera:

$$\delta_s^t = \begin{cases} 1 & \text{si } s = t; \\ \emptyset & \text{si } s \neq t. \end{cases}$$

Siga ara X un conjunt. Denotem per $\delta^{t,X}$ al S -conjunt definit, per a cada $s \in S$, de la següent manera:

$$\delta_s^{t,X} = \begin{cases} X & \text{si } s = t; \\ \emptyset & \text{si } s \neq t. \end{cases}$$

Si $X = x$, i.e., si X només té un element, aleshores per simplificar la notació escriurem $\delta^{t,x}$ en comptes de $\delta^{t,\{x\}}$. Notem que δ^t defineix el mateix conjunt que $\delta^{t,1}$.

Ara definirem per a una S -aplicació f , les construccions associades d'imatge directa i imatge inversa.

Definició 1.7. Siguen A, B dos S -conjunts i siga $f : A \longrightarrow B$ una S -aplicació. Definim la **f -imatge directa** (o la imatge directa a través de f) a l'aplicació $f[\cdot] : \text{Sub}(A) \longrightarrow \text{Sub}(B)$, definida per a cada $X \in \text{Sub}(A)$ com a $f[X] = (f_s[X_s])_{s \in S} \in \text{Sub}(B)$. De la mateixa forma anomenem la **f -imatge inversa** (o imatge inversa a través de f) a l'aplicació $f^{-1}[\cdot] : \text{Sub}(B) \longrightarrow \text{Sub}(A)$ definida per a cada $Y \in \text{Sub}(B)$ com $f^{-1}[Y] = (f_s^{-1}[Y_s])_{s \in S} \in \text{Sub}(A)$.

Definició 1.8. Siga A un S -conjunt. Direm que A és **finit** si $\coprod A = \bigcup_{s \in S} A_s \times \{s\}$ és finit. Siga B un altre S -conjunt. Direm que A és un subconjunt finit de B si A és finit i $A \subseteq B$. Denotarem per $\text{Sub}_f(B)$ al conjunt format per tots els S -subconjunts finits de B .

Definició 1.9. Siga A un S -conjunt. Definim el **suport** d' A com el conjunt

$$\text{supp}_S(A) = \{s \in S \mid A_s \neq \emptyset\}.$$

Observació 1.10. Un S -conjunt A és finit si, i només si, $\text{supp}_S(A)$ és finit i, per a cada $s \in \text{supp}_S(A)$, A_s és finit.

Proposició 1.11. Siguen A, B dos S -conjunts, I un conjunt d'índexs en $\mathcal{U}$ i $(A_i)_{i \in I}$ una família I -indexada de S -conjunts. Aleshores:

- (i) $\text{Hom}(A, B) \neq \emptyset$ si, i només si, $\text{supp}_S(A) \subseteq \text{supp}_S(B)$. Conseqüentment, si $A \subseteq B$, aleshores $\text{supp}_S(A) \subseteq \text{supp}_S(B)$. A més, si f és una S -aplicació d' A a B i $X \subseteq A$, llavors $\text{supp}_S(X) = \text{supp}_S(f[X])$.
- (ii) Si existeix una S -aplicació sobrejectiva f d' A a B , aleshores $\text{supp}_S(A) = \text{supp}_S(B)$. A més, si es compleix que $Y \subseteq X$ aleshores $\text{supp}_S(Y) = \text{supp}_S(f^{-1}[Y])$.
- (iii) Les següent igualtats es compleixen:

$$\text{supp}_S(\emptyset^S) = \emptyset, \quad \text{supp}_S(1^S) = S;$$

$$\text{supp}_S\left(\bigcup_{i \in I} A^i\right) = \text{supp}_S\left(\prod_{i \in I} A^i\right) = \bigcup_{i \in I} \text{supp}_S(A^i);$$

si $I \neq \emptyset$:

$$\text{supp}_S\left(\bigcap_{i \in I} A^i\right) = \text{supp}_S\left(\prod_{i \in I} A^i\right) = \bigcap_{i \in I} \text{supp}_S(A^i);$$

$$\text{supp}_S(A) - \text{supp}_S(B) \subseteq \text{supp}_S(B - A).$$

1.2 Relacions d'equivalència

Introduïrem ara el concepte de relació d'equivalència en un S -conjunt. Aquest concepte serà necessari per poder caracteritzar la noció de reconeixibilitat en una àlgebra. A més, donarem la definició de conjunt saturat per una relació d'equivalència.

Definició 1.12. Siga A un S -conjunt. Definim una **S -relació d'equivalència** (també anomenada **relació heterogènia** o **relació S -tipificada**) en A com una relació Φ en A , és a dir, un subconjunt $\Phi = (\Phi_s)_{s \in S}$ de $A \times A = (A_s \times A_s)_{s \in S}$ tal que, per a cada $s \in S$, Φ_s és una relació d'equivalència en A_s . Denotem per $\text{Eqv}(A)$ el conjunt de totes les relacions d'equivalència sobre A i per **$\mathbf{Eqv}(A)$** el reticle algebraic $(\text{Eqv}(A), \subseteq)$. Denotem per ∇^A l'element màxim d' **$\mathbf{Eqv}(A)$** i per Δ^A l'element mínim d' **$\mathbf{Eqv}(A)$** . Si $s \in S$ i $a \in A_s$, denotarem per $[a]_{\Phi_s}$ a la classe d'equivalència de a sobre Φ_s .

Siguen A un S -conjunt i Φ una S -relació d'equivalència en A . Definim el **S -conjunt quocient** d' A per Φ , A/Φ , com el S -conjunt $(A_s/\Phi_s)_{s \in S}$. Definim $\text{pr}^\Phi : A \longrightarrow A/\Phi$ la **projecció canònica** d' A a A/Φ com la S -aplicació $(\text{pr}_s^\Phi)_{s \in S}$ on, per a cada tipus $s \in S$, pr_s^Φ és la projecció canònica d' A_s a A_s/Φ_s (que envia cada $a \in A_s$ a la seua classe d'equivalència en A_s , $\text{pr}_s^\Phi(a) = [a]_{\Phi_s}$).

Siga X un S -subconjunt d' A i siga $\Phi \in \text{Eqv}(A)$. La **Φ -saturació** de X (o la **saturació de X respecte de Φ**), denotada per $[X]^\Phi$, és el S -conjunt definit, per a cada $s \in S$, de la següent manera:

$$[X]_s^\Phi = \{a \in A_s \mid X_s \cap [a]_{\Phi_s} \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in X_s} [x]_{\Phi_s} = [X_s]_{\Phi_s}^\Phi.$$

Siga X un S -subconjunt d' A i siga $\Phi \in \text{Eqv}(A)$. Diem que X està **Φ -saturat** si $X = [X]^\Phi$. Denotem per $\Phi\text{-Sat}(A)$ el subconjunt de $\text{Sub}(A)$ format per tots els S -subconjunts saturats, és a dir:

$$\Phi\text{-Sat}(A) = \{X \in \text{Sub}(A) \mid X = [X]^\Phi\}.$$

A aquest treball ens interessarà estudiar i treballar amb les relacions d'equivalència d'índex finit, és a dir, aquelles que tenen un nombre finit de classes d'equivalència.

Definició 1.13. Siga A un S -conjunt i siga Φ una S -relació d'equivalència en A . Diem que Φ té **índex finit** si el S -conjunt A/Φ és finit. Recordem que un conjunt heterogeni A és finit si el seu suport ho és i si el conjunt en cada tipus és finit.

Veiem aquests conceptes en el següent exemple perquè quede més clar.

Exemple 1.14. Utilitzarem els S -conjunts definits a l'exemple 1.3. Definim en B la següent relació d'equivalència $\Phi = (\Phi_s)$, per a cada $s \in S$ com segueix:

$$\Phi_s = \begin{cases} \{(x, y) \in B_0 \mid x \text{ comença per la mateixa lletra que } y\} & \text{si } s = 0; \\ \emptyset & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Siga X el S -subconjunt de B definit, per a cada $s \in S$ com:

$$X_s = \begin{cases} \{a, ab\} & \text{si } s = 0; \\ \emptyset & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Llavors quan calculem $[X]^\Phi$ obtenim el següent S -conjunt:

$$[X]_s^\Phi = \begin{cases} \{a, aa, ab\} & \text{si } s = 0; \\ \emptyset & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Si considerem ara $Y = (Y_s)_{s \in S}$ definit, per a cada $s \in S$:

$$Y_s = \begin{cases} \{b, ba, bb\} & \text{si } s = 0; \\ \emptyset & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Aleshores es senzill veure que Y és Φ -saturat, car al conjunt de la primera component estan totes les paraules que comencen per b i a més, no hi ha cap paraula més.

Veiem un altre exemple un poc més general.

Exemple 1.15. Siga S un conjunt de tipus finit i siga A un S -conjunt. Aleshores A/∇^A és finit. Siga $s \in S$. Notem que:

$$|A_s/\nabla^{A_s}| = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in \text{supp}_S(A); \\ 0 & \text{si } s \notin \text{supp}_S(A). \end{cases}$$

Per tant, se segueix que A/∇^A és bijectiu amb $1^{\text{supp}_S(A)}$.

Nota. Siga A un S -conjunt i siga $\Phi \in \text{Eqv}(A)$. Aleshores, per la Proposició 1.11 es compleix que $\text{supp}_S(A) = \text{supp}_S(A/\Phi)$.

Nota. Siguen A un S -conjunt, X un S -subconjunt d' A i $\Phi \in \text{Eqv}(A)$. Aleshores

$$[X]^\Phi = (\text{pr}^\Phi)^{-1}[\text{pr}^\Phi[X]].$$

Per tant, X és Φ -saturat si i només si $X \supseteq [X]^\Phi$. A més, X és Φ -saturat si i sols si existeix $\mathcal{Y} \subseteq A/\Phi$ tal que $X = (\text{pr}^\Phi)^{-1}[\mathcal{Y}]$.

Proposició 1.16. Siga A un S -conjunt i siguen $\Phi, \Psi \in \text{Eqv}(A)$. Aleshores

$$\Phi \subseteq \Psi \text{ si, i només si, per a tot } X \subseteq A, [[X]^\Psi]^\Phi = [X]^\Psi.$$

Corol·lari 1.17. Siga A un S -conjunt i siguen $\Phi, \Psi \in \text{Eqv}(A)$ dues relacions d'equivalència tals que $\Phi \subseteq \Psi$. Aleshores $\Psi\text{-Sat}(A) \subseteq \Phi\text{-Sat}(A)$. A més, siga un tipus $s \in S$ i siga un subconjunt $L \subseteq A_s$ tal que $L = [L]^\Psi$. Si $\Phi_s \subseteq \Psi_s$, aleshores $L = [L]^\Phi$.

Proposició 1.18. Siguen A un S -conjunt i $X \subseteq A$. Aleshores $X \in \nabla^A\text{-Sat}(A)$ si, i només si, $X_s = A_s$, per a cada $s \in S$ tal que $s \in \text{supp}_S(X)$.

Nota. Siguen A un S -conjunt i $X \subseteq A$. Aleshores, per la proposició anterior se segueix que

$$\emptyset^S, A \in \nabla^A\text{-Sat}(A).$$

A més, per a cada subconjunt $T \subseteq S$ es té que, $\bigcup_{t \in T} \delta^{t, A_t} \in \nabla^A\text{-Sat}(A)$.

Proposició 1.19. Siguen A un S -conjunt i $X \subseteq A$ i siguen $\Phi, \Psi \in \text{Eqv}(A)$. Aleshores

$$[X]^{\Phi \cap \Psi} \subseteq [X]^\Phi \cup [X]^\Psi.$$

Corol·lari 1.20. Siguen A un S -conjunt i $X \subseteq A$ i siguen $\Phi, \Psi \in \text{Eqv}(A)$. Aleshores

$$\Phi\text{-Sat}(A) \cap \Psi\text{-Sat}(A) \subseteq (\Phi \cap \Psi)\text{-Sat}(A).$$

Tota aplicació heterogènia f defineix una relació d'equivalència. Aquesta relació s'anomena nucli de f i juga un paper important a l'hora de definir la congruència cogenerateda.

Definició 1.21. Siguen A, B dos S -conjunts i siga $f : A \longrightarrow B$ una S -aplicació. Definim el **nucli de f** , denotat per $\text{Ker}(f)$, a la S -relació definida per a cada $s \in S$ com

$$\text{Ker}(f)_s = \text{Ker}(f_s) = \{(a, b) \in A_s \times A_s \mid f_s(a) = f_s(b)\}.$$

Proposició 1.22. Siguen A, B dos S -conjunts i siga $f : A \longrightarrow B$ una S -aplicació. Aleshores $\text{Ker}(f) \in \text{Eqv}(A)$. A més, donada Φ , una S -relació d'equivalència en A , el parell $(\text{pr}^\Phi, A/\Phi)$ compleix que:

- (i) $\text{Ker}(\text{pr}^\Phi) = \Phi$,
- (ii) (Propietat universal) per a cada S -aplicació $f : A \longrightarrow B$ tal que $\Phi \subseteq \text{Ker}(f)$, aleshores existeix una única S -aplicació $p^{\Phi, \text{Ker}(f)} : A/\Phi \longrightarrow B$ tal que $f = p^{\Phi, \text{Ker}(f)} \circ \text{pr}^\Phi$.

1.3 Monoide lliure

En aquesta secció introduïrem el concepte de monoide lliure i algunes de les seues propietats bàsiques, que seran utilitzades més endavant sobretot per definir la signatura d'una àlgebra i per poder definir la substitució en l'àlgebra de termes.

Definició 1.23. Siga A un conjunt que anomenarem alfabet i als elements del qual anomenarem lletres. Definim el conjunt de les **paraules** $d'A$, denotat per A^* , al conjunt

$$A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(n, A)$$

on $\text{Hom}(n, A)$ és el conjunt de totes les aplicacions $w : n \longrightarrow A$. Siga $w \in A^*$, denotem per $|w|$ a la longitud de la paraula, o equivalentment diem que $|w|$ és el domini de w . Siga $i \in n$, aleshores escriurem w_i per referir-nos al valor que pren $w(i)$, i.e., la lletra (o valor) que ocupa la i -èsima posició. A vegades, denotem la paraula w com la successió $(a_i)_{i \in |w|}$, on la lletra $a_i \in A$ compleix que $w(i) = a_i$. Denotem per η^A a l'aplicació d' A a A^* que envia cada $a \in A$ a $(a) \in A^*$, i.e., l'aplicació $(a) : 1 \longrightarrow A^*$ que envia el 0 a la lletra a . A un subconjunt $L \subseteq A^*$ se'l sol anomenar llenguatge.

Denotarem per λ a l'única aplicació de $\emptyset$ a A i l'anomenarem **paraula buida**.

Al conjunt A^* el dotarem amb l'operació binària anomenada **concatenació** $\wedge : A^* \times A^* \longrightarrow A^*$ definida per a cada $(w, v) \in A^* \times A^*$ com:

$$w \wedge v \begin{cases} |w| + |v| & \longrightarrow A \\ i & \longmapsto \begin{cases} w_i, & \text{si } 0 \leq i < |w|; \\ v_{i-|w|} & \text{si } |w| \leq i < |w| + |v|. \end{cases} \end{cases}$$

Notem que la concatenació de dos paraules $w, v \in A^*$ és el resultat de col·locar primer les lletres de w i després a continuació les de v .

A la terna $(A^*, \wedge, \lambda)$ se l'anomena monoide lliure i el denotarem per $\mathbf{A}^*$.

Definició 1.24. Siguen $w, w' \in A^*$ dues paraules. Direm que w' és una subparaula de w si existeixen $u, v \in A^*$ tals que $w = u \wedge w' \wedge v$. El cas en que $u = \lambda$ o bé $v = \lambda$ no estan exclosos. Podria passar que una mateixa paraula w tinguera diferents subparaules iguals a w' . En aquest cas, l'equació $w = u \wedge w' \wedge v$ tindria més d'una solució. Siguen $w \in A^*$ i $a \in A$, direm que a **ocorre** en w si existeixen paraules $u, v \in A^*$ tals que $w = u \wedge (a) \wedge v$. Notem que a ocorre en w si, i només si, existeix $i \in |w|$ tal que $w(i) = a$. Denotarem per

$$|w|_a = \text{card}(\{i \in |w| \mid w(i) = a\}) = \text{card}(w^{-1}[\{a\}])$$

al nombre d'ocurrències d' a en la paraula w . A més, siga $(i_\alpha)_{\alpha \in |w|_a}$ l'enumeració en sentit ascendent de les ocurrències d' a en w . D'aquesta manera podem definir $(i_\alpha)_{\alpha \in |w|_a}$ de forma recursiva:

$$\begin{aligned} i_0 &= \min\{i \in |w|_a \mid w(i) = a\}, \\ i_{\alpha+1} &= \min\{i \in |w|_a - \{i_0, \dots, i_\alpha\} \mid w(i) = a\} \end{aligned}$$

per a $\alpha \in |w|_a - \{|w|_a - 1\}$. Si les parelles $(u_{i_\alpha}, v_{i_\alpha})$ (on $\alpha \in |w|_a$) són solucions de $w = u \wedge (a) \wedge v$ acomplint que $|u_{i_0}| < |u_{i_1}| < \dots < |u_{i_{|w|_a-1}}|$, aleshores $(u_{i_\alpha}, v_{i_\alpha})$ determina la i_α -èsima ocurrència de (a) en w i direm que a ocorre en la posició i_α -èsima de w .

Veiem totes aquestes definicions al següent exemple per aclarir els conceptes.

Exemple 1.25. Considerem $A = \{a, b, c\}$ l'alfabet amb què treballarem a aquest l'exemple. Siga $w : 3 \rightarrow A$ on $w(0) = a$, $w(1) = a$, i $w(2) = b$. Escriurem aquesta paraula com $w = aab$. Siguen $u = cbaccb$ i $v = baabccc$. Aleshores

$$|v| = 7, |v|_a = 2, |v|_c = 3,$$

$$u \wedge w = cbacbaab.$$

És senzill veure que w és una subparaula de v ja que

$$v = (b) \wedge w \wedge ccc.$$

Introduïrem una nova operació al monoide lliure: la substitució. La idea és canviar les lletres d'una paraula per unes altres paraules distintes. Aquest concepte ens seguirà durant el treball, ja que és una operació que també es troba a l'àlgebra de termes i a més té bones propietats respecte de la reconeixibilitat. Però això ho veurem a les properes seccions.

Definició 1.26. Siguen A un conjunt i $w \in A^*$ una paraula. Denotem per $(\cdot)_{a \in A}^a(w)$ a l'aplicació de $\prod_{a \in A} (A^*)^{|w|_a}$ a A^* que assigna, a cada element $((q_\alpha^a)_{\alpha \in |w|_a})_{a \in A} \in \prod_{a \in A} (A^*)^{|w|_a}$, la paraula $((q_\alpha^a)_{\alpha \in |w|_a})_{a \in A}^a(w)$ obtinguda en substituir en w cada ocurrència $\alpha \in |w|_a$ de la lletra a per la paraula q_α^a i açò per a cada lletra $a \in A$. Anomenem a $((q_\alpha^a)_{\alpha \in |w|_a})_{a \in A}^a(w)$ **la substitució de $(q_\alpha^a)_{\alpha \in |w|_a}$ per a a en w per a cada $a \in A$** i anomenarem a $(\cdot)_{a \in A}^a(w)$ **l'operador de substitució de w** .

en substituir en w cada lletra $a \in A$ i per a cada ocurrència $\alpha \in |w|_a$, la paraula q_α^a per la i_α -ocurrència d' A en w

Siga c un element d' A . Llavors denotarem per $(\cdot)_{c \in A}^c(w)$ a l'aplicació de $(A^*)^{|w|_c}$ a A^* que assigna, per a cada $(q_\alpha^c)_{\alpha \in |w|_c} \in (A^*)^{|w|_c}$, la paraula $((q_\alpha^c)_{\alpha \in |w|_c})^c(w)$ en A^* obtinguda en substituir en w la ocurrència i_α -èsima de c per la paraula q_α^c , per a cada $\alpha \in |w|_c$. Anomenem a $((q_\alpha^c)_{\alpha \in |w|_c})^c(w)$ **la substitució de $(q_\alpha^c)_{\alpha \in |w|_c}$ per c en w** .

Aclarim aquesta definició al següent exemple.

Exemple 1.27. Considerem el conjunt A de l'Exemple 1.25. Siga $w = abca$. Ara hem de considerar paraules per a cada ocurrència de cada lletra en w . Per a la lletra a definim les següents paraules:

$$q_0^a = ca, \quad q_1^a = ccba.$$

Per a les lletres b i c definim les paraules:

$$q_0^b = b, \quad q_0^c = bbacab.$$

D'aquesta manera la paraula resultant de la substitució és:

$$\left((q_\alpha^x)_{\alpha \in |w|_x} \right)_{x \in A} (w) = cabbbacabccba,$$

que és el resultat de substituir la primera ocurrència d' A per la paraula ca , la segona ocurrència per $ccba$; l'ocurrència de b per la paraula b ; i l'ocurrència de c per la paraula $bbacab$.

1.4 Àlgebres i signatures

A aquesta secció introduïrem els conceptes de Σ -àlgebra i les seues propietats. Aquest concepte és necessari ja que treballarem amb àlgebres heterogènies on hi ha operacions que s'apliquen sobre elements de diferents tipus. Aquesta secció serà molt important durant el treball, ja que als properes capítols estudiarem les propietats de reconeixibilitat en una Σ -àlgebra.

Definició 1.28. Una S -**signatura** (o **signatura heterogènia**) és una funció $\Sigma: S^* \times S \longrightarrow \mathcal{U}$ que envia un parell $(w, s) \in S^* \times S$ al conjunt $\Sigma_{w,s}$ de les **operacions formals d'aritat w , tipus (o coaritat) s i rang (o biaritat) (w, s)** . A vegades escriurem $\sigma: w \longrightarrow s$ per indicar que l'operació formal σ pertany a $\Sigma_{w,s}$.

A partir d'aquest moment fixarem la notació de Σ per a una signatura durant tot el treball.

Notació. Siga A un S -conjunt i siga $w \in S^*$. Denotarem per A_w al conjunt:

$$A_w = \prod_{i \in |w|} A_{w_i}.$$

Acabem de definir el S -conjunt d'operacions formals. Ara necessitem saber interpretar-les per a un conjunt heterogeni concret.

Definició 1.29. Siga A un S -conjunt. El $S^* \times S$ -conjunt de les **operacions amb aritat finita** d' A és $(\text{Hom}(A_w, A_s))_{(w,s) \in S^* \times S}$. Una **estructura de Σ -àlgebra sobre A** és una família $(F_{w,s})_{(w,s) \in S^* \times S}$ denotada per F , on, per a cada $(w, s) \in S^* \times S$, $F_{w,s}$ és una aplicació des de $\Sigma_{w,s}$ a $\text{Hom}(A_w, A)$. Notem que $F_{w,s}$ és la interpretació en A de les operacions formals d'aritat w i coaritat s . Per a un parell $(w, s) \in S^* \times S$ i per a una operació formal $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, per simplificar notació, a l'operació d' A_w a A_s corresponent a σ mitjançant la interpretació de $F_{w,s}$ l'escriurem com F_σ o bé com $\sigma^{\mathbf{A}}$ en comptes de $F_{w,s}(\sigma)$. Una **Σ -àlgebra** és el parell (A, F) , per abreviar **$\mathbf{A}$** , on A és un S -conjunt i F una estructura de Σ -àlgebra sobre A .

Veiem al següent exemple tres estructures algebraiques diferents per aclarir la definició i la notació.

Exemple 1.30. Veurem com les signatures de grup i anell es poden generalitzar seguint la notació de Σ -àlgebra. Aquestes dues signatures algebraiques són àlgebres homogènies. Després veurem com formalitzar la signatura d'espai vectorial que, per contra, és una àlgebra heterogènia i així veurem el potencial de la definició anterior i de la seua notació.

A la signatura de grup només tenim un tipus de conjunt ja que és un àlgebra homogènia. Així, el conjunt de tipus serà $S = 1 = \{0\}$. En una estructura de grup tenim l'operació producte, que és una operació binària, i després tenim l'existència d'element invers i d'element neutre. Aquests elements els formalitzarem com una operació unària i una nul·lària respectivament, doncs a la signatura estaran els símbols d'aquestes operacions. D'aquesta manera la signatura Σ serà:

$$\Sigma_{w,s} = \begin{cases} \{\cdot\} & \text{si } (w, s) = (00, 0), \\ \{()\^{-1}\} & \text{si } (w, s) = (0, 0), \\ \{1\} & \text{si } (w, s) = (\lambda, 0), \\ \emptyset & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Sabem que $(\mathbb{Q}^3, +)$ és un grup abelià. Ara hem d'interpretar les operacions de la signatura al nostre conjunt $\mathbb{Q}$. La estructura F estarà definida de la següent manera:

$$\begin{aligned} F_{00,0}(\cdot) : \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3, \\ (x, y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{0,0}(()^{-1}) : \mathbb{Q}^3 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3, \\ x &\longmapsto -x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\lambda,0}(1) : 1 &\longrightarrow \mathbb{Q}^3, \\ 0 &\longmapsto (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Així $(\mathbb{Q}^3, F)$ és una Σ -àlgebra. Aquesta estructura en particular és un grup.

Veiem ara quina seria la signatura per a un cos. En un cos tenim més operacions però totes necessiten d'un sol tipus, per això és una àlgebra homogènia. Així podrem fer servir el mateix conjunt de tipus $S = 1 = \{0\}$. La signatura Θ serà:

$$\Theta_{w,s} = \begin{cases} \{+, \cdot\} & \text{si } (w, s) = (00, 0), \\ \{-, ()^{-1}\} & \text{si } (w, s) = (0, 0), \\ \{0, 1\} & \text{si } (w, s) = (\lambda, 0), \\ \emptyset & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Siga el S -conjunt $A = (A_s)_{s \in S} = A_0 = \mathbb{Q}$. L'estructura de Θ -àlgebra amb què dotarem $\mathbb{Q}$ és la

següent:

$$\begin{array}{ll}
G_{00,0}(+) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, & G_{0,0}((-1)) : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \\
(p, q) \longmapsto n + m. & \frac{p}{q} \longmapsto \begin{cases} \frac{q}{p} & \text{si } p \neq 0; \\ 0 & \text{si } p = 0. \end{cases} \\
\\
G_{00,0}(\cdot) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, & G_{\lambda,0}(0) : 1 \longrightarrow \mathbb{Q}, \\
(p, q) \longmapsto p * q. & 0 \longmapsto 0. \\
\\
G_{0,0}(-) : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, & G_{\lambda,0}(1) : 1 \longrightarrow \mathbb{Q}, \\
p \longmapsto -p. & 0 \longmapsto 1.
\end{array}$$

Amb tot açò tenim que $(\mathbb{Q}, G)$ és una Θ -àlgebra amb la mateixa signatura que un cos.

Per tindre l'estructura de grup o de cos hauríem d'exigir algunes condicions de manera d'equacions axiomàtiques. Açò no ho farem ja que l'objectiu d'aquest exemple és familiaritzar-nos amb la notació i en com interpretar operacions formals. A l'exemple hem vist com formalitzar la seua signatura només.

Ara veurem com formalitzar amb aquesta notació la signatura d'espai vectorial que és una àlgebra heterogènia ja que tenim operacions en un grup abelià i d'altres externes. Per aquest cas necessitarem que el conjunt de tipus siga $S = 2 = \{0, 1\}$. La signatura Ω serà:

$$\Omega_{w,s} = \begin{cases} \{+, \cdot\} & \text{si } (w, s) = (00, 0), \\ \{-, ()^{-1}\} & \text{si } (w, s) = (0, 0), \\ \{0, 1\} & \text{si } (w, s) = (\lambda, 0), \\ \{+\} & \text{si } (w, s) = (11, 1), \\ \{-\} & \text{si } (w, s) = (1, 1), \\ \{0\} & \text{si } (w, s) = (\lambda, 1), \\ \{\cdot\} & \text{si } (w, s) = (01, 1), \\ \emptyset & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Notem que un mateix símbol pot fer referència a dues o més operacions. Açò no causa problema perquè coneixem aritat i coaritat de cada símbol.

Definim el S -conjunt A definit, per a cada $s \in S$, com:

$$A_s = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } s = 0, \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Per interpretar les operacions on no hi ha canvi de tipus podem emprar la mateixa F o G anterior dependent de quin tipus es tracte. Interpretem ara l'única operació que ens queda per interpretar.

$$\begin{array}{ll}
H_{01,1}(\cdot) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3 & \\
(p, v) \longmapsto (p * v_1, p * v_2, p * v_3). &
\end{array}$$

D'aquesta manera tindrem la següent estructura de Ω -àlgebra:

$$H_{w,s} = \begin{cases} G_{00,0} & \text{si } (w, s) = (00, 0), \\ G_{0,0} & \text{si } (w, s) = (0, 0), \\ G_{\lambda,0} & \text{si } (w, s) = (\lambda, 0), \\ F_{00,0} & \text{si } (w, s) = (11, 1), \\ F_{0,0} & \text{si } (w, s) = (1, 1), \\ F_{\lambda,0} & \text{si } (w, s) = (\lambda, 1), \\ H_{01,1} & \text{si } (w, s) = (01, 1), \\ \emptyset & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Així, (A, H) té estructura de Ω -àlgebra.

Definició 1.31. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra. El **suport** d' $\mathbf{A}$, denotat per $\text{supp}_S(\mathbf{A})$, és $\text{supp}_S(A)$, és a dir, és el suport del S -conjunt subjacent A d' $\mathbf{A}$.

Definició 1.32. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra. Diem que $\mathbf{A}$ és **finita** si A és finit on A és el S -conjunt subjacent d' $\mathbf{A}$.

De la mateixa manera que durant la carrera, en estudiar una estructura algebraica nova després véiem les subestructures i les aplicacions que conservaven l'estructura, ara veurem l'estructura de subàlgebra i d'homomorfismes entre Σ -àlgebres.

Notació. Siguen A, B dos S -conjunts, $f : A \rightarrow B$ una S -aplicació i $w \in S^*$. Denotem per f_w a l' S -aplicació $f_w = \prod_{i \in |w|} f_{w_i} : A_w \rightarrow B_w$ que envia cada $(a_i)_{i \in |w|} \in A_w$ a

$$f_w((a_i)_{i \in |w|}) = (f_{w_i}(a_i))_{i \in |w|} \in B_w.$$

Definició 1.33. Siguen $\mathbf{A} = (A, F)$ i $\mathbf{B} = (B, G)$ dues Σ -àlgebres i siga $f : A \rightarrow B$ una S -aplicació. Diem que f és un Σ -homomorfisme d' $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ si es compleix que, per a cada $(w, s) \in S^* \times S$, per a cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i per a cada $(a_i)_{i \in |w|} \in A_w$, es té que

$$f_s(F_\sigma((a_i)_{i \in |w|})) = G_\sigma(f_w((a_i)_{i \in |w|})).$$

És a dir, f és un Σ -homomorfisme si conserva totes les operacions de la signatura Σ .

Definició 1.34. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga $X \subseteq A$ un S -subconjunt. Siga σ tal que $\sigma : w \rightarrow s$, i.e, σ és una operació formal en $\Sigma_{w,s}$. Diem que X és **tancat per a l'operació** $F_\sigma : A_w \rightarrow A_s$ si, per a cada $a \in X_w$, es té que $F_\sigma(a) \in X_s$. Diem que X és una **subàlgebra** d' $\mathbf{A}$ si és tancada per a totes les operacions de $\mathbf{A}$. Denotem per $\text{Sub}(\mathbf{A})$ el conjunt de totes les subàlgebres d' $\mathbf{A}$ i denotem per $\mathbf{Sub}(\mathbf{A})$ el retícle algebraic $(\text{Sub}(\mathbf{A}), \subseteq)$. Siga $\mathbf{B}$ una Σ -àlgebra. Diem que $\mathbf{B}$ és una **subàlgebra** d' $\mathbf{A}$ si l'encaixament canònic de B en A determina també un encaixament de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$.

Per poder donar la propra definició primer necessitarem el lema següent perquè la definició siga consistent.

Lema 1.35. Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, I un conjunt d'índexs d' $\mathcal{U}$ i $(\mathbf{B}_i)_{i \in I}$ una família I -indexada de subàlgebres d' $\mathbf{A}$. Aleshores $\bigcap_{i \in I} B_i$ és una subàlgebra de $\mathbf{A}$.

Definició 1.36. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra. Definim l'**operador generador de subàlgebres**, $\text{Sg}_{\mathbf{A}}$, a l'operador $\text{Sg}_{\mathbf{A}} : \text{Sub}(\mathbf{A}) \longrightarrow \text{Sub}(\mathbf{A})$, definit per a cada $X \in \text{Sub}(\mathbf{A})$, com

$$\text{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = \bigcap \{W \in \text{Sub}(\mathbf{A}) \mid X \subseteq W\}.$$

Observem que $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ és la menor subàlgebra d' $\mathbf{A}$ que conté a X . A més, $\mathbf{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ denota l'àlgebra determinada per $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$.

Siga $X \subseteq A$. Anomenem a $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(X)$ la **subàlgebra d' $\mathbf{A}$ generada per X** . Si a més, $\text{Sg}_{\mathbf{A}}(X) = A$, aleshores diem que X és un subconjunt **generador** d' $\mathbf{A}$.

A continuació enunciaré el principi de prova per inducció algebraica que serà útil per demostrar alguns resultats del Capítol 3.

Proposició 1.37 (Principi de prova per inducció algebraica). *Siga X un S -conjunt i siguin $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra generada per X i Y un S -conjunt tal que $Y \subseteq A$. Aleshores per provar que $Y = A$ és suficient provar que: (1) $X \subseteq Y$ (base de la inducció algebraica) i (2) Y és una subàlgebra de $\mathbf{A}$ (pas d'inducció algebraica).*

Veiem com es defineix la Σ -àlgebra producte d'una família de Σ -àlgebres.

Definició 1.38. Siga I un conjunt d'índexs d' $\mathcal{U}$ i siga $(\mathbf{A}^i)_{i \in I}$ una família I -indexada de Σ -àlgebres on, per a cada $i \in I$, $\mathbf{A}^i = (A^i, F^i)$. Denotem per $\prod_{i \in I} \mathbf{A}^i$ a la Σ -àlgebra $(\prod_{i \in I} A^i, F^i)$ on, per a cada $\sigma : w \longrightarrow s$ en Σ , F_{σ} és l'aplicació que envia cada $(a_{\alpha})_{\alpha \in |w|} \in (\prod_{i \in I} A^i)_w$ a

$$F_{\sigma}((a_{\alpha})_{\alpha \in |w|}) = (F_{\sigma}^i((a_{\alpha}(i))_{\alpha \in |w|}))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_s^i.$$

És a dir, aplica F_{σ}^i a l'element i -èsim.

Per a cada $i \in I$, la i -èsima **projecció canònica**, $\text{pr}^i = (\text{pr}_s^i)_{s \in S}$, és l'homomorfisme de $\prod_{i \in I} \mathbf{A}^i$ a $\mathbf{A}^i$ que, per a cada $s \in S$, envia $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_s^i$ a $\text{pr}_s^i((a_i)) = a_i \in A_s^i$. Per una altra banda, si $\mathbf{B}$ és una altra Σ -àlgebra i $(f^i)_{i \in I}$ una família I -indexada d'homomorfismes, on per a cada $i \in I$, f^i és un homomorfisme de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}^i$. Aleshores denotem per $\langle f^i \rangle_{i \in I}$ a l'únic homomorfisme f de $\mathbf{B}$ a $\prod_{i \in I} \mathbf{A}^i$ tal que, per a cada $i \in I$, $\text{pr}^i \circ f = f^i$.

A continuació definirem l'àlgebra heterogènia de parts associada a una àlgebra heterogènia. Més endavant, al Capítol 3, definirem un operador de substitució en l'àlgebra de parts de l'àlgebra de termes.

Definició 1.39. Siga $\mathbf{A} = (A, F)$ una Σ -àlgebra. Definim el S -conjunt parts de A com

$$A^{\wp} = (\text{Sub}(A_s))_{s \in S}.$$

A aquest conjunt el dotem de l'estructura de Σ -àlgebra $F^{\wp}$ on, per a cada $(w, s) \in S^* \times S$ i cada símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $F_{\sigma}^{\wp}$ és l'aplicació de $A_w^{\wp} = \prod_{i \in |w|} \text{Sub}(A_{w_i})$ a $\text{Sub}(A_s)$ que envia cada

$$(L_i)_{i \in |w|} \in A_w^{\wp} \longmapsto \left\{ F_{\sigma}((x_i)_{i \in |w|}) \mid (x_i)_{i \in |w|} \in \prod_{i \in |w|} L_i \right\} \in A_s^{\wp}.$$

Notem que $F_{\sigma}^{\wp}(L_i)_{i \in |w|}$ és la unió de totes les operacions que es poden fer amb elements de $\prod_{i \in |w|} L_{w_i}$.

D'aquesta manera definim a la Σ -àlgebra $\mathbf{A}^{\wp} = (A^{\wp}, F^{\wp})$ la Σ -àlgebra de parts associada a $\mathbf{A}$.

1.5 Congruències i àlgebra quocient

Estudiem els conceptes de congruència en una Σ -àlgebra i de Σ -àlgebra quocient generada per una congruència. Aquestes definicions ens serviran per caracteritzar els subconjunts reconeixibles.

Definició 1.40. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga Φ una S -relació d'equivalència en A . Diem que Φ és una **S -congruència en** (o per abreviar, una **congruència en**) $\mathbf{A}$ si per a cada $(w, s) \in (S^* - \{\lambda\}) \times S$, per a cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i per a cada $a = (a_i)_{i \in |w|}, b = (b_i)_{i \in |w|} \in A_w$ tal que, per a cada $i \in |w|$, $(a_i, b_i) \in \Phi_{w_i}$ es té que

$$(F_\sigma(a), F_\sigma(b)) \in \Phi_s.$$

Denotem per $\text{Cgr}(\mathbf{A})$ al conjunt de totes les congruències en $\mathbf{A}$, per $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ el reticle algebraic $(\text{Cgr}(\mathbf{A}), \subseteq)$, per $\nabla^{\mathbf{A}}$ l'element màxim de $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$ i per $\Delta^{\mathbf{A}}$ l'element mínim de $\mathbf{Cgr}(\mathbf{A})$.

Definició 1.41. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga Φ una congruència en A . Definim la Σ -àlgebra quocient d' $\mathbf{A}$ per Φ , denotada $\mathbf{A}/\Phi$, a la Σ -àlgebra $(A/\Phi, F^{\mathbf{A}/\Phi})$ on, per a cada $\sigma : w \rightarrow s$, l'operació $F_\sigma^{\mathbf{A}/\Phi} : (A/\Phi)_w \rightarrow (A/\Phi)_s$ que envia $([a_i]_{\Phi_{w_i}})_{i \in |w|} \in (A/\Phi)_w$ a

$$F_\sigma([a_i]_{\Phi_{w_i}})_{i \in |w|} = [F_\sigma((a_i)_{i \in |w|})]_{\Phi_s} \in (A/\Phi)_s = A_s/\Phi_s.$$

Notem que aquesta aplicació està ben definida pel fet que Φ és una congruència. La **projecció canònica** d' $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}/\Phi$, $\text{pr}^\Phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\Phi$, és l'homomorfisme determinat per la S -aplicació pr^Φ d' A a A/Φ .

Definició 1.42. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga Φ una congruència. Diem que la congruència Φ té **índex finit** si la relació d'equivalència subjacent té índex finit.

Proposició 1.43. *Siguen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos Σ -àlgebres i siga $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorfisme. Aleshores $\text{Ker}(f) \in \text{Cgr}(\mathbf{A})$. A més, donats una Σ -àlgebra $\mathbf{A}$ i una congruència Φ en $\mathbf{A}$, el parell $(\text{pr}^\Phi, \mathbf{A}/\Phi)$ és tal que*

- (i) $\text{Ker}(\text{pr}^\Phi) = \Phi$,
- (ii) (propietat universal) per a cada homomorfisme $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, si $\Phi \subseteq \text{Ker}(f)$, aleshores existeix un únic homomorfisme $p^{\Phi, \text{Ker } f} : \mathbf{A}/\Phi \rightarrow \mathbf{B}$ tal que $f = p^{\Phi, \text{Ker } f} \circ \text{pr}^\Phi$.

Proposició 1.44. *Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siguen $\Phi, \Psi \in \text{Cgr}(\mathbf{A})$. Aleshores $\Phi \cap \Psi$ és una congruència en $\mathbf{A}$. A més, si Φ i Ψ tenen índex finit aleshores $\Phi \cap \Psi$ també té índex finit.*

1.6 Translacions i congruència cogenerateda

En aquesta secció donarem la definició de congruència cogenerateda. Té la propietat de ser la major congruència que satura un conjunt. Per poder definir-la primer hem d'introduir les translacions.

Definició 1.45. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, siguen $t, s \in S$ dos tipus i siga $T \in \text{Hom}(A_t, A_s)$. Aleshores diem que T és una **t -translació elemental de tipus s** per a $\mathbf{A}$ si existeixen una paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, un índex $i \in |w|$, un símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, una família $(a_j)_{j \in i} \in \prod A_{w_i}$ i una altra família

$(a_k)_{k \in |w|-(i+1)} \in \prod_{k \in |w|-(i+1)} A_{w_k}$ (notem que $i+1 = \{0, \dots, i\}$ i que $|w|-(i+1) = \{i+1, \dots, |w|-1\}$) tal que

$$T(x) = F_\sigma(a_0, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{|w|-1}).$$

A més, considerarem l'aplicació identitat $\text{id}_{A_t} : A_t \longrightarrow A_t$, com una t -translació elemental de tipus t .

Denotem per $\text{Etl}_t(\mathbf{A}_s)$ el conjunt de les t -translacions elementals de tipus s . El conjunt de t -translacions elementals per a $\mathbf{A}$ és el conjunt $\text{Etl}_t(\mathbf{A}) = (\text{Etl}_t(\mathbf{A})_s)_{s \in S}$.

Definició 1.46. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, siguen $t, s \in S$ dos tipus i siga $T \in \text{Hom}(A_t, A_s)$. Diem que T és una t -translació de tipus s per a $\mathbf{A}$ si existeixen $n \in \mathbb{N}-1$, una paraula $(s_j)_{j \in n+1} \in S^{n+1}$, una família $(T_j)_{j \in n}$ tal que $s_0 = t$, $s_n = s$, per a cada $j \in n$, $T_j \in \text{Etl}_{s_j}(\mathbf{A})_{s_{j+1}}$ i

$$T = T_{n-1} \circ T_{n-2} \circ \dots \circ T_0.$$

Denotem per $\text{Tl}_t(\mathbf{A})_s$ el conjunt format per les t -translacions de tipus s per a $\mathbf{A}$. El conjunt de t -translacions per a $\mathbf{A}$ és el conjunt $\text{Tl}_t(\mathbf{A}) = (\text{Tl}_t(\mathbf{A})_s)_{s \in S}$.

Veiem amb el següent exemple aquestes dues definicions per tractar d'aclarir-les.

Exemple 1.47. Considerem el conjunt de tipus $S = 3 = \{0, 1, 2\}$. Definim el S -conjunt A per a cada tipus:

$$A_s = \begin{cases} 2\mathbb{N} & \text{si } s = 0, \\ 3\mathbb{N} & \text{si } s = 1, \\ 5\mathbb{N} & \text{si } s = 2, \end{cases}$$

Considerem la següent S -signatura:

$$\Sigma_{w,s} = \begin{cases} \{\square\} & \text{si } (w, s) = (01, 0), \\ \{\triangle\} & \text{si } (w, s) = (20, 1), \\ \{\sigma\} & \text{si } (w, s) = (010, 2). \end{cases}$$

Dotem el S -conjunt A amb la següent estructura de Σ -àlgebra, F :

$$\begin{array}{llll} F_\square : A_0 \times A_1 & \longrightarrow & A_0 & F_\triangle : A_2 \times A_1 & \longrightarrow & A_1 & F_\sigma : A_0 \times A_1 \times A_0 & \longrightarrow & A_1 \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y & (x, y) & \longmapsto & 2x + y & (x, y, z) & \longmapsto & 5z(x + y) \end{array}$$

Com que és un exemple la interpretació de les operacions no serà important, per això en comptes d'escriure $F_\square(x, y)$ escriurem $(x \square^{\mathbf{A}} y)$. Considerem l'aplicació

$$R : \begin{cases} A_1 & \longrightarrow & A_0 \\ x & \longmapsto & (8 \square^{\mathbf{A}} x) \end{cases}$$

Aquesta aplicació és una 1-translació elemental perquè existeixen $w = 01$, $i = 1 \in |w|$, $\square \in \Sigma_{w,0}$, una família $(a_j)_{j \in i} = a_0 = 8 \in A_{w_0} = A_0$ i una família $(a_j)_{j \in |w|-(i+1)} = \emptyset$ tal que

$$R(x) = F_\square(a_0, x) = 8 \square^{\mathbf{A}} x.$$

Definim ara la següent aplicació

$$H : \begin{cases} A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ x & \longmapsto & \sigma^{\mathbf{A}}(16, x, 22) \end{cases}$$

Aquesta aplicació també és una 1-translació elemental ja que existeixen $w = 010$, $i = 1 \in |w|$, $\sigma \in \Sigma_{w,2}$, una família $(a_j)_{j \in i} = a_0 = 16 \in A_{w_0} = A_0$ i una família $(a_j)_{k \in |w|-(i+1)} = a_2 = 22 \in A_{w_2} = A_0$ tal que

$$H(x) = F_\sigma(a_0, x, a_2) = \sigma^{\mathbf{A}}(16, x, 22).$$

Veiem ara una aplicació que siga una translació. Definim l'aplicació

$$T : \begin{cases} A_0 & \longrightarrow & A_1 \\ x & \longmapsto & \sigma^{\mathbf{A}}\left(16, 25, \left[2\Box^{\mathbf{A}}\left(\sigma^{\mathbf{A}}(x, 9, 4)\Delta^{\mathbf{A}}4\right)\right]\right)\Delta^{\mathbf{A}}8 \end{cases}$$

T és una 0-translació perquè existeixen $n = 5 \in \mathbb{N}$, una paraula $s = (s_j)_{j \in n+1} = 021021 \in S^6$ i una família $(T_j)_{j \in 5}$ de translacions elementals definides

$$\begin{array}{lll} T_0 : A_0 & \longrightarrow & A_2, \\ x & \longmapsto & \sigma^{\mathbf{A}}(x, 9, 4) \end{array} \quad \begin{array}{lll} T_1 : A_2 & \longrightarrow & A_1, \\ x & \longmapsto & x\Delta^{\mathbf{A}}4 \end{array} \quad \begin{array}{lll} T_2 : A_1 & \longrightarrow & A_0 \\ x & \longmapsto & 2\Box^{\mathbf{A}}x \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} T_3 : A_0 & \longrightarrow & A_2, \\ x & \longmapsto & \sigma^{\mathbf{A}}(16, 25, x) \end{array} \quad \begin{array}{lll} T_4 : A_2 & \longrightarrow & A_1 \\ x & \longmapsto & x\Delta^{\mathbf{A}}8 \end{array}$$

D'aquesta manera es té que $T = T_4 \circ \dots \circ T_0$.

Veiem més definicions i les primeres propietats de les translacions sobre un Σ -àlgebra.

Definició 1.48. Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, $L \subseteq A$, $s, t \in S$, $X \subseteq A_t$, $Y \subseteq A_s$ i $T \in \text{Tr}_t(\mathbf{A})_s$. Llavors:

- (i) $T[L]$ denota el subconjunt d' A definit de la següent manera: $T[L]_s = T[L]_t$ i $T[L]_u = \emptyset$ si $u \neq s$. Per tant $T[L] = \delta^{s, T[L]_t}$.
- (ii) $T^{-1}[L]$ denota el subconjunt d' A definit com segueix: $T^{-1}[L]_t = T^{-1}[L]_s$ i $T^{-1}[L]_u = \emptyset$ si $u \neq t$. Així, $T^{-1}[L] = \delta^{t, T^{-1}[L]_s}$.
- (iii) $T[X]$ denota el subconjunt $T[\delta^{t, X}]$.
- (iv) $T^{-1}[Y]$ denota $T^{-1}[\delta^{s, Y}]$.

Veiem dues caracteritzacions de les congruències en una Σ -àlgebra. Aquestes ens permetran provar l'existència de la congruència cogenerateda.

Proposició 1.49. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga Φ una relació d'equivalència en A . Aleshores les següent afirmacions són equivalents:

- (i) Φ és una congruència en $\mathbf{A}$.
- (ii) Φ és tancada per a les translacions elementals en $\mathbf{A}$, i.e., per a cada $t, s \in S$, per a cada $x, y \in A_t$ tal que $(x, y) \in \Phi_t$ i per a cada $T \in \text{Etr}_t(\mathbf{A})_s$ es compleix que $(T(x), T(y)) \in \Phi_s$.
- (iii) Φ és tancada per a les translacions en $\mathbf{A}$, i.e., per a cada $t, s \in S$, per a cada $x, y \in A_t$ tal que $(x, y) \in \Phi_t$ i per a cada $T \in \text{Tr}_t(\mathbf{A})_s$ es compleix que $(T(x), T(y)) \in \Phi_s$.

Demostració. Veiem primer que (i) implica (ii). Suposem que Φ és una congruència. Siguen t, s dos tipus de S . Siga $T : A_t \longrightarrow A_s$ una t -transformació elemental de tipus s . Així, existeixen una paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, un símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, un índex $i \in |w|$, una família $(a_j)_{j \in i} \in \prod_{j \in i} A_{w_j}$ i una família $(a_k)_{k \in |w|-i+1} \in \prod_{k \in |w|-i+1} A_{w_k}$ tals que $t = w_i$ i, per a tot $x \in A_t$,

$$T(x) = F_\sigma(a_0, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{|w|-1}).$$

Siguen $x, y \in A_t$ dos elements tals que $(x, y) \in \Phi_t$. Hem de veure que $(T(x), T(y)) \in \Phi_s$. Notem que, per a tot $j \in i$ i per a tot $k \in |w| - i + 1$,

$$(a_j, a_j) \in \Phi_{w_j}, \quad (a_k, a_k) \in \Phi_{w_k}.$$

Aleshores, com que Φ és una congruència, se segueix que

$$(T(x), T(y)) \in \Phi_s.$$

Provem ara el recíproc. Suposem que Φ és tancada per a tota transformació elemental. Siguen $w \in S^* - \{\lambda\}$ una paraula, $s \in S$ un tipus, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ un símbol d'operació, $(a_i)_{i \in |w|}$ una família d'elements d' A_w i $(b_i)_{i \in |w|}$ una altra família d' A_w . Hem de demostrar que $(\sigma((a_i)_{i \in |w|}), \sigma((b_i)_{i \in |w|})) \in \Phi_s$. Per a cada $i \in |w|$, definim la w_i -transformació elemental de tipus s $T_i : A_{w_i} \longrightarrow A_s$ que envia cada

$$x \in A_{w_i} \longmapsto \sigma(a_0, \dots, a_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots, b_{|w|-1}) \in A_s.$$

Observem que

$$T_0(b_0) = \sigma((b_i)_{i \in |w|}), \quad T_{|w|-1}(a_{|w|-1}) = \sigma((a_i)_{i \in |w|}).$$

Aleshores és suficient provar que $(T_{|w|-1}(a_{|w|-1}), T_0(b_0)) \in \Phi_s$. Hem suposat que, per a cada $i \in |w|$, $(a_i, b_i) \in \Phi_{w_i}$. Per tant, per hipòtesi, tenim que

$$(T_i(a_i), T_i(b_i)) \in \Phi_s.$$

A més, notem que, per a cada $i \in |w| - 1$,

$$T_j(a_j) = T_{j+1}(b_{j+1}).$$

En particular $(T_0(a_0), T_0(b_0)) \in \Phi_s$. Com que $T_0(a_0) = T_1(b_1)$, llavors $(T_1(b_1), T_0(b_0)) \in \Phi_s$. Com a conseqüència que $(T_1(a_1), T_1(b_1)) \in \Phi_s$ i per la propietat transitiva, se segueix que

$$(T_1(a_1), T_0(b_0)) \in \Phi_s.$$

Raonant per inducció arribem a que

$$(T_{|w|-1}(a_{|w|-1}), T_0(b_0)) \in \Phi_s.$$

Per tant Φ és una congruència.

Veiem ara l'equivalència entre (ii) i (iii).

Pel fet que tota transformació elemental és una transformació, aleshores és evident que (iii) implica (ii).

Recíprocament, suposem que Φ és tancada per a totes les transformacions elementals. Siguen t, s dos tipus en S . Siga $T : A_t \longrightarrow A_s$ una t -transformació elemental de tipus s . Aleshores existeixen $n \in \mathbb{N} - 1$, una paraula $(s_j)_{j \in n+1} \in S^{n+1}$ i una família $(T_j)_{j \in n}$ tals que $s_0 = t$, $s_n = s$, $T_j \in \text{Etl}_{s_j}(\mathbf{A})_{s_{j+1}}$ i $T = T_{n-1} \circ \dots \circ T_0$. Siguen $x, y \in A_t$ dos elements tals que $(x, y) \in \Phi_t$. Hem de provar que $(T(x), T(y)) \in \Phi_s$. Aleshores

$$(T_0(x), T_0(y)) \in \Phi_{s_1}$$

per hipòtesi i perquè T_0 és una transformació elemental. Llavors se segueix que

$$(T_1(T_0(x)), T_1(T_0(y))) \in \Phi_{s_2}.$$

Seguint el mateix raonament arribem a que

$$(T_{n-1}(\dots(T_0(x))\dots), T_{n-1}(\dots(T_0(y))\dots)) \in \Phi_s.$$

D'aquesta manera $(T(x), T(y)) \in \Phi_s$. □

El nostre objectiu ara és trobar una aplicació $\Omega^{\mathbf{A}}$ de $\text{Sub}(A)$ a $\text{Cgr}(\mathbf{A})$ de manera que a cada subconjunt L d' A li associe una congruència que sature a L . Aquesta congruència és la congruència cogenerateda per L . Ens servirà per poder caracteritzar els subconjunts reconeixibles dins d'una Σ -àlgebra.

Començarem definint una relació d'equivalència que sature a L . Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga $L \subseteq A$. La funció característica de L , $\text{ch}^L : A \longrightarrow (2)_{s \in S}$ definida, per a cada tipus $s \in S$, com

$$\text{ch}_s^L(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in L_s; \\ 0 & \text{si } x \notin L_s. \end{cases}$$

El nucli d'aquesta aplicació defineix una relació d'equivalència $\text{Ker}(\text{ch}^L)$ definida, per a cada $s \in S$, com segueix:

$$\text{Ker}(\text{ch}^L)_s = \{(x, y) \in A_s^2 \mid x \in L_s \longleftrightarrow y \in L_s\}.$$

Per la definició de la funció característica es té que $\text{Ker}(\text{ch}^L)$ satura L i, a més, és senzill veure que si Φ és una relació d'equivalència que sature a L aleshores $\Phi \subseteq \text{Ker}(\text{ch}^L)$.

Volem definir una relació d'equivalència que siga un refinament de $\text{Ker}(\text{ch}^L)$ de tal forma que es comporte bé amb les operacions de la signatura Σ i així poder ser una congruència.

Definició 1.50. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga $L \subseteq A$ un S -subconjunt de A . Aleshores denotem per $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ a la relació binària en A definida, per a cada $t \in S$, de la següent forma:

$$\Omega^{\mathbf{A}}(L)_t = \left\{ (x, y) \in A_t^2 \mid \begin{array}{l} \forall s \in S, \forall T \in \text{Tl}_t(\mathbf{A})_s \\ (T(x) \in L_s \leftrightarrow T(y) \in L_s) \end{array} \right\}.$$

Proposició 1.51. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga $L \subseteq A$. Aleshores:

- (i) $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ és una congruència en $\mathbf{A}$.
- (ii) $\Omega^{\mathbf{A}}(L) \subseteq \text{Ker}(\text{ch}^L)$.
- (iii) Per a cada congruència Φ en $\mathbf{A}$, si $\Phi \subseteq \text{Ker}(\text{ch}^L)$ aleshores $\Phi \subseteq \Omega^{\mathbf{A}}(L)$.

En altres paraules, $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ és la major congruència en $\mathbf{A}$ que satura a L .

Demostració. L'afirmació (i) es compleix com a conseqüència de la Proposició 1.49.

Veiem (ii). Siga $t \in S$ un tipus i siga $(x, y) \in \Omega^{\mathbf{A}}(L)_t$. Considerem la transformació $\text{id}_{A_t} \in \text{Tr}_t(\mathbf{A})_t$. Aleshores, per la definició de $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$, $x \in L_t$ si, i només si, $y \in L_t$. Per tant, $\Omega^{\mathbf{A}}(L) \subseteq \text{Ker}(\text{ch}^L)$.

Provem ara (iii). Siga Φ una congruència en $\mathbf{A}$ tal que $\Phi \subseteq \text{Ker}(\text{ch}^L)$, i.e., per a cada $t \in S$, i per a cada parella $(x, y) \in \Phi_t$, es compleix que $x \in L_t$ si, i només si, $y \in L_t$. Hem de veure que, per a cada tipus $t \in S$, $\Phi_t \subseteq \Omega^{\mathbf{A}}(L)_t$. Siga $t \in S$ un tipus i siguen $(x, y) \in \Phi_t$. Aleshores, com que Φ és una congruència, per la Proposició 1.49, tenim que, per a cada $s \in S$ i cada transformació $T \in \text{Tr}_t(\mathbf{A})_s$, $(T(x), T(y)) \in \Phi_s$. Per tant, per la hipòtesi sobre Φ , $T(x) \in L_s$ si, i només si, $T(y) \in L_s$. D'aquesta manera $\Phi \subseteq \Omega^{\mathbf{A}}(L)$. $\square$

Gràcies a aquesta proposició podem afirmar que $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ és una congruència i per tant podem donar la següent definició.

Definició 1.52. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga $L \subseteq A$. Anomenem a $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ la congruència en $\mathbf{A}$ **cogenerada** per L (també anomenada congruència **sintàctica** en $\mathbf{A}$ determinada per L).

La següent proposició ens permetrà caracteritzar d'una manera senzilla els subconjunts reconeixibles al proper capítol.

Proposició 1.53. Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, $L \subseteq A$ i $\Phi \in \text{Cgr}(\mathbf{A})$. Aleshores $L \in \Phi\text{-Sat}(A)$, i.e., $L = [L]^{\Phi}$ si, i només si, $\Phi \subseteq \Omega^{\mathbf{A}}(L)$.

Demostració. Suposem primer que $L = [L]^{\Phi}$. Per la Proposició 1.51, sabem que $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ és la major congruència que satura L . Llavors se segueix que $\Phi \subseteq \Omega^{\mathbf{A}}(L)$.

Recíprocament, suposem ara que $\Phi \subseteq \Omega^{\mathbf{A}}(L)$. Pel Corol·lari 1.17, $\Omega^{\mathbf{A}}(L)\text{-Sat} \subset \Phi\text{-Sat}$. Aleshores $L \in \Phi\text{-Sat}$, ja que $L \in \Omega^{\mathbf{A}}(L)$. Per tant $L = [L]^{\Phi}$. $\square$

Capítol 2

Reconeixibilitat

La teoria de llenguatges reconeixibles és una branca important dins de les ciències de la computació. Direm que un llenguatge és reconeixible si és acceptat per una Σ -àlgebra finita. En aquest capítol donarem la definició de subconjunt reconeixible segons un punt de vista algebraic. A més, provarem el teorema de Myhill-Nerode [9, 10] que relaciona el concepte de reconeixibilitat amb la congruència sintàctica. Acabarem el capítol demostrant que els llenguatges reconeixibles d'una àlgebra heterogènia tenen estructura d'àlgebra booleana.

Definició 2.1. Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, $T \subseteq S$ un subconjunt de tipus i siga $L \subseteq A|_T = (A_t)_{t \in T}$. Direm que L és **T -reconeixible** si existeixen una Σ -àlgebra finita $\mathbf{B}$, una homomorfisme $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, i un subconjunt M de $B|_T$ tal que

$$L = (f|_T)^{-1}[M],$$

on $(f|_T)^{-1}[M] = (f_t^{-1}[M])_{t \in T}$. Denotarem per $\text{Rec}_T(\mathbf{A})$ al conjunt format per tots els subconjunts T -reconeixibles de $A|_T$.

Si $T = S$ aleshores denotarem per $\text{Rec}(\mathbf{A})$ al conjunt $\text{Rec}_S(\mathbf{A})$. Als elements de $\text{Rec}(\mathbf{A})$ els anomenarem **reconeixibles**.

Si $T = \{s\}$ per a algun $s \in S$, aleshores denotarem per $\text{Rec}_s(\mathbf{A})$ al conjunt $\text{Rec}_{\{s\}}(\mathbf{A})$. Anomenarem als elements de $\text{Rec}_s(\mathbf{A})$ **s -reconeixibles**.

Exemple 2.2. Considerem $S = 1 = \{0\}$. Siga $A = \{a, b\}$. Considerem el monoide lliure A^* . Sabem que A^* és una Σ -àlgebra amb la signatura:

$$\Sigma_{w,s} = \begin{cases} \cdot & \text{si } (w, s) = (00, 0), \\ 1 & \text{si } (w, s) = (\lambda, 0), \\ \emptyset & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

I amb la següent estructura de Σ -àlgebra:

$$F_{w,s}(\sigma) = \begin{cases} \lambda & \text{si } \sigma = \cdot, \text{ i si } (w, s) = (00, 0), \\ \lambda & \text{i si } \sigma = 1, \text{ si } (w, s) = (\lambda, 0), \\ \emptyset & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Notem que A^* és un conjunt infinit. Siga L el subconjunt de A^* format per totes les paraules que contenen la lletra a , és a dir:

$$L = \{w \in A^* \mid |w|_a \neq 0\}.$$

Veiem que L és reconeixible. Considerem la Σ -àlgebra $\mathbf{B} = (\mathbb{Z}_2, \cdot, 1)$ on $\cdot$ és el producte habitual en $\mathbb{Z}_2$ i 1 és la identitat del producte. Definim l'aplicació:

$$\begin{aligned} f: \mathbf{A}^* &\longrightarrow \mathbb{Z}_2, \\ w &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |w|_a = 0, \\ 0 & \text{en altre cas.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hem de veure primer que és un homomorfisme. Siguen $w, u \in A^*$. Suposem que $|w \wedge u|_a \neq 0$, aleshores o bé $|w|_a \neq 0$ o bé $|u|_a \neq 0$. En qualsevol dels casos es té que

$$f(w \wedge u) = 0 = f(w) \cdot f(u).$$

Suposem ara que $|w \wedge u|_a = 0$, aleshores $|w|_a = 0$ i també $|u|_a = 0$. Així, se segueix que

$$f(w \wedge u) = 1 = 1 \cdot 1 = f(w) \cdot f(u).$$

Per tant f és un homomorfisme. Llavors L és reconeixible ja que

$$L = f^{-1}[\{0\}].$$

Donarem ara un llenguatge de $\mathbf{A}^*$ que no és reconeixible. Considerem el conjunt H format per les paraules que comencen per la lletra a un nombre n de vegades i després per la lletra b el mateix nombre de vegades. Considerem el conjunt H format per les paraules que comencen per la lletra a n vegades i després van seguits per la lletra b n vegades també. Per exemple la paraula $aabb \in H$ però les paraules $abab, aabbb \notin H$. Siguen $x \in A^*$ i $n \in \mathbb{N}$, per simplificar la notació escriurem

$$x^n = \overbrace{x \wedge \dots \wedge x}^n = \overbrace{x \dots x}^n.$$

Si $n = 0$, aleshores definim $x^0 = \lambda$. Amb aquesta notació podem definir el conjunt H com

$$H = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Suposem que H és reconeixible. Llavors existiran una Σ -àlgebra finita $\mathbf{B}$, un subconjunt $M \subseteq B$ i un homomorfisme $f: A \longrightarrow B$ tals que $H = f^{-1}[M]$. D'una banda, si $n, m \in \mathbb{N}$ són tals que $n \neq m$ se segueix que $a^m b^n \notin H$ i per tant $f(a^m b^n) \notin M$. Per una altra banda $f(a^n) = (f(a))^n$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ ja que f és un homomorfisme. A més, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $f(a^n) = (f(a))^n \in B$. Com a conseqüència del fet que B és finit, existiran $i, j \in \mathbb{N}$ amb $i \neq j$ tals que $(f(a))^i = (f(a))^j$. Pel comentari fet anteriorment tenim que $a^j b^j \in H$ però $a^i b^j \notin H$ i llavors $f(a^j b^j) \in M$ però $f(a^i b^j) \notin M$. Així, se segueix que

$$M \not\ni f(a^i b^j) = f(a^i) f(b^j) = (f(a))^i (f(b))^j = (f(a))^j (f(b))^j \in M.$$

Arribem així a una contradicció. Aquesta contradicció ve de suposar que H era reconeixible.

A continuació provarem la versió heterogènia del teorema de Myhill-Nerode. És un resultat que relaciona la noció de reconeixibilitat amb les congruències d'índex finit. També veurem la connexió que hi ha entre la reconeixibilitat i la congruència cogenerada o sintàctica.

Teorema 2.3. *Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, $T \subseteq S$ un subconjunt de tipus i siga $L \subseteq A|_T$. Aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

- (i) *L és T -reconeixible.*
- (ii) *Existeix una congruència Φ en $\mathbf{A}$ d'índex finit tal que $L = [L]^{\Phi|_T}$, on $\Phi|_T = (\Phi_t)_{t \in T}$ i, per a cada $t \in T$, $[L]_t^{\Phi|_T} = [L_t]^{\Phi_t}$.*

Teorema 2.4 (Teorema de Myhill-Nerode). *Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i $L \subseteq A$. Aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

- (i) *L és reconeixible.*
- (ii) *Existeix una congruència Φ en $\mathbf{A}$ d'índex finit tal que $L = [L]^\Phi$.*

Demostració. Suposem primer que L és reconeixible. Siguen $\mathbf{B}$ la Σ -àlgebra finita, $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ el Σ -homomorfisme i M el S -subconjunt de B tals que

$$L = f^{-1}[M].$$

Considerem la congruència $\text{Ker}(f)$. Notem que $\mathbf{Im}(f)$ és una Σ -àlgebra finita ja que és una Σ -subàlgebra de $\mathbf{B}$ que és finita. Per tant $\mathbf{A}/\text{Ker}(f)$ és finit, pel primer teorema d'isomorfia. D'aquesta manera $\text{Ker}(f)$ és una congruència d'índex finit en $\mathbf{A}$. Falta veure que satura L . La inclusió $L \subseteq [L]^{\text{Ker}(f)}$ és trivial. Veiem l'altra implicació. Siguen $s \in S$ un tipus i $x \in L_s$, Siga $a \in A_s$ tal que $a \in [L]^{\text{Ker}(f)}$. Aleshores

$$(x, a) \in \text{Ker}(f)_s,$$

és a dir, $f_s(x) = f_s(a)$. Així, $f_s(a) \in M$. Però recordem que $L = f^{-1}[M]$, llavors se segueix que

$$a \in L.$$

D'aquesta manera $\text{Ker}(f)$ satura L .

Veiem ara la implicació inversa. Suposem que existeix una congruència Φ en $\mathbf{A}$ d'índex finit tal que $L = [L]^\Phi$. Sabem que $\text{pr}^\Phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\Phi$ és un Σ -homomorfisme. A més la Σ -àlgebra $\mathbf{A}/\Phi$ és finita. Siga $\mathcal{M}$ el subconjunt de $\mathbf{A}/\Phi$ tal que

$$\mathcal{M} = \text{pr}^\Phi[L].$$

Hem de comprovar que $L = (\text{pr}^\Phi)^{-1}[\mathcal{M}]$. Per definició es compleix que $L \subseteq (\text{pr}^\Phi)^{-1}[\mathcal{M}]$. Provem l'altra inclusió. Siguen $s \in S$ i siga $a \in (\text{pr}^\Phi)^{-1}[\mathcal{M}]$. Aleshores, $\text{pr}_s^\Phi(a) \in \mathcal{M}_s$. Per definició de $\mathcal{M}$, existeix un element $x \in L_s$ tal que

$$\text{pr}_s^\Phi(x) = \text{pr}_s^\Phi(a).$$

Això vol dir que

$$(x, a) \in \Phi_s.$$

Com que L és Φ -saturat i $x \in L_s$, aleshores $a \in L_s$. D'aquesta manera es compleix que

$$L = (\text{pr}^\Phi)^{-1}[\mathcal{M}]$$

i per tant L és reconeixible. □

Corol·lari 2.5. *Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i $L \subseteq A$. Aleshores L és reconeixible si, i només si, $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ té índex finit.*

Demostració. Suposem que L és reconeixible. Aleshores existeix una congruència Φ en $\mathbf{A}$ d'índex finit que satura L . Per la Proposició 1.51 tenim que

$$\Phi \subseteq \Omega^{\mathbf{A}}(L).$$

Llavors, pel Corol·lari 1.17 se segueix que $\Omega^{\mathbf{A}}(L)\text{-Sat} \subseteq \Phi\text{-Sat}$. Per tant, per a cada $s \in S$,

$$|A_s/\Omega^{\mathbf{A}}(L)_s| \leq |A_s/\Phi_s| < \infty.$$

D'aquesta manera $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ és d'índex finit.

Recíprocament, suposem que $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ té índex finit. Per la Proposició 1.51, sabem que $\Omega^{\mathbf{A}}(L)$ satura L . Per tant, com a conseqüència de la Proposició 2.4, L és reconeixible. $\square$

Teorema 2.6. *Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, $s \in S$ i $L \subseteq A_s$. Aleshores les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *L és s -reconeixible.*

(ii) *Existeix una congruència Φ en $\mathbf{A}$ d'índex finit tal que $L = [L]^{\Phi_s}$.*

Corol·lari 2.7. *Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, $s \in S$ i $L \subseteq A_s$. Aleshores L és s -reconeixible si, i només si, $\Omega^{\mathbf{A}}(\delta^{s,L})$ té índex finit.*

Com a conseqüència dels darrers quatre resultats obtenim la següent proposició.

Proposició 2.8. *Siguen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra, $s \in S$ i $L \subseteq A_s$. Aleshores $L \in \text{Rec}_s(\mathbf{A})$ si, i només si, $\delta^{s,L} \in \text{Rec}(\mathbf{A})$. Per tant, $\text{Rec}_s(\mathbf{A})$ és bijectiu a un subconjunt de $\text{Rec}(\mathbf{A})$.*

Suposició. Per al següent teorema suposarem que el conjunt de tipus S és finit.

Teorema 2.9. *Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga $L \subseteq A$. Aleshores $L \in \text{Rec}(\mathbf{A})$ si, i només si, per a cada $s \in S$, $L_s \in \text{Rec}_s(\mathbf{A})$.*

Demostració. Suposem primer que $L \in \text{Rec}(\mathbf{A})$. Aleshores, per les definicions, se segueix que, per a cada $s \in S$, $L_s \in \text{Rec}_s(\mathbf{A})$.

Veiem ara la implicació inversa. Suposem que, per a cada $s \in S$, L_s és s -reconeixible. Per a cada $s \in S$, siguen, $\mathbf{B}^s$ la Σ -àlgebra finita, $f^s : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}^s$ el Σ -homomorfisme i $M_s \subset B_s^s$ el subconjunt tals que

$$L_s = (f_s^s)^{-1}[M_s].$$

Definim la Σ -àlgebra

$$\prod_{s \in S} \mathbf{B}^s.$$

Tenim que és una Σ -àlgebra finita per la suposició prèvia al teorema i perquè, per a cada $s \in S$, $\mathbf{B}^s$ és finita. Siga $\langle f^s \rangle_{s \in S}$ el Σ -homomorfisme canònic de $\mathbf{A}$ a $\prod_{s \in S} \mathbf{B}^s$. Definim el S -subconjunt $N = (N_t)_{t \in S}$ de $\prod_{s \in S} B^s = (\prod_{s \in S} B_t^s)_{t \in S}$, per a cada $t \in S$, tret d'isomorfismes com

$$N_t = M_t \times \prod_{s \in S - \{t\}} B_t^s.$$

Aleshores no és difícil comprovar que

$$L = (\langle f^s \rangle_{s \in S})^{-1}[N].$$

Per tant L és un llenguatge reconeixible. $\square$

En virtut del teorema anterior i pel fet que, per a una Σ -àlgebra $\mathbf{A}$ i un S -subconjunt $L \subseteq A$, $L = \bigcup_{s \in S} \delta^{s, L_s}$, se segueix que per estudiar els subconjunts reconeixibles $\text{Rec}(\mathbf{A})$ és suficient estudiar, per a cada $s \in S$, els subconjunts reconeixibles de $\text{Rec}_s(\mathbf{A})$.

Als propers resultats veurem que $\text{Rec}(\mathbf{A})$ té estructura d'àlgebra booleana, és a dir, la unió i intersecció de llenguatges reconeixibles és un llenguatge reconeixible. A més, ens permetran aconseguir nous llenguatges reconeixibles.

Suposició. Per a la següent proposició considerarem que el conjunt de tipus S és finit.

Proposició 2.10. *Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra. Aleshores $\emptyset^S, A \in \text{Rec}(\mathbf{A})$.*

Demostració. Siga $\mathbf{1} = (1^S, H^1)$ la Σ -àlgebra finita definida com segueix: per a cada $(w, s) \in S^* \times S$ i per a cada $\sigma \in \Sigma_{w, s}$, l'operació estructural associada a σ , $H_\sigma^1 : 1_w \rightarrow 1_s$, és l'aplicació constant que pren valor 0. Considerem l'homomorfisme $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{1}$ definit, per a cada s com l'aplicació constant 0, és a dir, per a cada $a \in A_s$, $f_s(a) = 0$. És senzill comprovar que f és un homomorfisme. D'aquesta manera tenim que

$$A = f^{-1}[\{0\}] \quad \emptyset = f^{-1}[\emptyset].$$

D'aquesta manera tenim que A i $\emptyset$ són dos llenguatges reconeixibles. $\square$

Teorema 2.11. *Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siguin K i L dos subconjunts reconeixibles. Aleshores:*

$$K \cap L, K \cup L, K - L \in \text{Rec}(\mathbf{A}).$$

Demostració. En virtut del Teorema 2.4, siga Φ una congruència d'índex finit en $\mathbf{A}$ que satura K i siga Ψ una congruència d'índex finit que satura L . Llavors sabem per la Proposició 1.44, que $\Phi \cap \Psi$ és una congruència d'índex finit. Veiem primer que $\Phi \cap \Psi$ satura $K \cap L$. Sempre es compleix que $K \cap L \subseteq [K \cap L]^{\Phi \cap \Psi}$. Provem l'altra inclusió. Siga $s \in S$ i siga $a \in K_s \cap L_s$. Siga $z \in [a]_{\Phi_s \cap \Psi_s}$. Hem de veure que $z \in K_s \cap L_s$. Com que $z \in [a]_{\Phi_s \cap \Psi_s}$ aleshores $(z, a) \in \Phi_s \cap \Psi_s$. Per tant se segueix que $(z, a) \in \Phi_s$. Com que K és Φ -saturat i $a \in K_s$ aleshores $z \in K_s$. Anàlogament es té que $(z, a) \in \Psi_s$. Com que L és Ψ -saturat i $a \in L_s$ llavors $z \in L_s$. Així arribem a que $z \in K_s \cap L_s$ i consegüentment $K \cap L$ és $\Phi \cap \Psi$ -saturat. Per tant $K \cap L$ és reconeixible.

Veiem ara que $K \cup L$ és reconeixible. Per fer-ho provarem que $K \cup L$ és $\Phi \cap \Psi$ -saturat. La inclusió $K \cup L \subseteq [K \cup L]^{\Phi \cap \Psi}$ és evident. Siga $s \in S$ i siga $z \in [K \cup L]_s^{\Phi \cap \Psi}$. Aleshores existeix $a \in K_s \cup L_s$ tal que $z \in [a]_{\Phi_s \cap \Psi_s}$. D'aquesta manera $(z, a) \in \Phi_s \cap \Psi_s$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $a \in K_s$. Com que K és Φ -saturat i $(z, a) \in \Phi_s$ aleshores $z \in K_s$. Si suposarem que $a \in L_s$ aleshores obtindríem que $z \in L_s$. Per tant $z \in K_s \cup L_s$ cosa que implica que $K_s \cup L_s = [K \cup L]_s^{\Phi \cap \Psi}$. Per tant $K \cup L$ és reconeixible.

Per finalitzar veiem que $K - L$ és reconeixible. De la mateixa manera que en els casos anteriors veurem que és $\Phi \cap \Psi$ -saturat. La inclusió $K - L \subseteq [K - L]^{\Phi \cap \Psi}$ és trivial. Siga $s \in S$ i siga $z \in [K - L]_s^{\Phi \cap \Psi}$.

Llavors existeix $a \in K_s - L_s$ tal que $z \in [a]_{\Phi_s \cap \Psi_s}$. Atès que $(z, a) \in \Phi_s \cap \Psi_s \subseteq \Phi_s$ i que K és Φ -saturat se segueix que $z \in K_s$. Suposem que $z \in L_s$. Com que $(z, a) \in \Psi_s$ i L és Ψ -saturat, llavors tindriem que $a \in L_s$ cosa que és una contradicció. Aquesta contradicció ve de suposar que $z \in L_s$. Per tant $z \notin L_s$ i aleshores $z \in K_s - L_s$. Per tant $K - L = [K - L]^{\Phi \cap \Psi}$ i d'aquesta manera $K - L$ és reconeixible. $\square$

Corol·lari 2.12. *Suposem que el conjunt de tipus S és finit. Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i siga L un subconjunt reconeixible. Aleshores el complementari d' L en A és reconeixible.*

Com a conseqüència dels tres resultats anteriors tenim que si $\mathbf{A}$ és una Σ -àlgebra aleshores $(\text{Rec}(\mathbf{A}), \cup, \cap, \mathbb{C}_A, \emptyset, A)$ és una àlgebra booleana. Estudiem algunes altres maneres d'obtenir llenguatges reconeixibles.

Proposició 2.13. *Siguen $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues Σ -àlgebres. Aleshores:*

- (i) *Si $T \in \text{Tr}_t(\mathbf{A})_s$ i $L \in \text{Rec}(\mathbf{A})$, aleshores $T^{-1}[L] = \delta^{t, T^{-1}[L_s]} \in \text{Rec}(\mathbf{A})$.*
- (ii) *Si $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ i $M \in \text{Rec}(\mathbf{B})$, aleshores $f^{-1}[M] \in \text{Rec}(\mathbf{A})$.*

Capítol 3

Àlgebra de termes

En aquest capítol introduïrem l'àlgebra de termes. Provarem que els conjunts formats per una variable, un símbol d'operació constant o un símbol d'operació actuant sobre una família de variables són reconeixibles. Definirem diversos operadors de substitució a l'àlgebra de termes i provarem que l'acció d'aquest operador preserva la reconeixibilitat dels llenguatges. Per finalitzar, definirem el producte estrela i demostrarem que el producte estrela d'un llenguatge reconeixible dona com a resultat un llenguatge reconeixible.

Definició 3.1. Siga X un S -conjunt. Denotarem per $W_\Sigma(X)$ al S -conjunt

$$W_\Sigma(X) = \left(\left(\coprod \Sigma \amalg \coprod X \right)^* \right)_{s \in S},$$

i.e., l'aplicació de S en $\mathcal{U}$ que és constantment $((\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^*)_{s \in S}$, on $((\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^*)_{s \in S}$ és el conjunt de totes les paraules sobre el conjunt $\coprod \Sigma \amalg \coprod X$, i.e., el conjunt:

$$\left[\left(\bigcup_{(w,s) \in S^* \times S} (\Sigma_{w,s} \times \{(w,s)\}) \right) \times \{0\} \right] \cup \left[\left(\bigcup_{s \in S} (X_s \times s) \right) \times \{1\} \right].$$

Siga $s \in S$ i siga $x \in X_s$. Representem per (x) a l'element $((x,s),1) \in (\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^*$, que és el valor en x de la projecció canònica de X_s en $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^*$. Siguen $(w,s) \in S^* \times S$ i $\sigma \in \Sigma_{w,s}$. Anàlogament, representem per (σ) a l'element $((\sigma,(w,s)),0) \in (\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^*$, que és el valor en σ de la projecció canònica de $\Sigma_{w,s}$ en $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^*$.

Dotem el conjunt $W_\Sigma(X)$ d'una estructura algebraica F . Per a cada $(w,s) \in S^* \times S$, per a cada símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, l'operació estructural F_σ associada a σ és l'aplicació de $W_\Sigma(X)_w$ a $W_\Sigma(X)_s$, que envia

$$(P_i)_{i \in |w|} \in W_\Sigma(X)_w \mapsto (\sigma) \wedge \bigwedge_{i \in |w|} P_i \in W_\Sigma(X)_s.$$

D'aquesta manera definim l'àlgebra de Σ -files en X com la Σ -àlgebra $\mathbf{W}_\Sigma(X) = (W_\Sigma(X), F)$.

Notem que, gràcies a utilitzar coproductes en comptes d'unions, podem saber cada element si és operació o variable i de quin tipus. Per exemple, a la signatura d'espai vectorial de l'Exemple 1.30, Ω , el signe $+$ representa dues operacions formals diferents. Podem distingir-les vistes en $W_\Omega(X)$, per un S -conjunt X qualsevol, ja que si $+: 00 \rightarrow 0$, aleshores $(+) = ((+, (00, 0), 0))$; i si $+: 11 \rightarrow 1$, aleshores $(+) = ((+, (11, 1), 0))$.

Definició 3.2. Siga X un S -conjunt. L'àlgebra de termes o (Σ -àlgebra lliure en X), denotada per $\mathbf{T}_\Sigma(X)$, és la Σ -àlgebra determinada per:

$$\mathbf{T}_\Sigma(X) = \mathbf{Sg}_{\mathbf{W}_\Sigma(X)}((\{(x) \mid x \in X_s\})_{s \in S}).$$

Denotem per $T_\Sigma(X)$ al conjunt subjacent de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$. Siga $s \in S$, anomenarem els elements de $T_\Sigma(X)_s$ **termes** de tipus s amb variables en X o, simplement, (X, s) -termes.

La següent proposició ajuda a entendre com son els termes de $T_\Sigma(X)_s$. A més, ens permetrà donar definicions per recursió algebraica i demostrar alguns resultats per inducció algebraica.

Proposició 3.3. *Siguen X un S -conjunt, $s \in S$ i $P \in W_\Sigma(X)_s$. Aleshores P és un terme de tipus s si, i només, si*

- (1) $P = (x)$, per a una única variable $x \in X_s$;
- (2) $P = \sigma$, per a un únic símbol d'operació constant $\sigma \in \Sigma_{\lambda, s}$;
- (3) $P = (\sigma) \wedge \wedge (P_i)_{i \in |w|}$, per a una única paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, un únic símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w, s}$, i una única família de termes $(P_i)_{i \in |w|} \in T_\Sigma(X)_w$.

A més, les tres possibilitats són excloents dos a dos.

Per facilitar la notació escriurem x , σ i $\sigma((P_{i \in |w|}))$ en comptes de (x) , (σ) , $(\sigma) \wedge \wedge (P_i)_{i \in |w|}$, respectivament.

Als pròxims exemples tractarem d'aclarir aquestes definicions.

Exemple 3.4. Considerem la signatura definida a l'Exemple 1.47. Recordem que era la signatura Σ definida com segueix:

$$\Sigma_{w, s} = \begin{cases} \{\square\} & \text{si } (w, s) = (01, 0), \\ \{\triangle\} & \text{si } (w, s) = (20, 1), \\ \{\sigma\} & \text{si } (w, s) = (010, 2). \end{cases}$$

Considerem el S -conjunt X definit, per a cada $s \in S$, com:

$$X_s = \begin{cases} \{x_1, x_2, x_3\} & \text{si } s = 0, \\ \{y_1, y_2\} & \text{si } s = 1, \\ \{z_1, z_2, z_3, z_4\} & \text{si } s = 2. \end{cases}$$

Veiem alguns dels termes amb variables en X . Per la definició de $T_\Sigma(X)$, clarament es té que $x_1 \in T_\Sigma(X)_0$ i que $y_1 \in T_\Sigma(X)_1$. Per tant, per la definició de Σ -àlgebra generada, també es compleix que

$$\square(x_1, y_1) \in T_\Sigma(X)_0.$$

Pel mateix motiu se segueix que $\square(\square(x_1, y_1), y_2) \in T_\Sigma(X)_0$. A més,

$$\sigma(\square(\square(x_1, y_1), y_2, y_1), \square(x_1, y_1)) \in T_\Sigma(X)_2.$$

Llavors també es compleix que

$$\triangle(\sigma(\square(\square(x_1, y_1), y_2), y_1, \square(x_1, y_1)), x_1) \in T_\Sigma(X)_1.$$

Acabem de veure alguns possibles termes en $T_\Sigma(X)$ de diferents tipus.

La següent proposició ens presenta la propietat universal en l'àlgebra de termes. Això ens permetrà definir homomorfismes fàcilment donant només la imatge de les variables.

Proposició 3.5 (Propietat universal de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$). *Siguen X un S -conjunt, $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i $f : X \rightarrow \mathbf{A}$ una S -aplicació. Siga η^X la inclusió de X en $\mathbf{T}_\Sigma(X)$, i.e., la co-restricció en $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ de l'encaixament canònic de X en $\mathbf{W}_\Sigma(X)$. Aleshores es compleix la següent llei universal: existeix un únic Σ -homomorfisme $f^\# : \mathbf{T}_\Sigma(X) \rightarrow \mathbf{A}$ tal que $f = f^\# \circ \eta^X$.*

Demostració. Per a cada tipus $s \in S$ i cada terme $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ de tipus s definim $f_s^\#(P)$ recursivament com segueix:

- (1) $f_s^\#(P) = f_s(x)$, si $P = x$ per a una única variable $x \in X_s$.
- (2) $f_s^\#(P) = \sigma^\mathbf{A}$, si $P = \sigma$ per a un únic símbol d'operació constant $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$.
- (3) $f_s^\#(P) = \sigma^\mathbf{A}((f_{w_i}^\#(P_i))_{i \in |w|})$ si $P = \sigma((P_i)_{i \in |w|})$ per a una única paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, un únic símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i una única família de termes $(P_i)_{i \in |w|} \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_w$.

Comprovem primer que $f^\#$ és un homomorfisme. Siguen $(w, s) \in S^* \times S$ i $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ un símbol d'operació formal. Si $w = \lambda$, aleshores per definició de $f^\#$ es compleix que

$$f_s^\#(\sigma) = \sigma^\mathbf{A}.$$

Suposem ara que $w \neq \lambda$. Siga $(P_i)_{i \in |w|}$ una família de termes de $\mathbf{T}_\Sigma(X)_w$. Aleshores per definició

$$f_s^\#(\sigma((P_i)_{i \in |w|})) = \sigma^\mathbf{A}((f_{w_i}^\#(P_i))_{i \in |w|}).$$

Per tant $f^\#$ és un Σ -homomorfisme.

Notem que $f^\# \circ \eta^X = f$.

Falta veure la unicitat. Suposem que existeix un Σ -homomorfisme $g : \mathbf{T}_\Sigma(X) \rightarrow \mathbf{A}$ tal que $f = g \circ \eta^X$. Provem que, per a cada $s \in S$ i cada $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$, $f_s^\#(P) = g_s(P)$ per inducció sobre l'estructura de P . Siga $s \in S$ un tipus i siga $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$.

- (i) Si $P = x$ per a una única variable $x \in X_s$, aleshores

$$f_s^\#(x) = f_s(x) = (g \circ \eta^X)_s(x) = g(x).$$

- (ii) Si $P = \sigma$, per a un únic símbol d'operació constant $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$. Com que $f^\#$ i g són Σ -homomorfismes se segueix que

$$f_s^\#(\sigma) = \sigma^\mathbf{A} = g_s(\sigma).$$

- (iii) Si $P = \sigma^\mathbf{A}((P_i)_{i \in |w|})$, per a una única paraula $w \in S - \{\lambda\}$, un únic símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i una única família de termes $(P_i)_{i \in |w|} \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_w$ tals que, per a cada $i \in |w|$, $f_{w_i}^\#(P_i) = g_{w_i}(P_i)$. Pel fet que $f^\#$ i g són Σ -homomorfismes tenim que

$$f_s^\#(\sigma((P_i)_{i \in |w|})) = \sigma^\mathbf{A}((f_{w_i}^\#(P_i))_{i \in |w|}) = \sigma^\mathbf{A}((g_{w_i}(P_i))_{i \in |w|}) = g_s(\sigma((P_i)_{i \in |w|})).$$

D'aquesta manera $f^\#$ és única. □

Lema 3.6. *Siguen X un S -conjunt, $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i f, g dos Σ -homomorfismes de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ a $\mathbf{A}$ tals que $f \circ \eta^X = g \circ \eta^X$. Aleshores $f = g$.*

Proposició 3.7. *Siga X un S -conjunt. Aleshores $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ és projectiu, i.e., per a cada epimorfisme $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ i cada Σ -homomorfisme $g: \mathbf{T}_\Sigma(X) \rightarrow \mathbf{B}$, existeix un Σ -homomorfisme $h: \mathbf{T}_\Sigma(X) \rightarrow \mathbf{A}$ tal que $f \circ h = g$.*

Proposició 3.8. *Siga $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra. Aleshores $\mathbf{A}$ és isomorfa a un quocient d'una Σ -àlgebra lliure sobre un S -conjunt.*

3.1 Subconjunts reconeixibles en l'àlgebra de termes

En aquesta secció estudiarem diferents subconjunts reconeixibles en l'àlgebra de termes. Introduïrem els distints operadors de substitució i provarem que si tots els llenguatges sobre els que actua l'operador són reconeixibles aleshores el llenguatge resultant és un llenguatge reconeixible. Definirem el producte estrela i provarem que si el llenguatge sobre el que s'aplica el producte estrela és reconeixible aleshores el llenguatge final també ho és.

Començarem donant un exemple d'un llenguatge reconeixible a l'àlgebra de termes definida a l'Exemple 3.4.

Exemple 3.9. Considerem l'àlgebra de termes definida a l'Exemple 3.4. Definim el llenguatge de tipus 2 definit com

$$L = \{\sigma(P, Q, K) \mid P \in T_\Sigma(X)_0, Q \in T_\Sigma(X)_1, K \in T_\Sigma(X)_0\}$$

Veïem que aquest llenguatge és reconeixible. Considerem la Σ -àlgebra $\mathbf{2} = (2, F)$ definida com segueix: F_σ és l'aplicació constant a 1 mentre que $F_\square$ i $F_\triangle$ són l'aplicació constant a 0. Definim la S -aplicació $f: X \rightarrow 2$ on, per a cada $s \in S$, f_s és l'aplicació constant a 0. Considerem $f^\sharp: \mathbf{T}_\Sigma(X) \rightarrow \mathbf{2}$ l'únic homomorfisme tal que $f^\sharp \circ \eta^X = f$. Aleshores és senzill comprovar que

$$L = (f_2^\sharp)^{-1}[\{1\}].$$

Per tant L és reconeixible.

Al final de la Subsecció 3.1.2 veurem una altra manera de provar que L és reconeixible.

3.1.1 Termes bàsics

En aquesta subsecció provarem que els conjunts finals que consten d'una variable, una constant o l'acció d'un símbol d'operació sobre una família de variables és reconeixible.

Suposició. En aquesta subsecció suposarem que el conjunt de tipus S és finit.

Proposició 3.10. *Siguen Σ una S -signatura, X un S -conjunt, $s \in S$ un tipus i x un element de X_s . Aleshores el llenguatge $\{x\} \subseteq T_\Sigma(X)_s$ és reconeixible.*

Demostració. Denotarem per 2^S , o per abreviar simplement per 2 , el S -conjunt $(2)_{s \in S}$, on $2 = \{0, 1\}$. Dotem aquest conjunt d'estructura de Σ -àlgebra. Siga G l'estructura de Σ -àlgebra on, per a cada $(w, s) \in S^* \times S$, per a cada operació formal $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, l'operació estructural associada a σ , $G_\sigma: 2_w \rightarrow 2$, és l'operació constant 0. Denotem per $\mathbf{2}$ la Σ -àlgebra $(2, G)$. Definim la S -aplicació

$$f: X \rightarrow 2$$

tal que $f_s: X_s \rightarrow 2$ és $\text{ch}^{\{x\}}$, l'aplicació característica de $\{x\}$, i per a $t \in S - \{s\}$, f_t és l'aplicació constant 0. Siga

$$f^\sharp: \mathbf{T}_\Sigma(X) \rightarrow \mathbf{2}$$

l'únic homomorfisme tal que $f^\sharp \circ \eta_X = f$. Notem que, per a cada $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$, $f^\sharp(P) = 1$ si, i només si, $P = x$. Així

$$\{x\} = (f_s^\sharp)^{-1}[\{1\}]$$

i per tant $\{x\}$ és reconeixible. □

Proposició 3.11. *Siguen Σ una S -signatura, X un S -conjunt, $s \in S$ un tipus i $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$ un símbol d'operació constant. Aleshores el llenguatge $\{\sigma\} \subseteq \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ és reconeixible.*

Demostració. Siga $\mathbf{2} = (2, H)$ la Σ -àlgebra finita definida com segueix: H_σ és l'aplicació de $2_\lambda = 1$ a 2 que envia l'únic membre de 1 a 1, i, per a cada $(w, t) \in S^* \times S$ i cada $\tau \in \Sigma_{w,t} - \{\sigma\}$, $H_\tau: 2_w \rightarrow 2$ és l'aplicació constant a 0. Definim la S -aplicació

$$f: X \rightarrow 2,$$

per a cada $t \in S$, com l'aplicació $f_t: X_t \rightarrow 2$ constant a 0. Siga $f^\sharp$ l'únic homomorfisme de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ a $\mathbf{2}$ tal que $f^\sharp \circ \eta_X = f$. Notem que, per a cada $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$, $f_s^\sharp(P) = 1$ si, i només si, $P = \sigma$. Així

$$\{\sigma\} = (f_s^\sharp)^{-1}[\{1\}]$$

i per tant $\{\sigma\}$ és reconeixible. □

Proposició 3.12. *Siguen Σ una S -signatura, X un S -conjunt, $(w, s) \in (S^* - \{\lambda\}) \times S$ una paraula, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ un símbol d'operació i $(x_i)_{i \in |w|}$ una família de variables en X_w . Aleshores el llenguatge $\{\sigma((x_i)_{i \in |w|})\} \subseteq \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ és reconeixible.*

Demostració. Definim el S -conjunt $\bar{x}$ format per les variables x_i , és a dir, siga $t \in S$,

$$\bar{x}_t = \{y \in X_t \mid y = x_i, i \in |w|, x \in X_t\}.$$

Siga $k = (k_t)_{t \in S}$ el S -conjunt definit, per a cada $t \in S$, com

$$k_t = \text{car}(\bar{x}_t).$$

Notem que k_t és el número de variables diferents de tipus t que apareixen a l'operació σ .

Siga $\varphi: \bar{x} \rightarrow k$ una S -aplicació tal que, per a cada $t \in S$, $\varphi_t: \bar{x}_t \rightarrow k_t$ és una bijecció. Definim el S -conjunt $K = (K_t)_{t \in S}$, per a cada $t \in S$ com

$$K_t = \begin{cases} k_t + 1 & \text{si } t \neq s, \\ k_t + 2 & \text{si } t = s. \end{cases}$$

Considerem la Σ -àlgebra $\mathbf{K} = (K, I)$ definida com segueix: per a cada $(v, t) \in S^* \times S$ i cada $\tau \in \Sigma_{v,t}$, si $(v, t) \neq (w, s)$ o $\tau \neq \sigma$, aleshores I_τ és l'aplicació constant amb valor k_t ; i si $\tau = \sigma$ i $(v, t) = (w, s)$, aleshores I_σ és l'aplicació

$$\begin{aligned} I_\sigma: K_w &\longrightarrow K_s \\ (a_i)_{i \in |w|} &\longmapsto \begin{cases} k_s + 1 & \text{si } a_i = \varphi_{w_i}(x_i) \ \forall i \in |w|, \\ k_s & \text{en altre cas.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definim la S -aplicació $f: X \longrightarrow K$ definida, per a cada $t \in S$, com

$$\begin{aligned} f_t: X_t &\longrightarrow K_t \\ z &\longmapsto \begin{cases} \varphi_t(z) & \text{si } z \in \overline{x_t}, \\ k_t & \text{en altre cas.} \end{cases} \end{aligned}$$

Siga $f^\#$ l'únic S -homomorfisme de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ a $\mathbf{K}$ tal que $f^\# \circ \eta_X = f$. Tenim que, per a cada $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$, $f_s^\#(P) = k_s + 1$ si, i només si, $P = \sigma((x_i)_{i \in w})$. D'aquesta manera

$$\{\sigma((x_i)_{i \in w})\} = (f_s^\#)^{-1}[\{k + 1\}]$$

i per tant $\{\sigma((x_i)_{i \in w})\}$ és reconeixible. □

3.1.2 Substitució

En aquesta subsecció introduïrem diferents operadors de substitució associats a l'àlgebra de termes. Acabarem la subsecció provant que l'acció de substituir un llenguatge reconeixible per llenguatges reconeixibles dona com a resultat un llenguatge reconeixible.

Definició 3.13. Siguen X un S -conjunt, $s \in S$ i $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ un terme. Aleshores denotarem per $\left(\left(\cdot\right)^{(x,t)}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(P)$ l'aplicació de $\prod_{(x,t) \in \coprod X} \mathbf{T}_\Sigma(X)_t^{|P|_x}$ a $\mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ que envia

$$\left(\left(Q_\alpha^{x,t}\right)_{\alpha \in |P|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X} \in \prod_{(x,t) \in \coprod X} \mathbf{T}_\Sigma(X)_t^{|P|_x} \longmapsto \left(\left(Q_\alpha^{x,t}\right)_{\alpha \in |P|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(P) \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$$

obtingut de substituir en P , per a cada tipus $t \in S$, cada variable $x \in X_t$, i cada ocurrència $\alpha \in |P|_x$, el terme $Q_\alpha^{x,t}$ per la i_α -ocurrència de x en P . Anomenarem a $\left(\left(Q_\alpha^{x,t}\right)_{\alpha \in |P|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(P)$ la

substitució de $(Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |P|_x}$ per x en P per a cada t en S i per a cada x en X_t i anomenarem a $\left(\left(\cdot\right)^{(x,t)}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(P)$ l'**operador global de substitució en P** .

Siga $u \in S$ un tipus i $z \in X_u$ una variable. Aleshores denotem per $(\cdot)^z(P)$ l'aplicació de $\mathbf{T}_\Sigma(X)_u^{|P|_z}$ a $\mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ que envia

$$\left(\left(Q_\alpha^z\right)_{\alpha \in |P|_z}\right) \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_u^{|P|_z} \longmapsto \left(\left(Q_\alpha^z\right)_{\alpha \in |P|_z}^z\right)(P) \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$$

obtingut de substituir, per a cada ocurrència $\alpha \in |P|_z$, Q_α^z per la i_α -èsima ocurrència de z en P . Anomenarem a $\left(\left(Q_\alpha^z\right)_{\alpha \in |P|_z}^z\right)(P)$ la **substitució de Q_α^z per z en P** .

Tractem d'aclarir aquest darrer concepte al següent exemple.

Exemple 3.14. Considerem l'àlgebra de termes definida a l'Exemple 3.4. Siga el terme de tipus 2

$$P = \sigma(\square(\square(x_1, y_1), y_2, y_1, \square(x_1, y_1))) \in T_\Sigma(X)_2.$$

Definim la família de termes $\left((Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |P|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}$ per a cada $(x, t) \in \coprod X$ que ocorren en P de la següent manera:

Per a $(x_1, 0)$ es té que $|P|_{x_1} = 2$. Així, considerarem els següents termes:

$$Q_0^{x_1,0} = x_3 \in T_\Sigma(X)_0, \quad Q_1^{x_1,0} = \square(x_2, \triangle(z_4, x_1)) \in T_\Sigma(X)_0.$$

Per a $(y_1, 1)$ es té que $|P|_{y_1} = 3$. Així, considerarem els següents termes:

$$Q_0^{y_1,1} = y_1 \in T_\Sigma(X)_1, \quad Q_1^{y_1,1} = \triangle(z_3, x_2) \in T_\Sigma(X)_1, \quad Q_2^{y_1,1} = y_3 \in T_\Sigma(X)_1.$$

Per a $(y_2, 1)$ es té que $|P|_{y_2} = 1$. Així, considerarem el següent terme:

$$Q_0^{y_2,1} = \triangle(\sigma(x_1, y_2, x_1), x_3) \in T_\Sigma(X)_1.$$

Per a la resta de $(x, t) \in \coprod X - \{(x_1, 0), (y_1, 1), (y_2, 1)\}$, no cal considerar cap terme ja que $|P|_x = 0$ i cap substitució podrà ser efectuada.

Així, el resultat de substituir la família de termes $\left((Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |P|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}$ per x en P per a cada $t \in S$ i cada $x \in X_t$ és el terme

$$\sigma(\square(\square(x_3, y_1), \triangle(\sigma(x_1, y_2, x_1), x_3), \triangle(z_3, x_2), \square(\square(x_2, \triangle(z_4, x_1)), y_3))) \in T_\Sigma(X)_2.$$

Lema 3.15. *Siguen X un S -conjunt, $s \in S$, $P \in T_\Sigma(X)_s$ un terme de la forma $P = \sigma((P_i)_{i \in |w|})$ per a una única paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, un únic símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i una única família de termes $(P_i)_{i \in |w|} \in T_\Sigma(X)_w$. Aleshores*

$$\left(\left(Q_\alpha^{x,t}\right)_{\alpha \in |P|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(P) = \sigma \left(\left(\left(\left(Q_\alpha^{x,t} \right)_{\alpha \in \sum_{k \in i} |P_k|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (P_i) \right)_{i \in |w|} \right).$$

El següent teorema afirma que qualsevol Σ -homomorfisme de l'àlgebra de termes a una àlgebra heterogènia és compatible amb l'operador de substitució.

Teorema 3.16 (Teorema de Substitució). *Siga X un S -conjunt. Siguen $s \in S$ un tipus, $W \in T_\Sigma(X)_s$ un terme de tipus s , $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra i g un Σ -homomorfisme de $T_\Sigma(X)$ a $\mathbf{A}$. Siguen $\left((P_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |W|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}$, $\left((Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |W|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X} \in \prod_{(x,t) \in \coprod X} T_\Sigma(X)_t^{|W|_x}$ dues famílies de termes tals que, per a cada $(x, t) \in \coprod X$ i per a cada ocurrència $\alpha \in |W|_x$, $g_t(P_\alpha^{x,t}) = g_t(Q_\alpha^{x,t})$. Aleshores*

$$g_s \left(\left(\left(P_\alpha^{x,t} \right)_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) \right) = g_s \left(\left(\left(Q_\alpha^{x,t} \right)_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) \right).$$

Demostració. Provarem el teorema per inducció algebraica sobre l'estructura de W . El terme W pot ser de la forma:

- (1) $W = z$ per a una única variable $z \in X_s$. En aquest cas, $|W|_z = 1$ mentre que, per a cada $x \in X_s - \{z\}$, $|W|_x = 0$ i, per a cada $t \in S - \{s\}$ i cada $x \in X_t$, $|W|_x = 0$. Aleshores

$$\left(\binom{(x,t)}{(P_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |W|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) = P_0^{z,s},$$

i

$$\left(\binom{(x,t)}{(Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |W|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) = Q_0^{z,s}.$$

Per tant, clarament es compleix que

$$g_s(P_0^{z,s}) = g_s(Q_0^{z,s}).$$

- (2) $W = \sigma$ per a una única operació constant $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$. En aquest cas, no s'efectua cap substitució ja que σ no té cap variable. Per tant

$$g_s(\sigma) = g_s(\sigma).$$

- (3) $W = \sigma((W_i)_{i \in |w|})$ per a una única paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, un únic símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i una única família $(W_i)_{i \in |w|}$ de $T_\Sigma(X)_w$, per a cada $i \in |w|$, W_i compleix l'afirmació del teorema. Pel Lema 3.15, tenim que

$$\begin{aligned} g_s \left(\left(\binom{(x,t)}{(P_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |W|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) \right) &= g_s \left(\left(\binom{(x,t)}{(P_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |\sigma((W_i)_{i \in |w|})|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (\sigma((W_i)_{i \in |w|})) \right) \\ &= g_s \left(\sigma \left(\left(\left(\binom{(x,t)}{(P_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k|_x}^{x,t})_{\alpha \in |W_i|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i) \right)_{i \in |w|} \right) \right). \end{aligned}$$

Com que g és un Σ -homomorfisme, aleshores commuta amb σ . D'aquesta manera

$$\begin{aligned} g_s \left(\sigma \left(\left(\left(\binom{(x,t)}{(P_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k|_x}^{x,t})_{\alpha \in |W_i|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i) \right)_{i \in |w|} \right) \right) &= \\ \sigma^A \left(g_{w_i} \left(\left(\left(\binom{(x,t)}{(P_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k|_x}^{x,t})_{\alpha \in |W_i|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i) \right)_{i \in |w|} \right) \right). \end{aligned}$$

Per al hipòtesi d'inducció hem suposat que, per a cada $i \in |w|$, W_i complia l'afirmació del teorema. Així

$$\begin{aligned} \sigma^A \left(g_{w_i} \left(\left(\left(\binom{(x,t)}{(P_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k|_x}^{x,t})_{\alpha \in |W_i|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i) \right)_{i \in |w|} \right) \right) &= \\ \sigma^A \left(g_{w_i} \left(\left(\left(\binom{(x,t)}{(Q_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k|_x}^{x,t})_{\alpha \in |W_i|_x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i) \right)_{i \in |w|} \right) \right) \end{aligned}$$

Desfem ara els passos. Pel fet que g és un Σ -homomorfisme, obtenim que

$$\sigma^{\mathbf{A}} \left(g_{w_i} \left(\left(\left(\left(Q_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k|_x}^{(x,t)} \right)_{\alpha \in |W_i|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i) \right)_{i \in |w|} \right) = \right. \\ \left. g_s \left(\sigma \left(\left(\left(\left(Q_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k|_x}^{(x,t)} \right)_{\alpha \in |W_i|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i) \right)_{i \in |w|} \right) \right) \right).$$

Pel Lema 3.15 se segueix que

$$g_s \left(\sigma \left(\left(\left(\left(Q_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k|_x}^{(x,t)} \right)_{\alpha \in |W_i|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i) \right)_{i \in |w|} \right) \right) = \\ = g_s \left(\left(\left(\left(Q_{\alpha}^{(x,t)} \right)_{\alpha \in |\sigma((W_i)_{i \in |w|})|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (\sigma((W_i)_{i \in |w|})) \right) \right) \\ = g_s \left(\left(\left(Q_{\alpha}^{(x,t)} \right)_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) \right).$$

Si tornem a llegir totes les equacions, es dona la igualtat desitjada.

D'aquesta manera el resultat queda provat per la inducció algebraica. $\square$

Pel fet que les Σ -congruències tenen associat un Σ -homomorfisme natural i com a conseqüència del resultat anterior se segueix el següent corol·lari.

Corol·lari 3.17. *Siguen X un S -conjunt, $s \in S$, $W \in \mathbf{T}_{\Sigma}(X)_s$ un terme i Φ una congruència en $\mathbf{T}_{\Sigma}(X)$. Siguen $\left((P_{\alpha}^{x,t})_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X}$, $\left((Q_{\alpha}^{x,t})_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \in \prod_{(x,t) \in \coprod X} \mathbf{T}_{\Sigma}(X)_t^{|W|_x}$ dues famílies de termes tals que, per a cada $(x,t) \in \coprod X$ i per a cada $\alpha \in |W|_x$, $[P_{\alpha}^{x,t}]_{\Phi_t} = [P_{\alpha}^{x,t}]_{\Phi_t}$. Aleshores*

$$\left[\left(\left(P_{\alpha}^{x,t} \right)_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) \right]_{\Phi_t} = \left[\left(\left(Q_{\alpha}^{x,t} \right)_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) \right]_{\Phi_t}.$$

A continuació definirem un altre operador de substitució, però primer recordarem l'estructura de Σ -àlgebra de parts introduïda a la Definició 1.39. Siga X un S -conjunt i $\mathbf{T}_{\Sigma}(X)$ la seua àlgebra de termes. Estudiarem com és la Σ -àlgebra $\mathbf{T}_{\Sigma}(X)^{\wp}$. El S -conjunt subjacent és

$$\mathbf{T}_{\Sigma}(X) = (\text{Sub}(\mathbf{T}_{\Sigma}(X)_s))_{s \in S}.$$

L'estructura algebraica és la següent. Per a cada $(w, s) \in S^* \times S$, per a cada símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, l'operació estructural associada a σ és l'aplicació $\sigma^{\wp}$ de $\mathbf{T}_{\Sigma}(X)_w^{\wp} = \prod_{i \in |w|} \text{Sub}(\mathbf{T}_{\Sigma}(X)_{w_i})$ a $\mathbf{T}_{\Sigma}(X)_s = \text{Sub}(\mathbf{T}_{\Sigma}(X)_s)$, que envia cada família de llenguatges $(L_i)_{i \in |w|}$ en $\mathbf{T}_{\Sigma}(X)_w$ a

$$\sigma^{\wp}((L_i)_{i \in |w|}) = \left\{ \sigma^{\mathbf{T}_{\Sigma}(X)}((P_i)_{i \in |w|}) \mid (P_i)_{i \in |w|} \in \prod_{i \in |w|} L_i \right\} \in \mathbf{T}_{\Sigma}(X)_s^{\wp}.$$

Definició 3.18. Per a cada tipus $t \in S$, siga $(L_x)_{x \in X_t}$ una aplicació de X_t a $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varphi = \text{Sub}(\mathbf{T}_\Sigma(X)_t)$, també escrita, en aquest context, com $(\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}$. Aleshores, per a la S -aplicació $((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t})_{t \in S}$ de X en $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varphi$, denotem per $\left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#$ a l'únic Σ -homomorfisme de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ a $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varphi$ tal que

$$\left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\# \circ \eta_X = (\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}.$$

Siguen u un tipus de S , z una variable de X_u i $L \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_u^\varphi$ un conjunt de termes de tipus u . Aleshores, per a la S -aplicació $(\overset{z}{L})$ de X a $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varphi$ definida, per a cada tipus, com: $(\overset{z}{L})_u$ és l'aplicació de X_u a $\text{Sub}(\mathbf{T}_\Sigma(X)_u)$ que envia z a L i $y \in X_u - \{z\}$ a $\{y\}$; i si $t \in S - \{u\}$, aleshores definim $(\overset{z}{L})_t$ com l'aplicació de X_t a $\text{Sub}(\mathbf{T}_\Sigma(X)_t)$ que envia cada $x \in X_t$ a $\{x\}$. Denotarem per $(\overset{z}{L})^\#$ a l'únic Σ -homomorfisme de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ a $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varphi$ tal que:

$$(\overset{z}{L})^\# \circ \eta^X = (\overset{z}{L}).$$

Recordem que l'homomorfisme $\left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#$ està definit per recursió algebraica com segueix. Siga s un tipus de S i siga $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ un terme de tipus s . Aleshores sabem per la Proposició 3.3 que P és d'una de les següents formes:

- (1) z , per a una única variable $z \in X_s$.
- (2) σ per a un únic símbol d'operació constant $\sigma \in \Sigma_{\lambda, s}$.
- (3) $\sigma((P_i)_{i \in |w|})$, per a una única paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, un únic símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w, s}$ i una única família de termes $(P_i)_{i \in |w|} \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_w$.

En el cas (1), tenim que:

$$\left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#(P) = \left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#(\eta_s^X(z)) = (\overset{z}{L_z})_s(z) = L_z.$$

En el cas (2), tenim que:

$$\left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#(P) = \left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#(\sigma) = \{\sigma\} = \sigma^{\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varphi}$$

En el cas (3), suposant que, per a cada $i \in |w|$, el subconjunt $\left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#(P_i)$ ha estat definit, tenim que:

$$\begin{aligned} \left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#(P) &= \left((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\#(\sigma((P_i)_{i \in |w|})) \\ &= \sigma^\varphi \left(\left(\left(\left(\overset{x}{L_x} \right)_{x \in X_t} \right)_{t \in S}^\#(P_i) \right)_{i \in |w|} \right) \\ &= \left\{ \sigma((Q_i)_{i \in |w|}) \mid (Q_i)_{i \in |w|} \in \prod_{i \in |w|} \left(\left(\overset{x}{L_x} \right)_{x \in X_t} \right)_{t \in S}^\#(P_i) \right\}. \end{aligned}$$

Al següent resultat donarem una manera explícita de calcular la imatge de $\left(\left(\binom{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\sharp(P)$ per a qualsevol terme $P \in T_\Sigma(X)_s$ i qualsevol $s \in S$. Veurem que $\left(\left(\binom{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\sharp(P)$ es calcula unint totes les substitucions possibles en P de totes les famílies de termes $((Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |P|_x})_{(x,t) \in \coprod X}$ de $\prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{|P|_x}$ que es poden formar. Primer farem un petit comentari. Notem que, com que, per a cada $x \in X_t$, $L_x^{|P|_x}$ està encaixat en $T_\Sigma(X)_t^{|P|_x}$, llavors $\prod_{x \in X_t} L_x^{|P|_x}$ està també encaixat en $\prod_{x \in X_t} T_\Sigma(X)_t^{|P|_x}$. Per tant $\prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{|P|_x}$ està encaixat en $\prod_{(x,t) \in \coprod X} T_\Sigma(X)_t^{|P|_x}$. D'aquesta manera la restricció de $\left(\binom{x}{L_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(P)$ en $\prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{|P|_x}$ té sentit.

Proposició 3.19. *Siguen X un S -conjunt, $s \in S$ i P un terme en $T_\Sigma(X)_s$. Aleshores, per a tota S -aplicació $\left(\binom{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}_{t \in S}$ de X a $T_\Sigma(X)^\varphi$, tenim que*

$$\left(\left(\binom{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\sharp(P) = \text{Im} \left(\left(\binom{x,t}{\cdot}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(P) \upharpoonright_{\prod_{(x,t) \in X} L_x^{|P|_x}} \right).$$

Demostració. Siga $\mathcal{T}$ el subconjunt de $T_\Sigma(X)$ definit, per a cada $s \in S$, com segueix: per a cada $P \in T_\Sigma(X)$, $P \in \mathcal{T}_s$ si, i només si,

$$\left(\left(\binom{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\sharp(P) = \text{Im} \left(\left(\binom{x,t}{\cdot}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(P) \upharpoonright_{\prod_{(x,t) \in X} L_x^{|P|_x}} \right).$$

El resultat quedarà provat si veiem que $\mathcal{T} = T_\Sigma(X)$. Per fer-ho, per la Proposició 1.37, és suficient demostrar que $X \subseteq \mathcal{T}$ i que $\mathcal{T}$ és una subàlgebra de $T_\Sigma(X)$.

Veiem primer que $X \subseteq \mathcal{T}$. Siga $s \in S$ un tipus i $z \in X_s$ una variable. Aleshores

$$\left(\left(\binom{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\sharp(z) = L_z.$$

Per una altra banda, $|z|_z = 1$, mentre que, per a cada $x \in X_s - \{z\}$, $|z|_x = 0$ i, per a cada $t \in S - \{s\}$, $|z|_t = 0$. Per tant, per a cada $Q \in L_z$, tenim que

$$(\tilde{Q})(z) = Q.$$

D'aquesta manera

$$\text{Im} \left(\left(\binom{x,t}{\cdot}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(z) \upharpoonright_{\prod_{(x,t) \in X} L_x^{|z|_x}} \right) = L_z.$$

Així, els dos conjunts coincideixen i llavors $z \in \mathcal{T}$.

Provem ara que $\mathcal{T}$ és una subàlgebra de $T_\Sigma(X)$.

Siguen $s \in S$ un tipus i $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$ un símbol d'operació constant. Aleshores, com hem comentat abans, es té que

$$\left(\left(\binom{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}^\sharp(\sigma) = \{\sigma\}.$$

Per una altra banda, per a cada $s \in S$ i per a cada $x \in X_s$, $|\sigma|_x = 0$. Llavors no es pot efectuar cap substitució sobre el terme σ . Per tant se segueix que

$$\text{Im} \left(\left(\binom{x,t}{\cdot}\right)_{(x,t) \in \coprod X}(\sigma) \upharpoonright_{\prod_{(x,t) \in X} L_x^{| \sigma |_x}} \right) = \{\sigma\}.$$

Així, els dos conjunts coincideixen i llavors $\sigma \in \mathcal{T}$.

Siguen $(w, s) \in (S^* - \{\lambda\}) \times S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ un símbol d'operació i $(P_i)_{i \in |w|} \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_w$ una família de termes tals que, per a cada $i \in |w|$, $P_i \in \mathcal{T}_{w_i}$. Anomenem $P = \sigma((P_i)_{i \in |w|})$. Com que $\left(\left(\left(\frac{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)_s^\#$ és un Σ -homomorfisme de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ a $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\wp$, tenim que

$$\left(\left(\left(\frac{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)_s^\#(P) = \sigma^\wp \left(\left(\left(\left(\left(\frac{x}{L_x} \right)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_{w_i}^\# (P_i) \right)_{i \in |w|} \right).$$

Per una altra banda, pel Lema 3.15 i per la hipòtesi inductiva, tenim que

$$\text{Im} \left(\left(\left(\frac{(x,t)}{\cdot} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (P) \right) \upharpoonright_{\prod_{(x,t) \in X} L_x^{P|x}} \right) = \sigma^\wp \left(\left(\left(\left(\left(\frac{x}{L_x} \right)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_{w_i}^\# (P_i) \right)_{i \in |w|} \right).$$

Conseqüentment $\mathcal{T}$ és una subàlgebra de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ i per tant $\mathcal{T} = \mathbf{T}_\Sigma(X)$. $\square$

Observació 3.20. Siguen X un S -conjunt, $s \in S$ i P un terme en $\mathbf{T}_\Sigma(X)_s$. Aleshores, per a tota S -aplicació $\left(\left(\frac{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}$ de X a $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\wp$, tenim que $\left(\left(\left(\frac{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)_s^\#(P)$ és igual a:

$$\bigcup \left\{ \left(\left(\frac{(x,t)}{(Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |P|x}} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (P) \right) \mid \left((Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |P|x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \in \prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{P|x} \right\}$$

Corol·lari 3.21. Siguen s i u dos tipus en S i siguin $z \in X_u$ una variable, $L \in \mathbf{T}_\Sigma(X)^\wp$ un llenguatge i $P \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ un terme de tipus s . Aleshores

$$\left(\frac{z}{L}\right)_s^\#(P) = \text{Im} \left(\left(\frac{z}{\cdot} \right) (P) \right) \upharpoonright_{L^{P|z}}.$$

Exemple 3.22. Considerem, de nou, la Σ -àlgebra de termes definida a l'Exemple 3.4. Substituïrem al terme de tipus 2

$$P = \sigma(x_1, y_1, \square(x_3, \triangle(z_1, x_3))) \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_2.$$

Siga $u = 2$ i $z = z_1 \in X_3$. Considerem el llenguatge

$$L = \{z_2, \sigma(x_1, y_1, x_2), \sigma(x_3, \triangle(z_4, \square(x_2, y_2)), x_1)\} \subseteq \mathbf{T}_\Sigma(X)_2.$$

D'aquesta manera la imatge de P per l'aplicació $\left(\frac{z_1}{L}\right)^\#$ és el llenguatge:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1}{L}\right)^\#(P) = \{ & \sigma(x_1, y_1, \square(x_3, \triangle(z_2, x_3))), \sigma(x_1, y_1, \square(x_3, \triangle(\sigma(x_1, y_1, x_2), x_3))), \\ & \sigma(x_1, y_1, \square(x_3, \triangle(\sigma(x_3, \triangle(z_4, \square(x_2, y_2)), x_1), x_3))) \} \subseteq \mathbf{T}_\Sigma(X)_2, \end{aligned}$$

obtingut de substituir la única ocurrència de z_1 en P per tots els termes de L .

A continuació definirem l'operador de substitució entre llenguatges de l'àlgebra de termes. Veurem que aquest operador manté la propietat de reconeixibilitat.

Definició 3.23. Siguen X un S -conjunt i $T_\Sigma(X)$ la seua àlgebra de termes. Siga $((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t})_{t \in S}$ una S -aplicació de X a $T_\Sigma(X)^\varnothing$. Aleshores denotem per $\left(\left(\left(\overset{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)^{\sharp p}$ a la S -aplicació de $T_\Sigma(X)^\varnothing$ a $T_\Sigma(X)^\varnothing$ que, per a cada $s \in S$, envia K en $T_\Sigma(X)_s^\varnothing$ a

$$\left(\left(\left(\overset{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)_s^{\sharp p}(K) = \bigcup_{P \in K} \left(\left(\left(\overset{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)_s^\sharp(P) \in T_\Sigma(X)_s^\varnothing.$$

Per tant, $\left(\left(\left(\overset{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)^{\sharp p}$ és l'extensió canònica de la S -aplicació subjacent del Σ -homomorfisme $\left(\left(\left(\overset{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)^\sharp$ de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ a $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varnothing$.

Siguen $u \in S$ un tipus, $z \in X_u$ una variable i $L \in T_\Sigma(X)_u^\varnothing$ un llenguatge. Aleshores denotem per $(\overset{z}{L})^{\sharp p}$ a l'extensió canònica de la S -aplicació subjacent de l'homomorfisme $(\overset{z}{L})^\sharp$ de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ a $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varnothing$.

Notem que si $t, s \in S$, $z \in X_t$, $L \in \text{Rec}_t(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ i si $K \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ aleshores substituir z en K per L és equivalent a unir totes les substitucions de z en cada terme de K per cada terme de L . Al proper exemple tractarem d'aclarir aquesta definició.

Exemple 3.24. Considerem la Σ -àlgebra de termes que hem usat als Exemples 3.4, 3.14 i 3.22. Siga $z_2 \in X_2$. Definim el llenguatge de tipus 2

$$L = \{\sigma(x_1, y_2, x_2), z_4\} \subseteq T_\Sigma(X)_2.$$

Siga el llenguatge de tipus 1

$$K = \{\Delta(z_2, x_1), \Delta(z_2, \Box(x_3, y_2))\} \subseteq T_\Sigma(X)_1.$$

Aleshores $(\overset{z_2}{L})_1^{\sharp p}(K)$ dona com a resultat el llenguatge

$$\{\Delta(\sigma(x_1, y_2, x_2), x_1), \Delta(z_4, x_1), \Delta(\sigma(x_1, y_2, x_2), \Box(x_3, y_2)), \Delta(z_4, \Box(x_3, y_2))\} \subseteq T_\Sigma(X)_1$$

que resulta de considerar per a cada paraula en K totes les substitucions possibles de z_3 per paraules en L .

Veiem a continuació una caracterització útil per saber quan un terme P de tipus s es troba al conjunt $\left(\left(\left(\overset{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)_s^{\sharp p}(K)$.

Observació 3.25. Siguen X un S -conjunt i $T_\Sigma(X)$ la seua àlgebra de termes. Siga $((\overset{x}{L_x})_{x \in X_t})_{t \in S}$ una S -aplicació de X a $T_\Sigma(X)^\varnothing$. Siguen $s \in S$ un tipus, $K \in T_\Sigma(X)_s$ i $W \in T_\Sigma(X)_s$. Aleshores $W \in \left(\left(\left(\overset{x}{L_x}\right)_{x \in X_t}\right)_{t \in S}\right)_s^{\sharp p}(K)$ si, i només si, existeixen un terme $P \in K$, i una família de termes $\left((Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |P|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X} \in \prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{|P|_x}$ tals que

$$W = \left(\left(\overset{(x,t)}{(Q_\alpha^{x,t})_{\alpha \in |P|_x}}\right)_{(x,t) \in \coprod X}\right)(P).$$

En particular, per a una variable $z \in X_s$ i un llenguatge $L \in \text{Sub}(T_\Sigma(X)_s)$, tenim que $W \in (\overset{z}{L})^{\sharp p}(K)$ si, i només si, existeixen un terme $P \in K$ i una família de termes $(Q_\alpha^z)_{\alpha \in |P|_z}$ tals que

$$W = \left((Q_\alpha^z)_{\alpha \in |P|_z}\right)(P).$$

Tot seguit, provarem el teorema més important d'aquesta subsecció, veurem que la substitució entre llenguatges reconeixibles manté la propietat de ser reconeixible.

Suposició. Per a la següent prova suposarem que el conjunt de tipus S i el conjunt de variables X són finits.

Teorema 3.26. *Siguen X un S -conjunt i $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ la seua Σ -àlgebra de termes. Siguen $s \in S$ un tipus, $K \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ un llenguatge s -reconeixible i $((\overset{x}{L}_x)_{x \in X_t})_{t \in S}$ una S -aplicació de X a $(\text{Rec}_t(\mathbf{T}_\Sigma(X)))_{t \in S}$. Aleshores*

$$\left(((\overset{x}{L}_x)_{x \in X_t})_{t \in S} \right)_s^{\sharp p} (K) \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X)).$$

Demostració. Definim la congruència Φ sobre $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ com

$$\left(\bigcap_{(x,t) \in \coprod X} \Omega^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}(\delta^{t,L_x}) \right) \cap \Omega^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}(\delta^{t,K}).$$

Per la Proposició 1.44 i pel fet que la intersecció és finita per la suposició anterior, se segueix que Φ és una congruència i a més, d'índex finit. Notem que, pel Corol·lari 1.17, per a cada $t \in S$ i per a cada $x \in X_t$, Φ_t satura a L_x . També tenim que Φ_s satura K .

Per a cada $r \in S$, denotem per k_r l'índex de la congruència Φ_r i per $\mathcal{M}_{\Phi_r} = \{M_{r,l} \mid l \in k_r\}$ un conjunt de representant de $\mathbf{T}_\Sigma(X)_r / \Phi_r$ en $\mathbf{T}_\Sigma(X)_r$. Denotem per k al S -conjunt $(k_r)_{r \in S}$ i per $\mathcal{M}_\Phi$ al S -conjunt $(\mathcal{M}_{\Phi_r})_{r \in S}$.

Definim ara una nova relació d'equivalència $\Psi = (\Psi_r)_{r \in S}$ en $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ com segueix, per a cada $r \in S$, Ψ_r és el subconjunt de $\mathbf{T}_\Sigma(X)_r^2$ format pels parells ordenats $(P, Q) \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_r^2$ tals que:

- (i) $(P, Q) \in \Phi_r$.
- (ii) Per a cada $l \in k_r$

$$\left(P \in \left(((\overset{x}{L}_x)_{x \in X_t})_{t \in S} \right)_r^{\sharp p} ([M_{r,l}]_{\Phi_r}) \iff Q \in \left(((\overset{x}{L}_x)_{x \in X_t})_{t \in S} \right)_r^{\sharp p} ([M_{r,l}]_{\Phi_r}) \right).$$

Notem que, per a cada $r \in S$, Φ_r és un refinament de Ψ_r i una relació d'equivalència en $\mathbf{T}_\Sigma(X)$. A més, l'índex de Ψ_r en $\mathbf{T}_\Sigma(X)_r$ està fitat per $k_r 2^{k_r}$. Per tant Ψ és una relació d'equivalència d'índex finit. L'objectiu ara és provar que és una congruència que satura $\left(((\overset{x}{L}_x)_{x \in X_t})_{t \in S} \right)_s^{\sharp p} (K)$. D'aquesta manera el resultat quedaria provat.

Veiem primer que és una congruència. Siguen $(w, u) \in (S^* - \{\lambda\}) \times S$ i $\sigma \in \Sigma_{w,u}$ un símbol d'operació formal. Siguen $(P_i)_{i \in |w|}$ i $(Q_i)_{i \in |w|}$ dues famílies de $\mathbf{T}_\Sigma(X)_w$ tals que, per a cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in \Psi_{w_i}$. Hem de provar que $(\sigma((P_i)_{i \in |w|}), \sigma(Q_i)_{i \in |w|}) \in \Psi_u$. Com que, per a cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in \Psi_{w_i}$, aleshores $(P_i, Q_i) \in \Phi_{w_i}$. Com que Φ és una congruència, llavors $(\sigma((P_i)_{i \in |w|}), \sigma(Q_i)_{i \in |w|}) \in \Phi_u$. Així tenim la condició (i).

Veim ara que també es compleix la condició (ii). Siga $l \in k_r$. Suposem que

$$\sigma((P_i)_{i \in |w|}) \in \left(((\overset{x}{L}_x)_{x \in X_t})_{t \in S} \right)_r^{\sharp p} ([M_{u,l}]_{\Phi_u}).$$

Aleshores existeixen un terme W en $[M_{u,l}]_{\Phi_u}$ i una família de termes $\left((U_{\alpha}^{x,t})_{\alpha \in |W|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}$ de $\prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{|W|_x}$ tals que

$$\sigma((P_i)_{i \in |w|}) = \left(\left((U_{\alpha}^{x,t})_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W). \quad (3.1)$$

Pot passar que $\text{Var}(W) \cap X = \emptyset$ o bé $\text{Var}(W) \cap X \neq \emptyset$.

- (a) Suposem que $\text{Var}(W) \cap X = \emptyset$. Aleshores, no es pot fer cap substitució sobre el terme W . Per tant $\sigma((P_i)_{i \in |w|}) = W$. A més, se segueix que, per a cada $i \in |w|$, per a cada $t \in X$ i per a cada $x \in X_t$, $|P_i|_x = 0$. Llavors, no es pot efectuar cap substitució sobre el terme P_i . D'aquesta manera

$$P_i \in \left(\left((L_x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_r^{\sharp p} ([P_i]_{\Phi_{w_i}}).$$

Com que, per a cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in \Psi_{w_i}$, aleshores pel la condició (ii)

$$Q_i \in \left(\left((L_x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_r^{\sharp p} ([P_i]_{\Phi_{w_i}}).$$

Per tant existeixen un terme $\overline{W}_i$ en $[P_i]_{\Phi_{w_i}}$ i una família de termes $\left((V_{\alpha}^{x,t,i})_{\alpha \in |\overline{W}_i|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}$ de $\prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{|\overline{W}_i|_x}$ tals que

$$Q_i = \left(\left((V_{\alpha}^{x,t,i})_{\alpha \in |\overline{W}_i|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (\overline{W}_i).$$

Definim el terme $\overline{W} = \sigma((\overline{W}_i)_{i \in |w|}) \in T_{\Sigma}(X)_u$. Tenim que, per a cada $i \in |w|$, $\overline{W}_i \in [P_i]_{\Phi_{w_i}}$. Llavors $(P_i, \overline{W}_i) \in \Phi_{w_i}$. Com que Φ és una congruència, $(\sigma((P_i)_{i \in |w|}), \overline{W}) \in \Phi_u$. Recordem que $W = \sigma((P_i)_{i \in |w|})$, aleshores $\overline{W} \in [M_{u,l}]_{\Phi_u}$. Notem que, per a cada $t \in S$ i cada $x \in X_t$, $|\overline{W}|_x = \sum_{i \in |w|} |\overline{W}_i|_x$. Siga $\left((V_{\beta}^{x,t})_{\beta \in |\overline{W}|_x}\right)_{(x,t) \in \coprod X}$ l'element de $\prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{|\overline{W}|_x}$ obtingut d'ajuntar, en ordre, la família de termes $\left(\left((V_{\alpha}^{x,t,i})_{\alpha \in |\overline{W}_i|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \right)_{i \in |w|}$. Pel Lema 3.15, tenim que

$$\begin{aligned} \sigma((Q_i)_{i \in |w|}) &= \sigma \left(\left(\left((V_{\alpha}^{x,t,i})_{\alpha \in |\overline{W}_i|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \right)_{i \in |w|} (\overline{W}_i) \right) \\ &= \left((V_{\beta}^{x,t})_{\beta \in |\overline{W}|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (\overline{W}) \end{aligned}$$

Per tant $\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) \in \left(\left((L_x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_r^{\sharp p} ([M_{u,l}]_{\Phi_u})$. L'altra implicació es prova de manera anàloga.

- (b) Suposem que $\text{Var}(W) \cap X \neq \emptyset$. Distingirem dos nous cassos. Pot passar que (b.1) W siga una variable o que (b.2) W siga un símbol d'operació actuant sobre altres termes. Notem que W no pot ser una operació constant ja que aleshores no estariem en el cas (b).

- (b.1) Suposem que W és una variable. Així, $W = z$ per a una única variable $z \in X_u$. En aquest cas, tenim que

$$\left(\left((U_{\alpha}^{x,t})_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W) = \left(\left((U_{\alpha}^{x,t})_{\alpha \in |W|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (z) = U_0^{z,u}.$$

Per tant $\sigma((P_i)_{i \in |w|}) = U_0^{z,u} \in L_z$. Definim el terme $V_0^{z,u} = \sigma((Q_i)_{i \in |w|})$. Veiem que $V_0^{z,u} \in L_z$. Com que $(P_i, Q_i) \in \Phi_{w_i}$, per a cada $i \in |w|$, i Φ és una congruència, aleshores

$$(U_0^{z,u}, V_0^{z,u}) = (\sigma((P_i)_{i \in |w|}), \sigma((Q_i)_{i \in |w|})) \in \Phi_u.$$

Aleshores $V_0^{z,u} \in L_z$ perquè L_z és Φ -saturat i $U_0^{z,u} \in L_z$. D'aquesta manera

$$\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) = V_0^{z,u} = (V_0^{z,u})(z).$$

Llavors se segueix que

$$\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) \in \left(\left((L_x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_r^{\#p} ([M_{u,l}]_{\Phi_u}),$$

com volíem comprovar.

- (b.2) En aquest cas, per l'Equació 3.1, només pot ser que W tinga la forma $\sigma((W_i)_{i \in |w|})$ per a una única família de termes $(W_i)_{i \in |w|}$ de $T_{\Sigma}(X)_w$. Com que no es pot efectuar cap substitució sobre el símbol d'operació σ , aleshores, per a cada $i \in |w|$, i pel Lema 3.15 tenim que

$$P_i = \left(\left((U_{\alpha + \sum_{j \in i} |W_j|_x}^{x,t})_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (W_i).$$

Així, se segueix que

$$P_i \in \left(\left((L_x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_{w_i}^{\#p} ([W_i]_{\Phi_{w_i}}).$$

Pel mateix raonament utilitzat anteriorment obtenim que

$$Q_i \in \left(\left((L_x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_{w_i}^{\#p} ([W_i]_{\Phi_{w_i}}).$$

Per tant, per a cada $i \in |w|$, existeixen un terme $\overline{W_i}$ i una família de termes $(V_{\alpha}^{x,t,i})_{(x,t) \in \coprod X}$ de $\prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{\overline{W_i}|_x}$ tals que

$$Q_i = \left(\left((V_{\alpha}^{x,t,i})_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_{(x,t) \in \coprod X} (\overline{W_i}).$$

Definim el terme $\overline{W} = \sigma((\overline{W_i})_{i \in |w|})$ de $T_{\Sigma}(X)_u$. Pel mateix argument emprat anteriorment arribem a que $\overline{W} \in [M_{u,l}]_{\Phi_u}$. Siga $\left((V_{\beta}^{x,t})_{\beta \in |\overline{W}|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X}$ l'element de $\prod_{(x,t) \in \coprod X} L_x^{|\overline{W}|_x}$

obtingut d'ajuntar, en ordre, la família de termes $\left(\left((V_\alpha^{x,t,i})_{\alpha \in |\overline{W}_i|_x} \right)_{(x,t) \in \coprod X} \right)_{i \in |w|}$. Com a conseqüència del Lema 3.15, tenim que

$$\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) \in \left(\left((L_x^x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_r^{\#p} ([M_{u,l}]_{\Phi_u}).$$

L'altra implicació es demostra de manera anàloga.

Acabem de veure que Ψ_s és una congruència. A més, ja hem comentat que és d'índex finit. Falta veure que Ψ satura $\left(\left((L_x^x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_s^{\#p} (K)$. Notem que, per definició de Ψ , per a cada $r \in S$ i cada $l \in K_r$, el conjunt $\left(\left((L_x^x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_r^{\#p} ([W_{r,l}]_{\Phi_r})$ és Ψ -saturat. Com a conseqüència que K és Φ -saturat, existeix un conjunt d'índexs I tal que

$$K = \bigcup_{i \in I} [M_{s,l_i}]_{\Phi_s}.$$

Aleshores

$$\left(\left((L_x^x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_s^{\#p} (K) = \bigcup_{i \in I} \left(\left((L_x^x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_s^{\#p} ([M_{s,l_i}]_{\Phi_s}).$$

Per tant $\left(\left((L_x^x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_s^{\#p} (K)$ és Ψ_s -saturat per ser unió finita de llenguatges Ψ_s -saturats. D'aquesta manera $\left(\left((L_x^x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_s^{\#p} (K)$ és reconeixible. $\square$

Corol·lari 3.27. *Siguen u, s dos tipus en S , $z \in X_u$ una variable, $L \in \text{Rec}_u(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ un llenguatge u -reconeixible i $K \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ un llenguatge s -reconeixible. Aleshores*

$$(z/L)_s^{\#p} (K) \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X)).$$

Al proper exemple veurem una manera alternativa de provar que el llenguatge definit a l'Exemple 3.9 és reconeixible emprant alguns dels resultats demostrats a aquesta secció.

Exemple 3.28. Recordem el llenguatge definit a l'Exemple 3.9

$$L = \{\sigma(P, Q, K) \mid P \in T_\Sigma(X)_0, Q \in T_\Sigma(X)_1, K \in T_\Sigma(X)_0\}.$$

Per la Proposició 3.12 sabem que el llenguatge

$$\{\sigma(x_1, y_1, x_2)\}$$

és reconeixible. A més, per la Proposició 2.10, $T_\Sigma(X)_s$ és reconeixible, per a cada $s \in S$. D'aquesta manera, podem considerar la S -aplicació $\left((L_x^x)_{x \in X} \right)_{t \in S}$ de X a $(\text{Rec}_t(\mathbf{T}_\Sigma(X)))_{t \in S}$ definida, per a cada $t \in S$ i cada $x \in X_t$, com l'aplicació constant que envia

$$x \longmapsto T_\Sigma(X)_t.$$

No és difícil comprovar que

$$L = \left(\left((L_x^x)_{x \in X_t} \right)_{t \in S} \right)_s^{\#p} (\{\sigma(x_1, y_1, x_2)\}).$$

Per tant, pel teorema de Substitució se segueix que L és reconeixible.

Corol·lari 3.29. Siguen $(w, s) \in S^* \times S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ un símbol d'operació formal i siga $(L_i)_{i \in |w|} \in \prod_{i \in |w|} \text{Rec}_{w_i}(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ una família de llenguatges reconeixibles. Aleshores

$$\sigma^\varphi((L_i)_{i \in |w|}) \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X)).$$

El següent corol·lari afirma que el S -conjunt format pels llenguatges reconeixibles és una àlgebra amb la mateixa signatura que l'àlgebra de termes original original.

Corol·lari 3.30. El S -conjunt $(\text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X)))_{s \in S}$ és una subàlgebra de $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varphi$. Denotarem per $\mathbf{Rec}(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ a l'àlgebra associada canònicament a la subàlgebra $(\text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X)))_{s \in S}$ de $\mathbf{T}_\Sigma(X)^\varphi$.

3.1.3 Producte estrela

En aquesta subsecció definirem el concepte d'iteració d'un llenguatge respecte a una variable o producte estrela. Acabarem la subsecció provant que si el llenguatge és reconeixible, aleshores el seu producte estrela també és reconeixible.

Definició 3.31. Siga X un S -conjunt. Siguen $s \in S$ un tipus, $z \in X_s$ una variable, $L \in \mathbf{T}_\Sigma(X)_s^\varphi$ un llenguatge. Aleshores definim la **z -iteració de L** al llenguatge:

$$L^{\star z} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} L^{j,z},$$

on $(L^{j,z})_{j \in \mathbb{N}}$ és la família de subconjunts de $\mathbf{T}_\Sigma(X)_s$ definida per recursió com:

$$L^{0,z} = \{z\},$$

i, per a $j \in \mathbb{N}$,

$$L^{j+1,z} = L^{j,z} \cup (L^{j,z})_s^{\#p}(L).$$

A aquest operador també se l'anomena **producte estrela sobre la variable z** .

Al proper exemple tractem d'aclarir la definició de producte estrela.

Exemple 3.32. Considerem l'àlgebra de termes $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ definida a l'Exemple 3.4. Siga $x_2 \in X_0$ i siga L el llenguatge

$$L = \{\square(x_1, y_1), x_3, \square(x_2, \triangle(z_3, x_3))\}.$$

Així, per definició de x_2 -iteració, tenim que

$$L^{0,x_2} = \{x_2\}.$$

Notem que

$$(L^{x_2})_0^{\#p}(L) = (\{x_2\})_0^{\#p}(L) = L.$$

D'aquesta manera la primera x_2 -iteració serà:

$$L^{1,x_2} = L \cup \{x_2\} = \{\square(x_1, y_1), x_3, \square(x_2, \triangle(z_3, x_3)), x_2\}.$$

És senzill comprovar que

$$\begin{aligned} (L^{1,x_2})_0^{\#p}(L) = \{ & \Box(x_1, y_1), x_3, \Box(x_2, \Delta(z_3, x_3)), \\ & \Box(\Box(x_1, y_1), \Delta(z_3, x_3)), \Box(x_3, \Delta(z_3, x_3)), \Box(\Box(x_2, \Delta(z_3, x_3)), \Delta(z_3, x_3)) \}. \end{aligned}$$

Llavors la segona iteració dona com a resultat el següent conjunt

$$\begin{aligned} L^{2,x_2} = \{ & \Box(x_1, y_1), x_3, \Box(x_2, \Delta(z_3, x_3)), x_2 \\ & \Box(\Box(x_1, y_1), \Delta(z_3, x_3)), \Box(x_3, \Delta(z_3, x_3)), \Box(\Box(x_2, \Delta(z_3, x_3)), \Delta(z_3, x_3)) \}. \end{aligned}$$

Si volguérem calcular la tercera iteració hauríem de substituir cada ocurrència de x_2 en cada terme de L per cada terme de L^{2,x_2} .

Observació 3.33. El llenguatge L^{*z} s'obté de la següent manera. Primer s'afegeix z . Els nous elements de L^{*z} s'obtenen de substituir en un terme de L , cada ocurrència de z per algun terme que ja sabem que està a L^{*z} . Notem que

$$L^{1,z} = L \cup \{z\}.$$

A més, $(L^{j,z})_{j \in \mathbb{N}}$ és una cadena de subconjunts de $T_\Sigma(X)_s$ ascendent, és a dir, per a cada $j \in \mathbb{N}$,

$$L^{j,z} \subseteq L^{j+1,z}.$$

Acabarem el capítol provant que el producte estrella d'un llenguatge reconeixible és reconeixible.

Suposició. Per provar el següent teorema suposarem que el conjunt de tipus S és finit.

Teorema 3.34. *Siga X un S -conjunt. Siguen $s \in S$ un tipus, $z \in X_s$ una variable i $L \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ un llenguatge reconeixible. Aleshores*

$$L^{*z} \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X)).$$

Demostració. La idea d'aquesta prova és semblant a la utilitzada a la demostració del Teorema 3.26. Definim la congruència Φ en $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ com

$$\Phi = \Omega^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}(\delta^{s,L}) \cap \Omega^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}(\delta^{s,z}).$$

Com que L i $\{z\}$ són dos llenguatges s -reconeixibles, aleshores, pel Corol·lari 2.7, $\Omega^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}(\delta^{s,L})$ i $\Omega^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}(\delta^{s,z})$ tenen índex finit. Per la Proposició 1.44, Φ és una congruència d'índex finit. Notem que Φ_s satura L i $\{z\}$.

Per a cada tipus $r \in S$ denotarem per k_r a l'índex de Φ_s i per $\mathcal{M}_{\Phi_r} = \{M_{r,l} \mid l \in k_r\}$ a un transversal de $T_\Sigma(X)_r / \Phi_r$ en $T_\Sigma(X)_r$. Denotarem per k al S -conjunt $(k_r)_{r \in S}$ i per $\mathcal{M}_\Phi$ al S -conjunt $(\mathcal{M}_{\Phi_r})_{r \in S}$.

Definim ara una nova relació binària $\Psi = (\Psi_r)_{r \in S}$ en $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ com segueix, per a cada $r \in S$, Ψ_r és la relació binària en $T_\Sigma(X)_r$ formada per tots els parells ordenats $(P, Q) \in T_\Sigma(X)_r^2$ tals que satisfan les condicions

- (i) $(P, Q) \in \Phi_r$.

(ii) Per a cada $l \in k_r$,

$$\left(P \in (L^{\star z})_r^\# ([M_r, l]_{\Phi_r}) \longleftrightarrow Q \in (L^{\star z})_r^\# ([M_r, l]_{\Phi_r}) \right).$$

Notem que, per a cada $r \in S$, Ψ_r és un refinament de Φ_r i que Ψ_r és una relació d'equivalència en $T_\Sigma(X)_r$. A més, l'índex de Ψ_r està fitat per $k_r 2^{k_r}$. Per tant $T_\Sigma(X)_r / \Psi_r$ és finit.

L'objectiu de la prova és demostrar que Ψ és una congruència que satura $L^{\star z}$. D'aquesta manera el resultat estaria provat.

Siguen $(w, u) \in (S^\star - \{\lambda\}) \times S$ i $\sigma \in \Sigma_{w,u}$. Siguen $(P_i)_{i \in |w|}$ i $(Q_i)_{i \in |w|}$ dues famílies de termes de $T_\Sigma(X)_w$ tals que, per a cada $i \in |w|$,

$$(P_i, Q_i) \in \Psi_{w_i}.$$

Hem de veure que $(\sigma((P_i)_{i \in |w|}), \sigma((Q_i)_{i \in |w|})) \in \Psi_u$.

Per la definició de Ψ , tenim que, per a cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in \Phi_{w_i}$. Com a conseqüència que Φ és una congruència en $T_\Sigma(X)$, se segueix que $(\sigma((P_i)_{i \in |w|}), \sigma((Q_i)_{i \in |w|})) \in \Phi_u$. Complint-se així la condició (i).

Comprovem ara que també se satisfà la segona condició. Siga $l \in k_u$. Suposem que

$$\sigma((P_i)_{i \in |w|}) \in (L^{\star z})_r^\# ([M_u, l]_{\Phi_u}).$$

Volem veure que

$$\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) \in (L^{\star z})_r^\# ([M_u, l]_{\Phi_u}).$$

Per l'anterior suposició, existeixen un terme $W \in [M_u, l]_{\Phi_u}$ i una família de termes $(U_\alpha^z)_{\alpha \in |W|_z}$ de $(L^{\star z})^{|W|_z}$ tals que

$$\sigma((P_i)_{i \in |w|}) = (U_\alpha^z)_{\alpha \in |W|_z}^\# (W). \quad (3.2)$$

Distingim dos casos. Pot passar que (a) $z \notin \text{Var}(W)$ o que (b) $z \in \text{Var}(W)$.

(a) Suposem que $z \notin \text{Var}(W)_s$. Aquest cas es manifesta de manera semblant al cas (i) de Teorema 3.26.

(b) Suposem que $z \in \text{Var}(W)_s$. Distingirem dos nous casos en aquest supòsit. Pot ocórrer que (b.1) W siga la variable z (amb $u = s$) o que (b.2) W tinga la forma d'un símbol d'operació actuant sobre una família de termes.

(b.1) Suposem que $W = z$. Per l'Equació 3.2 se segueix que

$$\sigma((P_i)_{i \in |w|}) = (U_\alpha^z)_{\alpha \in |W|_z}^\# (W) = (U_\alpha^z)_{\alpha \in |W|_z}^\# (z) = U_0^z.$$

Per tant $\sigma((P_i)_{i \in |w|})$ és un element de $L^{\star z}$. Conseqüentment, existeix $j \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma((P_i)_{i \in |w|}) \in L^{j,z}$. Prenem $j \in \mathbb{N}$ com el menor natural que compleix la condició anterior. Notem que $j \neq 0$ ja que $L^{0,z} = \{z\}$ i clarament $\sigma((P_i)_{i \in |w|})$ no pertany a aquest conjunt. Per tant tenim que

$$\sigma((P_i)_{i \in |w|}) \in L^{j,z} = L^{j-1,z} \cup (L^{j-1,z})_s^{\#p} (L).$$

Per minimalitat de j , obtenim que

$$\sigma((P_i)_{i \in |w|}) \in (L^{j-1,z})_s^{\#p} (L).$$

Per tant existeixen un terme $W^\dagger \in L$ i una família de termes $(\overline{U}_\alpha^z)_{\alpha \in |W^\dagger|_z}$ de $(L^{j-1,z})^{|W^\dagger|_z}$ tals que

$$\sigma((P_i)_{i \in |W^\dagger|}) = \left((\overline{U}_\alpha^z)_{\alpha \in |W^\dagger|_z}^z \right) (W^\dagger).$$

Diferenciem dos casos en funció del terme $W^\dagger$. Per una banda pot passar que (b.1.i) $z \notin \text{Var}(W^\dagger)_s$ i d'altra pot passar que (b.1.ii) $z \in \text{Var}(W^\dagger)_s$.

En el cas (b.1.i), suposem que $|W^\dagger|_z = 0$. Llavors no s'efectua cap substitució i així tenim que $\sigma((P_i)_{i \in |w|}) = W^\dagger$ i per tant $\sigma((P_i)_{i \in |w|}) \in L$. Definim el terme

$$V_0^z = \sigma((Q_i)_{i \in |w|}).$$

Veiem que $V_0^z \in L$. Tenim que $(P_i, Q_i) \in \Phi_{w_i}$, per a tot $i \in |w|$. Aleshores, pel fet que Φ és una congruència, $(\sigma((P_i)_{i \in |w|}), \sigma((Q_i)_{i \in |w|})) = (U_0^z, V_0^z) \in \Phi_s$. Atès que L és Φ_s -saturat i $U_0^z \in L$, obtenim que $V_0^z \in L \subseteq L^{\star z}$. D'aquesta manera

$$\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) = (V_0^z)(z).$$

Recordem que estem en el cas (b.1) en que $W = z$. Així $z \in [M_s, l]_{\Phi_s}$. Per tant

$$Q \in (L^{\star z})_r^\sharp([M_s, l]_{\Phi_s}).$$

En el cas (b.1.ii), suposem que $|W^\dagger|_z \neq 0$. Provem que $\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) \in L^{\star z}$. Notem que W no pot ser el terme z ja que si ho fora tindríem que $\sigma((P_i)_{i \in |w|}) \in L^{j-1,z}$ cosa que contradiu la minimalitat de j . L'única opció possible és que $W^\dagger = \sigma((W_i^\dagger)_{i \in |w|})$ per a una única família $(W_i^\dagger)_{i \in |w|} \in T_\Sigma(X)_w$. Per tant, pel Lema 3.15, per a cada $i \in |w|$, tenim que

$$P_i = \left(\left(\overline{U}_{\alpha + \sum_{k \in i} |W_k^\dagger|_z}^z \right)_{\alpha \in |W^\dagger|_z} \right) (W_i^\dagger) \in (L^{\star z})_{w_i}^{\sharp p}([W_i^\dagger]_{\Phi_{w_i}}).$$

D'aquesta manera, per a cada $i \in |w|$, $Q_i \in (L^{\star z})_{w_i}^{\sharp p}([W_i^\dagger]_{\Phi_{w_i}})$ ja que $(P_i, Q_i) \in \Psi_{w_i}$. Per tant existeixen un terme $\overline{W}_i \in [W_i^\dagger]_{\Phi_{w_i}}$ i una família de termes $(V_\alpha^{z,i})_{\alpha \in |\overline{W}_i|_z} \in (L^{\star z})^{|\overline{W}_i|_z}$ tals que

$$Q_i = \left((V_\alpha^{z,i})_{\alpha \in |\overline{W}_i|_z}^z \right) (\overline{W}_i).$$

Considerem el terme

$$\overline{W} = \sigma((\overline{W}_i)_{i \in |w|}).$$

Com a conseqüència que, per a cada $i \in |w|$, $(W_i^\dagger, \overline{W}_i) \in \Phi_{w_i}$ i que Φ és una congruència, tenim que $(W^\dagger, \overline{W}) \in \Phi_s$. Aleshores $\overline{W} \in L$ pel fet que L és Φ_s -saturat i que $W^\dagger \in L$.

Siga $(V_\beta^z)_{\beta \in |\overline{W}|_z}$ l'element de $(L^{\star z})^{|\overline{W}|_z}$ obtingut d'ajuntar en ordre la família $|w|$ -indexada de termes $\left((V_\beta^z)_{\beta \in |\overline{W}_i|_z} \right)_{i \in |w|}$. Com que $(V_\beta^z)_{\beta \in |\overline{W}|_z}$ és finit, existeix un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que, per a cada $\beta \in |\overline{W}|_z$, $V_\beta^z \in L^{n,z}$. Aleshores pel Lema 3.15 tenim que

$$\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) \in (L^{n,z})_s^{\sharp p}(L) \subseteq L^{\star z}.$$

Per tant

$$\sigma((Q_i)_{i \in |w|}) = (\sigma((Q_i)_{i \in |w|}^z))(z) \in (L^{\tilde{z}, z}_s)^{\sharp p}([z]_{\Phi_s}).$$

Recordem que estem en el cas (b.1) en que $W = z$. Així $z \in [M_{s,l}]_{\Phi_s}$. Per tant

$$Q \in (L^{\tilde{z}, z}_s)^{\sharp p}([M_{s,l}]_{\Phi_s}).$$

L'altra implicació es prova de manera anàloga.

(b.2) Aquest cas es demostra per un argument semblant a l'utilitzat en el cas (ii) del Teorema 3.26.

Acabem de veure que Ψ és una congruència. Només ens falta comprovar que Ψ_s satura $L^{\star z}$. Per com està definida la congruència Ψ és fàcil observar que, per a cada $r \in S$ i cada $l \in k_r$, el llenguatge $(L^{\tilde{z}, z}_s)^{\sharp p}([M_{r,l}]_{\Phi_r})$ és Ψ_r -saturat. Com hem comentat al principi Φ_s satura $\{z\}$ i per tant existeix $l \in k_s$ tal que $\{z\} = [M_{s,l}]_{\Phi_s}$. Notem que

$$L^{\star z} = (L^{\tilde{z}, z}_s)^{\sharp p}(\{z\}).$$

Per tant $L^{\star z}$ és Ψ_s -saturat i llavors reconeixible. □

Capítol 4

Llenguatges regulars

El teorema de Kleene és un resultat important dins de la teoria del llenguatges formals. Per aquest motiu va ser un dels primers resultats en ser generalitzat per al cas de l'àlgebra lliure sobre una signatura homogènia. Kleene va demostrar el teorema al 1956 [6] tot i que la demostració estàndard és la donada per McNaughton i Yamada [8]. Aquestes demostracions són vàlides només per al monoide lliure. Més endavant es va generalitzar per tal que el resultat fora vàlid per a àlgebres homogènies com es pot veure a [5]. En aquest capítol generalitzem el teorema per a l'àlgebra de termes sobre una signatura heterogènia.

Suposició. Durant aquest capítol suposarem que el conjunt de tipus S , el S -conjunt de variables X i la signatura Σ són finits.

Definició 4.1. Siga X un S -conjunt i siga Σ una S -signatura. Definim la signatura Θ , per a cada $(w, s) \in S^* \times S$, com segueix:

$$\Theta_{w,s} = \begin{cases} \Sigma_{w,s} \cup \{\emptyset_s\} & \text{si } (w, s) = (\lambda, s), \\ \Sigma_{w,s} \cup \{(\cdot)^{\star z} \mid z \in X_s\} & \text{si } (w, s) = (s, s), \\ \Sigma_{w,s} \cup \{+\} \cup \{(\cdot^z)(\cdot) \mid z \in X_s\} & \text{si } (w, s) = (ss, s), \\ \Sigma_{w,s} \cup \{(\cdot^z)(\cdot) \mid z \in X_t\} & \text{si } (w, s) = (t, s) \text{ amb } t \neq s, \\ \Sigma_{w,s} & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Considerem la Θ -àlgebra de termes $\mathbf{T}_\Theta(X)$. Siga $s \in S$. Aleshores als elements de $\mathbf{T}_\Theta(X)_s$ els anomenarem **expressions regulars** de tipus s .

Proposició 4.2. $\text{Rec}(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ té estructura de Θ -àlgebra.

Demostració. Pel Corol·lari 3.30 sabem que $\text{Rec}(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ té estructura de Σ -àlgebra. D'aquesta manera, només ens queden per interpretar les operacions de $\Theta - \Sigma$. Siga $(w, s) \in S^* \times S$ i siga $\sigma \in (\Theta - \Sigma)_{w,s}$.

En el cas en que $\sigma = \emptyset_s$. Aleshores $\emptyset_s^{\mathbf{Rec}} = \emptyset_s$. Sabem que els buit és s -reconeixible per la Proposició 2.10.

En el cas en que $\sigma = (\cdot)^{\star z}$ per a una variable $z \in X_s$. Aleshores interpretarem l'aplicació σ com l'aplicació

$$(\cdot)^{\star z}$$

de $\text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ a $\text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X))$. Està ben definida aquesta aplicació pel Teorema 3.34.

En el cas en que $\sigma = +$, interpretarem σ com l'aplicació $\cup$. Sabem que està ben definida la unió de llenguatges reconeixibles pel Teorema 2.11.

En el cas en que $\sigma = (\cdot)^z$ per a algun $z \in X_t$ amb $(w, s) = (st, s)$. Interpretarem l'operació σ com l'aplicació

$$(\cdot)^z_s^{\sharp p}(\cdot).$$

Sabem pel Corol·lari 3.27 que la substitució d'un llenguatge reconeixible per un altre llenguatge reconeixible és un reconeixible. Per tant, aquesta aplicació està ben definida.

Hem donat una interpretació per a cada operació de Θ . D'aquesta manera $\text{Rec}(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ té estructura de Θ -àlgebra. $\square$

Ara veurem com podem crear llenguatges reconeixibles mitjançant expressions regulars.

Definició 4.3. Siguen X i Z dos S -conjunts tals que $X \subseteq Z$. Definim l'aplicació $\llbracket \cdot \rrbracket$ de X a $\text{Rec}(\mathbf{T}_\Sigma(X))$, per a cada $s \in S$, com:

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot \rrbracket_s : X_s &\longrightarrow \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X)) \\ x &\longmapsto \{x\}. \end{aligned}$$

Aquesta aplicació està ben definida com a conseqüència de la Proposició 3.10.

Per la propietat universal de $\mathbf{T}_\Theta(X)$, existeix un Θ -homomorfisme $\llbracket \cdot \rrbracket^\sharp$ de $\mathbf{T}_\Theta(X)$ a $\mathbf{Rec}(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ tal que $\llbracket \cdot \rrbracket^\sharp \circ \eta_X = \llbracket \cdot \rrbracket$.

A continuació definirem una nova categoria dels llenguatges, els llenguatges regulars.

Definició 4.4. Siga X un S -conjunt. Siguen $s \in S$ i $L \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X))$. Aleshores direm que L és un **llenguatge regular** si existeixen un S -conjunt Z tal que $X \subseteq Z$ i una expressió regular $\xi \in \mathbf{T}_\Theta(Z)_s$, tal que

$$L = \llbracket \xi \rrbracket_s^\sharp.$$

Les variables de $Z - X$ són variables auxiliars ja que en cap terme de L tenen ocurrencies.

Notem que el nombre de variables que apareixen en ξ és finit. Per tant és suficient en trobar un S -conjunt Z amb $X \subseteq Z$ finit.

Veiem als següents exemples les nocions de expressió regular i llenguatge regular.

Exemple 4.5. Recordem la Σ -àlgebra $\mathbf{A}^*$ definida a l'Exemple 2.2. L'alfabet és el conjunt $A = \{a, b\}$ i la interpretació de les operacions són la concatenació $\cdot$ i la paraula buida λ . Siga K el llenguatge format per totes les paraules que només contenen la lletra a . Podem escriure K com

$$K = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

Veiem que aquest llenguatge és regular. Considerem el conjunt $Z = \{a, b, x\}$. L'element x serà la variable auxiliar. Considerem l'expressió regular

$$\xi = \binom{x}{a} ((x \cdot a)^{\star x}).$$

No és difícil comprovar que

$$\llbracket (x \cdot a)^{\star x} \rrbracket_0^\sharp = \{xa\}^{\star x} = \{x, xa, xaa, xaaa, xaaaa, \dots\}.$$

Ara substituïm cada ocurrència de x per la paraula a i tenim que

$$\llbracket \xi \rrbracket_0^\# = \left(\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix} \right) (\llbracket (x \cdot a)^{\star x} \rrbracket_0^\#) = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = K.$$

D'aquesta manera se segueix que K és regular.

Trobem una expressió regular que construïska el conjunt $A^\star$. Considerem el mateix conjunt Z . Siga l'expressió regular

$$\zeta = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \lambda \end{smallmatrix} \right) ((x \cdot (a + b))^{\star x}).$$

No és difícil veure que

$$A^\star = \llbracket \zeta \rrbracket_0^\#.$$

Recordem el llenguatge L definit a l'Exemple 2.2 format per totes les paraules que contenen la lletra A . Siga l'expressió regular

$$\chi = (\zeta \cdot a) \cdot \zeta.$$

Aleshores

$$\llbracket \chi \rrbracket_0^\# = (A^\star \cdot^\circ \{a\}) \cdot^\circ A^\star = L.$$

Per tant el llenguatge L és regular. Recordem que també era reconeixible. Més endavant demostrarem que tot llenguatge reconeixible és regular. Una altra expressió regular per aquest llenguatge podria ser

$$\nu = (\zeta \cdot \xi) \cdot \zeta.$$

Observem que l'expressió regular que defineix un llenguatge no és única.

Veiem a continuació un exemple amb una àlgebra heterogènia.

Exemple 4.6. Considerem la Σ -àlgebra de termes definida a l'Exemple 1.30. Siga L el llenguatge format per totes els termes de tipus 2 que tenen σ com a operació final. Veiem que és regular. Al final del capítol veurem que $T_\Sigma(X)_s$ és regular, per a tot $s \in S$. Per tant podem suposar que, per a cada $s \in S$, ξ_s és l'expressió regular que defineix el conjunt $T_\Sigma(X)_s$ i Z^s el S -conjunt de variables sobre les quals es defineixen les expressions regulars. Definim el S -conjunt $Z = \bigcup_{s \in S} Z^s$. Siga l'expressió regular

$$\zeta = \sigma(\xi_0, \xi_1, \xi_0) \in T_\Theta(Z).$$

Aleshores es pot comprovar que

$$L = \llbracket \zeta \rrbracket_2^\#.$$

Estudiem als següents lemes com aconseguir alguns llenguatges regulars. A més, ens seran útils per a la demostració del teorema de Kleene.

Lema 4.7. Siga X un S -conjunt i considerem la seua àlgebra de termes $T_\Sigma(X)$. Siguen $s \in S$ un tipus i $P \in T_\Sigma(X)_s$ un terme. Aleshores el conjunt

$$L = \{P\}$$

és regular.

Demostració. Com que $P \in T_\Sigma(X)_s$, aleshores també $P \in T_\Theta(X)_s$. Així podem considerar $Z = X$. Veiem que $\{P\} = \llbracket P \rrbracket_s^\sharp$. Ho veurem per inducció sobre l'estructura de P .

Si $P = x$ per a una única variable $x \in X_s$. Aleshores

$$\llbracket P \rrbracket_s^\sharp = \llbracket x \rrbracket_s^\sharp = \llbracket x \rrbracket = \{x\} = \{P\}.$$

Si $P = \sigma$ per a una única operació constant $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$. Aleshores

$$\llbracket \sigma \rrbracket_s^\sharp = \sigma^{\mathbf{Rec.}} = \{\sigma\}.$$

Suposem que $P = \sigma((P_i)_{i \in |w|})$ per a una única paraula $w \in S^* - \lambda$, una única operació $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ i una única família de termes $(P_i)_{i \in |w|} \in T_\Sigma(X)_w$ tal que $\{P_i\} = \llbracket P_i \rrbracket_{w_i}^\sharp$, per a cada $i \in |w|$. Aleshores

$$\llbracket P \rrbracket_s^\sharp = \llbracket \sigma((P_i)_{i \in |w|}) \rrbracket_s^\sharp = \sigma^{\mathbf{Rec.}}(\llbracket (P_i)_{i \in |w|} \rrbracket_{w_i}^\sharp) = \sigma^{\mathbf{Rec.}}(\{\{P_i\}\}_{i \in |w|}) = \{\sigma((P_i)_{i \in |w|})\} = \{P\}.$$

D'aquesta manera L és regular. □

Lema 4.8. *Siga X un S -conjunt i considerem la seua àlgebra de termes $\mathbf{T}_\Sigma(X)$. Siga I un conjunt d'índexs finit de $\mathcal{U}$ i siga $(L_i)_{i \in I}$ un família de llenguatges regulars de tipus $s \in S$. Aleshores el conjunt*

$$L = \bigcup_{i \in I} L_i$$

és regular.

Demostració. Per a cada $i \in I$, L_i és regular. Per tant, siguen Z_i el S -conjunt i $\xi_i \in T_\Theta(Z_i)_s$ l'expressió regular tal que $L_i = \llbracket \xi_i \rrbracket$. Definim el S -conjunt $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$. Considerem l'expressió regular

$$\xi = \sum_{i \in I} \xi_i \in T_\Theta(Z).$$

Notem que si I no fora finit, aleshores ξ no seria una expressió regular. Aleshores no és difícil veure que

$$L = \llbracket \xi \rrbracket.$$

Llavors L és regular. □

A continuació estudiarem la relació que hi ha entre els llenguatges reconeixibles i els llenguatges regulars. Veurem que tot llenguatge regular és reconeixible i viceversa.

Corol·lari 4.9. *Tot llenguatge regular és reconeixible.*

Per veure la implicació inversa primer cal introduir la següent notació.

Notació. Siguen $\mathbf{B}$ una Σ -àlgebra i $L \subseteq B_s$ un llenguatge s -reconeixible. Siga $\mathbf{A}$ la seua àlgebra reconixedora. Podem suposar que $A = (a_t)_{t \in S}$ on, per a cada $t \in S$, $a_t \in \mathbb{N}$. Siga K un S -subconjunt de A . Escriurem

$$K \leq A$$

si K és de la forma $(k_t)_{t \in S}$ amb $k_t \leq a_t$ per a cada $t \in S$. Notem que el S -conjunt l'escriurem amb majúscula i els elements amb minúscula.

Siguen $s \in S$ un tipus i $l \leq a_s$. Notem que

$$\delta^{s,l} \leq A$$

ja que si $t \neq s$, $\delta_t^{s,l} = 0 \leq a_t$ i si $t = s$, $\delta_t^{s,l} = l \leq a_t$.

Definim ara la funció màxim amb aquests tipus de conjunts. Definim l'aplicació $\max: \text{Sub}(A) \times \text{Sub}(A) \rightarrow \text{Sub}(A)$, per a cada $K, M \leq A$, per a cada $t \in S$ com segueix:

$$\max(K, M)_t = \max(k_t, m_t).$$

Efectivament $\max(K, M) \leq A$.

Siga $K \leq A$. Definim el cardinal de K com

$$\|K\| = \sum_{t \in S} k_t.$$

Siga $K \leq A$ i siga $r \in S$ un tipus tal que $k_r \neq 0$. Definim el S -conjunt K^r , per a cada $t \in S$, com

$$k_t^r = \begin{cases} k_t & \text{si } t \neq r, \\ k_t - 1 & \text{si } t = r. \end{cases}$$

Observem que $K^r \leq A$.

Teorema 4.10 (Teorema de Kleene). *Tot llenguatge reconeixible és regular.*

Demostració. Aquesta prova està inspirada en la prova quasi estàndard del corresponent resultat en teoria d'autòmats feta per R.McNaughton i H.Yamada [8].

Siga $L \in \text{Rec}_s(\mathbf{T}_\Sigma(X))$ un llenguatge reconeixible de tipus s . Aleshores existeixen $\mathbf{A}$ una Σ -àlgebra finita, $B \subseteq A_s$ un subconjunt i $f: \mathbf{T}_\Sigma(X) \rightarrow \mathbf{A}$ un homomorfisme tal que

$$L = f_s^{-1}[B].$$

Llavors, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $A = (a_t)_{t \in S}$ on $a_t \in \mathbb{N}$, per a tot $t \in S$. Veurem que existeix una expressió regular amb variables $X \cup A$ que defineix L , i.e., existeix una expressió regular $\xi \in \text{T}_\Omega(X \cup A)_s$ tal que $L = \llbracket \xi \rrbracket$.

Definim la S -aplicació h de $X \amalg A$ a A definida, per a cada tipus $t \in S$, com segueix:

$$h_t = \begin{cases} X_t \amalg A_t & \longrightarrow & A_t \\ z & \longmapsto & \begin{cases} f_t(z) & \text{si } z \in X_t, \\ z & \text{si } z \in A_t. \end{cases} \end{cases}$$

D'aquesta manera $h|_X = f \circ \eta_X$ i $h|_A = \text{id}_A$. Aleshores considerem l'únic Σ -homomorfisme $h^\#$ de $\mathbf{T}_\Sigma(X \amalg A)$ a $\mathbf{A}$ de manera que

$$h^\# \circ \eta_{X \amalg A} = h.$$

Siguen $u \in S$ un tipus, $C \subseteq A$ un S -subconjunt, $K \leq A$ i $j \in m_u$. Aleshores definim

$$L_u(C, K, j)$$

com el conjunt format pels termes $P \in \text{T}_\Sigma(X \amalg C)_u$ que compleixen que

- (i) $P \in T_\Sigma(X \amalg C)_u$
- (ii) $h_t^\sharp(Q) \in k_t$ per a tot $t \in S$ i tot Q subterme propi de P .
- (iii) $h_u^\sharp(P) = j$.

És a dir, $L_u(C, K, j)$ és el conjunt de tots els termes de $T_\Sigma(X \amalg C)_u$ que tenen com a imatge mitjançant h_u el valor j i tals que els seus subtermes propis de tipus $t \in S$ tenen la seua imatge restringida mitjançant $h_t^\sharp$ restringida al subconjunt k_t d' a_t .

Com que $L = f_s^{-1}[B]$ i que $h^\sharp|_{T_\Sigma(X)} = f$, és compleix que

$$L = \bigcup_{j \in B} L_s(\emptyset, A, j).$$

Així, és suficient provar que els conjunts $L_u(C, K, j)$ són regulars per a tot $u \in S$, per a tot $C \subseteq A$, per a tot $K \leq A$ i per a tot $j \in a_u$. Ho demostrarem per inducció sobre el cardinal $\|K\| = \sum_{t \in S} k_t$. Suposem fixats $u \in S$, $C \subseteq A$ i $j \in a_u$.

Comprovem primer que el cas base es cert. Si $\|K\| = 0$, llavors l'únic valor possible dels k_t és $k_t = 0$ per a tot $t \in S$. Aleshores si $P \in L_u(C, (0)_{t \in S}, j)$ no pot tenir subtermes no trivials ja que si Q és un subterme propi, ha de complir que $h_t^\sharp(Q) \in 0$ cosa que és impossible. D'aquesta manera, P és de la forma

- (i) $P = x$, per a una única variable $x \in X_u$ amb $f(x) = j$.
- (ii) $P = j$ si $j \in C_u$.
- (iii) $P = \sigma$ per a un únic símbol d'operació formal constant $\sigma \in \Sigma_{\lambda, s}$ amb $f(\sigma) = j$.
- (iv) $P = \sigma((P_i)_{i \in |w|})$ per a una única paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, per a una única operació formal $\sigma \in \Sigma_{w, s}$ i una única família de subtermes trivials $(P_i)_{i \in |w|}$. Per tant P_i pot ser, per a cada $i \in |w|$, de la forma

$$P_i \in \{x \mid x \in X_{w_i}\} \cup \{r \mid r \in C_{w_i}\} \cup \{\sigma \mid \sigma \in \Sigma_{\lambda, w_i}\},$$

i amb $h_u^\sharp(P) = j$.

En qualsevol cas, les opcions de triar P és finita i llavors $L_u(C, (0)_{t \in S}, j)$ és finit. Per tant podem aconseguir una expressió regular per a $L_u(C, (0)_{t \in S}, j)$ pels Lemes 4.7 i 4.8.

Veiem ara el pas inductiu. Suposarem que, per a cada $K' \leq A$ amb $\|K'\| = n \in \sum_{t \in S} a_t$, ja coneguem una expressió regular de $L_u(C', K', j')$ per a cada $u \in S$, per a cada $C' \subseteq A$ i cada $j' \in m_u$. Aleshores hem de provar que, per a cada $u \in S$, cada $C \subseteq A$, cada $j \in m_u$ i cada K amb $\|K\| = n + 1$, $L_u(C, K, j)$ admet una expressió regular.

A continuació provarem que

$$L_u(C, K, j) = \bigcup_{\substack{r \in S \\ k_r \neq 0}} \left(L_r(C, K^r, k_r^r) \right)_u^{\sharp p} \left(\left(L_r(C \cup \delta^{k_r^r, r}, K^r, k_r^r)^{\star k_r^r} \right)_u^{\sharp p} \left(L_u(C \cup \delta^{k_r^r, r}, K^r, j) \right) \right). \quad (4.1)$$

Recordem que k_r^r fa referència a l'element $k_r - 1 \in a_r$. Anomenarem $\bar{L}$ al costat de la dret de l'Equació 4.1. I anomenarem, per a cada $r \in S$ amb $k_r \neq 0$,

$$\bar{L}_r = \left(L_r(C, K^r, k_r^r) \right)_u^{\sharp p} \left(\left(L_r(C \cup \delta^{k_r^r, r}, K^r, k_r^r)^* k_r^r \right)_u^{\sharp p} \left(L_u(C \cup \delta^{k_r^r, r}, K^r, j) \right) \right).$$

Així ens queda

$$L_u(C, K, j) = \bar{L} = \bigcup_{\substack{r \in S \\ k_r \neq 0}} \bar{L}_r.$$

Açò acabaria el pas d'inducció ja que si ens fixem al costat dret de l'Equació 4.1, cada $\bar{L}_r$ és regular perquè $\|K^r\| = \|K\| - 1 = n$. I, en ser una unió finita, se segueix que $\bar{L}$ també és regular pel Lema 4.8.

Veiem primer que $L_u(C, K, j) \supseteq \bar{L}$. Per provar-ho primer necessitem els següents passos.

Pas 1. Per a cada $u, r \in S$, cada $j \in a_u$, cada $l \in a_r$, cada $K, M \leq A$ i cada $C_0, C_1 \subseteq A$

$$\left(L_r(C_0, K, l) \right)_u^{\sharp p} (L_u(C_1 \cup \delta^{r, l}, M, j)) \subseteq L_u \left(C_0 \cup (C_1 - \delta^{r, l}), \max(K, M, \delta^{r, l+1}), j \right).$$

Demostració. Anomenarem C_2 al S -conjunt $C_0 \cup (C_1 - \delta^{r, l})$, per simplificar notació. Siga $P \in \left(L_r(C_0, K, l) \right)_u^{\sharp p} (L_u(C_1 \cup \delta^{r, l}, M, j))$. Aleshores existeixen un terme $W \in L_u(C_1 \cup \delta^{r, l}, M, j)$ i una família de termes $(U_\alpha)_{\alpha \in |W|_l} \in L_r(C_0, K, l)^{|W|_l}$ tals que

$$P = \left((U_\alpha)_{\alpha \in |W|_l} \right)_u^l (W).$$

Hem de veure que $P \in L_u(C_2, \max(K, M, \delta^{r, l+1}), j)$. Es compleixen les següents propietats:

- (i) P és un terme en $T_\Sigma(X \amalg C_2)_u$ ja que prové de W que és un terme en $T_\Sigma(X \amalg (C_1 \cup \delta^{r, l}))_u$ on s'han substituït totes les ocurrencies de l en W per termes U_α en $T(X \amalg C_0)_r$. Notem que P tindrà ocurrencies de l si, i només si, $l \in C_0$.
- (ii) Siga Q un subterme propi de P de tipus $e \in S$. Aleshores Q pot ser:
 - (a) Un subterme propi de W . En aquest cas,

$$h_e^\sharp(Q) \in m_e$$

ja que $W \in L_u(C_1 \cup \delta^{r, l}, M, j)$.

- (b) Existeixen un subterme propi W' de W de tipus e i una subfamília $(U_{\alpha_i})_{i \in |W'|_l}$ de $(U_\alpha)_{\alpha \in |W|_l}$ tals que

$$Q = \left((U_{\alpha_i})_{i \in |W'|_l} \right)_u^l (W').$$

Tenim que per a cada $i \in |W'|_l$, $U_{\alpha_i} \in L_r(C_0, K, l)$. Per tant, $h_r^\sharp(U) = l = h_r^\sharp(l)$. Pel teorema de Substitució (Teorema 3.16)

$$h_e^\sharp(Q) = h_e^\sharp \left(\left((U_{\alpha_i})_{i \in |W'|_l} \right)_u^l (W') \right) = h_e^\sharp \left((l) (W') \right) = h^\sharp(W') \in m_e.$$

(c) Q és igual a un U_α per a algun $\alpha \in |W|_l$ i per tant $e = r$. En aquest cas,

$$h_e^\sharp(Q) = h_e^\sharp(U_\alpha) = l \in l + 1.$$

(d) Un subterme propi de U_α per a algun $\alpha \in |W|_l$. En aquest cas,

$$h_e^\sharp(Q) \in k_e$$

perquè $U_\alpha \in L_r(C_0, K, j)$.

Per tant, $h_e^\sharp(Q) \in \max(k_e, m_e)$ si $e \neq r$ i $h_e^\sharp(Q) \in \max(k_e, m_e, l + 1)$ si $e = r$.

(iii) Hem de comprovar que $h_u^\sharp(P) = j$. Sabem que $h_u^\sharp(W) = j$. Com que $h_r^\sharp(U_\alpha) = l = h_r^\sharp(l)$, pel teorema de Substitució (Teorema 3.16), tenim que

$$j = h_u^\sharp(W) = h_u^\sharp\left(\left((l)_{\beta \in |W|_l}\right)(W)\right) = h_u^\sharp\left(\left((U_\alpha)_{\alpha \in |W|_l}\right)(W)\right) = h_u^\sharp(P).$$

Amb tot açò tenim que $P \in L_u(C_2, \max(K, M, \delta^{r, l+1}), j)$ quedant així el Pas 1 provat. $\square$

Pas 2. Per a tot tipus $u \in S$, per a tot $j \in m_u$, per a tot $K \leq A$ i per a cada $C \subseteq A$, es compleix que

$$L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{\star j} \subseteq L_u(C \cup \delta^{r, j}, \max(K, \delta^{u, j+1}), j).$$

Demostració. Com que $L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{\star j} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{n, j}$, aleshores provarem l'enunciat del pas per inducció sobre n .

Per al cas base, quan $n = 0$, tenim que $L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{0, j} = \{j\}$. Aleshores, clarament:

(i) j és un terme en $T_\Sigma(X \amalg (C \cup \delta^{u, j}))_u$.

(ii) j no té subtermes propis.

(iii) $h_u^\sharp(j) = j$.

Llavors $L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{0, j} \subseteq L_u(C \cup \delta^{r, j}, \max(K, \delta^{u, j+1}), j)$.

Suposem que per a $n \in \mathbb{N}$ es compleix que

$$L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{n, j} \subseteq L_u(C \cup \delta^{r, j}, \max(K, \delta^{u, j+1}), j).$$

Provem l'enunciat per a $n + 1$. Notem que $L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{n+1, j}$ és igual a

$$L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{n, j} \cup \left(L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{n, j} \right)_u^{\sharp p} (L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)).$$

Per la hipòtesi inductiva tenim que

$$L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{n, j} \subseteq L_u(C \cup \delta^{r, j}, \max(K, \delta^{u, j+1}), j).$$

Aleshores $\left(L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)^{n, j} \right)_u^{\sharp p} (L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j))$ està inclòs en

$$\left(L_u(C \cup \delta^{r, j}, \max(K, \delta^{u, j+1}), j) \right)_u^{\sharp p} (L_u(C \cup \delta^{u, j}, K, j)).$$

Pel Pas 1, se segueix que

$$\left(L_u(C \cup \delta^{r,j}, \max(K, \delta^{u,j+1}), j) \right)_u^{\sharp p} (L_u(C \cup \delta^{u,j}, K, j)) \subseteq L_u(C \cup \delta^{r,j}, \max(K, \delta^{u,j+1}), j).$$

Queda així provat l'enunciat per a $n + 1$. Per tant

$$L_u(C \cup \delta^{u,j}, K, j)^{\star j} \subseteq L_u(C \cup \delta^{r,j}, \max(K, \delta^{u,j+1}), j).$$

Açò demostra el Pas 2. □

Amb tot açò ja podem provar la primera inclusió. Siga $r \in S$. Considerem $\overline{L}_r$. Aleshores pel Pas 2 tenim que

$$\begin{aligned} \left(L_r(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, k_r^r) \right) (L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, j)) &\subseteq \left(L_r(C \cup \delta^{r,k_r^r}, \max(K^r, \delta^{r,k_r^r+1}), k_r^r) \right) (L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, j)) \\ &= \left(L_r(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K, k_r^r) \right) (L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, j)). \end{aligned}$$

Ara pel Pas 1 se segueix que

$$\left(L_r(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K, k_r^r) \right)_u^{\sharp p} (L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, j)) \subseteq L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K, j).$$

Per tant

$$\overline{L}_u \subseteq \left(L_r(C, K^r, k_r^r) \right)_u^{\sharp p} (L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K, j)).$$

Una altra vegada pel Pas 1 tenim que

$$\left(L_r(C, K^r, k_r^r) \right)_u^{\sharp p} (L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K, j)) \subseteq L_u(C, K, j).$$

D'aquesta manera

$$\overline{L}_r \subseteq L_u(C, K, j)$$

per a tot $r \in S$ tal que $k_r \neq 0$. I per tant

$$\overline{L} \subseteq L_u(C, K, j),$$

quedant així la primera inclusió demostrada.

Veim ara l'altra inclusió de l'Equació 4.1. Estàvem sota el supòsit que $\|K\| = n + 1$. Per tant existirà $r \in S$ tal que $k_r \neq 0$. Així provarem que

$$L_u(C, K, j) \subseteq \overline{L}_r.$$

Siga $P \in L_u(C, K, j)$. Aquesta inclusió la veurem per inducció sobre l'estructura de P .

(a) En el cas en que P és una variable.

$$P = z$$

per a una única $z \in (X \amalg C)_u$ amb $h_u^{\sharp}(z) = j$. Podria passar que $z \in X_u$ o bé $z \in C_u$.

- Si $z \in X_u$, aleshores és senzill comprovar que $z \in L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, j)$. A més, $|z|_{k_r^r} = 0$, i així cap substitució podrà ser efectuada. Per tant $z \in \bar{L}_u$.
- Si $z \in C_u$, com que $z = h_u^\sharp(z) = j$, l'única opció possible és que $z = j$. Poden passar tres casos. Si $r \neq u$, aleshores $|j|_{k_r^r} = 0$ i pel mateix argument anterior $z \in \bar{L}_u$. Si $r = u$ però $j \neq K_r^r$, aleshores, $|j|_{k_r^r} = 0$ i tenim que $z \in \bar{L}_u$. Si $r = u$ i $j = k_r^r$, aleshores es té que $k_r^r \in C$. Així, $k_r^r \in L_r(C, K^r, k_r^r)$. A més, $k_r^r \in L_r(C \cup \delta^{r,k_r^r}, k_r^r)$. D'aquesta manera

$$z = \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ k_r^r \end{smallmatrix} \right) \left(\left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ k_r^r \end{smallmatrix} \right) (z) \right).$$

Per tant $z \in \bar{L}_u$.

- (b) Suposem que P és de la forma $P = \sigma$ per a un únic símbol d'operació formal constant $\sigma \in \Sigma_{\lambda,u}$, amb $h_u^\sharp(\sigma) = j$. Aleshores $\sigma \in L_u(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, j)$. Com que $|\sigma|_{k_r^r} = 0$, aleshores no es pot efectuar cap substitució i per tant $\sigma \in \bar{L}_u$.
- (c) En el cas en que $P = \sigma((P_i)_{i \in |w|})$, per a una única paraula $w \in S^* - \{\lambda\}$, un únic símbol d'operació $\sigma \in \Sigma_{w,u}$ i una única família de termes $(P_i)_{i \in |w|} \in T_\Sigma(X \amalg C)_w$. Com que $P \in L_u(C, K, j)$, aleshores, per a tot $i \in |w|$, es té que

$$P_i \in L_{w_i}(C, K, h_{w_i}^\sharp(P_i)).$$

Per la inducció sobre l'estructura de P tenim que

$$P_i \in \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ L_r(C, K^r, k_r^r) \end{smallmatrix} \right)_{w_i}^{\sharp p} \left(\left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ L_r(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, k_r^r) \star k_r^r \end{smallmatrix} \right)_{w_i}^{\sharp p} \left(L_{w_i}(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, h_{w_i}^\sharp(P_i)) \right) \right).$$

Per tant, existeixen

- 1) un terme $W_i \in L_{w_i}(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, h_{w_i}^\sharp(P_i))$,
- 2) una família de termes

$$(U_\alpha^i)_{\alpha \in |W_i|_{k_r^r}} \in (L_r(C \cup \delta^{r,k_r^r}, K^r, k_r^r) \star k_r^r)^{|W_i|_{k_r^r}}.$$

Per simplificar notació escriurem

$$U_i = \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ (U_\alpha^i)_{\alpha \in |W_i|_{k_r^r}} \end{smallmatrix} \right) (W_i),$$

- 3) i una família de termes

$$(Q_\beta^i)_{\beta \in |U_i|_{k_r^r}} \in L_r(C, K^r, k_r^r)^{|U_i|_{k_r^r}},$$

tals que

$$P_i = \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ (Q_\beta^i)_{\beta \in |U_i|_{k_r^r}} \end{smallmatrix} \right) (U_i).$$

Definim el terme $\overline{W}_i$, per a cada $i \in |w|$, com segueix:

$$\overline{W}_i = \begin{cases} W_i & \text{si } w_i \neq r, \\ W_i & \text{si } w_i = r \text{ i } h_{w_i}^\sharp(W_i) \neq k_r^r, \\ k_r^r & \text{si } w_i = r \text{ i } h_{w_i}^\sharp(W_i) = k_r^r, \\ P_i & \text{si } P_i \text{ és un terme no propi de } P. \end{cases}$$

Definim el terme $W = \sigma((\overline{W}_i)_{i \in |w|})$. Veiem que $W \in L_u(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, j)$.

- (i) $W \in T_\Sigma(X \amalg (C \cup \delta^{r, k_r^r}))_u$ ja que cada subterme $\overline{W}_i$ té com a variables el conjunt $X \amalg (C \cup \delta^{r, k_r^r})$ i la coaritat de σ és u .
- (ii) Siga Q un subterme propi de W de tipus $e \in S$. Notem que Q no pot ser un subterme de un W_i en els casos en que $r = w_i$ i $h_{w_i}^\sharp(W_i) = k_r^r$ ni tampoc en el cas en que P_i és un terme no propi de P . En el primer cas, $\overline{W}_i = k_r^r$ no té subtermes propis i $\overline{W}_i$ no és un subterme propi de W . En el segon cas, si P_i és un subterme no propi de P aleshores tampoc ho és de W . Així només ens queden els casos en què $w_i \neq r$ o bé quan $w_i = r$ però $h_{w_i}^\sharp(W_i) \neq k_r^r$. Dins d'aquests casos pot passar que (1) Q siga W_i quan $w_i \neq r$; (2) Q siga W_i quan $w_i = r$ i $h_{w_i}^\sharp(W_i) \neq k_r^r$; (3) Q siga un subterme propi de W_i .
 - En el cas (1), per definició de $L_{w_i}(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, h_{w_i}^\sharp(P_i))$, tenim que $h_{w_i}^\sharp(W_i) = h_{w_i}^\sharp(P_i)$. A més, com que $P \in L_u(C, K, j)$ i P_i és un terme propi de P , tenim que:

$$h_{w_i}^\sharp(W_i) = h_{w_i}^\sharp(P_i) \in k_t = k_t^r.$$

La ultima igualtat es compleix perquè $w_i \neq r$.

- En el cas (2), pel mateix motiu anterior i pel fet que $h_{w_i}^\sharp(W_i) \neq k_r^r$, tenim que

$$h_{w_i}^\sharp(W_i) = h_{w_i}^\sharp(P_i) \in k_t - \{k_t^r\} = k_t^r.$$

- En el cas (3), se segueix directament ja que Q és un subterme propi de W_i . Així

$$h_e^\sharp(W_i) \in k_e^r.$$

En qualsevol dels casos, sempre ocorre que $h_e^\sharp(Q) \in k_e^r$.

- (iii) Falta veure que $h_u^\sharp(W) = j$. Notem que $h_{w_i}^\sharp(\overline{W}_i) = h_{w_i}^\sharp(P_i)$, per a tot $i \in |w|$. Per tant

$$h_u^\sharp(W) = h_u^\sharp(\sigma((\overline{W}_i)_{i \in |w|})) = \sigma((h_{w_i}^\sharp(\overline{W}_i))_{i \in |w|}) = \sigma((h_{w_i}^\sharp(P_i))_{i \in |w|}) = h_u^\sharp(P) = j.$$

Ja hem trobat W . Ara hem de cercar termes U_α i Q_β per substituir en cada ocurrència de k_r^r en W per tractar de recuperar P . Pel Lema 3.15, és suficient substituir en W_i . Per tant emprarem els termes U_α^i i Q_β^i que ja coneixem. Diferenciarem tres casos en funció de la definició de W_i .

- (1) En el cas en què $\overline{W}_i = W_i$, ja coneixem els termes U_α^i i Q_β^i que recuperen P_i .
- (2) En el cas en què $\overline{W}_i = P_i$, amb P_i un subterme no propi de P . Pot passar que $|P_i|_{k_r^r} = 0$ o bé $|P_i|_{k_r^r} \neq 0$.

- En el primer cas, no es pot efectuar cap substitució.
- En el cas en que $|P_i|_{k_r^r} \neq 0$, només pot ser que $P_i = k_r^r$. D'aquesta manera, $k_r^r \in C$. I per tant, $k_r^r \in L_r(C, K^r, k_r^r)$ i també $k_r^r \in L_r(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, k_r^r)^{\star, k_r^r}$. Per tant,

$$P_i = \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ k_r^r \end{smallmatrix} \right) \left(\left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ k_r^r \end{smallmatrix} \right) (P_i) \right).$$

- (3) El cas en què $\overline{W_i} = k_r^r$ requereix més treball. En aquest cas tenim que $w_i = r$ i a més, $h_r^\#(P_i) = h_r^\#(W_i) = k_r^r$. Aleshores

$$W_i \in L_r(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, k_r^r).$$

D'altra banda, el terme U_α^i està en $L_r(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, k_r^r)^{\star, k_r^r}$, per a tot $\alpha \in |W_i|_{k_r^r}$. Llavors, existirà $c_\alpha \in \mathbb{N}$, de manera que

$$U_\alpha^i \in L_r(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, k_r^r)^{c_\alpha, k_r^r}.$$

Siga $c = \max\{c_\alpha \mid \alpha \in |W_i|_{k_r^r}\}$. Llavors

$$U_\alpha^i \in L_r(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, k_r^r)^{c, k_r^r}$$

per a tot $\alpha \in |W_i|_{k_r^r}$. El terme U_i s'obté com segueix

$$U_i = \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ (U_\alpha^i)_{\alpha \in |W_i|_{k_r^r}} \end{smallmatrix} \right) (W_i).$$

Per definició de la iteració $(c+1)$ -èsima, se segueix que

$$U_i \in L_r(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, k_r^r)^{c+1, k_r^r} \subseteq L_r(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, k_r^r)^{\star, k_r^r}.$$

Considerem ara, els termes Q_β^i . Tenim que

$$P_i = \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ (Q_\beta^i)_{\beta \in |U_i|_{k_r^r}} \end{smallmatrix} \right) (U_i) = \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ (Q_\beta^i)_{\beta \in |U_i|_{k_r^r}} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} k_r^r \\ U_i \end{smallmatrix} \right) \left(k_r^r \right).$$

Independentment de la forma de $\overline{W_i}$, hem trobat termes en $L_r(C \cup \delta^{r, k_r^r}, K^r, k_r^r)^{\star, k_r^r}$ i termes en $L_r(C, K^r, k_r^r)$ per recuperar P_i . Per tant, pel Lema 3.15, si s'ordenen en ordre recuperem P . I així

$$P \in \overline{L_r}.$$

Queda així la segona inclusió provada. Acabem de provar que

$$L_u(C, K, j) = \bigcup_{r \in S} \overline{L_r}.$$

Com hem comentat anteriorment cada $\overline{L_r}$ és regular i per tant $L_u(C, K, j)$.

D'aquesta manera $L_u(C, K, j)$ és reconeixible per a tot u , C , k_t i per a tot j . Llavors el llenguatge L és regular. $\square$

Conclusions

En aquest treball hem presentat una introducció a les àlgebres heterogènies i a la noció de reconeixibilitat en aquestes estructures. Els resultats més importants d'aquest treball són les caracteritzacions de la noció de reconeixibilitat mitjançant l'ús d'àlgebres heterogènies finites (o, equivalentment, congruències sintàctiques d'índex finit) donada pel teorema de Myhill-Nerode així com la caracterització de la reconeixibilitat en l'àlgebra de termes heterogènia mitjançant l'ús d'expressions regulars donada pel teorema de Kleene. Aquesta última aportació és treball de recerca original.

Bibliografia

- [1] BURRIS, S., AND SANKAPPANAVAR, H. P. *A Course in Universal Algebra*. Springer, 1981.
- [2] CLIMENT-VIDAL, J., AND COSME-LLÓPEZ, E. Eilenberg theorems for many-sorted formations. *Houston Journal of Mathematics* 45, 2 (2019), 321–369.
- [3] CLIMENT-VIDAL, J., AND COSME-LLÓPEZ, E. Congruence-based proofs of the recognizability theorems for free many-sorted algebras. *Journal of Logic and Computation* 30, 2 (2020), 561–633.
- [4] EILENBERG, S. *Automata, languages and machines*. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1976.
- [5] GÉCSEG, F., AND STEINBY, M. *Tree Automata*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.
- [6] KLEENE, S. Representation of events in nerve nets and finite automata. *Princeton University Press* (1956), 3–41.
- [7] MATTHIESSEN, G. *Theorie der Heterogenen Algebren*. Mathematische Forschungspapiere, Universität Bremen Teil, 1976.
- [8] MCNAUGHTON, R., AND YAMADA, H. Regular expressions and state graphs for automata. *IRE Transactions on Electronic Computers EC-9*, 1 (1960), 39–47.
- [9] MYHILL, J. Finite automata and the representation of events. *American Mathematical Society*, 9 (1958), 541–544.
- [10] NERODE, A. Linear automata transformation. *WADD TR-57-624* (1957), 112–125.
- [11] SŁOMIŃSKI, J. On the greatest congruence relation contained in an equivalence relation and its applications to the theory of machines. *Colloq. Maths*, 29 (1974), 31–43.
- [12] THATCHER, J. W. Transformations and translations from the point of view generalized finite automata theory. *Proceedings of the ACM Symposium on Theory Computing* (1969), 129–142.