Trabajo de Fin de Máster

Máster Universitario en Investigación Matemática

Límites y Colímites Categoriales

José Nicolás Reynoso Erazo

Tutores:
Enric Cosme Llópez
Julio Benítez López

Curso
2022/23

Resumen

En el estudio de las matemáticas, la búsqueda de la generalización y la abstracción de distintos conceptos encapsulados en diferentes teorías siempre ha sido primordial para estudiarlas en la medida en que lo permite el teorema de incompletitud de Gödel. La teoría de las categorías es una teoría matemática que ofrece un nivel de abstracción bastante alto que permite estudiar y relacionar diferentes ramas englobándolas en el término "categorías". En el presente trabajo de carácter expositivo se pretende mostrar, partiendo de los fundamentos de los estudios de las categorías, un concepto que, aunque presente en diversas teorías matemáticas, no se presenta de forma explícita, el límite y su dual, el colímite.

In the study of mathematics, the search for the generalisation and abstraction of different concepts encapsulated in different theories has always been paramount to study them to the extent that Gödel's incompleteness theorem allows. The theory of categories is a mathematical theory that offers a fairly high level of abstraction which allows to study and relate different branches encapsulating them in the term "categories". In the present work of expository nature it is sought to show, starting from the foundations of the studies of the categories, a concept that, although present in diverse mathematical theories, is not presented in an explicit way, the limit and its dual, the colimit.

En l'estudi de les matemàtiques, la cerca de la generalització i l'abstracció de diferents conceptes encapsulats en diferents teories sempre ha sigut primordial per a estudiar-les en la mesura en que ho permet el teorema d'incompletesa de Gödel. La teoria de categories és una teoria matemàtica que ofereix un nivell d'abstracció bastant alt que permet estudiar i relacionar diferents branques englobant-les en el terme "categories". En el present treball de caràcter expositiu es pretén mostrar, partint dels fonaments dels estudis de les categories, un concepte que, encara que present en diverses teories matemàtiques, no es presenta de manera explícita, el límit i el seu dual, el colímit.

Tabla de Contenidos

Capítulo 1

Introducción

La palabra categoría parte del griego *katêgoria*, que significa atributo. Desde el punto de vista filosófico el primero que empezó a hablar de este concepto fue *Aristóteles*. Para este filósofo la importancia de las categorías radicaba en el enfoque materialista de este término como reflejo de las propiedades generales de ciertos fenómenos (Rovira [2012]). Posterior a esto, diversos filósofos también hicieron sus apuntes y críticas respecto a las ideas aristotélicas, destacan de ellas las que da el filósofo *Immannuel Kant* trasladando todo el concepto materialista y basado en el empirismo de *Aristóteles* a algo donde lo primordial es lo "puro", que visto desde un punto de vista matemático, podríamos relacionar con lo abstracto, y he ahí justamente lo importante de empezar este trabajo partiendo de los conceptos filosóficos sobre el término "categoría", ya que estas ideas de que las matemáticas involucran categorías y relaciones entre cada una de estas teorías se asumía por parte de estudiosos de diversas áreas. Sin embargo, nunca fue algo que se formalizara hasta mediados del siglo pasado: fue en el contexto de los trabajos que relacionan topología y álgebra del matemático polaco *Samuel Eilenberg* cuando, en la década de los 40 del siglo pasado se publicó el texto *Theory of Natural Equivalences* en colaboración con *Saunders MacLane*, donde se definieron por primera vez de manera formal los conceptos elementales de la teoría de categorías.

Puede darse una definición informal para introducir a las nociones de categorías, donde se define la teoría de categorías como la teoría de las matemáticas que es capaz de estudiar, abstraer y relacionar otras teorías matemáticas. En el presente trabajo se verán unos cuantos ejemplos de algunas categorías.

La primera sección es en efecto una introducción a algunos de los conceptos más importantes de la teoría de categorías, partiendo de las categorías a las relaciones entre éstas (funtores), y las relaciones entre estas relaciones (transformaciones naturales), además de dar algunos casos que ayuden a la comprensión del comportamiento de estos conceptos. Con estas definiciones y conceptos básicos es de interés para el que estudie esta teoría matemática el pensar en extender las ideas mencionadas sobre cómo las categorías funcionan como una abstracción a gran nivel de las demás teorías matemáticas, a pensar si en sí mismo las categorías funcionarían como una categoría, esto cuando se vea el concepto de 2-categorías. En esta primera sección también se llegará a establecer cómo funcionan las equivalencias entre categorías, además de que lleva a pensar en la existencia de las categorías de categorías, hecho interesante porque en este punto puede establecerse la pregunta natural sobre hasta qué punto pueden llegar las categorías.

En la segunda sección, con todo lo trabajado en la primera sección, se introducirán los elementos necesarios para plantear el Lema de Yoneda (como los objetos representables, en particular el objeto inicial y terminal) y con esto los conceptos de propiedad universal y categoría de elementos para finalmente culminar en una relación entre los funtores representables y las categorías de elementos, lo cual abre paso finalmente a la tercera sección.

En esta sección se estudiarán los límites y colímites en categorías y se darán diversos ejemplos de ellos, como, el producto, el igualador, el pullback y sus respectivos duales; el coproducto, el coigualador y el pushout. Posterior a esto, se buscará un caso concreto en el cual se evidencian estos límites y colímites, en el caso del presente trabajo se estudiará la categoría de los conjuntos (Set) con el fin de no solo ver algunos límites en esta, sino de llegar a comprobar cómo esta categoría es completa y cocompleta y cómo pueden caracterizarse los límites y los colímites que puede haber en la categoría.

En el presente trabajo las categorías se nombrarán como letras en mayúscula sin serifa (C, D, E, etc.), con el mismo formato se nombrarán algunas categorías en particular (Set, Mon, Group, etc), los funtores por su parte se denotarán como letras mayúsculas en cursiva (F, G, H, I, etc.), de la misma manera que los funtores se manejarán los objetos (X, Y, A, B, etc.), mientras que los morfismos serán denotados por letras minúsculas en cursiva (f, g, h, etc.) los elementos que componen a las categorías y los funtores se nombrarán con la primera letra en mayúscula y con estilo románico (Obj, Hom, etc), finalmente las transformaciones naturales se denotarán con letras griegas (α, β, γ, etc.).

El trabajo se ha alimentado principalmente del libro "Category in Context" (Riehl [2014]), del cual se extraen los conocimientos primordiales para la comprensión de los conceptos, además de servir de apoyo para diversas demostraciones. También el libro "Matemáticas conceptuales" (Lawvere and Schanuel [2002]) fue de principal apoyo a la hora de comprender ciertos conceptos y es de hecho bastante recomendable para cualquier lector que esté en la disposición de iniciar a explorar esta teoría matemática.

Capítulo 2

Elementos de las Categorías

2.1 Categorías

En el presente capítulo se explorarán las definiciones básicas que comprenden la teoría de categorías. Vale hacer la aclaración de que una de las principales dificultades que pueden llegar a encontrarse a la hora de comprender esta teoría matemática es la notación y la nomenclatura de sus conceptos. Esto viene dado porque la teoría de categorías, al igual que otras ramas matemáticas que son abstracciones de otras teorías (el análisis puede verse como la abstracción del cálculo), es a su vez una abstracción de todas estas teorías, encapsulándolas en lo que se denominaría como *Categorías* en el sentido kantiano.

Definición 2.0.1. *Una* ***categoría*** C *se define como:*

- *Una clase*[*] *de objetos* $\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$.
- *Una clase de morfismos para cada* X, Y *en* $\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$. *Se denotará indistintamente* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X,Y)$, $f \in \mathsf{C}(X,Y)$, *o* $f : X \longrightarrow Y$ *y se dirá que* X *es el dominio de* f *e* Y *el codominio de* f.

De manera que cumpla con:

- *Para cada objeto* X, *existe un morfismo que se denominará* ***morfismo identidad****, y se denotará por* $\mathrm{id}^X : X \longrightarrow X$.
- *Para cada trío de objetos* X, Y, Z *y morfismos* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $g : Y \longrightarrow Z$, *puede definirse el morfismo* ***composición*** *que tiene dominio en* X *y codominio en* Z *el cual se denotará por:*
$$g \circ f : X \longrightarrow Z.$$

Además de lo anterior, la composición tiene que satisfacer lo siguiente:

- *Para cualquier morfismo* $f : X \longrightarrow Y$ *se tiene que:*
$$\mathrm{id}^Y \circ f = f, \qquad f \circ \mathrm{id}^X = f.$$

[*]Es necesario aclarar que, aunque algunos conceptos que se usan para definir a las categorías parezcan conocidos, no debe permitirse la confusión con posibles símiles que tengan en otras teorías matemáticas; por ejemplo, no debe confundirse el término "clase" con "conjunto". El confundir estos dos términos puede conllevar a un error, a su vez que el término "morfismo" puede ser símil de "aplicación" o "función" pero no son estrictamente lo mismo.

- *Para cualquier trío de morfismos $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ y $h : Z \longrightarrow T$, se cumple la **asociatividad** esto es:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ejemplo 2.0.1. *En la categoría* Set *los objetos son los conjuntos y los morfismos serían aplicaciones entre conjuntos. La composición de morfismos se corresponde con la composición de aplicaciones.*

Ejemplo 2.0.2. *En la categoría* Group *los objetos son los grupos con sus respectivas estructuras algebraicas y los morfismos serían homomorfismos de grupos.*

Ejemplo 2.0.3. *En la categoría* Top *los objetos son espacios topológicos y los morfismos serían aplicaciones continuas entre espacios topológicos.*

Ejemplo 2.0.4. *Para un anillo unitario R, la categoría* Mat_R *tiene como objetos los números naturales, y dados dos objetos m, n los morfismos*

$$\mathsf{A} : m \longrightarrow n,$$

serían las matrices de tamaño $n \times m$ cuyos elementos están en R.

Ahora, para cada trío de objetos $n, m, p \in \mathbb{N}$ y dos morfismos $\mathsf{A} : m \longrightarrow n$ y $\mathsf{B} : n \longrightarrow p$, su composición $\mathsf{B} \circ \mathsf{A} : m \longrightarrow p$, viene dada por la matriz producto BA, donde lo resultante de esta composición es la matriz de tamaño $p \times m$. Se tiene también que, para cada objeto $n \in \mathbb{N}$ se tiene el morfismo identidad $\mathsf{I}n : n \longrightarrow n$ que se interpreta como la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Ejemplo 2.0.5. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, se define la categoría de **espacios vectoriales*** $\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}$, *cuyos objetos son, valga la redundancia, $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y dados dos objetos V, W los morfismos*

$$f : V \longrightarrow W$$

son aplicaciones lineales. Se tiene que para cada objeto V en $\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}$ *existe el morfismo identidad $\mathrm{id}^V : V \longrightarrow V$ el cual tambien cumple con ser una aplicación lineal. Por otra parte para cada trío U, V, W de espacios vectoriales, se cumple que para los morfismos $f : U \longrightarrow V$ y $g : V \longrightarrow W$, su composición $g \circ f : U \longrightarrow W$ es también una aplicación lineal.*

Ejemplo 2.0.6 (Categoría Discreta)**.** *Sea C una categoría cualquiera. Puede definirse la **categoría discreta** C_{d}, donde: los objetos X, Y, $Z \ldots$ son todos los objetos en C. Mientras que los morfismos en C_{d} son únicamente los morfismos identidad $\mathrm{id}^X : X \longrightarrow X$, $\mathrm{id}^Y : Y \longrightarrow Y$, $\mathrm{id}^Z : Z \longrightarrow Z$ y así para cada objeto en C. Es claro que se cumplen los axiomas para morfismos.*

Ejemplo 2.0.7. *Sea C una categoría y C un objeto en C. Se define la **categoría coma** o **categoría bajo** C, denotada C/C, es una categoría donde los objetos en esta categoría son morfismos con dominio en C, esto es $f : C \longrightarrow X$ en C. Un morfismo del objeto $f : C \longrightarrow X$ al objeto $g : C \longrightarrow Y$ en C/C, es un morfismo $h : X \longrightarrow Y$ en C de forma que el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
X \arrow[rr, "h"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

esto es que $h \circ f = g$. Ahora se probará que, en efecto, la categoría C/C cumple con las condiciones para ser una categoría.

Morfismo identidad: *el morfismo identidad* $\mathrm{Hom}_{C/\mathsf{C}}(f, f)$ *va del objeto $f : C \longrightarrow X$ a sí mismo, como en el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
X \arrow[rr, "\mathrm{id}^X"'] & & X
\end{tikzcd}$$

de esta manera se tiene que $\mathrm{id}^f_{C/\mathsf{C}} = \mathrm{id}^X_{\mathsf{C}}$.

Composición de morfismos: *Sean $f : C \longrightarrow X$, $g : C \longrightarrow Y$ y $h : C \longrightarrow Z$ objetos en C/C y sean $a : f \longrightarrow g, b : g \longrightarrow h$ morfismos en C/C así a y b son dos morfismos en C de la forma $a : X \longrightarrow Y$ $b : Y \longrightarrow Z$, tales que:*

$$a \circ f = g, \qquad b \circ g = h.$$

Se define entonces la composición de a con b como la composición en C, así $b \circ a : X \longrightarrow Z$, veamos entones que $b \circ a : f \longrightarrow h$ es un morfismo en C/C. Para ésto se puede ver lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(b \circ a) \circ f =& b \circ (a \circ f) && \text{(Asociatividad)}\\
=& b \circ g\\
=& h.
\end{aligned}$$

Entonces, la composición $b \circ a : f \longrightarrow h$ es un morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
X \arrow[rr, "a \circ b"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Se comprobarán ahora los axiomas que cumple la composición en esta categoría.

Morfismo de identidad: *Sean $f : C \longrightarrow X$ y $g : C \longrightarrow Y$ dos objetos en C/C y sea $h : f \longrightarrow g$ un morfismo en C/C esto es: $h : X \longrightarrow Y$ un morfismo en C tal que $h \circ f = g$. Puede verse entonces que:*

$$\mathrm{id}^g_{C/\mathsf{C}} \circ h = h, \qquad h \circ \mathrm{id}^f_{C/\mathsf{C}} = h.$$

Asociatividad de composiciones: *Esta viene de manera directa por la forma en que se construyó la composición y la asociatividad en la categoría C.*

Ejemplo 2.0.8. *Existe la versión contraria de la categoría que se definió anteriormente, se define de la siguiente manera. Sea C una categoría y C un objeto en C. Se define la* ***categoría coma opuesta*** *o* ***categoría sobre*** *C, denotada C/C, donde los objetos en esta categoría son morfismos con codominio en C, esto es $f : X \longrightarrow C$ en C. Un morfismo* *del objeto $f : X \longrightarrow C$ al objeto $g : Y \longrightarrow C$ en C/C, es un morfismo $h : X \longrightarrow Y$ en C de forma que el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Z \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

La demostración de que en efecto C/C es una categoría es análoga a la que se hizo en el anterior ejemplo.

Definición 2.0.2. *Una categoría es **pequeña** si $\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$ es un conjunto y además, para cada par de objetos X, Y en $\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$, la colección de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ es un conjunto.*

Definición 2.0.3. *Una categoría C es **localmente pequeña** si para cada par de objetos X, Y en C, cada $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ es un conjunto, sin ser necesario que los objetos de la categoría conformen un conjunto.*

También es importante para trabajar en el contexto de categorías, preguntarse sobre cómo se pueden comparar objetos, esto se haría a través de los morfismos entre ellos. Por lo general, en las teorías matemáticas puede afirmarse que dos elementos son iguales si existe un isomorfismo entre ellos, concepto el cual, puede extenderse a las categorías.

Definición 2.0.4. *Un **isomorfismo** en una categoría C es un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ para el cual existe un morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}^X$ y $f \circ g = \mathrm{id}^Y$. Se dice entonces que X y Y son **isomorfos** y se denota de la siguiente manera $X \cong Y$.*

En el Ejemplo 2.0.7, se mencionó cómo la demostración de que C/C es en efecto una categoría, era análoga a la demostración de que C/C lo era. Esto se tiene básicamente porque los objetos de ambas categorías pueden verse como morfismos en la categoría C y en su opuesto. El siguiente concepto formaliza esta idea con la introducción de categoría opuesta donde se "invierten" los morfismos en esta. Esta categoría será crucial a la hora de hacer demostraciones sobre categorías que sean opuestas entre sí, ya que, como se menciona en Riehl [2014] "el dual de cualquier axioma para una categoría será también un axioma".

Definición 2.0.5. *Sea C una categoría, la **categoría opuesta** C^{op} tiene los mismos objetos que la categoría original y donde, un morfismo $f^{\mathrm{op}} : X \longrightarrow Y$ en C^{op} es un morfismo $f : Y \longrightarrow X$ en C, esto es que, el dominio y el codominio invierten su sentido. Además, se mantienen los axiomas que definen la identidad y la composición de morfismos como sigue:*

Morfismo identidad: *Para cada objeto X en C, el morfismo identidad en C^{op} es $\mathrm{id}^X_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} = \mathrm{id}^X_{\mathsf{C}}$ donde se tiene que*

$$\mathrm{id}^X_{\mathsf{C}} : X \longrightarrow X$$

Composición de morfismos: *Sean X, Y y Z objetos en la categoría C y los morfismos $f^{\mathrm{op}} : X \longrightarrow Y$ y $g^{\mathrm{op}} : Y \longrightarrow Z$ en C^{op}. La composición de estos morfismos es evidente en tanto se tenga en cuenta la composición de los morfismos $f : Y \longrightarrow X$ y $g : Z \longrightarrow Y$ en la categoría C, entonces se tiene la composición*

$$f \circ g : Z \longrightarrow X, \tag{2.1}$$

en la categoría C*; ahora para la composición en* C^{op} *es necesario invertir el dominio y el codominio de 2.1,*

$$(f \circ g)^{\mathrm{op}} : X \longrightarrow Z.$$

Con esto se muestra que la composición de morfismos existe en C^{op}*, además:*

$$g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} = (f \circ g)^{\mathrm{op}}.$$

2.2 Funtores entre categorías

Se vio anteriormente cómo las categorías son colecciones tanto de objetos como de morfismos, los cuales son "relaciones" entre estos objetos; ahora se estudiará cómo las categorías en sí pueden comportarse como objetos y cómo existe un "nivel superior" para los morfismos, los cuales se denominarán **funtores**.

Definición 2.0.6 (Funtor Covariante)**.** *Dadas dos categorías* C *y* D*, un* ***funtor covariante*** *consiste en una asignación que envía objetos de* C *en objetos de* D *y morfismos* $f : X \longrightarrow Y$ *en* C *en morfismos* $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ *en* D*.*

Además, es requerido que se cumplan las siguientes propiedades.

- *Para cualquier* $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ *en* C*, se tiene que* $F(f) \circ F(g) = F(g \circ f)$*.*
- *Para cada objeto* X *en* C*, se tiene que* $F\left(\mathrm{id}^{X}\right) = \mathrm{id}^{F(X)}$*.*

Puede visualizarse la estructura de un funtor, así como la preservación de la identidad y la de la composición en los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd} F : \mathsf{C} \arrow[r] & \mathsf{D} \\ X \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ Y & F(Y) \arrow[from=2-1, to=3-2, phantom, "\longmapsto"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F : \mathsf{C} \arrow[r] & \mathsf{D} \\ X \arrow[d, "\mathrm{id}^{X}"'] & F(X) \arrow[d, "\mathrm{id}^{F}(X)"] \\ X & F(X) \arrow[from=2-1, to=3-2, phantom, "\longmapsto"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F : \mathsf{C} \arrow[r] & \mathsf{D} \\ X \arrow[d, "g \circ f"'] & F(X) \arrow[d, "F(g \circ f)"] \\ Z & F(Z) \arrow[from=2-1, to=3-2, phantom, "\longmapsto"] \end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Funtor covariante.

Ahora se introducirá el concepto opuesto del funtor covariante, que sería el funtor contravariante. Éste establece una relación entre una categoría y la categoría opuesta tal como en la Definición 2.0.6.

Definición 2.0.7 (Funtor Contravariante)**.** *Un **funtor contravariante** entre dos categorías,* C *y* D *es un funtor covariante de la forma* $F : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{D}$*.*

$$\begin{tikzcd}
F : \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{D} \\
X \arrow[dd, "f"'] & & F(X) \\
& {} \arrow[r, mapsto] & {} \\
Y & & F(Y) \arrow[uu, "F(f)"']
\end{tikzcd}$$

Figura 2.2: Funtor contravariante

Nota 2.0.1. *Para simplificar la presentación, escribiremos funtor para referirnos a funtor covariante.*

Ejemplo 2.0.9. *Uno de los tipos de funtores más intuitivos de comprender son los que existen entre categorías como* Group *o* Top *y la categoría* Set*, llamados **funtores de olvido**, ya que al relacionar estas categorías hace que se "pierda información". Por ejemplo, el funtor* $U : \mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$ *envía grupos a sus conjuntos subyacentes, perdiendo la información de su estructura algebraica. Mientras que los homomorfismos los considera simplemente como aplicaciones entre conjuntos.*

Definición 2.0.8 (Funtor de composición)**.** *Sean* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *y* $G : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$ *dos funtores covariantes. Se considera la asignación* $G \circ F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{E}$ *definida como se ve en la siguiente figura,*

$$\begin{tikzcd}
G \circ F : \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{E} \\
X \arrow[dd, "f"'] & & G(F(X)) \arrow[dd, "G(F(f))"] \\
& {} \arrow[r, mapsto] & {} \\
Y & & G(F(Y))
\end{tikzcd}$$

Figura 2.3: Funtor composición.

Esta asignación envia un objeto X *en la categoría* C *en el objeto* $G(F(X))$ *en* E *y un morfismo* $f : X \longrightarrow Y$ *en el morfismo* $G(F(f)) : G(F(X)) \longrightarrow G(F(Y))$ *en* E*. En la siguiente proposición se verá como esta asignación es en efecto un funtor, el funtor composición de* G *con* F*.*

Proposición 2.0.1. *Sean* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *y* $G : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$ *dos funtores covariantes, entonces* $G \circ F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{E}$ *es un funtor covariante.*

Demostración. Para ver que en efecto la composición de funtores es funtor, debe mostrarse que la composición preserva el morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad. Sea X un objeto en C. Consideramos el morfismo identidad $\mathrm{id}^X : X \longrightarrow X$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
G \circ F \left(\mathrm{id}^X\right) &= G\left(F\left(\mathrm{id}^X\right)\right) && \text{(Composición)} \\
&= G\left(\mathrm{id}^{F(X)}\right) && \text{(F es funtor)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{id}^{G(F(X))} && (G \text{ es funtor}) \\
&= \mathrm{id}^{G\circ F(X)} && (\text{Composición})
\end{aligned}
$$

Preserva la composición. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos morfismos en C, se tiene entonces que al aplicar el funtor sobre la composición se da:

$$
\begin{aligned}
G \circ F\,(g \circ f) &= G\,(F\,(g \circ f)) && (\text{Composición}) \\
&= G\,(F(g) \circ F(f)) && (F \text{ es funtor}) \\
&= G(F(g)) \circ G(F(f)) && (G \text{ es funtor}) \\
&= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f). && (\text{Composición})
\end{aligned}
$$

Además de lo anteriormente mencionado, se tiene que la composición de funtores es asociativa. □

Ejemplo 2.0.10 (Funtor Identidad)**.** *Sea* C *una categoría. Se considera la asignación* $\mathrm{id}^{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}$ *definido como se ve en la Figura 2.4,*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}^{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{C} \\
X \arrow[d, "f"'] & & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[rr, phantom, ""] & \longmapsto & Y
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.4: Funtor identidad.

esta asignación envia un objeto X *en* C *en el mismo objeto* X *y un morfismo* $f : X \longrightarrow Y$ *en el mismo morfismo* $f : X \longrightarrow Y$*.*

En la siguiente proposición se verá como esta asignación es en efecto un funtor.

Proposición 2.0.2. *Sea* C *una categoría, entonces* $\mathrm{id}^{\mathsf{C}} : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}$ *es un funtor.*

Demostración. Debe mostrarse que para una categoría C, el funtor identidad sobre C cumple con preservar el morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad: Sea X un objeto en C y sea $\mathrm{id}^X : X \longrightarrow X$ el morfismo identidad a X en C, es claro ver que $\mathrm{id}^{\mathsf{C}}\left(\mathrm{id}^X\right) = \mathrm{id}^X = \mathrm{id}^{\mathsf{C}(X)}$.

Preserva la composición: Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ dos morfismos en C, se tiene entonces que,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id}^{\mathsf{C}}(g \circ f) &= g \circ f && (\text{Funtor Identidad}) \\
&= \mathrm{id}^{\mathsf{C}}(g) \circ \mathrm{id}^{\mathsf{C}}(f).
\end{aligned}
$$

Además de lo anteriormente mencionado se tiene que el funtor identidad es la identidad respecto a la composición de funtores. □

Ejemplo 2.0.11 (Funtor Constante)**.** *Sea* D *una categoría cualquiera y* X *un objeto de la categoría* C*. Se define el* ***funtor constante*** $K^X : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ *como la asignación que envía cualquier objeto en* D *a* X *y cualquier morfismo a* id^X *como se ve en la Figura 2.5:*

$$
\begin{tikzcd}
K^X : \mathsf{D} \arrow[rr] & & \mathsf{C} \\
A \arrow[d, "f"'] & & X \arrow[d, "\mathrm{id}^X"] \\
B \arrow[rr, phantom, "\longmapsto" above=2em] & & X
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.5: Funtor constante.

En la siguiente proposición se verá como esta asignación es en efecto un funtor.

Proposición 2.0.3. *Sean* D *y* C *dos categorías y* X *un objeto en* C*, entonces la asignación* $K^X : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ *es un funtor.*

Demostración. Debe mostrarse que para las categorías D y C $K^X : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ cumple con preservar el morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad: Para cualquier A objeto en la categoría C, el morfismo identidad $\mathrm{id}^A : A \longrightarrow A$ en D se tiene que:

$$
\begin{aligned}
K^X\left(\mathrm{id}^A\right) =& \mathrm{id}^X && \text{(Definición } K^X\text{)}\\
=& \mathrm{id}^{K^X(A)}. && \text{(Definición } K^X\text{)}
\end{aligned}
$$

Preserva la composición: Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos morfismos en D, ademas, el morfismo $g \circ f : A \longrightarrow C$ es morfismo composición en D. Se tiene entonces para el funtor que:

$$
\begin{aligned}
K^X(g \circ f) =& \mathrm{id}^X && \text{(Por definición de } K^X\text{)}\\
=& \mathrm{id}^X \circ \mathrm{id}^X && \text{(Por propiedad de la identidad)}\\
=& K^X(g) \circ K^X(f). && \text{(Por definición de } K^X\text{)}
\end{aligned}
$$

Con esto se comprueba entonces que, en efecto, K^X es un funtor. □

Vale la pena hacer un paréntesis con el fin de introducir dos conceptos que serán utilizados en la definición de los funtores de representación, además que nos darán el punto de partida para evidenciar cómo la Definición 2.0.10 da pie a la introducción del concepto de **isomorfismo**.

Definición 2.0.9 (Post-composición y pre-composición)**.** *Sean* X *y* Y *dos objetos cualesquiera en la categoría* C*, y sea* $f : X \longrightarrow Y$ *un morfismo también en* C*, entonces:*

- *Para un objeto fijo* C *en* C *y un morfismo* $h : C \longrightarrow X$ *en* C*, se define la* ***post-composición*** *como*

$$
\begin{array}{rccc}
f_* : & \mathsf{C}(C, X) & \longrightarrow & \mathsf{C}(C, Y) \\
 & h & \longmapsto & f \circ h
\end{array}
$$

- *Para un objeto fijo* C *en* C *y un morfismo* $h : Y \longrightarrow C$ *en* C*, se define la* ***pre-composición*** *como*

$$
\begin{array}{rccc}
f^* : & \mathsf{C}(Y, C) & \longrightarrow & \mathsf{C}(X, C) \\
 & h & \longmapsto & h \circ f
\end{array}
$$

Nota 2.0.2. *Sean* C *una categoría localmente pequeña,* C*,* X *e* Y *tres objetos en* C *y sean* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $h : C \longrightarrow X$ *dos morfismos tambien en* C*. Observemos que, la post-composición* $f_* : \mathsf{C}(C,X) \longrightarrow \mathsf{C}(C,Y)$ *que es la aplicación definida por* $f_*(g) = g \circ g$*, puede también considerarse como un morfismo entre dos conjuntos de morfismos en la categoría* C*. De esto se tiene que* f_* *es un morfismo en la categoría* Set*.*
La misma logíca puede aplicarse para la pre-composición f^**.*

Proposición 2.0.4. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *un morfismo, se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. f *es un* ***isomorfismo****.*
2. *Para todo objeto* C *en* C *la post-composición con* f *define una* ***biyección****.*
3. *Para todo objeto* C *en* C *la pre-composición con* f *define una* ***biyección****.*

Demostración. Solo se verá a continuación la equivalencia entre 1 y 2 ya que la otra es análoga. Suponemos que f es isomorfismo. De esta manera existe un morfismo $g : Y \longrightarrow X$ en C tal que $g \circ f = \mathrm{id}^X$ y $f \circ g = \mathrm{id}^Y$. Ahora se tiene que mostrar que f_* define una biyección.

La post-composición es inyectiva: Dados p_1, p_2 dos morfismos en $\mathsf{C}(C,X)$ tal que se cumpla $f_*(p_1) = f_*(p_2)$ de esta manera se tiene que $f \circ p_1 = f \circ p_2$, ahora, si se compone con el morfismo g se tiene que

$$\begin{aligned} p_1 =& \mathrm{id}^X \circ p_1 \\ =& g \circ f \circ p_1 \\ =& g \circ f \circ p_2 \\ =& \mathrm{id}^X \circ p_2 \\ =& p_2. \end{aligned}$$

La post-composición es sobreyectiva: Dados p un morfismo en $\mathsf{C}(C,Y)$ y sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ dos morfismos en C. Se considera el morfismo composición $g \circ p$. Se tiene ademas que $f_*(g \circ p) = f \circ g \circ p$ por la definición de post-composición. Ahora por la forma en que se definió el morfismo g se tiene que $f_*(g \circ p) = p$. En conclusión f_* es sobreyectivo.

Si la post-composición $f_* : \mathsf{C}(C,X) \longrightarrow \mathsf{C}(C,Y)$ define una biyección, en particular lo será en el caso de que el objeto C sea igual a Y. De esta manera se tiene

$$f_* : \mathsf{C}(Y,X) \longrightarrow \mathsf{C}(Y,Y),$$

es una biyección. Ahora bien, con esto se sabe que existe el morfismo id^Y en $\mathsf{C}(Y,Y)$, esto implica que existe un morfismo $g : Y \longrightarrow X$ en $\mathsf{C}(Y,X)$ de forma que

$$\begin{aligned} f_*(g) =& f \circ g \\ =& \mathrm{id}^Y. \end{aligned}$$

Falta ver que $g \circ f = \mathrm{id}^X$. Se tomará el objeto C en C de forma que sea igual a X, se tiene que

$$f_* : \mathsf{C}(X,X) \longrightarrow \mathsf{C}(X,Y),$$

es una biyección. Además se tiene que $f_*(g \circ f) = f$, por otro lado

$$\begin{aligned} f_*(\mathrm{id}^X) &= f \circ \mathrm{id}^X \\ &= f. \end{aligned}$$

Como f_* es inyectiva se cumple que $f \circ g \circ f = f \circ \mathrm{id}^X$, se tiene que $g \circ f = \mathrm{id}^X$. Con esto se demuestra que f define un isomorfismo. □

Ya que se introdujo el concepto de funtor covariante y contravariante, además de una serie de ejemplos de funtores relevantes y aprovechando la proposición anterior, que introduce el concepto de isomorfismos en un categoría, vale la pena preguntarse si los funtores conservan estos isomorfismos.

Proposición 2.0.5. *Los funtores preservan isomorfismos.*

Demostración. Sean C y D dos categorías cualesquiera y $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ un funtor, además, para dos objetos X y Y en C sea $f : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo y $g : Y \longrightarrow X$ su respectivo inverso en C. Aplicamos el funtor F

$$\begin{aligned} F(g) \circ F(f) =& F(g \circ f) && \text{(Por ser } F \text{ funtor)} \\ =& F\left(\mathrm{id}^X\right) && \text{(Por ser isomorfismo)} \\ =& \mathrm{id}^{F(X)}. && \text{(Por ser } F \text{ funtor)} \end{aligned}$$

Así pues, $F(g) : F(Y) \longrightarrow F(X)$ tiene como inversa a $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ por izquierda. De manera análoga puede verse que $F(f) \circ F(g) = \mathrm{id}^{F(Y)}$, esto es, que $F(g)$ tiene inversa por derecha. Con esto se concluye que $F(f)$ es isomorfismo también, esto es que el funtor F preserva isomorfismos. □

Uno de los funtores mas importante para todo lo que continua de este estudio es sin duda el que será introducido a continuación, debido a que el **funtor de representación** es necesario para definir los funtores representables (veáse la Definición 3.0.2) y con esto se introduce un importante resultado del Capítulo 3, el **Lema de Yoneda**.

Definición 2.0.10. *Para una categoría localmente pequeña C y para un objeto cualquiera C en C, definimos los siguientes **funtores de representación**, de la siguiente manera:*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}(C,-) : \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\ X \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & \mathsf{C}(C,X) \arrow[d, "f_*"] \\ Y & & \mathsf{C}(C,Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{C}(-,C) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\ X \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & \mathsf{C}(X,C) \\ Y & & \mathsf{C}(Y,C) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

Figura 2.6: Funtores de representación.

Proposición 2.0.6. *Para una categoría localmente pequeña C y un objeto C de C se tiene que las asignaciones $\mathsf{C}(C,-)$ y $\mathsf{C}(-,C)$ son funtores covariante y contravariente, respectivamente, de C en Set.*

Demostración. En primera instancia hay que notar que la asignación envía un objeto X en la categoría C a $\mathsf{C}(C,X)$ en la categoría Set, mientras que, el morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en C es enviado en el morfismo post-composición $f_* : \mathsf{C}(C,X) \longrightarrow \mathsf{C}(C,Y)$ en Set. Ahora comprobemos, que esta asignación es en efecto un funtor:

Preserva la identidad: Para un objeto fijo C y para cualquier objeto X ambos en C el morfismo identidad $\mathrm{id}^X : X \longrightarrow X$. Por una parte, se tiene que

$$\mathsf{C}(C,-)\left(\mathrm{id}^X\right) = \mathrm{id}_*^X.$$

Sea $h : C \longrightarrow X$ un morfismo en C, entonces

$$\mathrm{id}_*^X(h) = \mathrm{id}^X \circ h = h = \mathrm{id}^{\mathsf{C}(C,X)}(h).$$

Con lo que concluímos que $\mathsf{C}(C,-)\left(\mathrm{id}^X\right) = \mathrm{id}^{\mathsf{C}(C,X)}$.

Preserva la composición: Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow$ dos morfismos en C componibles, entonces se tiene que

$$\mathsf{C}(C,-)(g \circ f) = (g \circ f)_*.$$

Sea $h : C \longrightarrow X$ un morfismo en C, entonces

$$(g \circ f)_*(h) = g \circ f \circ h = g_*(f_*(h)) = (g_* \circ f_*)(h).$$

Con lo que concluímos que $\mathsf{C}(C,-)\,(g \circ f) = \mathsf{C}(C,-)(g) \circ \mathsf{C}(C,-)(f)$.

Con esto se tiene finalmente que la asignación $\mathsf{C}(C,-)$ es en efecto un funtor.

La demostración de que $\mathsf{C}(-,C)$ es funtor se hace de manera análoga. □

Definición 2.0.11. *Para cualquier par de categorías C y D la categoría producto de estas, denotada por $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$, tiene como objetos pares ordenados (X, A), donde X es un objeto en C y A un objeto en D y con morfismos también parejas ordenadas $(f, g) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ donde $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en C y $g : A \longrightarrow B$ es un morfismo en D. Además, la composición y el morfismo identidad vienen dadas componente a componente.*

Proposición 2.0.7. *Dadas dos categorías C y D la categoría producto dada por $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$ define una categoría.*

Demostración. Por la definición dada de categoría producto se pueden comprobar de manera directa la existencia tanto la composición de morfismos como la identidad para los objetos, así que solo se comprobará que se cumple la asociatividad y que el morfismo identidad funciona como neutro.

Asociatividad de morfismos: Dados tres morfismos $(f_0, g_0) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, $(f_1, g_1) : (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ y $(f_2, g_2) : (Z, C) \longrightarrow (W, D)$ en $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$, veamos que la composición de estos tres morfismos es asociativa:

$$\begin{aligned}
(f_2, g_2) \circ [(f_1, g_1) \circ (f_0, g_0)] =&(f_2, g_2) \circ (f_1 \circ f_0, g_1 \circ g_0) \\
=&(f_2 \circ f_1 \circ f_0, g_2 \circ g_1 \circ g_0) \\
=&((f_2 \circ f_1) \circ f_0, (g_2 \circ g_1) \circ g_0) && \text{(Por asociatividad)} \\
=&(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) \circ (f_0, g_0) \\
=&[(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)] \circ (f_0, g_0).
\end{aligned}$$

Con esto se cumple entonces la asociatividad para los morfismos de la categoría $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$

Composición con el morfimo identidad: Dado un morfismo cualquiera $(f, g) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ en $\mathsf{C} \times \mathsf{D}$ y los morfismos identidad $\mathrm{id}^{(X,A)}$ y $\mathrm{id}^{(Y,B)}$. Veamos que $(f, g) \circ \mathrm{id}^{(X,A)} = (f, g)$

$$\begin{aligned}
(f, g) \circ \mathrm{id}^{(X,A)} &= (f, g) \circ (\mathrm{id}^X, \mathrm{id}^A) \\
&= (f \circ \mathrm{id}^X, g \circ \mathrm{id}^A) && \text{(Por composición)} \\
&= (f, g). && \text{(Por identidad)}
\end{aligned}$$

La otra ecuación, $\mathrm{id}^{(Y,B)} \circ (f, g) = (f, g)$, se obtiene de manera análoga. Con esto se demuestra entonces la proposición. □

Con la categoría definida anteriormente podemos construir un funtor que establezca una relación directa entre el producto de dos categorías y la categoría de los conjuntos.

Definición 2.0.12. *Sea C una categoría localmente pequeña. El funtor de **representación bilátero** viene definido por la siguiente figura,*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(-,-) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C} \arrow[r] & \mathsf{Set} \\
(X,Y) \arrow[d, "{(f,h)}"'] \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathsf{C}(X,Y) \arrow[d, "{(f^*,h_*)}"] \\
(Z,W) & \mathsf{C}(Z,W)
\end{tikzcd}$$

Figura 2.7: Funtor bilátero I.

donde un objeto (X,Y) en la categoría producto $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ es enviado al conjunto de morfismos entre X y Y esto es $\mathsf{C}(X,Y)$, mientras tanto se toma el morfismo $g : X \longrightarrow Y$ el cual se pre-compone con f y se post-compone con h tal que: $h \circ g \circ f : Z \longrightarrow W$, como se ve en la siguiente figura.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[d, "h"] \\
Z \arrow[u, "f"] \arrow[r, "{(f^*,h_*)(g) = h \circ g \circ f}"'] & W
\end{tikzcd}$$

Figura 2.8: Funtor bilátero II.

Proposición 2.0.8. *Sea C una categoría localmente pequeña, entonces la asignación $\mathsf{C}(-,-)$ de $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ en Set es un funtor.*

Demostración. Dado que, C es una categoría localmente pequeña, dados dos objetos en la categoría, se tiene que la colección de morfismos entre estos es un conjunto (esto por definición).

Solo queda por verificar si en efecto la representación bilateral cumple con los axiomas de preservarción del morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad: Sea $(X,Y) \in \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ y sean $\left(\mathrm{id}^X\right)^{\mathrm{op}} : X \longrightarrow X$ e $\mathrm{id}^Y : Y \longrightarrow Y$ los morfismos identidad en C^{op} y C respectivamente. Entonces,

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}^Y"] \arrow[rr, phantom, "\longmapsto"] & & \mathsf{C}(X,Y) \arrow[d, "{\mathsf{C}\left(\mathrm{id}^X, \mathrm{id}^Y\right)}"] \\
X \times Y \arrow[u, shift left, "\left(\mathrm{id}^X\right)^{\mathrm{op}}"] & & \mathsf{C}(X,Y)
\end{tikzcd}$$

Es evidente que $\left(\mathrm{id}^X\right)^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}^X$, lo que conduce finalmente a que,

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}\left(\left(\mathrm{id}^X\right)^{\mathrm{op}}, \mathrm{id}^Y\right)(g) =& \mathrm{id}^Y \circ g \circ \left(\mathrm{id}^X\right)^{\mathrm{op}} && \text{(por definción de representación bilateral)}\\
=& \mathrm{id}^Y \circ g \circ \mathrm{id}^X && \text{(porque } \left(\mathrm{id}^X\right)^{\mathrm{op}} = \mathrm{id}^X\text{)}\\
=& g. && \text{(propiedad de morfismo identidad)}
\end{aligned}$$

Preserva la composición: Sean $(X, Y), (Z, W), (V, U)$ objetos en $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{C}$ y sean los morfismos $(g^{\mathrm{op}}, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{C}}((Z, X), (Y, W))$ y $(i^{\mathrm{op}}, h) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{C}}((Z, W), (V, U))$. Ahora

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}\left[(g^{\mathrm{op}}, f) \circ (i^{\mathrm{op}}, h)\right](k) =& \mathsf{C}\left(g^{\mathrm{op}} \circ i^{\mathrm{op}}, h \circ f\right)(k)\\
=& h \circ f \circ k \circ g^{\mathrm{op}} \circ i^{\mathrm{op}}\\
=& h \circ (f \circ k \circ g^{\mathrm{op}}) \circ i^{\mathrm{op}}\\
=& h \circ \left[\mathsf{C}\left(g^{\mathrm{op}}, f\right)(k)\right] \circ i^{\mathrm{op}}\\
=& \mathsf{C}\left(i^{\mathrm{op}}, h\right) \circ \mathsf{C}\left(g^{\mathrm{op}}, f\right)(k).
\end{aligned}$$

De igual manera se obtiene la igualdad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}\left(g^{\mathrm{op}}, f\right) \circ \mathsf{C}\left(i^{\mathrm{op}}, h\right)(k) =& \mathsf{C}\left(g^{\mathrm{op}}, f\right)\left(h \circ k \circ i^{\mathrm{op}}\right)\\
=& f \circ \left(h \circ k \circ i^{\mathrm{op}}\right) \circ g^{\mathrm{op}}\\
=& (f \circ h) \circ k \circ \left(i^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}}\right)\\
=& \mathsf{C}[\left(i^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}}\right), (f \circ h)](k)\\
=& \mathsf{C}[(i^{\mathrm{op}}, f) \circ (g^{\mathrm{op}}, h)](k).
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene que se preserva la composición. Finalmente se concluye que la asignación $\mathsf{C}(-,-)$ es un funtor. □

2.3 Transformaciones naturales

Hasta ahora el presente trabajo se ha concentrado en cómo establecer relaciones entre los objetos dentro de una categoría por medio de *morfismos*, así como en establecer relación también entre dos categorías por medio de lo que podría verse como una generalización del morfismo, el funtor, como se vio en la sección anterior. Ahora se verá que entre estas relaciones hay una relación de "nivel superior", la **transformación natural**. Es de interés aún mayor estudiar cómo se comportan estas "relaciones de relaciones" lo cual se verá más a profundidad en el momento de tratar el lema de Yoneda.

Definición 2.0.13. *Sean C, D dos categorías y sean $F, G : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ funtores entre ellos, una **transformación natural*** de F en G, denotada $\alpha\colon F \Longrightarrow G$, es una colección indexada $\alpha = (\alpha^X)_{X\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})}$, donde los $\alpha^X\colon F(X) \longrightarrow G(X)$ son morfismos en D, tales que, para cualquier morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en C se satisface la conmutatividad en el siguiente diagrama:*

*Aunque las transformaciones naturales al igual que los morfismos y los funtores puedan verse como una aplicación, en afan de establecer una diferencia clara entre estas últimas y las transformaciones naturales se hace uso de la notación con flecha doble.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{D} & & \\
X \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[rr, "\alpha^X"] \arrow[d, "F(f)"'] & \circlearrowleft & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
Y & F(Y) \arrow[rr, "\alpha^Y"'] & & G(Y)
\end{tikzcd}$$

esto es que $\alpha^Y \circ F(f) = G(f) \circ \alpha^X$.

Observación 2.0.1. *Sean* C *y* D *dos categorías y sean* $F, G\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *dos funtores. Sea* $\alpha\colon F \Longrightarrow G$ *una transformación natural de* F *en* G*, con* $\alpha = \left(\alpha^X\right)_{X\in \mathsf{Obj}(\mathsf{C})}$. *Diremos que* α *es un* ***isomorfismo natural*** *si para cada objeto* X *en* C, $\alpha^X : F(X) \longrightarrow G(X)$ *es un isomorfismo en* D.

Si $\alpha\colon F \Longrightarrow G$ *es isomorfismo natural, escribiremos:* $\alpha : F \cong G$.

En el ejemplo 2.0.5 se introdujo la categoría de $\mathbb{K}-$espacios vectoriales, es relevante el estudio también para la teoría de álgebra lineal, el cómo se comportan los espacios duales; sin embargo, la construcción y estudio del dual de un espacio vectorial no es tan directo, debido a que se tiene que tener especial cuidado con la elección de una base para dichos espacios; sin embargo, esto no ocurre a la hora de estudiar estos comportamientos para el doble dual, esta transformación es tomada como natural o canónica y el siguiente ejemplo mostrará como llegar a construir esa transformación natural.

Ejemplo 2.0.12. *Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ es una transformación lineal}\}.$$

tiene estructura de $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con la suma de aplicaciones y la aplicación nula como neutro. Además, si* $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ *y* $\dim_{\mathbb{K}}(W) = m$*, se tiene que,* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ *es un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = nm$.

Dado un $\mathbb{K}-$*espacio vectorial* V *su espacio dual, denotado por* V^**, es*

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}).$$

Por lo que hemos comentado anteriormente y teniendo en cuenta que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$*, se tiene que* $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$*, por tanto* $V \cong V^*$.

Para establecer la biyección entre V *y* V^* *se considera una base en* V*, por ejemplo* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y se considera a su vez su base dual, para construir esta base* B^* *se tiene en cuenta la siguiente aplicación:*

$$\begin{aligned} e_i\colon \ \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ e_j &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Puede extenderse e_i *a una aplicación lineal, denotada por* e_i^* *dada por*

$$\begin{aligned} e_i^*\colon \ V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v &\longmapsto \lambda_i \end{aligned}$$

donde $v = \Sigma_{j=1}^{n}\lambda_j e_j$ es la expresión del vector v en la base $\mathcal{B}$. Así e_i^* es la aplicación lineal que devuelve la componente $i-$ésima de v escrito en $\mathcal{B}$. Con esto se tiene la base dual $\mathcal{B}^*$ construida a partir de las transformaciones lineales definidas anteriormente

$$\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}.$$

Ahora, si se toma la categoría $\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}$, de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y aplicaciones lineales, existe un funtor contravariante que va de la categoría $\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}$ a sí misma, también llamado ***endofuntor****, como se ve a continuación*

$$\begin{tikzcd}
(\cdot)^* : \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}} \arrow[rr] & & \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}} \\
V \arrow[d, "f"'] & & V^* \\
W \arrow[u, phantom, ""] \arrow[rr, phantom, "\longmapsto"] & & W^* \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

Se comprobará entonces que lo anterior define un funtor. Notamos que si $g \in W^*$ entonces es una aplicación lineal $g : W \longrightarrow \mathbb{K}$. Además, una aplicación $f : V \longrightarrow W$ es enviada a la aplicación lineal $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ que es la siguiente pre-composición, $f^*(g) = g \circ f$, donde

$$g \circ f : V \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Ahora bien, puede verse el funtor descrito de la anterior manera como un funtor de representación contravariante visto en la Definición 2.0.10.

Ahora, extendiendo lo que se hizo anteriormente puede construirse el doble dual como un funtor covariante con las siguientes caracteristicas:

$$\begin{tikzcd}
(\cdot)^{**} : \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}} \arrow[rr] & & \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}} \\
V \arrow[d, "f"'] & & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\
W \arrow[rr, phantom, "\longmapsto"] & & W^{**}
\end{tikzcd}$$

donde se da que $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K})$ y además que si $h \in V^{**}$ es una aplicación lineal $h : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$, se cumple lo sigiuente; para cualquier aplicación lineal $f^* : V^* \longrightarrow W^*$,

$$\begin{array}{rccc} f^{**}: & V^{**} & \longrightarrow & W^{**} \\ & h & \longmapsto & h \circ f^* \end{array}$$

Ahora con esto se tienen dos endofuntores en la categoría $\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}$, el doble dual y el funtor identidad. Con todo esto se puede establecer la siguiente transformación natural ev*, la transformación natural de* ***evaluación****, de la siguiente manera*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{id}^{\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}}"] \arrow[r, bend right=50, "(\cdot)^{**}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{ev}"] & \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}},
\end{tikzcd}$$

donde la transformación ev *es la colección indexada* $\mathrm{ev} = \left(\mathrm{ev}^V\right)_{V \in \mathrm{Obj}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}})}$. *Para cada* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* V*, la aplicación* ev^V *viene dada por*

$$\begin{array}{rccccc}
\mathrm{ev}^V\colon & V & \longrightarrow & V^{**} & & \\
 & v & \longmapsto & \mathrm{ev}^V\colon \; V^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
 & & & h & \longmapsto & h(v)
\end{array}$$

Se comprueba fácilmente que, para cada $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* V *la aplicación* ev^V *es un isomorfismo de* $\mathbb{K}$*-espacio vectoriales. Además se tiene que, para dos* $\mathbb{K}$*-espacio vectoriales* V *y* W *y toda aplicación lineal* $f\colon V \longrightarrow W$ *se tiene que la siguiente figura commuta.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}} & \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}} & \\
V \arrow[d, "f"'] & V \arrow[r, "\mathrm{ev}^V"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\
W & W \arrow[r, "\mathrm{ev}^W"'] & W^{**}
\end{tikzcd}$$

Con esto se muestra finalmente que la transformación ev^V *es un isomorfismo natural.*

En el siguiente ejemplo las transformaciones naturales entre los funtores de representación co- y contravariantes vistos en la Definición 3.0.2, pueden construirse a partir de las funciones entre conjuntos de morfismos. Estas transformaciones naturales serán útiles posteriormente a la hora de estudiar los **embebimientos de Yoneda**, que se verán en el siguiente capítulo.

Ejemplo 2.0.13. *Sea* C *una categoría localmente pequeña con morfismos* $f : W \longrightarrow X$ *y* $h : Y \longrightarrow Z$*. La post-composición por* h *y la pre-composición por* f *definen aplicaciones entre conjuntos de morfismos.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(X,Y) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathsf{C}(X,Z) \arrow[d, "f^*"] \\
\mathsf{C}(W,Y) \arrow[r, "h_*"'] & \mathsf{C}(W,Z)
\end{tikzcd}$$

Para un elemento de $\mathsf{C}(X,Y)$*, esto es, un morfismo* $g : X \longrightarrow Y$*, por lo visto en la Definición 2.0.12 se tiene que,*

$$f^* \circ h_*(g) = h \circ g \circ f : W \longrightarrow Z.$$

Ahora, puede considerarse las aplicaciones f^*, de forma que esta es la imagen correspondiente a aplicar el funtor de representación contravariante al morfismo f, es decir $f^* = \mathsf{C}(f, Y)$ y $f^* = \mathsf{C}(f, Z)$. Entre estos dos funtores es posible establecer una transformación natural $\alpha : \mathsf{C}(-, Y) \Longrightarrow \mathsf{C}(-, Z)$ de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} & & \mathsf{Set} & \\ X \arrow[d, "f"'] & \mathsf{C}(X,Y) \arrow[rr, "\alpha^X"] \arrow[d, "f^*"'] & & \mathsf{C}(X,Z) \arrow[d, "f^*"] \\ W & \mathsf{C}(W,Y) \arrow[rr, "\alpha^W"'] & & \mathsf{C}(W,Z) \end{tikzcd}$$

Figura 2.9: Transformación natural entre funtores de representación contravariante.

Por otro lado, considerando las funciones h_* como la imagen correspondiente a aplicar el funtor de representación covariante al morfismo h, es decir, $h_* = \mathsf{C}(X, h)$ y $h^* = \mathsf{C}(W, h)$, entre estos dos funtores es posible establecer una transformación natural $\beta : \mathsf{C}(X, -) \Longrightarrow \mathsf{C}(W, -)$ con la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} & & \mathsf{Set} & \\ Y \arrow[d, "h"'] & \mathsf{C}(X,Y) \arrow[rr, "\beta^Y"] \arrow[d, "h_*"'] & & \mathsf{C}(W,Y) \arrow[d, "h_*"] \\ Z & \mathsf{C}(X,Z) \arrow[rr, "\beta^Z"'] & & \mathsf{C}(W,Z) \end{tikzcd}$$

Figura 2.10: Transformación natural entre funtores de representación covariante.

Corolario 2.0.1. *Teniendo en cuenta la notación del ejemplo previo, se cunple que, para un par de morfismos paralelos diferentes $f : X \longrightarrow Y$ y $g : X \longrightarrow Y$, se cumple que las transformaciones naturarales $\alpha_f, \alpha_g : \mathsf{C}(-, X) \Longrightarrow \mathsf{C}(-, Y)$ son diferentes, de igual manera para las transformaciones $\beta_f, \beta_g : \mathsf{C}(Y, -) \Longrightarrow \mathsf{C}(X, -)$.*

Demostración. Suponiendo que $\alpha_f = \alpha_g$, podria considerarse el elemento id^X en $\mathsf{C}(-, X)$, de forma que

$$\mathsf{C}(X, X) \longrightarrow \mathsf{C}(X, Y).$$

Tomando en cuenta que $\alpha_f = \alpha_g$ se tiene que

$$f = \alpha_f \left(\mathrm{id}^X\right) = \alpha_g \left(\mathrm{id}^X\right) = g,$$

pero por hipótesis f y g son diferentes, por lo tanto las transformaciones naturales deben ser diferentes. La demostración para $\beta_f \neq \beta_g$ es análoga a la anterior. □

En diversas teorías matemáticas, uno de los conceptos más importantes es el que establece relaciones entre los objetos que lo comprenden, por lo general, se busca conocer las condiciones para que sean isomorfos. Sin embargo, esto requeriría de condiciones muy estrictas en algunas ocasiones, por lo tanto, es preferible buscar las condiciones para una relación menos estricta. Esto lleva a introducir, en la siguiente definición, el concepto de *equivalencia de categorías* haciendo uso de la Definición 2.0.13.

Definición 2.0.14. *Sean* C *y* D *dos categorías cualesquiera. Una* ***equivalencia*** *entre estas dos categorías, es un par de funtores* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *y* $G : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$*, para los que existen dos isomorfismos naturales* $\eta : \mathrm{id}^{\mathsf{C}} \cong G \circ F$ *y* $\varepsilon : F \circ G \cong \mathrm{id}^{\mathsf{D}}$*, tal como se ve en el siguiente diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}^{\mathsf{C}}"] \arrow[rr, bend right, "G \circ F"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \eta"] & & \mathsf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{D} \arrow[rr, bend left, "F \circ G"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}^{\mathsf{D}}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \epsilon"] & & \mathsf{D}
\end{tikzcd}
$$

Con estas condiciones las categorías C *y* D *son equivalentes y se denota como* $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$.

Con lo anterior ya es posible determinar cuándo dos categorías son equivalentes, sin embargo, a futuro será preferible establecer esta equivalencia a través del funtor que relaciona las categorías. Es aquí donde se establecerá una caracterización de la equivalencia en base a unas características que puede cumplir un funtor.

Definición 2.0.15. *Un funtor* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *es:*

- ***Pleno*** *si para cada* X, Y *objetos en* C *la asignación* $\mathsf{C}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{D}(F(X), F(Y))$ *es sobreyectiva. Esto es si,* $g : F(X) \longrightarrow F(Y)$ *es un morfismo en* D*, entonces existe un morfismo* $h : X \longrightarrow Y$ *en* C *tal que* $F(h) = g$.

- ***Fiel*** *si para cada* X*,* Y *objetos en* C *la aplicación* $\mathsf{C}(X, Y) \longrightarrow \mathsf{D}(F(X), F(Y))$ *es inyectiva. Esto es si,* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $f' : X \longrightarrow Y$ *son morfismos en* C *tales que* $F(f) = F(f')$ *entonces* $f = f'$.

- ***Esencialmente sobreyectivo sobre objetos****, si, para todo objeto* D *en* D*, existe un objeto* X *en* C *tal que* $F(X)$ *es isomorfo a* D *en* D*. Esto es que, para cada objeto* D *en* D *existe un objeto* X *en* C*, existen ademas morfismos* $f : D \longrightarrow F(X)$ $g : F(X) \longrightarrow D$ *con* $f \circ g = \mathrm{id}^{F(X)}$ *y* $g \circ f = \mathrm{id}^{D}$.

A continuación se presenta una proposición la cual especifica cómo los funtores con las propiedades descritas en la Definición 2.0.15 son capaces de crear isomorfismos.

Proposición 2.0.9. *Sean* C *y* D *dos categorías cualesquiera, y sea* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ *un funtor pleno y fiel entonces el funtor* F*, refleja y crea isomorfismos. Esto último quiere decir que:*

1. *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es un morfismo en* C *tal que* $F(f)$ *es isomorfismo en la categoría* D*, entonces* f *es un isomorfismo.*

2. *Si* X *y* Y *objetos en* C *tal que* $F(X) \cong F(Y)$ *en* D*, entonces* $X \cong Y$ *en* C.

Demostración. Sea $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ un funtor fiel y pleno. Veamos entonces que se cumplen las dos propiedades.

1. Sea f un morfismo en C de manera que $F(f)$ es un isomorfismo en D. Entonces, dado que F es pleno y fiel, se tiene que para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$, existe un único morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $F(g) = (F(f))^{-1} : F(Y) \longrightarrow F(X)$. Se tiene entonces que,

$$\begin{aligned} F(g \circ f) =& F(g) \circ F(f) && \text{(Por ser } F \text{ funtor)} \\ =& (F(f))^{-1} \circ F(f) && \text{(Definición de } F(g)\text{)} \\ =& \mathrm{id}^{F(X)} \\ =& F\left(\mathrm{id}^X\right). && \text{(Por ser } F \text{ funtor)} \end{aligned}$$

   Dado que F es fiel, se tiene que $g \circ f = \mathrm{id}^X$. De manera análoga se puede llegar a que $F(f \circ g) = F\left(\mathrm{id}^Y\right)$, donde nuevamente, como F es fiel se tiene que $f \circ g = \mathrm{id}^Y$. Con esto se tiene finalmente que f es un isomorfismo en C.

2. Como consecuencia de lo anteriormente demostrado y teniendo en cuenta que F es pleno se tiene que, si existe un isomorfismo $g : F(X) \longrightarrow F(Y)$ en D, existe un morfismo en C, $f : X \longrightarrow Y$, tal que $F(f) = g$. Además de que es isomorfismo en C entonces se tiene que $X \cong Y$.

Con esto finalmente se demuestra la proposición. $\square$

En la Definición 2.0.14 se nos introduce el concepto de equivalencia de categorías de forma tal que es necesaria la construcción de un funtor en una dirección y otro en la dirección contraria, además de dos isomorfimos naturales entre las dos posibles composiciones y las respectivas identidades. Algo más útil que esto se da en el siguiente teorema, aplicando la Definición 2.0.15.

Teorema 2.1 (Caracterización de la equivalencia de categorías)**.** *Un funtor que define una equivalencia de categorías es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo sobre objetos. Asumiendo el Axioma de Elección, un funtor pleno, fiel y esencialmente sobreyectivo sobre objetos define una equivalencia de categorías.*

Demostración. Supongamos que $\mathsf{C} \simeq \mathsf{D}$. Entonces existen funtores, $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$, $G : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$, también existen isomorfismos naturales, η y ϵ, como en la Definición 2.0.14. Con esto en cuenta se probará que:

F es fiel: Sean X, Y objetos y f, f' morfismos en C tales que $F(f) = F(f')$

$$\begin{tikzcd} F : \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{D} \\ X \arrow[d, shift right=2, "f"'] \arrow[d, shift left=2, "f'"] & \arrow[r, mapsto] & F(X) \arrow[d, shift right=2, "F(f)"'] \arrow[d, shift left=2, "F(f')"] \arrow[d, phantom, "="] \\ Y & & F(Y) \end{tikzcd}$$

A su vez, el funtor $G : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ cumple lo siguiente,

$$\begin{tikzcd}
G : \mathsf{D} \arrow[rr] & & \mathsf{C} \\
F(X) \arrow[d, shift right, "F(f)"'] \arrow[d, shift left, "F(f')"] \arrow[d, phantom, "="] \arrow[rr, mapsto, shorten=2em] & & G(F(X)) \arrow[d, shift right, "G(F(f))"'] \arrow[d, shift left, "G(F(f'))"] \arrow[d, phantom, "="] \\
F(Y) & & G(F(Y))
\end{tikzcd}$$

De esta manera se tiene que $G(F(f)) = G(F(f'))$. Ahora sea $\eta : G \circ F \Longrightarrow \mathrm{id}^{\mathsf{C}}$ el isomorfismo natural que hemos considerado al inicio de la demostración. Se sabe que existe por ser C y D categorías equivalentes. Dado que η es un isomorfismo natural, se tiene que η^X es un isomorfismo en C, esto es que, existe un isomorfismo inverso $\left(\eta^X\right)^{-1}$ tal que $\left(\eta^X\right)^{-1} \circ \eta^X = \mathrm{id}^X$.

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "G(F(f))"'] \arrow[d, shift left, "G(F(f'))"] \arrow[d, phantom, "="] & X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "f'"] \\
G(F(Y)) \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

con esto se tiene finalmente que:

$$f = \eta^Y \circ G(F(f)) \circ \left(\eta^X\right)^{-1}. \tag{1}$$

Por otra parte se tiene que

$$G(F(f')) = \left(\eta^Y\right)^{-1} \circ f' \circ \eta^X. \tag{2}$$

Dado que $G(F(f)) = G(F(f'))$ se sustituye una expresión en la otra, entonces

$$\begin{aligned}
f &= \eta^Y \circ G(F(f')) \circ \left(\eta^X\right)^{-1} && \text{(Por 1)} \\
&= \eta^Y \circ \left(\eta^Y\right)^{-1} \circ f' \circ \left(\eta^X\right) \circ \left(\eta^X\right)^{-1} && \text{(Por 2)} \\
&= f'.
\end{aligned}$$

con esto se tiene finalmente que F es fiel.

De manera análoga se puede demostrar que G es fiel.

F es pleno: Sean X e Y objetos en C y $g\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ un morfismo en D. Queremos ver que existe un morfismo $h\colon X \longrightarrow Y$ de forma que $F(h) = g$. Aplicamos G sobre g para obtener $G(g)\colon G(F(X)) \longrightarrow G(F(Y))$. Como $\eta\colon \mathrm{id}^{\mathsf{C}} \Longrightarrow G \circ F$ es un isomorfismo natural, se tiene la existencia del morfismo $h\colon X \longrightarrow Y$ definido por $h = (\eta^Y)^{-1} \circ G(g) \circ \eta^X$, como se ve a continuación

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(F(X)) \arrow[d, "G(g)"] \\
Y \arrow[r, "\eta^Y"'] & G(F(Y))
\end{tikzcd}$$

Notamos que $\eta^Y \circ h \circ (\eta^X)^{-1} = G(g)$. De igual forma $\eta^Y \circ h \circ (\eta^X)^{-1} = G(F(h)))$, pues η es transformación natural. Por tanto, $G(g) = G(F(h)))$. Como G es fiel, se tiene que $g = F(h)$, como queríamos.

Esencialmente sobreyectivo sobre objetos: Basta con evidenciar que, para todo objeto A en la categoría D, la transformación $\epsilon^A : F(G(A)) \longrightarrow A$ es isomorfismo. De lo que se tiene que F es esencialmente sobreyectivo sobre objetos por definición.

Ahora para la otra parte de la demostración, sea un funtor $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ fiel, pleno y sobreyectivo sobre objetos. Debería poder darse un funtor

$$
\begin{tikzcd}
G : \mathsf{D} \arrow[r] & \mathsf{C} \\
A \arrow[d, "g"'] & G(A) \arrow[d] \\
B & G(B)
\end{tikzcd}
$$

Sea A un objeto en D. Como F es esencialmente sobreyectivo sobre objetos existe X, un objeto en C para el que $F(X)$ es isomorfo a A. Por el Axioma de Elección es posible elegir un objeto de la colección $\{X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}) | F(X) \text{ es isomorfo a } A\}$. A este objeto se le llamará $G(A)$.

Por construcción $F(G(A))$ es isomorfo a A, con esto se puede tener el siguiente isomorfismo $\epsilon^A : F(G(A)) \longrightarrow A$, para todo objeto A en la categoría D.

Ahora, sea $g : A \longrightarrow B$ un morfismo en D. Dado que $F(G(A))$ es isomorfo a A y $F(G(B))$ lo es a B, puede construirse el morfismo entre $F(G(A))$ y $F(G(B))$ utilizando el hecho de que ϵ^A y ϵ^B son isomorfismos, entonces $\left(\epsilon^B\right)^{-1} \circ g \circ \epsilon^A : F(G(A)) \longrightarrow F(G(B))$.

$$
\begin{tikzcd}
F(G(A)) \arrow[r, "\epsilon^A"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[d, "g"] \\
F(G(B)) \arrow[r, "\epsilon^B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Dado que F es pleno, existe un morfismo $G(g) : G(A) \longrightarrow G(B)$ para el cual $F(G(g)) = \left(\epsilon^B\right)^{-1} \circ g \circ \epsilon^A$, con esto podríamos tener la siguiente situación

$$
\begin{tikzcd}
G : \mathsf{D} \arrow[rr] & & \mathsf{C} \\
A \arrow[dd, "g"'] & & G(A) \arrow[dd, "G(g)"] \\
& {} \arrow[r, mapsto] & {} \\
B & & G(B)
\end{tikzcd}
$$

Ahora falta comprobar que G define un funtor y dar los isomorfismos naturales. Veamos que G preserva el morfismo identidad y la composición de morfismos

Preserva la identidad: Sean $F\left(G\left(\mathrm{id}^A\right)\right) : F(G(A)) \longrightarrow F(G(A))$ y $F\left(\mathrm{id}^{G(A)}\right) : F(G(A)) \longrightarrow F(G(A))$ en D. Puede aplicarse el isomorfismo ϵ^A, haciendo que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
F(G(A)) \arrow[r, "\epsilon^A"] \arrow[d, shift right, "F\left(G\left(\mathrm{id}^A\right)\right)"'] \arrow[d, shift left, "F\left(\mathrm{id}^{G(A)}\right)"] & A \arrow[d, "\mathrm{id}^A"] \\
F(G(A)) \arrow[r, "\epsilon^A"'] & A
\end{tikzcd}$$

Con esto se llegaría repitiendo los procedimientos anteriores a que

$$F\left(G\left(\mathrm{id}^A\right)\right) = F\left(\mathrm{id}^{G(A)}\right),$$

y dado que el funtor F es fiel, se tiene que $G\left(\mathrm{id}^A\right) = \mathrm{id}^{G(A)}$.

Preserva la composición: Sean $g : A \longrightarrow B$ y $h : B \longrightarrow C$ dos morfismos en la categoría D. Puede aplicarse el isomorfismo ϵ^A, y los isomorfismos $F(G(h) \circ G(g)) : F(G(A)) \longrightarrow F(G(C))$ y $F(G(h \circ g)) : F(G(A)) \longrightarrow F(G(C))$ en D, que hacen que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
F(G(A)) \arrow[r, "\epsilon^A"] \arrow[d, shift right, "F(G(h) \circ G(g))"'] \arrow[d, shift left, "F(G(h \circ g))"] & A \arrow[d, "h \circ g"] \\
F(G(C)) \arrow[r, "\epsilon^C"'] & C
\end{tikzcd}$$

Con lo cual se puede llegar a que

$$F\left(G(h) \circ G(g)\right) = F\left(G\left(h \circ g\right)\right),$$

donde al ser F fiel se cumple que, $G(h) \circ G(g) = G\left(h \circ g\right)$.

Definición del isomorfismo natural: Como F es pleno y fiel, la transformación natural $\eta : \mathrm{id}^{\mathsf{C}} \Longrightarrow G \circ F$ se define a partir de los componentes $\eta^X : X \longrightarrow G(F(X))$. Gracias a la Proposición 2.0.5, puede darse el isomorfismo

$$F \circ \eta^X : F(X) \longrightarrow F(G(F(X))).$$

Dado que $F \circ \eta^X$ es un isomorfismo, puede definirse un morfismo

$$\eta^{F(X)} : F(G(F(X))) \longrightarrow F(X)$$

de forma que $F \circ \eta^X = \left(\epsilon^{F(X)}\right)^{-1}$. Con esto puede graficarse las componentes de las transformaciones naturales como se ve a continuación.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F \circ \eta^X"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(G(F(X))) \arrow[r, "\epsilon^{F(X)}"] \arrow[d, "F(G(F(f)))"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "F \circ \eta^Y"'] & F(G(F(Y))) \arrow[r, "\epsilon^{F(Y)}"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Aquí se tiene que el cuadro de la derecha conmuta gracias que ϵ es transformación natural y dado que $\epsilon^{F(Y)}$ es un isomorfismo, se cumple que el cuadro de la izquierda también conmuta. Ahora, como el funtor F es fiel se tiene que $\eta^Y \circ f = G(F(f)) \circ \eta^X$, de esta manera se tiene que η es una transformación natural.

Finalmente se concluye que $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ define una equivalencia de categorías. □

2.4 La 2-categoría de categorías

Hasta ahora se ha estudiado lo que componen a las categorías, objetos y morfismos, posteriormente se estudió algo en un escalón un poco más arriba, el funtor, que sería una relación entre dos categorías, hasta llegar finalmente a la relaciones entre estos funtores, las llamadas transformaciones naturales. Es aquí donde es de interés introducir una categoría superior, la cual, sería una generalización aún mayor de lo que es una categoría. En la *2-categoría* las relaciones son de 2 naturalezas, una que relaciona objetos (funtores) y otra que relaciona morfismos (transformaciones naturales).

Si se interpretan las transformaciones como morfismos entre funtores, podría darse el caso en que, al igual que ocurre con los morfismos entre objetos en una categoría, en que sea posible la composición (cuando el codominio de una coincide con el dominio de otra). El siguiente lema introduce un símil a ese concepto.

Lema 2.1.1 (Composición Vertical)**.** *Sean C y D dos categorías y sean $F, G, H : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ funtores entre ellas y $\alpha : F \Longrightarrow G$ y $\beta : G \Longrightarrow H$ transformaciones naturales, tal como se ven en la siguiente figura,*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

Hay una transformación natural $\beta \circ \alpha : F \Longrightarrow H$, que llamaremos la composición vertical de β y α, o también la 1-composición de β y α.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathsf{D} \end{tikzcd}$$

Figura 2.11: La 1-composición de transformaciones naturales.

Esta composición está definida como sigue

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha &= \left((\beta \circ \alpha)^X\right)_{X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})} \\ &= \left(\beta^X \circ \alpha^X\right)_{X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})}. \end{aligned}$$

Demostración. Dado que los cuadrados que definen las transformaciones naturales α y β conmutan, se tiene de manera directa que el rectángulo grande de la siguiente figura también conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{D} & \\
X \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[r, mapsto, "\alpha^X"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(X) \arrow[r, mapsto, "\beta^X"] \arrow[d, "G(f)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
Y & F(Y) \arrow[r, "\alpha^Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\beta^Y"'] & H(Y)
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.12: La 1-composición de dos transformaciones naturales.

Esto concluye la demostración. □

Corolario 2.1.1. *Para cualquier par de categorías* C *y* D *se tiene que* $\mathrm{Hom}(\mathsf{C},\mathsf{D})$*, es decir los funtores de* C *a* D *y las transformaciones naturales correspondientes con la composición vertical, definen una categoría que se denotará por* D^{C}.

Demostración. Para ver que D^{C} define una categoría; donde los objetos son $F,\ G,\ H,\ldots,$ funtores de C en D, mientras que los morfismos son las transformaciones naturales α, β, γ; es necesario ver que la composición vertical definida en el lema anterior, cumple con el axioma de identidad y de composición. Primero introducimos el morfismo identidad para un objeto $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ en D^{C}.

Existencia de la identidad: Sea $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ un objeto en la categoría D^{C}. La transformación natural id^F será el morfismo identidad para F, tal como se ve a continuación

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{D} & \\
X \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[rr, mapsto, "\mathrm{id}^X"] \arrow[d, "F(f)"'] & \arrow[phantom, d, "\circlearrowleft"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
Y & F(Y) \arrow[rr, "\mathrm{id}^Y"'] & \, & F(Y)
\end{tikzcd}
$$

Axioma de la identidad: Sea $\alpha : F \Longrightarrow G$ una transformación natural cualquiera y sean las identidades $\mathrm{id}^F : F \Longrightarrow F$ y $\mathrm{id}^G : G \Longrightarrow G$. Se cumple que,

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\alpha^X"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(X) \arrow[r, "\mathrm{id}^{G(X)}"] \arrow[d, "G(f)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\alpha^Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\mathrm{id}^{G(Y)}"'] & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

Con esto se tiene que $\mathrm{id}^{G(X)} \circ \alpha^X = \alpha^X$ y que $\mathrm{id}^{G(Y)} \circ \alpha^Y = \alpha^Y$, con lo que se concluye que $\mathrm{id}^G \circ \alpha = \alpha$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\mathrm{id}^{F(X)}"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(X) \arrow[r, "\alpha^X"] \arrow[d, "F(f)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\mathrm{id}^{F(Y)}"'] & F(Y) \arrow[r, "\alpha^Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Con lo que se llega a que $\alpha^X \circ \mathrm{id}^{F(X)} = \alpha^X$ y que $\alpha^Y \circ \mathrm{id}^{F(Y)} = \alpha^Y$, con lo que se concluye que $\alpha \circ \mathrm{id}^F = \alpha$.

Axioma de composición: Sean $\alpha : F \Longrightarrow G$, $\beta : G \Longrightarrow H$ y $\gamma : H \Longrightarrow I$ tres morfismos en la categoría C^{D}. Como consecuencia del lema 2.1.1, se tiene que puede definirse la composición vertical entre ellos. Además se tiene que esta composición es asociativa, esto es que

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

Con esto se tiene finalmente que C^{D} es en efecto una categoría. $\square$

A diferencia de la composición vertical (Lema 2.1.1), donde la importancia para la composición radicaba en que las transformaciones fuesen componibles vistas como morfismos entre funtores, en la composición horizontal la importancia radica en que los funtores relacionados por medio de una transformación vertical, sean los que tengan la posibilidad de componerse, esto puede verse mejor a continuación.

Lema 2.1.2 (Composición horizontal)**.** *Sean C, D y E tres categorías, $F, G \colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ funtores de C en D y $H, K \colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$ funtores de D en E. Dado un par de transformaciones naturales $\alpha \colon F \Longrightarrow G$ y $\beta \colon H \Longrightarrow K$ de la siguiente manera,*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathsf{D} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathsf{E}
\end{tikzcd}$$

Figura 2.13: 0-composición.

Hay una transformación natural $\beta * \alpha : H \circ F \Longrightarrow J \circ G$, llamada composición horizontal o también 0-composición, cuya componente en X, un objeto en C, se define como el compuesto del siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H(F(X)) \arrow[r, "\beta^{F(X)}"] \arrow[d, "H(\alpha^X)"'] \arrow[dr, "(\beta * \alpha)^X"] & K(F(X)) \arrow[d, "K(\alpha^X)"] \\
H(G(X)) \arrow[r, "\beta^{G(X)}"'] & K(G(X))
\end{tikzcd}$$

Figura 2.14: Componente en la 0-composición.

Demostración. Sean las categorías C, D y E, con los funtores $F, G\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ y $H, K\colon \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{E}$ y las transformaciones naturales $\alpha\colon F \Longrightarrow G$ y $\beta\colon F \Longrightarrow G$, como se definen gráficamente a continuación

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{D} & & \mathsf{D} & & \mathsf{E} & \\
X \arrow[dd, "f"'] & F(X) \arrow[rr, mapsto, "\alpha^X"] \arrow[dd, "F(f)"'] \arrow[ddrr, phantom, "\circlearrowleft"] & & G(X) \arrow[dd, "G(f)"] & A \arrow[dd, "f"'] & H(A) \arrow[rr, mapsto, "\beta^A"] \arrow[dd, "H(f)"'] \arrow[ddrr, phantom, "\circlearrowleft"] & & J(A) \arrow[dd, "J(f)"] \\
& & & & & & & \\
Y & F(Y) \arrow[rr, "\alpha^Y"'] & & G(Y) & B & H(B) \arrow[rr, "\beta^B"'] & & J(B)
\end{tikzcd}$$

Ahora se toman los elementos $F(X)$ y $F(Y)$ en D con el fin de evaluarlas en la transformación natural β

$$\beta^{F(X)} : H(F(X)) \longrightarrow K(F(X))$$
$$\beta^{F(Y)} : H(F(Y)) \longrightarrow K(F(Y)).$$

A su vez, teniendo en cuenta la transformación natural α sobre dos objetos cualesquiera X y Y en C se aplica el funtor K que envía objetos de la categoría D a la E

$$K(\alpha^X) : K(F(X)) \longrightarrow K(G(X))$$

$$K(\alpha^Y) : K(F(Y)) \longrightarrow K(G(Y)),$$

con lo anterior podría construirse entonces el siguiente diagrama que establece una relación de composición.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{D} & & & \mathsf{E} & \\
X \arrow[dd, "f"'] & F(X) \arrow[rr, "\alpha^X"] \arrow[dd, "F(f)"'] \arrow[ddrr, phantom, "\circlearrowleft"] & & G(X) \arrow[dd, "G(f)"] & H(F(X)) \arrow[rr, "K(\alpha^X) \circ \beta^{FX}"] \arrow[dd, "H(F(f))"'] \arrow[ddrr, phantom, "\circlearrowleft"] & & K(G(X)) \arrow[dd, "K(G(f))"] \\
& & & & & & \\
Y & F(Y) \arrow[rr, "\alpha^Y"'] & & G(Y) & H(F(Y)) \arrow[rr, "K(\alpha^Y) \circ \beta^{FY}"'] & & K(G(Y))
\end{tikzcd}$$

con lo que se llega finalmente a comprobar que

$$\begin{aligned}
\beta * \alpha &= \big((\beta * \alpha)^X\big)_{X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})} \\
&= \Big(J(\alpha^X) \circ \beta^{F(X)}\Big)_{X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})}.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Con las dos formas anteriores de composición de funtores es interesante preguntarse si afecta en algo, en el caso de cumplir las condiciones adecuadas para poder componer una serie de transformaciones naturales tanto verticalmente como horizontalmente, el orden en que estas composiciones se realizan, esto se responde con el siguiente lema.

Lema 2.1.3 (Intercambios centrales)**.** *Dadas las categorías, funtores y transformaciones naturales como se ve en la siguiente gráfica,*

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathsf{D} \arrow[r, bend left=50, "I"] \arrow[r, "J" description] \arrow[r, bend right=50, "K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\delta"] & \mathsf{E}
\end{tikzcd}
$$

Se cumple que

$$(\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha) = (\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha).$$

Demostración. Para la demostración se verá en primera instancia la primera posible combinación, así que se harán primero las transformaciones verticales $\beta \circ \alpha$ y $\delta \circ \gamma$.

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\beta^X \circ \alpha^X"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\beta^Y \circ \alpha^Y"'] & H(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I(X) \arrow[r, "\delta^X \circ \gamma^X"] \arrow[d, "I(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K(X) \arrow[d, "K(f)"] \\
I(Y) \arrow[r, "\delta^Y \circ \gamma^Y"'] & K(Y)
\end{tikzcd}
$$

Con esto se puede construir la composición horizontal

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta \circ \alpha"] & \mathsf{D} \arrow[r, bend left=50, "I"] \arrow[r, bend right=50, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\delta \circ \gamma"] & \mathsf{E}
\end{tikzcd}
$$

Reemplazando las transformaciones naturales y funtores en la Figura 2.14 se tendría el siguiente diagrama conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
I(F(X)) \arrow[r, "K(\beta \circ \alpha)^X * (\delta \circ \gamma)^{F(X)}"] \arrow[d, "I(F(f))"'] & K(H(X)) \arrow[d, "K(H(f))"] \\
I(F(Y)) \arrow[r, "K(\beta \circ \alpha)^Y * (\delta \circ \gamma)^{F(Y)}"'] & K(H(Y))
\end{tikzcd}
$$

Ahora se construirá la composición contraria. Para esto se tiene la composición horizontal,

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{D} & & \mathsf{E} & \\
X \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[r, "\alpha^X"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] & I(F(X)) \arrow[r, "J(\alpha^X) * \gamma^{F(X)}"] \arrow[d, "I(F(f))"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & J(G(X)) \arrow[d, "J(G(f))"] \\
Y & F(Y) \arrow[r, "\alpha^Y"'] & G(Y) & I(F(Y)) \arrow[r, "J(\alpha^Y) * \gamma^{F(Y)}"'] & J(G(Y))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & \mathsf{D} & & \mathsf{E} & \\
X \arrow[d, "f"'] & G(X) \arrow[r, "\beta^X"] \arrow[d, "G(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] & J(G(X)) \arrow[r, "K(\beta^X) * \delta^{G(X)}"] \arrow[d, "J(G(f))"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K(H(X)) \arrow[d, "K(H(f))"] \\
Y & G(Y) \arrow[r, "\beta^Y"'] & H(Y) & J(G(Y)) \arrow[r, "K(\beta^Y) * \delta^{G(Y)}"'] & K(H(Y))
\end{tikzcd}
$$

Con lo cual es posible finalmente construir la composición vertical,

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} \arrow[rr, bend left=50, "I \circ F"{name=U}] \arrow[rr, "J \circ G"{name=M}] \arrow[rr, bend right=50, "K \circ H"'{name=D}] & & \mathsf{E}
\arrow[from=U, to=M, phantom, "\Downarrow \gamma \circ \alpha"]
\arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow \delta \circ \beta"]
\end{tikzcd}
$$

donde, considerando la composición previa, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{E} & \\
X \arrow[d, "f"'] & I(F(X)) \arrow[r, "J(\alpha^X) * \gamma^{F(X)}"] \arrow[d, "I(F(f))"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & J(G(X)) \arrow[r, "K(\beta^X) * \delta^{G(X)}"] \arrow[d, "J(G(f))"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K(H(X)) \arrow[d, "K(H(f))"] \\
Y & I(F(Y)) \arrow[r, "J(\alpha^Y) * \gamma^{F(Y)}"'] & J(G(Y)) \arrow[r, "K(\beta^Y) * \delta^{G(Y)}"'] & K(H(Y))
\end{tikzcd}
$$

Notamos que los dos cuadrados que la componen conmutan, por lo que se puede concluir por las propiedades de la 1-composición que el cuadrado de la siguiente figura conmuta

$$
\begin{tikzcd}
I(F(X)) \arrow[rrr, "\left(J\left(\alpha^X\right) * \gamma^{F(X)}\right) \circ \left(K\left(\beta^X\right) * \delta^{G(X)}\right)"] \arrow[d, "I(F(f))"'] & & & K(H(X)) \arrow[d, "K(H(f))"] \\
I(F(Y)) \arrow[rrr, "\left(J\left(\alpha^Y\right) * \gamma^{F(Y)}\right) \circ \left(K\left(\beta^Y\right) * \delta^{G(Y)}\right)"'] & & & K(H(Y))
\end{tikzcd}
$$

Esto muestra que ambas composiciones de transformaciones naturales llevan a la misma gráfica conmutativa. Con esto se llega a que las composiciones,

$$
\begin{aligned}
(\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha) &= \left(K(\beta \circ \alpha)^X * (\delta \circ \gamma)^{F(X)}\right)_{X \in \mathsf{Obj}(\mathsf{C})}, \\
(\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha) &= \left(\left(J\left(\alpha^X\right) * \gamma^{F(X)}\right) \circ \left(K\left(\beta^X\right) * \delta^{G(X)}\right)\right)_{X \in \mathsf{Obj}(\mathsf{C})},
\end{aligned}
$$

son iguales. $\square$

Capítulo 3

Funtores representables, lema de Yoneda y propiedades universales

En el presente capítulo se tomarán los conceptos definidos en el Capítulo 2, con el fin de introducir las bases necesarias para llegar a la finalidad del presente trabajo. Aquí se verán tres conceptos primordiales para la construcción de los límites y colímites: los funtores representables (Definición 3.0.2), el Lema de Yoneda (Lema 3.0.1) y la propiedad universal (Definición 3.0.3).

3.1 Funtores representables

Definición 3.0.1 (Objetos iniciales y terminales)**.** *Sea C un objeto en la categoría C, se dice que C es un objeto **inicial** si para cualquier otro objeto X de la categoría, $\mathsf{C}(C, X)$ es un singleton, esto es que, solo existe un morfismo $f : C \longrightarrow X$.*

*De manera análoga, de dice que C es un objeto **terminal** si para cualquier otro objeto X de la categoría, el conjunto $\mathsf{C}(X, C)$ es un singleton, esto es que, solo existe un morfismo $f : X \longrightarrow C$.*

Vemos a continuación ejemplos de objetos iniciales y finales en Set.

Ejemplo 3.0.1. *El conjunto vacío $\emptyset$ es un objeto inicial en Set. Sea X un conjunto en Set, así la aplicación vacía es la única aplicación de $\emptyset$ en X,*

$$\emptyset : \emptyset \longrightarrow X.$$

Ejemplo 3.0.2. *Cualquier singleton $\{*\}$ es un objeto final en Set. Sea X un conjunto en Set. Se define entonces la única aplicación f de X en $\{*\}$ como*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & X & \longrightarrow & \{*\} \\ & x & \longmapsto & * \end{array}$$

Los objetos iniciales y terminales forman la primera base para la comprensión de las propiedades universales, ya que nos dan la puerta de entrada al concepto de funtores representables. Para este fin, la siguiente proposición mostrará una caracterización de estos conceptos en términos de funtores de representación covariantes y contravariantes (Definición 2.0.10).

Proposición 3.0.1 (Caracterización de objetos iniciales y terminales)**.** *Para una categoría C y un objeto C de C se tiene que:*

1. *C es **inicial** si y solo si el funtor $\mathsf{C}(C,-) : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ es naturalmente isomorfo al funtor constante $*$ covariante*

$$\begin{tikzcd}
* : \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\[-20pt]
X \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, mapsto, phantom] & & \{*\} \arrow[d, "\mathrm{id}^{\{*\}}"] \\
Y \arrow[u, phantom, ""] \arrow[rr, phantom] & & \{*\}
\end{tikzcd}
\qquad f \longmapsto \mathrm{id}^{\{*\}}$$

   Donde el funtor $*$ envía cada objeto en C a un singleton en Set.

2. *C es **terminal** si y solo si el funtor $\mathsf{C}(-,C) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ es naturalmente isomorfo al funtor constante $*$ contravariante*

$$\begin{tikzcd}
* : \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\[-20pt]
X \arrow[d, "f"'] & & \{*\} \\
Y & & \{*\} \arrow[u, "\mathrm{id}^{\{*\}}"']
\end{tikzcd}
\qquad f \longmapsto \mathrm{id}^{\{*\}}$$

   Donde el funtor $*$ envía cada objeto en C a un singleton en Set.

La demostración de estas dos proposiciones que acabamos de enunciar se sigue directamente de las definiciones.

Proposición 3.0.2. *Dos objetos iniciales, respectivamente terminales, en una categoría C son únicos salvo isomorfismo único.*

Demostración. Sean X y Y dos objetos iniciales en la categoría C. Debido a que X es inicial existe un único morfismo $f : X \longrightarrow Y$. De igual forma, como Y es inicial existe un único morfismo $g : Y \longrightarrow X$. A su vez se cumple que

$$f \circ g = \mathrm{id}^X, \qquad\qquad g \circ f = \mathrm{id}^Y.$$

Puesto que id^X es el único homomorfismo que puede existir de X en sí mismo. Lo mismo para Y. La demostración es análoga para objetos terminales. $\square$

En la Definición 2.0.10 ya se había introducido un funtor que relaciona una categoría arbitraria con la categoría de conjuntos de sus morfismos. Ahora resulta de interés estudiar un funtor cualquiera F con codominio en la categoría Set, de tal manera que tenga un isomorfismo natural con un funtor de representación. Resulta de interés esto, ya que permite tanto como sea posible, implementar el conocimiento sobre la categoría Set en otras categorías.

Definición 3.0.2 (Funtor representable)**.** *Sea C una categoría localmente pequeña. Un funtor covariante $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$, se dice **representable** si existe un objeto C de C y un isomorfismo natural $\mathsf{C}(C,-) \cong F$. Si F es contravariante, diremos que es **representable** si existe un objeto C de C y un isomorfismo natural $F \cong \mathsf{C}(-,C)$.*

Veamos a continuación un ejemplo de funtor representable.

Ejemplo 3.0.3 (Monoide Libre)**.** *Sea X un conjunto. Denotamos por X^* el conjunto de todas las palabras de longitud n sobre X, esto es aplicaciones de algún $n \in \mathbb{N}$ en X. Por ejemplo: sea X un conjunto de tres letras,*

$$X = \{x, y, z\}.$$

Entonces la palabra xxy representa la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} xxy :3 &\longrightarrow X \\ 0 &\longrightarrow x \\ 1 &\longrightarrow x \\ 2 &\longrightarrow y \end{aligned}$$

Ahora, considerando las aplicaciones de $n \in \mathbb{N}$ en X como $\mathrm{Hom}(n, X)$. Tomamos X^* como el siguiente conjunto

$$X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}(n, X).$$

En X^* existe la palabra vacía, denotada por λ, esta es la única aplicación de $0 = \emptyset$ en X, esto es, la única palabra de longitud 0.

Sean $v, w \in X^*$ dos palabras de longitud m y n respectivamente, puede efectuarse una operación binaria entre ellas denominada concatenación, tal que vw tiene longitud $m + n$, definida como sigue

$$\begin{array}{rccl} vw\colon & m+n & \longrightarrow & X \\ & j & \longmapsto & \begin{cases} v(j) & si\ j \in n; \\ w(j-n) & si\ j \in [n, m-1]. \end{cases} \end{array}$$

Entonces $\mathbf{X}^* = (X^*, \cdot, \lambda)$ define un monoide no conmutativo, llamado monoide libre generado por X. El monoide libre $\mathbf{X}^*$ tiene la siguiente propiedad universal.

Para todo monoide $\mathbf{M} = (M, \cdot, 1)$ y toda aplicación $f\colon X \longrightarrow M$, existe un único homomorfismo de monoides $f^\sharp\colon \mathbf{X}^* \longrightarrow \mathbf{M}$ de forma que $f^\sharp \circ \mathrm{in}^X = f$, donde in^X es la inclusión canónica de X en X^*, que ve cada letra de X como una palabra de longitud 1, esto es

$$\begin{array}{rcccccc} \mathrm{in}^X\colon & X & \longrightarrow & X^* & & & \\ & x & \longmapsto & (x)\colon & 1 & \longrightarrow & X \\ & & & & 0 & \longmapsto & x. \end{array}$$

*Con todo lo anterior se verá que para la categoría Mon, de monoides y homomorfismos de monoides, podemos considerar el **funtor de olvido** U con dominio en esta categoría y codominio en Set.*

$$\begin{tikzcd} U : \mathsf{Mon} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\ \mathbf{M} \arrow[d, "f"'] & & M \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{N} \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & N \end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Funtor de Olvido sobre la categoría de monoides.

Se verá entonces que U es representable. Para esto se puede tomar como conjunto el singleton $X = 1$ con lo que su monoide libre asociado es $X^* \cong \mathbb{N}$ en Mon. Veamos cómo establecer una isomorfismo natural entre U y $\mathsf{Mon}(\mathbb{N}, -)$ esto es,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Mon} \arrow[rr, bend left, "U"] \arrow[rr, bend right, "\mathsf{Mon}(\mathbb{N},-)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \mathsf{Set} \end{tikzcd}$$

Definimos la transformación natural $\alpha = (\alpha^{\mathbf{M}})_{\mathbf{M}\in\mathsf{Mon}}$ como sigue. Sea un monoide $\mathbf{M} = (M, \cdot, 1)$ y sea $m \in M$ un elemento. Si consideramos la aplicación constante a m, esto es,

$$\begin{aligned} \kappa_m \colon\ 1 &\longrightarrow M \\ 0 &\longmapsto m \end{aligned}$$

Por la propiedad universal del monoide libre $\mathbb{N}$, existe un único homomorfismo de monoides $\kappa_m^\sharp \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{M}$ tal que $\kappa_m^\sharp \circ \mathrm{in}^1 = \kappa_m$. Notamos que

$$\begin{aligned} \kappa_m^\sharp \colon\ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbf{M} \\ n &\longmapsto m^n \end{aligned}$$

Finalmente, tomamos

$$\begin{aligned} \alpha^{\mathbf{M}} \colon\ M &\longrightarrow \mathsf{Mon}(\mathbb{N}, \mathbf{M}) \\ m &\longmapsto \kappa_m^\sharp \end{aligned}$$

Notamos que para cada monoide $\mathbf{M}$, la aplicación $\alpha^{\mathbf{M}}$ es biyectiva. Además se tiene que, para cada homomorfismo de monoides $f \colon \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Mon} & & \mathsf{Set} & \\ \mathbf{M} \arrow[d, "f"'] & M \arrow[rr, "\alpha^{\mathbf{M}}"] \arrow[d, "f"'] & & \mathsf{Mon}(\mathbb{N}, \mathbf{M}) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathbf{N} & N \arrow[rr, "\alpha^{\mathbf{N}}"'] & & \mathsf{Mon}(\mathbb{N}, \mathbf{N}) \end{tikzcd}$$

Para ello consideramos un elemento $m \in M$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha^{\mathbf{N}}(f(m)) &= \kappa_{f(m)}^\sharp \\ &= f\left(\kappa_m^\sharp\right) \\ &= f_*\left(\alpha^{\mathbf{M}}(m)\right). \end{aligned}$$

Esto demuestra que el funtor de olvido $U \colon \mathsf{Mon} \longrightarrow \mathsf{Set}$ es representable.

3.2 Lema de Yoneda

A continuación se presentará el lema de Yoneda. Es importante recordar al lector la importancía del funtor de representación definido en 2.0.10. El lema de Yoneda tiene dos versiones, al igual que los funtores de representación y los funtores representables, véase la Definición 3.0.2.

Como última anotación antes de la enunciación del lema de Yoneda, hay que mencionar que por más "inocuo" que parezca dicho lema, este tiene una implicación muy importante a la hora de estudiar límites y colímites, ya que afirma cómo un objeto matemático en cualquier categoría puede representarse como un funtor valorado en la categoría Set.

Lema 3.0.1 (Lema de Yoneda covariante)**.** *Sea* C *una categoría localmente pequeña y* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ *un funtor, entonces para todo objeto* C *de* C *existe una biyección*

$$\mathrm{Hom}\,(\mathsf{C}(C,-),F) \cong F(C).$$

que asocia a una transformación natural $\alpha : \mathsf{C}(C,-) \Longrightarrow F$ *el elemento* $\alpha^C(\mathrm{id}^C) \in F(C)$*. Esta correspondencia es natural tanto en* C *como en* F*.*

Demostración. Dado que C es localmente pequeña, consideramos la aplicación entre conjuntos $\text{よ} : \mathrm{Hom}\,(\mathsf{C}(C,-),F) \longrightarrow F(C)$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \text{よ}: & \mathrm{Hom}(\mathsf{C}(C,-),F) & \longrightarrow & F(C) \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha^C\left(\mathrm{id}^C\right). \end{array}$$

Donde la transformación natural α tiene dominio en $\mathsf{C}(C,-)$ y codominio en F.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{C}(C,-)"] \arrow[rr, bend right, "F"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \mathsf{Set} \end{tikzcd}$$

Y además, por ser transformación natural, hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} & \mathsf{Set} & \\ X \arrow[d, "f"'] & \mathsf{C}(C,X) \arrow[r, mapsto, "\alpha^X"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ Y & \mathsf{C}(C,Y) \arrow[r, "\alpha^Y"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

En primera instancia se probará la biyección de la aplicación よ. Para esto se construirá una aplicación inversa Ψ de la forma

$$\Psi : F(C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathsf{C}(C,-),F). \tag{3.1}$$

Esta aplicación asigna a un elemento X del conjunto $F(C)$ una transformación natural $\Psi(X) = \left(\Psi(X)^D\right)_{D\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})}$ donde para cada objeto D en la categoría C se tenga la componente

$$\Psi(X)^D : \mathsf{C}(C,D) \longrightarrow F(D),$$

de forma que el siguiente diagrama conmute.

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{Set} & \\
D \arrow[d, "f"'] & \mathsf{C}(C,D) \arrow[rr, mapsto, "\Psi(X)^D"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & F(D) \arrow[d, "F(f)"] \\
E & \mathsf{C}(C,E) \arrow[rr, "\Psi(X)^E"'] & & F(E)
\end{tikzcd}
$$

Se considerará la siguiente situación particular

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{Set} & \\
C \arrow[d, "f"'] & \mathsf{C}(C,C) \arrow[rr, mapsto, "\Psi(X)^C"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\
D & \mathsf{C}(C,D) \arrow[rr, "\Psi(X)^D"'] & & F(D)
\end{tikzcd}
$$

Es claro que id^C está en $\mathsf{C}(C,C)$, además, su imagen en la composición inferior izquierda viene dada por

$$\Psi(X)^D\left(f_*\left(\mathrm{id}^C\right)\right) = \Psi(X)^D(f),$$

mientras que, su imagen en la composición superior derecha es:

$$F(f)\left(\Psi(X)^C\left(\mathrm{id}^C\right)\right).$$

Para que Ψ defina una aplicación inversa para よ se tiene que definir $\Psi(X)^C\left(\mathrm{id}^C\right) = X$. Con lo que $\Psi(X)^D(f)$ se define como $F(f)(X)$. Así pues,

$$\Psi : F(C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathsf{C}(C,-),F).$$

Además se verifica que, para un morfismo genérico $f : D \longrightarrow E$ en C, el siguiente cuadrado conmuta,

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(C,D) \arrow[rr, mapsto, "\Psi(X)^D"] \arrow[d, "f_*"'] & & F(D) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathsf{C}(C,E) \arrow[rr, "\Psi(X)^E"'] & & F(E)
\end{tikzcd}
$$

En efecto, sea g en $\mathsf{C}(C,D)$, esto es un morfismo en C tal que $g : C \longrightarrow D$. Se tiene por el lado inferior izquierdo:

$$
\begin{aligned}
\Psi(X)^E(f_*(g)) &= \Psi(X)^E(f \circ g) && \text{(Por definición de } f_*) \\
&= F(f \circ g)(X) && \text{(Por definición de } \Psi(X)^E) \\
&= F(f)(F(g)(X)). && \text{(Por ser } F \text{ funtor)}
\end{aligned}
$$

Mientras que por el lado superior derecho

$$F(f)(\Psi(X)^D(g)) = F(f)(F(g)(X)). \qquad \text{(Por definición de } \Psi(X)^D\text{)}$$

Esto quiere decir que el diagrama conmuta. Esto implica que $\Psi(X)$ es, en efecto, una transformación natural de $\mathsf{C}(C,-)$ a F.

Con esto ahora se buscará probar que Ψ es la inversa para よ. Veamos que Ψ es inversa por derecha de よ. Notamos que para $\alpha : \mathsf{C}(C,-) \Longrightarrow F$ se tiene que $\Psi(\text{よ}(\alpha)) = \Psi\left(\alpha^C\left(\mathrm{id}^C\right)\right)$.

Ahora, sea D un objeto en C, hay que llegar a que $\Psi\left(\alpha^C\left(\mathrm{id}^C\right)\right)^D = \alpha^D$. Por definición se tiene

$$\begin{aligned} \Psi\left(\alpha^C\left(\mathrm{id}^C\right)\right)^D : \ \mathsf{C}(C,D) &\longrightarrow F(D) \\ f &\longmapsto F(f)\left(\alpha^C\left(\mathrm{id}^C\right)\right) \end{aligned}$$

Dado que α es una transformación natural, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} & \mathsf{Set} & \\ C \arrow[d, "f"'] & \mathsf{C}(C,C) \arrow[r, mapsto, "\alpha^C"] \arrow[d, "f_*"'] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\ D & \mathsf{C}(C,D) \arrow[r, "\alpha^D"'] & F(D) \end{tikzcd}$$

Figura 3.2: Diagrama transformación natural α.

Esto lleva a que,

$$\begin{aligned} F(f)\left(\alpha^C\left(\mathrm{id}^C\right)\right) &= \alpha^D\left(f_*\left(\mathrm{id}^D\right)\right) \\ &= \alpha^D(f). \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $\Psi(\text{よ}(\alpha)) = \alpha$, esto es que $\Psi \circ \text{よ} = \mathrm{id}^{\mathrm{Hom}(\mathsf{C}(C,-),F)}$. Es decir, que Ψ es inverso por izquierda a よ. Por otra parte, para un objeto X en $F(C)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \text{よ}(\Psi(X)) &= \left(\Psi(X)^C\right)\left(\mathrm{id}^C\right) && \text{(Por definición de よ)} \\ &= X. && \text{(Por definición de } \Psi\text{)} \end{aligned}$$

Así se tiene que $\text{よ} \circ \Psi = \mathrm{id}^{F(C)}$. Con esto se prueba finalmente que la aplicación よ define una aplicación biyectiva.

Prueba de naturalidad. Para demostrar que よ es natural, se buscará, en primer momento, mostrar que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathsf{C}(C,-),F) \arrow[r, "\text{よ}F", "\cong"'] \arrow[d, "\beta_*"'] & F(C) \arrow[d, "\beta^C"] \\ \mathrm{Hom}(\mathsf{C}(C,-),G) \arrow[r, "\cong", "\text{よ}G"'] & G(C) \end{tikzcd}$$

Figura 3.3: Aplicación lema de Yoneda para morfismos.

En efecto, para una transformación natural α se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned}
(\text{よ}^G \circ \beta_*)(\alpha) &= (\beta \circ \alpha)^C \left(\mathrm{id}^C\right) && \text{(Por definición de よ)}\\
&= \beta^C \left(\alpha^C \left(\mathrm{id}^C\right)\right) && \text{(Por composición vertical (Lema 2.1.1))}\\
&= \beta^C(\text{よ}^F(\alpha)).
\end{aligned}$$

Por otro lado, puede tomarse un objeto D en la categoría C y una transformación natural $\gamma : \mathsf{C}(C, -) \Longrightarrow F$,

$$\begin{aligned}
\beta^C \left(\text{よ}^F(\alpha)\right) =& \beta^C \left(\alpha^C \left(\mathrm{id}^C\right)\right) && \text{(Por definición de よ)}\\
=&(\beta \circ \alpha)^C \left(\mathrm{id}^C\right) && \text{(Por composición vertical (Lema ??))}\\
=& \text{よ}^F(\beta \circ \alpha),
\end{aligned}$$

con lo que se tiene finalmente que la gráfica 3.4 conmuta.

Para mostrar la naturalidad para el objeto se parte por tomar la transformación natural compuesta $\alpha \circ f^* : \mathsf{C}(D, -) \Longrightarrow \mathsf{C}(C, -) \Longrightarrow F$. Entonces para un morfismo $f : C \longrightarrow D$ en C, el elemento $F(D)$, sería la componente en D de la composición de transformaciones naturales, además $F(C)$ es la componente en C de la transformación natural F. Ahora con esto se puede construir la siguiente gráfica

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathsf{C}(C, -), F) \arrow[r, "\text{よ}\, C", "\cong"'] \arrow[d, "(f^*)^*"'] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}(\mathsf{C}(D, -), F) \arrow[r, "\cong", "\text{よ}\, D"'] & F(D)
\end{tikzcd}$$

Figura 3.4: Aplicación lema de Yoneda para objetos.

Ahora, tomando una transformación natural $\alpha : \mathsf{C}(C, -) \longrightarrow F$, la composición por el camino inferior cumple que

$$\begin{aligned}
\text{よ}^D \circ (f^*)^* (\alpha) &= \text{よ}^D (\alpha \circ f^*)\\
&= (\alpha \circ f^*)^D \left(\mathrm{id}^D\right)\\
&= \alpha^D(f). && \text{(composición)}
\end{aligned}$$

Por otro lado la composición por el camino superior cumple con

$$\begin{aligned}
F(f) \circ \text{よ}(\alpha) &= F(f) \left(\alpha^C \left(\mathrm{id}^C\right) f^*\right)\\
&= \alpha^D(f). && \text{(Por conmutatividad en 3.2)}
\end{aligned}$$

Con esto se tiene finalmente que $F(f) \circ \text{よ}(\alpha) = \text{よ}^D \circ (f^*)^* (\alpha)$ con lo que se cumple la naturalidad para objetos.

De esta manera queda demostrado el Lema de Yoneda. $\square$

Lema 3.0.2 (Lema de Yoneda contravariante)**.** *Sea C una categoría localmente pequeña y $F : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ un funtor contravariante, entonces para todo objeto C de C existe una biyección*

$$\mathrm{Hom}(\mathsf{C}(-, C), F) \cong F(C).$$

Aunque no se vaya a profundizar mucho en la siguiente proposición esta será de suma importancia a la hora de hablar de límites y colímites, además de la preservación de estos en el Capítulo 4. En primera instancia es importante recalcar cómo el dominio de la aplicación $\text{よ} : \mathrm{Hom}(\mathsf{C}(C,-),F) \longrightarrow F(C)$ del teorema anterior puede verse como el funtor $G : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}^{\mathsf{C}}$. La justificación completa de este funtor específico puede verse en Riehl [2014]. Lo verdaderamente relevante y que se probará a continuación es cómo este embebimiento de Yoneda hace que cualquier categoría **pequeña** C sea isomorfa a la subcategoría plena $\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$. Dualmente ocurre para el opuesto de estas categorías.

Proposición 3.0.3 (Embebimiento de Yoneda)**.** *Dada* C *una categoría pequeña cualquiera, los funtores*

$$
\begin{tikzcd}
G : \mathsf{C} \arrow[r] & \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \\
X \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, ""] & \mathsf{C}(-,X) \arrow[d, "f_*"] \\
Y \arrow[u, phantom, ""] & \mathsf{C}(-,Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F : \mathsf{C} \arrow[r] & \mathsf{Set}^{\mathsf{C}} \\
X \arrow[d, "f"'] & \mathsf{C}(X,-) \\
Y & \mathsf{C}(Y,-) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}
$$

$$f \longmapsto f_* \qquad\qquad f \longmapsto f^*$$

*definen **embebimientos** que cumplen con ser fieles y plenos.*

Demostración. Hay que ver en primer lugar cómo estan definidas las relaciones del embebimiento. Para dos objetos X y Y en la categoría C, este es enviado a un objeto en la categoría $\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ de la forma $\mathsf{C}(X,-)$ y para un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en C es enviado a

$$\mathsf{C}(f,-) : \mathsf{C}(Y,-) \longrightarrow \mathsf{C}(X,-),$$

dado por el morfismo $\mathsf{C}(f,Z)$ para cualquier objeto Z en la categoría definido como sigue: $\mathsf{C}(f,Z) = f^* : \mathsf{C}(Y,Z) \longrightarrow \mathsf{C}(X,Z)$.

En primera instancia se verifica que para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$, la colección $\mathsf{C}(f,-)$ es en efecto una transformación natural. Entonces sea $g : Z \longrightarrow W$ otro morfismo en C, se cumple que la siguiente gráfica conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(X,Z) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h^*"'] & \mathsf{C}(X,W) \arrow[d, "h^*"] \\
\mathsf{C}(Y,Z) \arrow[r, "f_*"'] & \mathsf{C}(Y,W)
\end{tikzcd}
$$

Ahora, para ver que este es plenamente fiel, se hace uso del lema de Yoneda 3.0.1. Existe una relación biyectiva entre los elementos $\mathsf{C}(X,Y)$ y la transformación natural $\alpha : \mathsf{C}(Y,-) \Longrightarrow \mathsf{C}(X,-)$. Esto es que, para morfismos $f : X \longrightarrow Y$ en C; si se toma un objeto en $\mathrm{id}^Y : Y \longrightarrow Y$ en $\mathsf{C}(Y,-)$, f puede verse como la evaluación

$$\alpha^Y\left(\mathrm{id}^Y\right).$$

Por otra parte, la transformación natural $f^* : \mathsf{C}(Y,-) \Longrightarrow \mathsf{C}(X,-)$ definida por una precomposición por f envía el morfismo identidad $\mathrm{id}^Y : Y \longrightarrow Y$ a $f : X \longrightarrow Y$. Lo que implica entonces que $\alpha = f^*$. $\square$

3.3 Propiedad universal

Las propiedades universales estan presentes en diversas teorias matemáticas y permiten hacer la descripcion de objetos en estas a partir de los morfismos que estan relacionados con este objeto. Un ejemplo claro son los objetos terminales y finales (Definición 3.0.1). Haciendo uso del lema de Yoneda (Lema 3.0.1) la siguiente definición formaliza el concepto de propiedad universal.

Definición 3.0.3 (Propiedad Universal)**.** *Una **propiedad universal** de un objeto C de una categoría C se expresa mediante un funtor representable F junto con un **elemento universal** X en $F(C)$ que define un isomorfismo natural (Definición 3.0.2) entre $\mathsf{C}(C,-) \cong F$, o $\mathsf{C}(-,C) \cong F$ segun la naturaleza de F, a través del Lema de Yoneda (3.0.1).*

Ejemplo 3.0.4 (Monoide Libre)**.** *Siguiendo con el Ejemplo 3.0.3, veremos que $\mathbb{N}$ tiene la propiedad universal. Para ello consideramos el **funtor representable de olvido***

$$U : \mathsf{Mon} \longrightarrow \mathsf{Set}.$$

*Por el **lema de Yoneda** existe un isomorfismo natural como se ve a continuación*

$$よ : \mathrm{Hom}(\mathsf{Mon}(\mathbf{M},-),U) \cong U(\mathbf{M})$$

El objeto $\mathbb{N}$ en Mon tiene la propiedad universal para el funtor de olvido, ya que, para el elemento $1 \in \mathbb{N} = U(\mathbb{N})$ se tiene que, la transformación natural asociado a 1 siguiendo el Lema de Yoneda, esto es, $\Psi(1)^{\mathbf{M}}(g) = U(g)(1) = g(1)$ cumple que

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Mon} & & \mathsf{Set} & \\
\mathbf{M} \arrow[d, "f"'] & \mathsf{Mon}(\mathbb{N},\mathbf{M}) \arrow[rr, mapsto, "\Psi(1)^{\mathbf{M}}"] \arrow[d, "f^*"'] & & M \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{N} & \mathsf{Mon}(\mathbb{N},\mathbf{N}) \arrow[rr, "\Psi(1)^{\mathbf{N}}"'] & & N
\end{tikzcd}$$

Para ver que el cuadrado de la anterior figura conmuta, se toma un elemento $g \in \mathsf{Mon}(\mathbb{N},\mathbf{M})$, entonces para este se cumple por un lado que:

$$\begin{aligned}
\Psi(1)^{\mathbf{N}}(f_*(g)) &= \Psi(1)^{\mathbf{N}}(f \circ g)(1) && \text{(Por post-composición)} \\
&= (f \circ g)(1) && \text{(Por comportamiento de } \Psi) \\
&= f(g(1)),
\end{aligned}$$

mientras tanto por otro lado se tiene que:

$$f(\Psi(1)^{\mathbf{M}}(g)) = f(g(1)). \qquad \text{(Por comportamiento de } \Psi)$$

Ahora queda ver que $\Psi(1)$ define un isomorfismo natural en Set, esto implica comprobar que, para cada monoide $\mathbf{M}$, se tiene que $\Psi(1)^{\mathbf{M}}$ es una aplicación biyectiva.

Sean g, h dos elementos en $\mathsf{Mon}(\mathbb{N}, M)$, es decir dos homomorfismos $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{M}$ y $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{M}$. Supongamos que $\Psi(1)^{\mathbf{M}}(g) = \Psi(1)^{\mathbf{M}}(h)$, entonces queremos ver que $g = h$. Esto lo demostraremos por inducción sobre $\mathbb{N}$.

Notamos que $g(0) = h(0) = 1$*, puesto que* g *y* h *son homomorfismos. Además, para* $n = 1$ *se tiene que:*

$$g(1) = \Psi(1)^{\mathbf{M}}(g) = \Psi(1)^{\mathbf{M}}(h) = h(1).$$

Ahora, asumiendo que para n *es cierto, se verá el comportamiento para* $n + 1$*,*

$$\begin{aligned} g(n+1) &= g(n)g(1) && \text{(Por ser } g \text{ homomorfismo)} \\ &= h(n)h(1) && \text{(Por inducción y por el caso } n = 1\text{)} \\ &= h(n+1). && \text{(Por ser } h \text{ homomorfismo)} \end{aligned}$$

Por tanto, la aplicación $\Psi(1)^{\mathbf{M}}$ *es inyectiva.*

Ahora, para ver que es sobreyectiva se tomará un elemento $m \in M$*, para esto hay que ver que existe un homomorfismo de monoides* $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{M}$ *tal que,* $\Psi(1)^{\mathbf{M}}(g) = m$*.*

Este homomorfismo lo podemos definir mediante la propiedad universal del monoide libre $\mathbb{N}$*. Si consideramos la aplicación*

$$\begin{aligned} \kappa_m \colon \ 1 &\longrightarrow M \\ 0 &\longmapsto m \end{aligned}$$

Entonces esta aplicación se puede extender al homomorfismo de monoides siguiente

$$\begin{aligned} \kappa_m^{\sharp} \colon \ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbf{M} \\ n &\longmapsto m^n \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta como se definió la aplicación Ψ *se tiene que:*

$$\Psi(1)^{\mathbf{M}}(\kappa_m^{\sharp}) = \kappa_m^{\sharp}(1) = m^1 = m.$$

Con lo que se tiene finalmente que la transformación natural $\Psi(1)$ *es un isomorfismo en* Set*, esto es una aplicación biyectiva. Por tanto el objeto* $\mathbb{N}$ *en* Mon *cumple con la propiedad universal con el elemento universal* $1 \in \mathbb{N}$*.*

A continuación se introducirá un concepto que funcionará como base para construir el resultado más importante que se dará en este capítulo. Básicamente es posible relacionar el que un funtor F sea representable con el que una categoría asociada a dicho funtor tenga un objeto inicial (esto en el caso de ser covariante, en el caso del funtor contravariante esta categoría tendría un objeto terminal).

Definición 3.0.4 (Categoría de elementos)**.** *Dado un funtor* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$*, definimos la categoría de elementos asociada, denotada por* $\int^{\mathsf{C}} F$*, como aquella categoría que tiene como objetos pares de la forma* (C, X) *donde* C *es un objeto en la categoría* C *y* X *es un objeto en* $F(C)$*. Además, tomando dos objetos* (C, X)*,* (D, Y) *en la categoría de elementos, un morfismo de* (C, X) *a* (D, Y) *es un morfismo* $f : C \longrightarrow D$ *en* C *que cumple que* $F(f)(X) = Y$*.*

$$\begin{tikzcd}
{(C,X)} \arrow[dd, "f"'] & C \arrow[dd, "f"'] & & & F(C) \arrow[dd, "F(f)"] \\
 & {} \arrow[rr, mapsto] & & {} & \\
{(D,Y)} & D & & & F(D)
\end{tikzcd}$$

Figura 3.5: Categoría de elementos.

Para un objeto (C,X) en $\int^{\mathsf{C}} F$, su morfismo identidad $\mathrm{id}^{(C,X)}$ se define como id^C, el morfismo identidad sobre C en la categoría C. Notamos que $\mathrm{id}^C\colon C \longrightarrow C$ y se tiene que

$$F(\mathrm{id}^C)(X) = \mathrm{id}^{F(C)}(X) = X.$$

Por otro lado si $f\colon (C,X) \longrightarrow (D,Y)$ y $g\colon (D,Y) \longrightarrow (E,Z)$ son morfismos en $\int^{\mathsf{C}} F$, se define la composición de f con g en $\int^{\mathsf{C}} F$, simplemente por la composición $g \circ f$ en C. Notamos que $g \circ f\colon C \longrightarrow E$ y además

$$F(g \circ f)(X) = F(g)(F(f)(X)) = F(g)(Y) = Z.$$

Ahora se comprobará que $\int^{\mathsf{C}} F$ cumple las propiedades para ser categoría.

Axioma de identidad: *Sean (C,X) y (D,Y) objetos en $\int^{\mathsf{C}} F$ y sea $f\colon (C,X) \longrightarrow (D,Y)$. Entonces de la composición en C se tiene que $f \circ \mathrm{id}^C = f$ y $\mathrm{id}^D \circ f = f$.*

Axioma de composición: *Dados $f\colon (C_1,X_1) \longrightarrow (C_2,X_2)$, $g\colon (C_2,X_2) \longrightarrow (C_3,X_3)$ y $h\colon (C_3,X_3) \longrightarrow (C_4,X_4)$, de la composición en C se tiene que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Ahora bien, la importancia de la definición de la categoría de elementos viene en la proposición que se enunciará a continuación, ya que esta establecerá una relación directa entre la representabilidad de un funtor y el hecho de que la categoría de elementos asociada a dicho funtor tenga un *objeto inicial* o *terminal.*

Proposición 3.0.4. *Sea C una categoría y sea $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ un funtor. Entonces F es representable si y solo si $\int^{\mathsf{C}} F$ tiene un objeto inicial.*

Demostración. Supongamos que F es representable, esto es que existe un objeto C de C y un isomorfismo $\alpha : F \cong \mathsf{C}(C,-)$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "\mathsf{C}(C{,}-)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \mathsf{Set} \end{tikzcd}$$

Es necesario ver en primera instancia que se cumple que las tres categorías siguientes son isomorfas.

$$\int^{\mathsf{C}} F \cong \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-) \cong C/\mathsf{C}.$$

El resultado final se desprende del hecho que la categoría bajo C, es decir C/C, tiene al morfismo identidad id^C como objeto inicial.

Para probar que estas categorias son isomorfas entre sí, primero se definirá un funtor $G : \int^{\mathsf{C}} F \longrightarrow \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} G : \int^{\mathsf{C}} F \arrow[rr] & & \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-) \\ (A,X) \arrow[d, "f"'] & & \big(A, \alpha^A(X)\big) \arrow[d, "f"] \\ (B,Y) \arrow[rr, phantom, "\longmapsto"] & & \big(B, \alpha^B(Y)\big) \end{tikzcd}$$

donde por propiedades de la categoría de elementos se cumple que $F(f)(X) = Y$, además la transformación natural α que relaciona a los funtores F y $\mathsf{C}(C,-)$ viene dado como la colección indexada $\alpha = \left(\alpha^A\right)_{A \in \mathsf{Obj}(\mathsf{C})}$, haciendo que la siguiente figura conmute.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{Set} & \\
A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[rr, "\alpha^A"] \arrow[d, "F(f)"'] & & \mathsf{C}\,(C,A) \arrow[d, "f_*"] \\
B & F(B) \arrow[rr, mapsto, "\alpha^B"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathsf{C}\,(C,B)
\end{tikzcd}$$

Con esto se tiene que el funtor está de hecho bien definido. Para esto tiene que cumplirse que para cualquier par de objetos $\left(A, \alpha^A(X)\right)$ y $\left(B, \alpha^B(X)\right)$ en la categoría $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$, el morfismo $f : \left(A, \alpha^A(X)\right) \longrightarrow \left(B, \alpha^B(X)\right)$ debe cumplir que $f\left(\alpha^A(X)\right) = \alpha^B(Y)$. Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
f\left(\alpha^A(X)\right) &= f_*\left(\alpha^A(X)\right) \\
&= \alpha^B(F(f)(X)) && \text{(por transformación natural)} \\
&= \alpha^B(Y). && \text{(porque } f \text{ es morfismo en } \textstyle\int^{\mathsf{C}} F\text{)}
\end{aligned}$$

Ahora hay que ver que la asignación G es en efecto un funtor. Para esto hay que comprobar que preserva el morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad. Sea (A, X) un objeto en la categoría $\int^{\mathsf{C}} F$, se tiene entonces el funtor para G para la identidad $\mathrm{id}^{(A,X)}$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
G : \int^{\mathsf{C}} F \arrow[rr] & & \int^{\mathsf{C}} (A,-) \\
(A,X) \arrow[d, "\mathrm{id}^{(A,X)}"'] & & \left(A, \alpha^A(X)\right) \arrow[d, "\mathrm{id}^{\left(A,\alpha^A(X)\right)}"] \\
(A,X) \arrow[rr, phantom, ""] & & \left(A, \alpha^A(X)\right)
\arrow[from=2-1, to=2-3, phantom, ""]
\end{tikzcd}$$

$$\longmapsto$$

Con esto se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
G\left(\mathrm{id}^{(A,X)}\right) &= G\left(\mathrm{id}^A\right) && \text{(Identidad en } \textstyle\int^{\mathsf{C}} F\text{)} \\
&= \mathrm{id}^A && \text{(Definición der } G\text{)} \\
&= \mathrm{id}^{\left(A,\alpha^A(X)\right)} && \text{(Identidad en } \textstyle\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)\text{)} \\
&= \mathrm{id}^{G(A,X)}. && \text{(Definición de } G\text{)}
\end{aligned}$$

Preserva composición. Sean $f : (A,X) \longrightarrow (B,Y)$ y $g : (B,Y) \longrightarrow (C,Z)$ morsfismos en $\int^{\mathsf{C}} F$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
G(g \circ f) &= g \circ f && \text{(Definición de } G\text{)} \\
&= G(g) \circ G(f). && \text{(Definición de } G\text{)}
\end{aligned}$$

Con esto se tiene que G es un funtor.

Ahora se construye el funtor H en el sentido contrario, el cual se buscará probar que es el funtor inverso de G. El funtor H se define como sigue

$$\begin{tikzcd} H : \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-) \arrow[rr] & & \int^{\mathsf{C}} F \\ (A,s) \arrow[d, "f"'] & & \left(A, \left(\alpha^A\right)^{-1}(s)\right) \arrow[d, "f"] \\ (B,t) \arrow[rr, phantom, "\longmapsto" near start] & & \left(B, \left(\alpha^B\right)^{-1}(t)\right) \end{tikzcd}$$

Notamos que los objetos de $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ son pares de la forma (A,s) con A objeto de C y s elemento de $\mathsf{C}(C,A)$, esto es, un morfismo $s\colon C \longrightarrow A$ en C. Como α es un isomorfismo natural de F en $\mathsf{C}(C,-)$, se tiene que α^A, su componente en A, es un isomorfismo de la forma $\alpha^A\colon F(A) \longrightarrow \mathsf{C}(C,A)$. Así pues, tiene sentido considerar el elemento $\left(\alpha^A\right)^{-1}(s)$, que es un elemento de $F(A)$. Así, para cada objeto (A,s) en $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ se tiene que $(A,(\alpha^A)^{-1}(s))$ es un objeto bien definido en $\int^{\mathsf{C}} F$.

Además, para cada morfismo $f\colon (A,s) \longrightarrow (B,t)$ en $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$, esto es un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ en C que cumple que $\mathsf{C}(C,f)(s) = f_*(s) = f \circ s = t$, su imagen por H es el propio morfismo f. Notamos que $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo en C que cumple que

$$\begin{aligned} F(f)\left(\left(\alpha^A\right)^{-1}(s)\right) &= \left(\alpha^B\right)^{-1}(f_*(s)) && (\alpha^B \circ F(f) = f_* \circ \alpha^A) \\ &= \left(\alpha^B\right)^{-1}(f \circ s) && (\text{Definición de } f_*) \\ &= \left(\alpha^B\right)^{-1}(t). && (f \circ s = t) \end{aligned}$$

Con todo esto se tiene que la asignación H está bien definida. Ahora hay que comprobar H es en efecto un funtor, para esto hay que comprobar que preserva el morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad. Sea (A,s) un objeto de $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$, se tiene que

$$\begin{aligned} H(\mathrm{id}^{(A,s)}) &= H(\mathrm{id}^A) && (\text{Identidad en } \textstyle\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)) \\ &= \mathrm{id}^A && (\text{Definición de } H) \\ &= \mathrm{id}^{\left(A,\left(\alpha^A\right)^{-1}(s)\right)} && (\text{Identidad en } \textstyle\int^{\mathsf{C}} F) \\ &= \mathrm{id}^{H(A,s)}. && (\text{Definición de } H) \end{aligned}$$

Preserva la composición. Sean $f : (A,s) \longrightarrow (B,t)$ y $g : (B,t) \longrightarrow (C,r)$ morsfismos en $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$, se tiene que

$$\begin{aligned} H(g \circ f) &= g \circ f && (\text{Definición de } H) \\ &= H(g) \circ H(f). && (\text{Definición de } H) \end{aligned}$$

Con esto se tiene que H es un funtor.

Se sigue fácilmente de la definición de G y H que $G \circ H = \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ y que $H \circ G = \int^{\mathsf{C}} F$. Por tanto, $\int^{\mathsf{C}} F \cong \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ y tenemos demostrado el primer isomorfismo.

Procedemos ahora a establecer el isomorfismo entre $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ y C/C. Definimos a continuación la asignación $I : \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-) \longrightarrow C/\mathsf{C}$ tal como se ve en la siguiente figura

$$\begin{tikzcd}
I : \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-) \arrow[rr] & & C/\mathsf{C} \\
(A,s) \arrow[d, "f"'] & & s \arrow[d, "f"] \\
(B,t) & \longmapsto & t
\end{tikzcd}$$

Recordamos que si $f\colon (A,s) \longrightarrow (B,t)$ es un morfismo en la categoría $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$, se cumple que $s\colon C \longrightarrow A$ y $t\colon C \longrightarrow B$ son morfismos en C y que $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo en C que cumple que $t = \mathsf{C}(C,f)(s) = f_*(s) = f \circ s$.

Así, la asignación I envía objetos de la forma (A,s) en $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ a su segunda componente, que recordemos, es un morfismo $s\colon C \longrightarrow A$ en C, esto es, un objeto en la categoría C/C. Por otro lado, el morfismo f se envía a f, que por el razonamiento anterior, cumple con que $f \circ s = t$, esto es I envía morfismos f en $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ a morfismos f en la categoría coma.

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Así I está bien definido. Falta por ver que la asignación I es en efecto un funtor, para esto hay que ver que preserva el morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad. Sea (A,s) un objeto en $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$, entonces

$$\begin{aligned}
I\left(\mathrm{id}^{(A,s)}\right) &= I\left(\mathrm{id}^{A}\right) && \text{(Identidad en } \textstyle\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)\text{)}\\
&= \mathrm{id}^{A} && \text{(Definición de } I\text{)}\\
&= \mathrm{id}^{s} && \text{(Identidad en } C/\mathsf{C}\text{)}\\
&= \mathrm{id}^{I(A,s)}. && \text{(Definición de } I\text{)}
\end{aligned}$$

Preserva la composición. Sean $f : (A,s) \longrightarrow (B,t)$ y $g : (B,t) \longrightarrow (C,r)$ dos morfismos en $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
I(g \circ f) &= g \circ f && \text{(Definición de } I\text{)}\\
&= I(g) \circ I(f). && \text{(Definición de } I\text{)}
\end{aligned}$$

Con esto se tiene que I es un funtor.

Ahora se construirá el funtor J en el sentido contrario al de I, el cual se probará que es el funtor inverso de I. El funtor $J : C/\mathsf{C} \longrightarrow \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ se define como se ve en la siguiente figura

$$
\begin{tikzcd}
J : C/\mathsf{C} \arrow[rr] & & \int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-) \\
s \arrow[d, "f"'] & & (A,s) \arrow[d, "f"] \\
t \arrow[rr, phantom, ""] & & (B,t)
\end{tikzcd}
\qquad f \longmapsto f
$$

Este funtor envía un objeto s de la categoría C/C, que recordemos es un morfismo $s\colon C \longrightarrow A$ en C, al par (A,s), que es un objeto en la categoría de elementos $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$. Por otro lado, si $f\colon s \longrightarrow t$ es un morfismo en C/C del objeto $s\colon C \longrightarrow A$ al objeto $t\colon C \longrightarrow B$, entonces $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo en C que cumple que $f \circ s = t$. Así, J envía f al propio f, que en este caso es un morfismo de (A,s) a (B,t) en la categoría $\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)$ por lo que acabamos de comentar.

Ahora hay que ver que la asignación J es en efecto un funtor. Para esto hay que comprobar que preserva el morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad. Sea $s : C \longrightarrow A$ un objeto en C/C, se tiene que

$$
\begin{aligned}
J\left(\mathrm{id}^s\right) &= J\left(\mathrm{id}^A\right) && \text{(Identidad en } C/\mathsf{C}) \\
&= \mathrm{id}^A && \text{(Definición de } J) \\
&= \mathrm{id}^{(A,s)} && \text{(Identidad en } \textstyle\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)) \\
&= \mathrm{id}^{J(s)}. && \text{(Definición de } J)
\end{aligned}
$$

Preserva la composición. Sean $f : s \longrightarrow t$ y $g : t \longrightarrow r$ morfismos en C/C, entonces

$$
\begin{aligned}
J(g \circ f) &= g \circ f && \text{(Definición de } J) \\
&= J(g) \circ J(f). && \text{(Definición de } J)
\end{aligned}
$$

Con todo esto se tiene que J es un funtor.

Se sigue de la definición de I y J que $I \circ J = \mathrm{id}^{C/\mathsf{C}}$ y que $J \circ I = \mathrm{id}^{\int^{\mathsf{C}} \mathsf{C}(C,-)}$.

Finalmente comprobamos la siguiente propiedad.

C/C tiene un objeto inicial. Consideramos el morfismo identidad a C en C, esto es $\mathrm{id}^C : C \longrightarrow C$. id^C es un morfismo que tiene dominio en C, por tanto es un objeto de la categoría C/C.

Para ver que es un objeto inicial en C/C se toma un objeto cualquiera $s : C \longrightarrow A$ en C/C. Existe entonces un único morfismo de id^C en s, siendo este precisamente s, pues $s \circ \mathrm{id}^C = s$ como se ve en la figura

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\mathrm{id}^C"'] \arrow[dr, "s"] & \\
C \arrow[rr, "s"'] & & A
\end{tikzcd}
$$

Supongamos entonces que existe otro morfismo t de id^C en s, este morfismo tendría que cumplir que $t \circ \mathrm{id}^C = s$, así pues $t = s$. Concluímos que id^C es un objeto inicial de C/C.

Ahora, dado que tenemos isomorfismos entre las categorías C/C y $\int^{\mathsf{C}} F$, como id^C es objeto inicial en C/C entonces $\int^{\mathsf{C}} F$ también tiene un objeto inicial. $\square$

Capítulo 4

Límites y colímites categoriales

En este capítulo se buscará probar que la categoría de conjuntos Set, cumple con ser completa y cocompleta, con este fin se hará un recorrido por los conceptos relacionados con los límites y colímites partiendo de conceptos que se han ido construyendo en los capítulos anteriores. Se darán también una serie de ejemplos en la categoría Set que pueden ser ya conocidos para el lector como: productos, igualadores, productos fibrados y sus respectivos colímites; coproductos, coigualadores y sumas amalgamadas. La primera sección del presente capítulo introducirá una serie de conceptos necesarios para cumplir el objetivo de demostrar la completitud de Set y la segunda sección construirá dicha demostración.

4.1 Límites y colímites

Los límites y colímites pueden presentarse en cualquier categoría, este concepto encapsula a su vez otros conceptos estudiados previamente, como el de funtores representables o el de propiedad universal. A continuación se presentaran unas definiciones que funcionarán como introducción al concepto de conos.

Definición 4.0.1. *Un **diagrama** en una categoría C es un funtor $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ donde el dominio J, denominado **categoría de índices**, es una categoría pequeña.*

Para dejar más clara la definición anterior, se construirá el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.0.1. *Sea J una categoría de índices con tres objetos y morfismos no triviales entre ellos. Sea $F\colon \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ el diagrama representado a continuación*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 2 & & X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\
& 1 \arrow[ur] & \arrow[r, mapsto, "F"] & {} & & Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Se cumple que $F(0) = X$, $F(1) = Y$ y $F(2) = Z$, donde X, Y y Z son objetos en la categoría C, mientras que los morfismos resultantes del funtor cumplen que $h = f \circ g$. Entonces con esto se tiene que en efecto la imagen del funtor F es un diagrama en la categoría C.

Nota 4.0.1. *Como se verá en todos los ejemplos que trabajaremos en este capítulo, la categoría de índices* J *no tendrá una estructura especialmente complicada, simplemente servirá para indexar. Para remarcar este hecho utilizaremos las letras* $i, j, k, \ldots$ *para denotar los objetos de* J*, mientras que para sus morfismos, si hubiera necesidad de denotarlos, utilizaríamos las letras* $f, g, h, \ldots$*.*

Proposición 4.0.1. *Para una categoría de índices no vacía* J*, una categoría* C *y un objeto* X *de* C*, el funtor constante (Ejemplo 2.0.11), define un embebimiento*

$$\begin{tikzcd} K : \mathsf{C} \arrow[r] & \mathsf{C}^{\mathsf{J}} \\ X \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & K^X \arrow[d, Rightarrow, "K(f)"] \\ Y & K^Y \end{tikzcd}$$

donde $K(f)$ *sería la transformación natural constante* $K(f) : K^X \Longrightarrow K^Y$*, esto es,* $K(f) = (K(f)^j)_{j \in \mathsf{Obj}(\mathsf{J})}$*, donde para cada objeto* j *de* J*, la componente* $K(f)^j = f$*.*

Demostración. La asignación K está bien definida ya que $K(f) : K^X \Longrightarrow K^Y$ define una transformación natural como se ve en la siguiente figura:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{J} & & \mathsf{C} & \\ i \arrow[dd] & X \arrow[rr, "(K(f))^i"] \arrow[dd, "\mathrm{id}^X"'] & & Y \arrow[dd, "\mathrm{id}^Y"] \\ & & \circlearrowright & \\ j & X \arrow[rr, "(K(f))^j"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que K define un funtor.

Si J es una categoría con objetos, entoces se tiene que K es fiel debido a que, para dos morfismos f, g en $\mathsf{C}(X, Y)$ tales que $K(f) = K(g)$, si consideramos un objeto j de J, llegamos a que $K(f)^j = K(g)^j$, así

$$f = K(f)^j = K(g)^j = g.$$

Esto concluye la demostración. □

A partir del concepto de diagrama se puede construir la noción de cono, esto es importante para esta sección, ya que los límites pueden expresarse como un cono universal para un diagrama.

Definición 4.0.2 (Cono)**.** *Un* ***cono*** *sobre un diagrama* $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ ***con cima*** $X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$ *es una transformación natural* $\lambda : K^X \Longrightarrow F$ *con dominio en el funtor constante a* X*. La transformación natural* $\lambda = \left(\lambda^j\right)_{j \in \mathsf{Obj}(\mathsf{J})}$ *que constituye el cono se puede ver en la siguiente gráfica conmutativa.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{J} & & \mathsf{C} & \\
i \arrow[d, "g"'] & X \arrow[rr, "\lambda^i"] \arrow[d, "\mathrm{id}^X"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & F(i) \arrow[d, "F(g)"] \\
j & X \arrow[rr, "\lambda^j"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Aquí las componentes de la transformación natural son llamadas ***piernas*** *del cono. Entonces para cada morfismo $g : i \longrightarrow j$ se tiene que el siguiente triángulo conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\lambda^i"'] \arrow[dr, "\lambda^j"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(g)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Cono con cima X.

Un morfismo de un cono $\lambda\colon K^X \Longrightarrow F$ a un cono $\mu\colon K^Y \Longrightarrow F$ es un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ en C de forma que para cada índice j de J se tiene que $\mu^j \circ f = \lambda^j$.

Dualmente, un ***cono*** *sobre un diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$* ***con nadir*** *$X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$, también llamado* ***cocono****, es una transformación natural $\lambda : F \Longrightarrow K^X$ con codominio en el funtor constante a X. La transformación natural $\lambda = \left(\lambda^j\right)_{j \in \mathrm{Obj}(\mathsf{J})}$ que constituye el cono se puede ver en la siguiente gráfica conmutativa.*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{J} & & \mathsf{C} & \\
i \arrow[d, "g"'] & F(i) \arrow[rr, "\lambda^i"] \arrow[d, "F(g)"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & X \arrow[d, "\mathrm{id}^X"] \\
j & F(j) \arrow[rr, "\lambda^j"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Aquí las componentes de la transformación natural también son llamadas ***piernas*** *del cono. Entonces para cada morfismo $g : i \longrightarrow j$ se tiene que el siguiente triángulo conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F(g)"] \arrow[dr, "\lambda^i"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F(j) \arrow[dl, "\lambda^j"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2: Cono con nadir X.

Un morfismo de un cocono $\lambda\colon F \Longrightarrow K^X$ a un cocono $\mu\colon F \Longrightarrow K^Y$ es un morfismo

$f\colon X \longrightarrow Y$ *en* C *de forma que para cada índice* j *de* J *se tiene que* $f \circ \lambda^j = \mu^j$.

Veamos a continuación un ejemplo en el que el conjunto de los números enteros puede servir de categoría de índices para un cono indexado en los enteros.

Ejemplo 4.0.2. *Sea* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *la categoría de asociada al* ***conjunto ordenado****, esto es, los objetos de* $\mathbf{Z}$ *son los números enteros y, si* n, m *son números enteros, decimos que existe un único morfismo no trivial de* n *a* m *siempre que* $n \leq m$.

Sea C *una categoría. Consideramos un diagrama* $F : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathsf{C}$. *Entonces tendremos un cono sobre el funtor* F *con cima en* X*, objeto de* C*, siempre que tengamos una colección de morfismos* $\lambda = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}$*, con* $\lambda^n : X \longrightarrow F(n)$*, para cada entero* $n \in \mathbb{Z}$. *Esta colección tendrá que cumplir que, para cada* $n \leq m$*, entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\lambda^n"'] \arrow[dr, "\lambda^m"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ F(n) \arrow[rr] & & F(m) \end{tikzcd}$$

Se puede expandir el cono anterior en todos los posibles conos que resultan del funtor indexado, de modo que todos los triángulos representados a continuación conmuten.

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dll] \arrow[dl, "\lambda^{-1}"'] \arrow[d, "\lambda^0"] \arrow[dr, "\lambda^1"] \arrow[drr] & & \\ \cdots \arrow[r] & F(-1) \arrow[r] & F(0) \arrow[r] & F(1) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Con la noción de cono de la Definición 4.0.2, construímos un funtor que envía objetos de una categoría a la categoría de conos.

Proposición 4.0.2. *Dado un diagrama* $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$*, existe un funtor contravariante* $\mathrm{Conos}(-, F)$ *que envía un objeto* X *de* C *al conjunto de conos con cima* X*, como se ve en la Figura 4.3,*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Conos}(-, F) : \mathsf{C} & \longrightarrow & \mathsf{Set} \\ X & & \mathrm{Conos}(X, F) \\ f \big\downarrow & \longmapsto & \big\uparrow \mathrm{Conos}(f, F) \\ Y & & \mathrm{Conos}(Y, F) \end{array}$$

Figura 4.3: Definición del funtor $\mathrm{Conos}(-, F)$.

Donde, para cada X *objeto de* C*, el conjunto* $\mathrm{Conos}(X, F)$ *en* Set *viene definido por*

$$\mathrm{Conos}(X, F) = \{\lambda : K^X \Longrightarrow F \mid \lambda \textit{ transformación natural}\}.$$

Dualmente, para un diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$*, existe un funtor* $\mathrm{Conos}(F, -)$ *que envía un objeto* X *de* C *al conjunto de conos con nadir* X*, como se ve en la Figura 4.4,*

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathrm{Conos}(F,-) : \mathsf{C} \arrow[rr] & & \mathsf{Set} \\
X \arrow[d, "f"'] & & \mathrm{Conos}(F,X) \arrow[d, "\mathrm{Conos}(F,f)"] \\
Y \arrow[r, phantom, ""] & \longmapsto & \mathrm{Conos}(F,Y)
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.4: Definición del funtor $\mathrm{Conos}(F,-)$.

Donde, para cada X objeto de C, el conjunto $\mathrm{Conos}(F,X)$ *en* Set *viene definido por*

$$\mathrm{Conos}(F,X) = \{\lambda : F \Longrightarrow K^X \mid \lambda \text{ \textit{transformación natural}}\}.$$

Demostración. Presentaremos únicamente la demostración para el funtor $\mathrm{Conos}(-,F)$. La otra demostración es análoga.

Vamos a definir la imagen de un morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ en C mediante la asignación $\mathrm{Conos}(-,F)$, esto es $\mathrm{Conos}(f,F)$. Sea μ una transformación natural en $\mathrm{Conos}(Y,F)$, es decir, una transformación natural $\mu\colon K^Y \Longrightarrow F$. Notamos que $\mu = (\mu^j)_{j\in\mathsf{Obj(J)}}$ es una família de morfismos en C de la forma $(\mu^j : Y \longrightarrow F(j))_{j\in\mathsf{Obj(J)}}$ tal que, para cada par de índices i y j en J y para cada morfismo $g\colon i \longrightarrow j$ en J se tiene que el siguiente diagrama commuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{J} & \mathsf{C} & \\
i \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r, "\mu^i"] \arrow[d, "\mathrm{id}^Y"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(i) \arrow[d, "F(g)"] \\
j & Y \arrow[r, "\mu^j"'] & F(j)
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.5: Transformación natural μ.

Definimos $\mathrm{Conos}(f,F)(\mu)$ como la família

$$\mathrm{Conos}(f,F)(\mu) = \left(\mathrm{Conos}(f,F)(\mu)^j\right)_{j\in\mathsf{Obj(J)}}$$

donde $\mathrm{Conos}\,(f,F)\,(\mu)^j = \mu^j \circ f$. Notamos que, para cada índice j en J se tiene que $\mu^j \circ f\colon X \longrightarrow F(j)$. Además, para cada par de índices i y j en J y para cada morfismo $g\colon i \longrightarrow j$ en J se tiene que el siguiente diagrama commuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{J} & \mathsf{C} & \\
i \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "\mu^i \circ f"] \arrow[d, "\mathrm{id}^X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(i) \arrow[d, "F(g)"] \\
j & X \arrow[r, "\mu^j \circ f"'] & F(j)
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.6: Transformación natural $\mathrm{Conos}(f,F)(\mu)$.

La commutatividad se sigue de la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} F(g) \circ \mu^i \circ f &= \mathrm{id}^Y \circ \mu^j \circ f && (\mu \text{ es transformación natural.}) \\ &= \mu^j \circ f && (\text{Por } \mathrm{id}^Y.) \\ &= \mu^j \circ f \circ \mathrm{id}^X. && (\text{Por } \mathrm{id}^X.) \end{aligned}$$

Con esto se tiene que la asignación $\mathrm{Conos}(-, F)$ esta bien definida, ahora se verá que es un funtor contravariante, esto es, que preserva el morfismo identidad y la composición de morfismos.

Preserva la identidad: Sea X un objeto en C y sea $\mathrm{id}^X : X \longrightarrow X$ el morfismo identidad a X en C. Sea μ un cono en $\mathrm{Conos}(X, F)$. Entonces se tiene que, para cada índice j en J se tiene que

$$\mathrm{Conos}(\mathrm{id}^X, F)(\mu)^j = \mu^j \circ \mathrm{id}^X = \mu^j.$$

Así, $\mathrm{Conos}(\mathrm{id}^X, F)(\mu) = \mu$, para todo cono μ en $\mathrm{Conos}(X, F)$. Con ello tenemos que

$$\mathrm{Conos}(\mathrm{id}^X, F) = \mathrm{id}^{\mathrm{Conos}(X,F)}.$$

Preserva la composición: Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Z$ un par de morfismos en C. Sea γ un cono en $\mathrm{Conos}(Z, F)$ y sea j un índice en J. Así

$$\begin{aligned} \mathrm{Conos}(h \circ f, F)(\gamma)^j &= \gamma^j \circ h \circ f && (\text{Definición de } \mathrm{Conos}(h \circ f, F)) \\ &\mathrm{Conos}(h, F)(\gamma)^j \circ f && (\text{Definición de } \mathrm{Conos}(h, F)) \\ &= \mathrm{Conos}(f, F)(\mathrm{Conos}(h, F)(\gamma))^j. && (\text{Definición de } \mathrm{Conos}(f, F)) \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Conos}(h \circ f, F)(\gamma) = \mathrm{Conos}(f, F)(\mathrm{Conos}(h, F)(\gamma))$, para todo cono γ en $\mathrm{Conos}(Z, F)$. Con ello tenemos que

$$\mathrm{Conos}(h \circ f, F) = \mathrm{Conos}(f, F) \circ \mathrm{Conos}(h, F).$$

Por tanto, la asignación $\mathrm{Conos}(-, F)$ es un funtor contravariante. □

El límite de un diagram F se puede describir simplemente como el cono universal sobre el diagrama F, mientras que el colímite se puede describir como el cono universal bajo el diagrama F. Esto se resume en la siguiente definición.

Definición 4.0.3 (Límites y colímites)**.** *Para un diagrama $F\colon \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$, un **límite de** F es un elemento C que representa al funtor contravariante $\mathrm{Conos}(-, F)$. Por el Lema de Yoneda 3.0.1, un límite consiste en un objeto en C, denotado $\lim F$, junto con un cono universal $\lambda\colon \lim F \Longrightarrow F$ llamado el **cono límite**, que define un isomorfismo natural*

$$\mathsf{C}(-, \lim F) \cong \mathrm{Conos}(-, F).$$

*De manera dual, un **colímite de** F es un elemento C que representa al funtor covariante $\mathrm{Conos}(F, -)$. Por el Lema de Yoneda 3.0.1, un colímite consiste en un objeto en C, denotado $\mathrm{colim}F$, junto con un cocono universal $\lambda\colon F \Longrightarrow \mathrm{colim}F$ llamado el **cono colímite**, que define un isomorfismo natural*

$$\mathsf{C}(\mathrm{colim}F, -) \cong \mathrm{Conos}(F, -).$$

Existe otra forma de entender los límites y los colímites, que viene como consecuencia de la Proposición 3.0.4, donde como se vió anteriormente que también pueden ser definidos como el objeto terminal e inicial, respectivamente, en una categoría de elementos adecuada.

Definición 4.0.4. *Para cualquier diagrama* $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$*, un* ***límite*** *es un objeto terminal para la categoría de conos sobre* F*, esto es,* $\int^{\mathsf{C}} \mathrm{Conos}(-, F)$*. Un objeto en la categoría de conos sobre* F *es un cono sobre* F *junto con su respectiva cima. En particular un objeto terminal en la categoría de conos consiste en un objeto límite de* C *junto con un cono límite especificado. El objeto límite* $\lim F$ *es un objeto terminal para esta categoría, esto es,* $\lim F$ *junto con su cono límite especificado sobre* F *cumple que, para cualquier otro cono sobre* F *con cima* X*, existe un único morfismo de conos del cono con cima* X *al cono con cima* $\lim F$*.*

Dualmente, un ***colímite*** *es un objeto inicial para la categoría de conos bajo* F*, esto es,* $\int^{\mathsf{C}} \mathrm{Conos}(F, -)$*. Un objeto en la categoría de conos bajo* F*, o de coconos, es un cono bajo* F *junto con su respectivo nadir. En particular un objeto inicial en la categoría de coconos consiste en un objeto colímite de* C *junto con un cono colímite especificado. El objeto colímite* $\mathrm{colim} F$ *es un objeto inicial para esta categoría, esto es,* $\mathrm{colim} F$ *junto con su cono colímite especificado bajo* F *cumple que, para cualquier otro cono bajo* F *con nadir* X*, existe un único morfismo de coconos del cono con nadir* $\mathrm{colim} F$ *al cono con nadir* X*.*

Proposición 4.0.3 (Unicidad de límites y colímites)**.** *.Para cualquier diagrama* $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ *si el límite o el colímite existen entonces son únicos salvo isomorfismo único.*

Demostración. Se sigue de la Definición 4.0.4 y a la Proposición 4.0.3, pues los objetos terminales o iniciales de una categoría son únicos salvo isomorfismo único. □

4.2 Ejemplos de límites

En esta sección se verá la construcción de algunos límites, los cuales están presentes en la categoría Set. Para este capítulo hemos seguido la referencia Vidal [2010]. Más adelante se verá que los resultados que aparecen en esta sección servirán para garantizar que Set tiene todos los límites para cualquier diagrama sobre una categoría de índices pequeña.

Definición 4.0.5 (Producto)**.** *Un diagrama* $F\colon \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ *indexado por una categoría discreta* J*, véase Ejemplo 2.0.6, es una colección de objetos en* C *indexada por* J*, esto es* $(F(j))_{j\in\mathsf{J}}$*. Un cono sobre este diagrama con cima* Z *es una família* J*-indexada de morfismos* $(\lambda^j : Z \longrightarrow F(j))_{j\in\mathsf{J}}$*.*

Si el límite de este diagrama existe, se denota por $\prod_{j\in\mathsf{J}} F(j)$ *y se llama* ***producto de la família*** $(F(j))_{j\in\mathsf{J}}$*. Las piernas del cono límite son aplicaciones llamadas* ***proyecciones****.*

$$\left(\pi^k : \textstyle\prod_{j\in\mathsf{J}} F(j) \longrightarrow F(k)\right)_{k\in\mathsf{J}}.$$

Se tiene entonces la propiedad universal del producto, la cual afirma que para cualquier Z *objeto de* C *y para cualquier colección de morfismos* $(\lambda^j : Z \longrightarrow F(j))_{j\in\mathsf{J}}$*, esto es un cono sobre* F *con cima* Z*, se tiene que existe un único morfismo* $k\colon Z \longrightarrow \prod_{j\in\mathsf{J}} F(j)$ *en* C *de forma que el Diagrama 4.7 conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, dashed, "\exists! k"] \arrow[ddl, bend right, "\lambda^k"'] \arrow[ddr, bend left, "\lambda^l"] & \\
 & \prod_{j\in \mathsf{J}} F(j) \arrow[dl, "\pi^k"'] \arrow[dr, "\pi^l"] & \\
F(k) & & F(l)
\end{tikzcd}$$

Figura 4.7: Propiedad universal del producto.

Vemos a continuación cómo se define el producto en la categoría Set.

Ejemplo 4.0.3. *En* Set *los productos arbitrarios sobre conjuntos de índices arbitrarios existen. Sea* J *un conjunto de índices y sea* $(A_j)_{j\in\mathsf{J}}$[*] *una colección* J*-indexada de conjuntos. Se define el producto de* $(A_j)_{j\in\mathsf{J}}$ *como el conjunto*

$$\prod_{j\in\mathsf{J}} A_j = \left\{ f : \mathsf{J} \longrightarrow \bigcup_{j\in\mathsf{J}} A_j \mid \forall j \in \mathsf{J}, f(j) \in A_j \right\}.$$

Se tiene para cada índice j *en* J *la proyección* j*-ésima es la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \pi_j\colon & \prod_{j\in\mathsf{J}} A_j & \longrightarrow & A_j \\ & f & \longmapsto & f(j) \end{array}$$

El producto de conjuntos tiene la siguiente propiedad universal.

Propiedad universal del producto de conjuntos. *Sea* $(A_j)_{j\in\mathsf{J}}$ *una colección* J*-indexada de conjuntos, entonces* $\prod_{j\in\mathsf{J}} A_j$ *es el único conjunto que cumple que, para cualquier otro conjunto* C *y para cualquier família de aplicaciones* $(\lambda_j : C \longrightarrow A_j)_{j\in\mathsf{J}}$*, existe una única aplicación*

$$\langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}} : C \longrightarrow \prod_{j\in\mathsf{J}} A_j,$$

que cumple que, para todo $j \in \mathsf{J}$*,* $\pi_j \circ \langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}} = \lambda_j$*.*

Para demostrar la propiedad universal del producto, sea C *un conjunto y sea* $(\lambda_j : C \longrightarrow A_j)_{j\in\mathsf{J}}$ *una família de aplicaciones. Se define la aplicación* $\langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}}$ *de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rccc} \langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}}\colon & C & \longrightarrow & \prod_{j\in\mathsf{J}} A_j \\ & c & \longmapsto & \langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}}(c), \end{array}$$

donde a su vez, para cada $c \in C$*, se define la aplicación* $\langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}}(c)$ *de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rccc} \langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}}(c)\colon & \mathsf{J} & \longrightarrow & \bigcup_{j\in\mathsf{J}} A_j \\ & j & \longmapsto & \lambda_j(c). \end{array}$$

Es fácil ver que $\langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}}$ *está bien definida, es única y cumple las propiedades que hemos visto antes.*

Introducimos a continuación la noción de igualador.

[*] Como es habitual en conjuntos, utilizaremos subíndices en lugar de superíndices.

Definición 4.0.6 (Igualador)**.** *Se considera la categoría de índices dada por el* ***par paralelo****, esto es, la categoría* J *con dos objetos y dos morfismos de la forma*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 1 \end{tikzcd}$$

Dar un diagrama de J *a una categoría* C *es equivalente a dar dos objetos* X *e* Y *de* C *junto con dos morfismos paralelos* $f, g\colon X \longrightarrow Y$*. Entonces, un cono sobre el diagrama con cima el objeto* Z *de* C *viene dado por dos morfismos* $\lambda^0 : Z \longrightarrow X$ *y* $\lambda^1 : Z \longrightarrow Y$ *sujeta a la conmutatividad del siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & Z \arrow[r, "\lambda_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}^Z"'] & X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\ 1 & Z \arrow[r, "\lambda_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

Esto es, que $f \circ \lambda^0 = \lambda^1$ *y que* $g \circ \lambda^0 = \lambda^1$*. Como esta condición obliga a que* $f \circ \lambda^0 = g \circ \lambda^0$*, dar un cono sobre este diagrama con cima* Z *es equivalente a dar únicamente un morfismo* $h\colon Z \longrightarrow X$ *en* C *de forma que* $h \circ f = h \circ g$*.*

Si el límite de este diagrama existe, se denota por $\mathrm{Eq}(f,g)$ *y se llama* ***igualador*** *de* f *y* g*. La pierna del cono límite se llama* ***inclusión.***

$$\mathrm{in}\colon \mathrm{Eq}(f,g) \longrightarrow X.$$

Se tiene entonces la propiedad universal del igualador, la cual afirma que para cualquier objeto Z *de* C *y cualquier morfismo* $h\colon Z \longrightarrow X$ *que cumple que* $h \circ f = h \circ g$*, existe un único morfismo* $k\colon Z \longrightarrow \mathrm{Eq}(f,g)$*, de forma que el Diagrama 4.7 conmuta.*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, dashed, "\exists! k"'] \arrow[dr, "h"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & & \\ \mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{in}"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 4.8: Propiedad universal del igualador.

Vemos a continuación cómo se define el igualador en la categoría Set.

Ejemplo 4.0.4. *En* Set *los igualadores existen. Sean* A *y* B *conjuntos y sean* $f, g\colon A \longrightarrow B$ *dos aplicaciones paralelas. Se define el igualador de* f *y* g *como el conjunto*

$$\mathrm{Eq}(f,g) = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$$

Notamos que $\mathrm{Eq}(f,g) \subseteq A$*, por lo que podemos considerar la aplicación inclusión* $\mathrm{in} : \mathrm{Eq}(f,g) \longrightarrow A$*.*

El igualador de un par de aplicaciones paralelas tiene la siguiente propiedad universal.

Propiedad universal del igualador*. Sean* $f, g\colon A \longrightarrow B$ *dos aplicaciones paralelas, entonces* $\mathrm{Eq}(f,g)$ *es el único conjunto que cumple que, para cualquier otro conjunto* C *y* *para cualquier aplicación* $h\colon C \longrightarrow X$ *que cumple que* $h \circ f = h \circ g$*, existe una única aplicación*

$$\operatorname{corest}(h)\colon C \longrightarrow \operatorname{Eq}(f,g)$$

que cumple que $\operatorname{corest}(h) \circ \operatorname{in} = h$*.*

Para demostrar la propiedad universal del igualador, sea C *un conjunto y sea* $h\colon C \longrightarrow A$ *que cumple que* $h\circ f = h\circ g$*. Se tiene entonces que la aplicación* h *puede correstringirse a* $\operatorname{Eq}(f,g)$*. Es fácil ver que* $\operatorname{corest}(h)$ *está bien definida, es única y cumple las propiedades que hemos visto antes.*

Presentamos el último ejemplo de límite en este caso el pullback, también llamado en otras fuentes producto fibrado.

Definición 4.0.7 (Pullback)**.** *Se considera la categoría de índices dada por el* ***par de entrada****, esto es, la categoría* J *con tres objetos y dos morfismos de la forma*

$$1 \longrightarrow 0 \longleftarrow 2$$

Dar un diagrama de J *a una cateogría* C *es equivalente a dar tres objetos* X, Y *y* Z *de* C *junto con dos morfismos* $f\colon X \longrightarrow Z$ *y* $g\colon Y \longrightarrow Z$*. Entonces un cono sobre el diagrama con cima el objeto* W *de* C *viene dado por tres morfismos* $\lambda^1\colon W \longrightarrow X$*,* $\lambda^2\colon W \longrightarrow Y$ *y* $\lambda^0\colon W \longrightarrow Z$ *sujeta a la conmutatividad del siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\lambda^1"] \arrow[d, "\lambda^2"'] \arrow[dr, "\lambda^0"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Esto es, que $f \circ \lambda^1 = \lambda^0$ *y que* $g \circ \lambda^2 = \lambda^0$*. Como estas dos condiciones obligan a que* $f \circ \lambda^1 = g \circ \lambda^2$*, dar un cono sobre este diagrama con cima* W *es equivalente a dar únicamente dos morfismos* $u\colon W \longrightarrow X$ *y* $v\colon W \longrightarrow Y$ *tales que* $f \circ u = g \circ v$*.*

Si el límite de este diagrama existe, se denota por $X \times_Z Y$ *y se llama el* ***pullback*** *de* f *y* g*. Las piernas del cono límite se llaman* ***proyecciones canónicas***

$$\pi^1\colon X \times_Z Y \longrightarrow X; \qquad \pi^2\colon X \times_Z Y \longrightarrow Y.$$

Se tiene entonces la propiedad universal del producto fibrado la cual afirma, que para cualquier objeto T *de* C *y cualquier par de morfismos* $r\colon T \longrightarrow X$ *y* $s\colon T \longrightarrow Y$ *tales que* $f \circ r = g \circ s$*, existe un único morfismo* $k\colon T \longrightarrow X \times_Z Y$*, de forma que el Diagrama 4.9 conmuta*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, bend left, "r"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] \arrow[dr, dashed, "\exists!k"] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "\pi^1"] \arrow[d, "\pi^2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 4.9: Propiedad universal del pullback.

Vemos a continuación cómo se define el pullback en la categoría Set.

Ejemplo 4.0.5. *En* Set *los pullbacks existen. Sean* A, B *y* C *conjuntos y sean* $f\colon A \longrightarrow C$ *y* $g\colon B \longrightarrow C$ *dos aplicaciones. Se define el pullback de* f *y* g *como el conjunto*

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\},$$

y las proyecciones canónicas $\pi_1 : A \times_C B \longrightarrow A$ *y* $\pi_2 : A \times_C B \longrightarrow B$.

El pullback de un par de aplicaciones tiene la siguiente propiedad universal.

Propiedad universal del pullback. *Sean* $f\colon A \longrightarrow C$ *y* $g\colon B \longrightarrow C$*, entonces* $A \times_C B$ *es el único conjunto que cumple que, para cualquier otro conjunto* D *y para cualquier par de aplicaciones* $u\colon D \longrightarrow A$ *y* $v\colon D \longrightarrow B$ *que cumplen que* $f \circ u = g \circ v$*, existe una única aplicación*

$$\langle u, v\rangle_C \colon D \longrightarrow A \times_C D$$

que cumple que $\langle u, v\rangle_C \circ \pi_1 = u$ *y* $\langle u, v\rangle_C \circ \pi_2 = v$.

Esta aplicación se construye utilizando la propiedad universal del producto en Set*. Es fácil ver que* $\langle u, v\rangle_C$ *está bien definida, es única y cumple las propiedades que hemos visto antes.*

4.3 Ejemplos de colímites

Las siguientes definiciones representan los duales para los límites presentados en la sección anterior, también se presentarán las construcciones concretas en la categoría Set de estos colímites. Para este capítulo también hemos seguido la referencia Vidal [2010]. Más adelante se verá que los resultados que aparecen en esta sección servirán para garantizar que Set tiene todos los colímites para cualquier diagrama sobre una categoría de índices pequeña.

Definición 4.0.8 (Coproducto)**.** *Un diagrama* $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ *indexado por una categoría discreta* J*, es una colección de objetos en* C *indexada por* J*, esto es,* $(F(j))_{j\in\mathsf{J}}$*. Un cono bajo este diagrama con nadir* Z *es una família* J*-indexada de morfismos* $\left(\lambda^j : F(j) \longrightarrow Z\right)_{j\in\mathsf{J}}$.

Si el colímite de este diagrama existe, se denota por $\coprod_{j\in\mathsf{J}} F(j)$ *y se llama* ***coproducto de la família*** $(F(j))_{j\in\mathsf{J}}$*. Las piernas del cocono límite son aplicaciónes llamadas* ***inyecciones****.*

$$\left(\iota^k : F(k) \longrightarrow \textstyle\coprod_{j\in\mathsf{J}} F(j)\right)_{k\in\mathsf{J}}.$$

Se tiene entonces la propiedad universal del coproducto, la cual afirma que para cualquier Z objeto de C y para cualquier colección de morfismos $\left(\lambda^j : F(j) \longrightarrow Z\right)_{j\in\mathsf{J}}$, esto es un cono bajo F con nadir Z, se tiene que existe un único morfismo $k : \coprod_{j\in\mathsf{J}} F(j) \longrightarrow Z$ en C de forma que el Diagrama 4.10 conmuta.

$$\begin{tikzcd}
F(k) \arrow[dr, "\iota^j"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda^k"'] & & F(l) \arrow[dl, "\iota^l"'] \arrow[ddl, bend left, "\lambda^l"] \\
& \coprod_{j\in\mathsf{J}} F(j) \arrow[d, dashed, "\exists! k"] & \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Figura 4.10: Propiedad universal coproducto.

Veamos a continuación cómo se define el coproducto en la categoría Set.

Ejemplo 4.0.6. *En Set los coproductos arbitrarios existen. Sea J un conjunto de índices y sea $(A_j)_{j\in\mathsf{J}}$ una colección J-indexada de conjuntos. Se define el coproducto de $(A_j)_{j\in\mathsf{J}}$ como el conjunto*

$$\coprod_{j\in\mathsf{J}} A_j = \bigcup_{j\in\mathsf{J}} (A_j \times \{j\}) .$$

Se tiene que para cada índice j en J la inyección j-ésima es la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \iota_j : & A_j & \longrightarrow & \coprod_{j\in\mathsf{J}} A_j \\ & a & \longmapsto & (a, j) \end{array}$$

El coproducto de conjuntos tiene la siguiente propiedad universal.

Propiedad universal del coproducto de conjuntos. *Sea $(A_j)_{j\in\mathsf{J}}$ una colección J-indexada de conjuntos, entonces $\coprod_{j\in\mathsf{J}} A_j$ es el único conjunto que cumple que, para cualquier otro conjunto C y para cualquier família de aplicaciones $(\lambda_j : A_j \longrightarrow C)_{j\in\mathsf{J}}$, existe una única aplicación*

$$[\lambda_j]_{j\in\mathsf{J}} : \coprod_{j\in\mathsf{J}} A_j \longrightarrow C,$$

que cumple que, para todo $j \in \mathsf{J}$, $[\lambda_j]_{j\in\mathsf{J}} \circ \iota_j = \lambda_j$.

Para demostrar la propiedad universal del coproducto, sea C un conjunto y sea $(\lambda_j : A_j \longrightarrow C)_{j\in\mathsf{J}}$ una família de aplicaciones. Se define la aplicación $[\lambda_j]_{j\in\mathsf{J}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} [\lambda_j]_{j\in\mathsf{J}} : & \coprod_{j\in\mathsf{J}} A_j & \longrightarrow & C \\ & (a, j) & \longmapsto & \lambda_j(a) \end{array}$$

Es fácil ver que $[\lambda_j]_{j\in\mathsf{J}}$ está bien definida, es única y cumple con las propiedades vistas antes.

Introducimos a continuación la noción de coigualador.

Definición 4.0.9 (Coigualador). *Se considera la categoría de índices dada por el par paralelo, esto es, la categoría J con dos objetos y dos morfismos de la forma*

$$0 \rightrightarrows 1$$

Dar un diagrama de J a una categoría C es equivalente a dar dos objetos X e Y de C junto con dos morfismos paralelos $f, g : X \longrightarrow Y$. Entonces un cono bajo el diagrama con nadir el objeto Z de C viene dado por dos morfismos $\lambda^0 : X \longrightarrow Z$ y $\lambda^1 : Y \longrightarrow Z$ sujeta a la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & & X \arrow[r, "\lambda^0"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Z \arrow[d, "\mathrm{id}^Z"] \\ 1 & & Y \arrow[r, "\lambda^1"'] & Z \end{tikzcd}$$

Esto es, que $\lambda^1 \circ f = \lambda^0$ y que $\lambda^1 \circ g = \lambda^0$. Como esta condición obliga a que $\lambda^1 \circ f = \lambda^1 \circ g$, dar un cono bajo este diagrama con nadir Z es equivalente a dar únicamente un morfismo $h : Y \longrightarrow Z$ en C de forma que $h \circ f = h \circ g$.

Si el colímite de este diagrama existe, se denota por $\mathrm{CoEq}(f, g)$ y se llama ***coigualador*** *de f y g. La pierna del cono límite se llama* ***proyección canónica****.*

$$\pi : Y \longrightarrow \mathrm{CoEq}(f, g).$$

Se tiene entonces la propiedad universal del coigualador, la cual afirma que para cualquier objeto W de C y cualquier morfismo $h : Y \longrightarrow W$ en C que cumple que $h \circ f = h \circ g$, existe un único morfismo $k : \mathrm{CoEq(f, g)} \longrightarrow W$, de forma que el Diagrama 4.11 conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & \mathrm{CoEq}(f, g) \arrow[d, dashed, "\exists ! k"] \\ & & W \end{tikzcd}$$

Figura 4.11: Propiedad universal del coigualador.

A continuación introducimos la noción de coigualador. Para ello, introducimos previamente la noción de núcleo de una aplicación.

Nota 4.0.2. *Sean A y B dos conjuntos y sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Entonces se define el* ***Kernel*** *o* ***núcleo*** *de la aplicación f como el conjunto*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(a, b) \in A \times A \mid f(a) = f(b)\}, .$$

Entonces, $\mathrm{Ker}(f)$ es una relación de equivalencia sobre A, y hay una única aplicación inyectiva $f' : A/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow B$, tal que para la proyección $\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker(f)}} : A \longrightarrow A/\mathrm{Ker}(f)$, se cumple que $f' \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{Ker(f)}} = f$.

Ejemplo 4.0.7. *En Set los coigualadores existen. Sean A y B conjuntos y sean $f, g : A \longrightarrow B$ dos aplicaciones paralelas. Se define el coigualador de f y g, denotado por $\mathrm{CoEq}(f, g)$, como el conjunto cociente B/R, donde R es la relación de equivalencia generada por el conjunto*

$$\{(f(a), g(a)) \in B \times B \mid a \in A\}.$$

Notamos que $\mathrm{CoEq}(f,g) \subseteq B \times B$, *por lo que podemos considerar la proyección canónica* $\pi : B \longrightarrow \mathrm{CoEq}(f,g)$.

El coigualador de un par de aplicaciones paralelas tiene la siguiente propiedad universal.

Propiedad universal del coigualador. *Sean* $f, g : A \longrightarrow B$ *dos aplicaciones paralelas, entonces* $\mathrm{CoEq}(f,g)$ *es el único conjunto que cumple que, para cualquier otro conjunto* C *y para cualquier aplicación* $h : B \longrightarrow C$ *que cumple que* $h \circ f = h \circ g$, *existe una única aplicación*

$$\mathrm{ast}(h) : \mathrm{CoEq}(f,g) \longrightarrow C,$$

que cumple que $\mathrm{ast}(h) \circ \pi = h$.

Para demostrar la propiedad universal del coigualador, sea C *un conjunto y sea* $h : B \longrightarrow C$ *que cumple que* $h \circ f = h \circ g$. *Entonces, como* $\{(f(a), g(a)) \mid a \in A\} \subseteq \mathrm{Ker}(h)$ *se tiene que* $R \subseteq \mathrm{Ker}(h)$. *Por la forma en que esta construido el núcleo, se tiene que este es una relación de equivalencia para* B *ademas existe una única aplicación*

$$\mathrm{ast}(h) : \mathrm{CoEq}(f,g) \longrightarrow C,$$

la ***astricción*** *de* h, *que cumple que* $\mathrm{ast}(h) \circ \pi = h$. *És fácil ver que* $\mathrm{ast}(h)$ *está bien definida, es única y cumple las propiedades que hemos visto antes.*

Presentamos el último ejemplo de colímite en este caso el pushout, tambien llamado suma amalgamada.

Definición 4.0.10 (Pushout). *Se considera la categoría de índices dada por el* ***par de salida****, esto es, la categoría* J *con tres objetos y dos morfismos de la forma*

$$1 \longleftarrow 0 \longrightarrow 2$$

Dar un diagrama de J *a una categoría* C *es equivalente a dar tres objetos* X, Y *y* Z *de* C *junto con dos morfismos* $f : Z \longrightarrow X$ *y* $g : Z \longrightarrow Y$. *Entonces un cono bajo el diagrama con nadir el objeto* W *viene dado por tres morfismos* $\lambda^1 : X \longrightarrow W$, $\lambda^2 : Y \longrightarrow W$ *y* $\lambda^0 : Z \longrightarrow W$ *sujeta a la conmutatividad del siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\lambda^0"] & X \arrow[d, "\lambda^1"] \\ Y \arrow[r, "\lambda^2"'] & W \end{tikzcd}$$

Esto es, que $\lambda^1 \circ f = \lambda^0$ *y que* $\lambda^2 \circ g = \lambda^0$. *Como estas dos condiciones obligan que* $\lambda^1 \circ f = \lambda^2 \circ g$, *dar un cono sobre este diagrama con nadir* W *es equivalente a dar únicamente dos morfismos* $u : X \longrightarrow W$ *y* $v : Y \longrightarrow W$ *tales que* $u \circ f = v \circ g$.

Si el colímite de este diagrama existe, se denota por $X \amalg_Z Y$ *y se llama el* ***pushout*** *de* f *y* g. *Las piernas del cocono límite vienen dadas por*

$$\iota^1 : X \longrightarrow X \amalg_Z Y; \qquad \iota^2 : Y \longrightarrow X \amalg_Z Y.$$

Se tiene entonces la propiedada universal de la suma amalgamada la cual afirma, que para cualquier objeto T *de* C *y para cualquier par de morfismos* $r : X \longrightarrow T$ *y* $s : Y \longrightarrow T$

tales que $r \circ f = s \circ g$, existe un único morfismo $k : X \amalg_Z Y \longrightarrow Y$, de forma que el Diagrama 4.12 conmuta

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "\iota^1"] \arrow[ddr, bend left, "r"] & \\
Y \arrow[r, "\iota^2"'] \arrow[drr, bend right, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \amalg_Z Y \arrow[dr, dashed, "\exists ! k"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & {} \\
& & T
\end{tikzcd}$$

Figura 4.12: Propiedad universal del pushout.

Veamos a continuación cómo se define el pushout en la categoría Set.

Ejemplo 4.0.8. *En* Set *los pushouts existen. Sean A, B y C conjuntos y sean $f : C \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow B$ dos aplicaciones. Se define el pushout de f y g como el conjunto cociente $(A \amalg B)/R$, donde R es la relación de equivalencia sobre $A \amalg B$ generada por*

$$\{(\iota_A(f(c)), \iota_b(g(c))) \mid c \in C\},$$

y los morfismos resultantes de la composición de las inclusiones canónicas de A y B en $A \amalg B$ y de la proyección canónica $A \amalg B$ en $A \amalg_C B$, esto es, $\iota_1 : A \longrightarrow A \amalg_C B$, análogamente, $\iota_2 : B \longrightarrow A \amalg_C B$.

El pushout de un par de aplicaciones tiene la siguiente propiedad universal.

Propiedad universal del pushout. *Sean $f : C \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow B$, entonces $A \amalg_C B$ es el único conjunto que cumple que, para cualquier otro conjunto D y para cualquier par de aplicaciones $u : A \longrightarrow D$ y $v : B \longrightarrow D$ que cumplen que $u \circ f = v \circ g$, existe una única aplicación*

$$[u, v]_C : A \amalg_C B \longrightarrow D$$

que cumple que $\iota_1 \circ [u, v]_C = u$ y $\iota_2 \circ [u, v]_C = v$.

Esta aplicación se construye utilizando la propiedad universal del coproducto en Set*. Es fácil ver que $[u, v]_C$ está bien definida, es única y cumple las propiedades vistas antes.*

4.4 Límites y colímites en la categoría Set

En esta sección se darán algunas características propias de la categoría de conjuntos referentes a los límites y colímites, en concreto que Set admite todos los límites y colímites pequeños, a su vez que estos pueden resumirse en ser expresados exclusivamente por dos límites y colímites muy concretos.

Definición 4.0.11. *Un diagrama se denomina* ***pequeño*** *si éste es indexado por una categoría pequeña.*

Definición 4.0.12 (Categoría completa y cocompleta)**.** *Una categoría* C *se dice* ***completa*** *si para todos sus diagramas pequeños existen todos los límites que se describieron en la Sección 4.1, mientras que, la categoría* C *es* ***cocompleta*** *si para todos sus diagramas pequeños existen todos los colímites sobre* C*.*

Teorema 4.1. *La categoría* Set *es completa.*

Demostración. Un límite la categoría Set, tal como se vío en la Definición 4.0.4, considerando un diagrama pequeño $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{Set}$ es una representación

$$\mathsf{Set}(X, \lim F) \cong \mathrm{Conos}(X, F)$$

Ahora, para un singleton 1 se tiene que

$$\lim F \cong \mathsf{Set}(1, \lim F) \cong \mathrm{Conos}(1, F).$$

Ahora, a partir de lo anterior, puede definirse el límite de un diagrama pequeño como $\lim F = \mathrm{Conos}(1, F)$. Ahora bien, hay que recordar que

$$\lim F = \mathrm{Conos}(1, F) = \{\mu \mid 1 \Longrightarrow F : \ \mu \text{ es transformación natural}\}.$$

Además, para cada $j \in \mathsf{J}$ podemos definr la aplicación $\lambda^j : \lim F \longrightarrow F(j)$ como

$$\begin{array}{rccc} \lambda^j : & \lim F & \longrightarrow & F(j) \\ & \mu & \longmapsto & \mu^j. \end{array}$$

Aquí hay que entender a $\mu^j : 1 \Longrightarrow F(j)$, como un elemento en $F(j)$. Ahora se buscará comprobar que la família indexada $\left(\lambda^j : \lim F \longrightarrow F(j)\right)_{j \in \mathsf{J}}$ hace que para cada morfismo $f : j \longrightarrow k$ en J hay que comprobar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \lim F \arrow[dl, "\lambda^j"'] \arrow[dr, "\lambda^k"] & \\ F(j) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(k) \end{tikzcd}$$

Sea $\mu \in \lim F$, donde como se vio anteriormente $\mu : 1 \Longrightarrow F$ es una transformación natural y considerando el singleton canónico $1 = \{0\}$, donde $0 = \emptyset$, entonces se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{J} & & \mathsf{Set} & \\ i \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[rr, "\mu^j"] \arrow[d, "\mathrm{id}^1"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & F(j) \arrow[d, "F(f)"] \\ j & 1 \arrow[rr, "\mu^k"'] & & F(k) \end{tikzcd}$$

Con esto puede verse entonces que

$$\begin{aligned} F(f)\left(\lambda^j(\mu)\right) =& F(f)\left(\mu^j\right) && \text{(Definición de } \lambda^j) \\ =& \mu^k && \text{(Por transformación natural } \mu) \\ =& \lambda^k(\mu) && \text{(Definición de } \lambda^k) \end{aligned}$$

Propiedad universal: Sea $G : X \Longrightarrow F$ un cono, hay que ver que existe una única aplicación $k : X \longrightarrow \lim F$ que sea morfismo de conos. Todo elemento $x \in X$ puede verse como una aplicación $x : 1 \longrightarrow X$. De esta manera puede considerarse el cono $\zeta^x : 1 \Longrightarrow F$ definido como la restricción del cono ζ sobre la aplicación x. Teniendo en cuenta que ζ es una transformación natural, puede verse la restricción a x en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{J} & & & \mathsf{Set} & & \\
i \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[rr, "x"] \arrow[d, "\mathrm{id}^1"'] \arrow[rrrr, bend left] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[rr, "\zeta^j"] \arrow[d, "\mathrm{id}^X"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & F(j) \arrow[d, "F(f)"] \\
j & 1 \arrow[rr, "x"'] \arrow[rrrr, bend right] & & X \arrow[rr, "\zeta^k"'] & & F(k)
\end{tikzcd}
$$

El diagrama anterior justifica que $\zeta : 1 \Longrightarrow F$ es en efecto una transformación natural. Ahora, se define la aplicación entre conos $r : X \longrightarrow \lim F$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
r \colon \quad X &\longrightarrow \lim F \\
X &\longmapsto \zeta^x.
\end{aligned}
$$

Esto define un morfismo entre conos. Ahora, si fijamos un objeto j en la categoría J, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\lambda^j\,(r(x)) &= \lambda^j(\zeta^x) && \text{(Definición de } r) \\
&= (\zeta^x)_j && \text{(Definición de } \lambda^j) \\
&= \zeta^j \circ x && \text{(Por restricción a } x)
\end{aligned}
$$

Ahora solo falta ver que en efecto esta aplicación r es la única que cumple con la propiedad universal. Se asumirá que existe otra aplicación $r' : X \longrightarrow \lim F$ que cumple que $\lambda^j\,(r'(x)) = \zeta^j \circ x$. Por la definición de λ^j se tiene que $\lambda^j(r'(x)) = r'(x)^j = \zeta^j \circ x = (\zeta^x)^j = (r(x))_j$. Con esto se tiene como consecuencia que $r'(x) = r(x)$ para todo elemento x en X es decir $r = r'$. $\square$

Teorema 4.2. *Todo límite pequeño en* Set *se puede expresar como el igualador de un par de aplicaciones entre productos.*

Demostración. Por el Teorema 4.1 los elementos del límite del diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{Set}$ se corresponden con conos de cima 1 sobre F. Esto consiste en una família de aplicaciones λ^j del límite para cada $F(j)$ indexado por el elemento j en la categoría pequeña J. La família $\left(\lambda^j\right)_{j \in \mathsf{J}}$ es un cono si para cada $f : j \longrightarrow k$ morfismo en J,

$$
f : j \longrightarrow k
$$

$$
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "\lambda^j"'] \arrow[dr, "\lambda^k"] & \\
F(j) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(k)
\end{tikzcd}
$$

Consideramos la siguiente notación. Para un morfismo f se denominarán $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{cod}(f)$ al dominio y el codomio respectivamente. Se tiene entonces que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\lambda^{\mathrm{dom(f)}}"'] \arrow[dr, "\lambda^{\mathrm{cod}(f)}"] & \\ F(\mathrm{dom}(f)) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(\mathrm{cod}(f)) \end{tikzcd}$$

con lo cual se tiene que, $F\left(\lambda^{\mathrm{dom}(f)}\right) = \lambda^{\mathrm{cod}(f)}$. Con la información anterior es suficiente empezar a construir un igualador entre dos productos. En primer lugar se tendría el producto de los $F(j)$ definido de la siguiente manera:

$$\textstyle\prod_{j\in \mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j) = \left\{ \left(\lambda^j\right)_{j\in\mathsf{J}} \right\}$$

Ahora, considerando el producto $\prod_{f\in\mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(\mathrm{cod}(f))$, puede construirse un par de aplicaciones paralelas $c, d : \prod_{j\in\mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j) \longrightarrow \prod_{f\in\mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(\mathrm{cod}(f))$. Donde un objeto en el dominio de los morfismos paralelos, entendidos como las piernas de un cono de 1 en F, es enviado por medio de las aplicaciones de dos manera distintas como se ve a continuación,

$$\begin{array}{rccc} c\colon & \prod_{j\in\mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j) & \longrightarrow & \prod_{j\in\mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(\mathrm{cod}(f)) \\ & \langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}} & \longmapsto & \left(\lambda^{\mathrm{cod}(f)}\right)_{f\in\mathrm{Hom}(\mathsf{J})}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} d\colon & \prod_{j\in\mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j) & \longrightarrow & \prod_{j\in\mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(\mathrm{cod}(f)) \\ & \langle\lambda_j\rangle_{j\in\mathsf{J}} & \longmapsto & \left(F(f)\left(\lambda^{\mathrm{dom}(f)}\right)\right)_{f\in\mathrm{Hom}(\mathsf{J})}. \end{array}$$

Ahora el igualador de c y d puede verse como a continuación:

$$\mathrm{Eq}(c,d) = \left\{ \lambda_j \in \prod_{j\in\mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j) \;\middle|\; c(\lambda_j) = d(\lambda_j) \right\},$$

donde $\mathrm{Eq}(c,d)$ es subconjunto de $\prod_{f\in\mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j)$. Lo anterior, junto con las formas en cómo se han explicitado anteriormente cómo funcionan los productos e igualadores en la categoría Set, se prueba finalmente que $\lim_{\mathsf{J}} F$ es el igualador de c y d, y tendría la siguiente estructura.

$$\begin{tikzcd} \lim_{\mathsf{J}} F \arrow[r] & \prod_{j\in\mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j) \arrow[r, shift left, "c"] \arrow[r, shift right, "d"'] & \prod_{f\in\mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(\mathrm{cod}(f)). \end{tikzcd}$$

Esto concluye la demostración. □

Ahora bien, existe una forma de realizar una generalización del teorema anterior a categorías además de Set, habría que entender los morfismos c y d como parte de las proyecciones de límite producto π_f, tal como se ve en la siguiente gráfica:

$$\begin{tikzcd}
 & & & F(\mathrm{cod}(f)) \\
\lim_{\mathsf{J}} F \arrow[r] & \prod_{j\in \mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j) \arrow[urr, "\pi_{\mathrm{cod}(f)}"] \arrow[rr, shift left, "c"] \arrow[rr, shift right, "d"'] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{dom}(f)}"'] & & \prod_{f\in \mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(\mathrm{cod}(f)) \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[d, "\pi_f"] \\
 & F(\mathrm{dom}(f)) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(\mathrm{cod}(f))
\end{tikzcd}$$

Figura 4.13: Componentes de límites en Set.

Ahora bien, lo anterior nos muestra cómo todos los límites para diagramas dentro de la categoría Set pueden expresarse como el límite igualador de dos productos y con esto junto con el Teorema 4.1 se tendrían dos formas de en que esta categoría es completa. Ahora es de interés también estudiar la forma en que se pueden construir todos los colímites dentro de esta categoría.

En primera instancia se definirá como es el comportamiento entre funtores y límites en diagramas.

Definición 4.2.1. *Para toda clase de diagramas $K : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ y para un funtor $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$, se dice que F*

1. ***Preserva límites:*** *Si, para cualquier diagrama $K : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ y un cono límite sobre K, la imagen de este cono define un cono límite sobre el diagrama composición $F \circ K : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{D}$.*

2. ***Refleja límites:*** *Si todo cono sobre un diagrama $K : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ para el que su imagen mediante F es un cono límite para el diagrama composición $F \circ K : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{D}$ es un cono límite para K.*

3. ***Crea límites:*** *Si siempre que la composición $F \circ K : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{D}$ tiene un límite en D, hay un cono límite sobre $F \circ K$ que puede alzarse a un cono límite sobre K, además, el funtor F refleja los límites en la clase de diagramas.*

Es aún más importante el comprender cómo la definición puede dualizarse para describir lo que significa el que un funtor preserve, refleje y cree colímites*

Se considera la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Si $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ crea límites para una clase particular de diagramas en C y D tiene los límites de esos diagramas, entonces C tiene los límites de esos diagramas y F los preserva.*

Demostración. Sea $K : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ un diagrama en la clase. Sea además $\mu : D \Longrightarrow F \circ K$ un límite en D. Dado que F crea los límites, entonces existe un cono límite $\lambda : C \Longrightarrow K$ en C para el que su imagen mediante F es isomorfo a μ. Esto dice que C tiene estos límites, en otras palabras, el funtor refleja los límites.

*La definición. 4.2.1 puede también generalizarse para otros comportamientos que afectan a los funtores, como en la Proposición 2.0.5 se ve como los funtores preservan isomorfismos.

Ahora, para analizar si F preserva los límites, se considera un cono límite $\lambda' : C' \Longrightarrow K$ por la Proposición 4.0.3, los conos λ y λ' son isomorfos en C. Entonces por la definición 4.2.1 y al ser F un funtor este preserva isomorfismos.

De esta manera $F(\lambda') : F(C') \Longrightarrow F \circ K$ y la imagen mediante F de $\lambda : C \Longrightarrow K$, que ya se habia visto previamente que era isomorfo a $\mu : D \Longrightarrow F \circ K$, son isomorfas. Finalmente, con lo anterior se tiene que la imagen de $\lambda' : C' \Longrightarrow K$ mediante F es un límite en D. Con lo que se concluye que F preserva límites. $\square$

Teorema 4.3. *Para cualquier diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ cuyo límite existe en C, donde esta categoría es localmente pequeña, hay un isomorfismo natural*

$$\mathsf{C}(X, \lim_{\mathsf{J}} F) \cong \lim_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(X, F\_)$$

Este isomorfismo natural expresa la propiedad universal de representabilidad del límite.

Demostración. Se fijará un diagrama pequeño $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ en una categoría localmente pequeña y un objeto X de C. Se considera la composición de funtores

$$\mathsf{C}(X, -) \circ F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set},$$

de la siguiente mannera

$$\mathsf{C}(X, F\_) : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

Esto es un diagrama en la categoría Set. Debido a que la categoría Set es completa entonces el diagrama $\mathsf{C}(X, F\_)$ admite un límite.

Ahora, un elemento en el conjunto $\lim_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(X, F\_)$ es un elemento del límite producto

$$\textstyle\prod_{j \in \mathsf{J}} \mathsf{C}(X, F(j)),$$

esto es, una tupla de morfismos $\left(\lambda^i, \lambda^j, F(f)\right)$, donde $(\lambda^j : X \longrightarrow F(j))_{j \in \mathsf{J}}$ donde tiene que cumplirse que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\lambda^j"'] \arrow[dr, "\lambda^i"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
F(j) & & F(i) \arrow[ll, "F(f)"]
\end{tikzcd}$$

Con lo anterior se ve que, un elemento de $\lim_{\mathsf{J}}(X, F\_)$ es precisamente un cono sobre F con cima X. Entonces con esto se cumple el isomorfismo

$$\lim_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(X, F\_) \cong \mathrm{Conos}(X, F).$$

Falta por ver que este isomorfismo es natural en X. Dados X, Y un par de objetos en C y dado $h : X \longrightarrow Y$ un morfismo en C, se construye el diagrama de la transformación natural como sigue

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C} & & \mathsf{Set} & \\
X \arrow[dd, "h"'] & \lim_{\mathsf{J}}(X, F_) \arrow[rr, "\alpha^X"] & & \mathrm{Conos}(X, F) \\
 & & \circlearrowright & \\
Y & \lim_{\mathsf{J}}(Y, F_) \arrow[uu, "\lim_{\mathsf{J}}(h, F_)"] \arrow[rr, "\alpha^Y"'] & & \mathrm{Conos}(Y, F) \arrow[uu, "\mathrm{Conos}(h, f)"']
\end{tikzcd}$$

Hay que mostrar en primer lugar que la aplicación $\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(\_, F\_)$ cumple con ser un funtor. Para los objetos se tiene que, siendo Y un objeto en C este es enviado por el funtor al objeto $\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(Y, F)$ donde sus elementos tienen la forma que sigue

$$\left(\mu^j : Y \longrightarrow F(j)\right)_{j\in\mathsf{J}},$$

ahora, el morfismo h es enviado al morfismo $\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(h, F)$ definido como sigue

$$\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(h, F)\,(\mu) = (\mu_j \circ h : X \longrightarrow F(j))_{j\in\mathsf{J}}$$

Ahora se verá que la aplicación esta bien definida. La colección de transformaciones naturales $(\mu_j : Y \longrightarrow F(j))_{j\in\mathsf{J}}$ está condicionada a satisfacer la condición de que. para cada $f : j \longrightarrow k$ en J. el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "\lambda^j"'] \arrow[dr, "\lambda^k"] & \\
F(j) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(k)
\end{tikzcd}$$

Ahora se verá que $(\mu_j \circ h : X \longrightarrow F(j))_{j\in\mathsf{J}}$ también es un elemento de $\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(X, F\_)$. Sea $f : j \longrightarrow k$ un morfismo en la categoría J puede construirse el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & Y \arrow[dl, "\mu^j"'] \arrow[dr, "\mu^k"] & \\
F(j) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(k)
\end{tikzcd}$$

Puede notarse que

$$\begin{aligned}
F(f) \circ (\mu^j \circ h) &= (F(f) \circ \mu^j) \circ h && \text{(Por transitividad)} \\
&= \mu^k \circ h.
\end{aligned}$$

Con lo anterior, se tiene que $\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(\_, F\_)$ está bien definido.

Ahora hay que probar que la aplicación $\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(\_, F\_)$ es en efecto un funtor, para esto se comprobará que preserva la identidad y la composición.

Preserva la identidad: Sea $\mathrm{id}^Y : Y \longrightarrow Y$ el morfismo identidad para Y en C. A continuación se verá como se comporta el funtor al aplicársele este funtor queda tal que, $\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(\mathrm{id}^Y, F) = \mu^j \circ \mathrm{id}^Y : Y \longrightarrow F(j)$, en el siguiente diagrama se puede ver como es el cono resultante

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "\mathrm{id}^Y"'] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& Y \arrow[dl, "\mu^j"'] \arrow[dr, "\mu^k"] & \\
F(j) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(k)
\end{tikzcd}$$

Con lo que se llega a que

$$\begin{aligned}
\lim\nolimits_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(\mathrm{id}^Y, F)\,(\mu) &= \big(\mu^j : Y \longrightarrow F(j)\big) \\
&= \lim\nolimits_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(Y, F) \\
&= \mathrm{id}^{\lim_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(h,F)(\mu)},
\end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que el funtor preserva la identidad.

Preserva la composición: Sean $h : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos en C. En primera instancia la siguiente gráfica muestra el funtor de la composición $\lim_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(g \circ h, F)\,(\mu)$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "h"'] \arrow[dddl, bend right] \arrow[dddr, bend left] & \\
& Y \arrow[d, "g"'] \arrow[ddl, bend right, "\pi^j"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi^k"] & \\
& Z \arrow[dl, "\mu^j"'] \arrow[dr, "\mu^k"] & \\
F(j) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(k)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "g \circ h"'] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& Z \arrow[dl, "\mu^j"'] \arrow[dr, "\mu^k"] & \\
F(j) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(k)
\end{tikzcd}$$

Con lo anterior puede deducirse que

$$\lim\nolimits_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(g \circ h, F)\,(\mu) = \mu_j \circ (g \circ h) : X \longrightarrow F(j)$$

Por otra parte puede evidenciarse que existe una transformación natural $(\pi^j : Y \longrightarrow F(j)$ que cumple que $\pi^j = (\mu^j \circ g)$ obteniendo así que:

$$\begin{aligned}
\lim\nolimits_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(h, F) \circ \lim\nolimits_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(g, F)\,(\mu) &= \lim\nolimits_{\mathsf{J}} \mathsf{C}(h, F)\,(\pi) \\
&= \pi^j \circ h : X \longrightarrow F(J).
\end{aligned}$$

Con lo que se comprueba que la asignación preserva la composición, y finalmente esta es un funtor.

Ahora, se verá que en efecto el diagrama que representa la transformación natural α conmuta. Tomando un elemento en el funtor $\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(Y, F\_)$, esto es, $(\mu_j : Y \longrightarrow F(j))_{j\in\mathsf{J}}$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\alpha^X \circ \lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(h, F)\,(\mu) &= (\mu^j \circ h : X \longrightarrow F_j)_{j\in\mathsf{J}}\\ &= \mathrm{Conos}(h, f) \circ \alpha^Y\,(\mu)\,.\end{aligned}$$

Lo cual comprueba finalmente que el isomorfismo es una transformación natural.

Ahora, como el límite de F se define como un objeto que representa el funtor Conos$(_, F)$, esto es, un objeto denotado $\lim_{\mathsf{J}}F$, para el que $\mathsf{C}(\_, \lim_{\mathsf{J}}F) \cong \mathrm{Conos}(\_, F)$, con lo que se concluye finalmente que

$$\mathsf{C}(X, \lim_{\mathsf{J}}F) \cong \lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(X, F\_).$$

Esto concluye la demostración del teorema. □

Lema 4.3.1. *Un funtor fiel y pleno refleja límites y colímites.*

Demostración. Sea $F\colon \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ un funtor fiel y pleno. Sea $K\colon \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ un diagrama. Sea $\lambda : X \Longrightarrow K$ un cono sobre C de forma que $F(\lambda)$ es un cono límite en la categoría D. Asumimos que existe otro cono κ en C de forma que $F(\kappa)$ es un cono en D, de esta manera por la propiedad universal de $F(\lambda)$ en D se tiene que existe un único morfismo

$$d : F(\kappa) \longrightarrow F(\lambda).$$

Ahora bien, como el funtor F es fiel, se cumple que existe un único morfismo $f : \kappa \longrightarrow \lambda$ en C tal que $F(f) = d$, con esto se tiene que λ tiene la propiedad universal de ser también un cono límite en C. Con esto se concluye que el funtor F refleja límites.

La demostración para colímites es análoga. □

Proposición 4.3.1. *Sea* C *una categoría localmente pequeña, los funtores representables covariantes* $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ *preservan límites que existen en* C *y los envían a límites en* Set.

Demostración. Sea X un objeto en C. El Teorema 4.3 dice que la imagen bajo $\mathsf{C}(X, -)$ de un límite de un diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ es un límite en Set del funtor composición

$$\mathsf{C}(X, -) \circ F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{Set}.$$

Además, el funtor $\mathsf{C}(X, -)$ preserva las piernas del cono límite porque, por construcción, el isomorfismo natural del Teorema 4.3 conmuta con las aplicaciones naturales del producto.

$$\begin{tikzcd}
\lim_{\mathsf{J}}\mathsf{C}(X, F_) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr] & \mathrm{Conos}(X, F) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & \mathsf{C}(X, \lim_{\mathsf{J}}F) \arrow[dl] \\
& \prod_{j\in\mathsf{J}} \mathsf{C}(X, F_j) &
\end{tikzcd}$$

Esto concluye la demostración. □

Una segunda interpretación del Teorema 4.3, nos dice que el funtor de representación contravariante $\mathsf{C}(-, \lim F)$ asociado al límite, cuando se considera como un objeto de la categoría $\mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$, es el límite del diagrama compuesto

$$G \circ F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$$

los objetos de esta composición son funtores representables $\mathsf{C}(-, F(j))$. Esto lleva a concluir que, el embebimiento de Yoneda $G : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ preserva todos los límites.

Teorema 4.4. *Sea* C *un categoría localmente pequeña, para esta se cumple que:*

1. *Los funtores representables covariantes* $\mathsf{C}(X,-)$ *preservan todos los límites que existen en* C.

2. *El embebimiento de Yoneda* $G : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$ *preserva y refleja límites.*

El siguiente teorema funciona como un dual para el Teorema 4.3, en este caso relacionando el funtor de representación

Teorema 4.5. *Para cualquier diagrama* $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ *cuyos colímites existen, hay un isomorfismo*

$$\mathsf{C}(\text{colím}_{\mathsf{J}} F, X) \cong \lim_{\mathsf{J}^{\mathrm{op}}} \mathsf{C}(F\_, X)$$

Demostración. Dualizando la forma de construir el funtor representable para límites a partir de lo visto en el Teorema 4.3, puede obtenerse el funtor de representación para colímites. Sea $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ un funtor y X un objeto en C, además del funtor $\mathsf{C}(-,X) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ puede considerarse el funtor de composición

$$\mathsf{C}(F\_, X) : \mathsf{J}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}.$$

Debido al Teorema 4.1 se tiene que existen los límites para la categoría Set y el Teorema 4.2 da la estructura para construir estos límites. Un elemento en $\lim_{\mathsf{J}^{\mathrm{op}}} \mathsf{C}(F\_, X)$ es un elemento del producto

$$\prod_{j \in \mathsf{J}^{\mathrm{op}}} \mathsf{C}(F(j), X).$$

Los elementos dentro del producto son una família de morfismos $(\lambda^j : F(j) \longrightarrow X)_{j\in\mathsf{J}}$ sujeto a la condición de que para cada morfismo $f : j \longrightarrow k$ en J hace que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
F(j) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & & F(k) \arrow[dl, "\lambda_k"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Aqui se ve que precisamente un elemento de $\lim_{\mathsf{J}^{\mathrm{op}}} \mathsf{C}(F\_X)$ es un cono bajo el diagrama F con base X. Con lo que se concluye que

$$\lim_{\mathsf{J}^{\mathrm{op}}} \mathsf{C}(F\_, X) \cong \text{Conos}(F, X) \cong \mathsf{C}(\text{colím}_{\mathsf{J}}, X).$$

Esto concluye la demostración. □

El teorema 4.4 puede encontrar su dual en el siguiente:

Teorema 4.6. *Sea* C *un categoría localmente pequeña, para esta se cumple que:*

1. *Los funtores representables contravariantes* $\mathsf{C}(-,X)$ *lleva colímites en* C *a límites en* Set.

2. *El embebimiento de Yoneda* $G : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}^{\mathsf{C}}$ *preserva y refleja límites.*

Un último enunciado importantes antes de llegar a mostrar el Teorema 4.7, dice que una categoría de funtores C^{D} "hereda" los límites y colímites que esten en la categoría C.

Proposición 4.6.1. *Si* D *es una categoría pequeña, entonces el functor de olvido* $U : \mathsf{C}^{\mathsf{D}} \longrightarrow \mathsf{C}^{\mathrm{Obj}(\mathsf{D})}$ *crea estrictamente todos los límites y colímites que existen en* C. *Estos límites se definen por objetos, esto es, que para cada* $D \in \mathsf{D}$, *el functor* $ev_D : \mathsf{C}^{\mathsf{D}} \longrightarrow \mathsf{C}$ *preserva todos los límites y colímites existentes en* C.

Demostración. Asumiendo que la categoría de funtores $\mathsf{C}^{\mathrm{Obj}(\mathsf{D})}$ es isomorfo al producto $\mathrm{Obj}(\mathsf{D})-$indexado de la categoría C consigo misma visto como la categoría producto (Definición 2.0.11). Ahora bien, los productos categoriales definen a su vez productos como límites.

$$\begin{tikzcd}
& \prod_{D\in \mathrm{Obj}(\mathsf{D})} \mathsf{C}^D \arrow[dl, "\pi_D"'] \arrow[dr, "\pi^{D'}"] & \\
\mathsf{C}^D & \cdots & \mathsf{C}^{D'}
\end{tikzcd}$$

A partir de la propiedad universal de los productos un diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \prod_{\mathrm{Obj}(\mathsf{S})} \mathsf{C}$ es realmente una familia $\mathrm{Obj}(\mathsf{S})-$indexada de diagramas $\left(F^D : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}\right)_{D\in \mathrm{Obj}\mathsf{D}}$, dado que $\mathsf{C}^{\mathrm{Obj}(\mathsf{D})}$ es isomorfa al producto, cada uno de los límites de ambos coincide.

En particular $ev^{\mathsf{D}} : \mathsf{C}^{\mathrm{Obj}(\mathsf{D})} \longrightarrow \mathsf{C}$ preserva todos los límites.

Una forma alternativa de analizar el hecho de que el funtor $ev_D : \mathsf{C}^{\mathsf{D}} \longrightarrow \mathsf{C}$, preserva los límites y colímites se puede dar con un razonamiento grafic. Partiendo del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}^{\mathsf{D}} \arrow[r, "U"] \arrow[drr, "ev_D"'] & \mathsf{C}^{\mathrm{Obj}(\mathsf{D})} \arrow[r, "\cong"] & \prod_{\mathrm{Obj}(\mathsf{D})} \mathsf{C} \arrow[d, "\pi^D"] \\
& & \mathsf{C}
\end{tikzcd}$$

donde π_D es la proyección D-ésima del producto en la categoría C. Un diagrama $G^D : \mathsf{J} \longrightarrow \prod_{D\in \mathrm{Obj}(\mathsf{D})}$ tiene límites si todos los diagramas $\left(F^D : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}\right)_{D\in \mathrm{Obj}(\mathsf{D})}$, tienen límites y estos cumplen con

$$\lim_{\mathsf{J}} G^D = \prod_{D\in \mathrm{Obj}(\mathsf{D})} \lim_{\mathsf{J}} F^D.$$

En particular se tiene que la proyección π^D preserva los límites.

Asi se tiene que para un diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$, tal que $U \circ F$ tiene un cono límite, éste es enviado a traves de la composición de los funtores de la parte superior de la grafica anterior. Por la conmutatividad de esta gráfica se tiene entonces que, este límite tambien se conserva al ser enviado por el funtor ev_D.

Ahora, para mostrar que $U : \mathsf{C}^{\mathsf{D}} \longrightarrow \mathsf{C}^{\mathrm{Obj}(\mathsf{D})}$ crea todos los límites, debemos mostrar que para cualquier diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}^{\mathsf{D}}$, la familia $\mathrm{Obj}(\mathsf{D})$-indexada de objetos $\lim_{\mathsf{J}} F(j)(D)$ extiende a un funtor en D evaluado en C, donde las propiedades universales del limite es usado para definir el comportamiento del funtor en un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en D. Con lo anterior se tiene el funtor $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}^{\mathsf{D}}$hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\lim_{\mathsf{J}} F(j)(A) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^j(A)"'] & \lim_{\mathsf{J}} F(j)(B) \arrow[d, "\pi^j(B)"] \\
F(j)(A) \arrow[r, "F(j)(f)"'] & F(j)(B)
\end{tikzcd}$$

Esto concluye la demostración. □

A partir de los teoremas previos se llega a otro resultado importante, donde, al igual que para los límites puede generalizarse la construcción de los colímites para verlos como una relación entre coigualadores y coproductos.

Teorema 4.7. *El colímite de todo diagrama pequeño $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ se puede expresar como el coigualador de un par de morfimos entre coproductos, tal como sigue*

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{j \in \mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(\mathrm{dom}(f)) \arrow[r, shift left, "c"] \arrow[r, shift right, "d"'] & \coprod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(f) \arrow[r] & \mathrm{colim}_{\mathsf{J}} F
\end{tikzcd}$$

Demostración. Considerando el diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$ y partiendo de la gráfica dual de la vista en la Figura 4.13

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\mathrm{dom}(f)) \arrow[dl, "\iota_{\mathrm{dom}(f)}"'] \arrow[d, "\iota_f"] \\
\lim_{\mathsf{J}} F & \coprod_{j \in \mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j) \arrow[l] & \coprod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(\mathrm{dom}(f)) \arrow[l, shift right, "c"'] \arrow[l, shift left, "d"] \\
 & F(\mathrm{cod}(f)) \arrow[u, "\iota_{\mathrm{cod}(f)}"] \arrow[r, "F(f)"'] & F(\mathrm{dom}(f)) \arrow[u, "\iota_f"']
\end{tikzcd}$$

Figura 4.14: Componentes de colímites en Set.

La componente de d en un morfismo f en J es la inclusión $\iota_{\mathrm{dom}(f)}$, mientras que la componente de c en un morfismo f en J se define como la composición de $F(f)$ con la incluión $\iota_{\mathrm{cod}(f)}$.

Ahora, por la hipótesis en C, el coigualador de c y d existe en C. Se busca llegar a que el objeto define un colímite en C. Gracias al segundo apartado del Teorema 4.6 el embebimiento contravariante de Yoneda $G : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}^{\mathsf{C}}$ envía el diagrama de coigualador del anterior diagrama al diagrama del igualador en $\mathsf{Set}^{\mathsf{C}}$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathsf{C}\left(F(\mathrm{dom}(f)), X\right) \\
\mathsf{C}(C,X) \arrow[r] & \mathsf{C}\left(\coprod_{j\in \mathrm{Obj}(\mathsf{J})} F(j), X\right) \arrow[urr, "\mathsf{C}\left(\iota_{\mathrm{dom}(f)}, X\right)"] \arrow[rr, shift left, "\mathsf{C}(c,X)"] \arrow[rr, shift right, "\mathsf{C}(d,X)"'] \arrow[d, "\mathsf{C}\left(\iota_{\mathrm{cod}(f)}, X\right)"'] & & \mathsf{C}\left(\coprod_{f\in \mathrm{Hom}(\mathsf{J})} F(\mathrm{dom}(f)), X\right) \arrow[u, "\mathsf{C}(\iota_f, X)"'] \arrow[d, "\mathsf{C}(\pi_f, X)"] \\
 & \mathsf{C}\left(F(\mathrm{cod}(f)), X\right) \arrow[rr, "\mathsf{C}(F(f),X)"'] & & \mathsf{C}\left(F(\mathrm{dom}(f)), X\right)
\end{tikzcd}
$$

Ahora, por el primer apartado del Teorema 4.6 se cumple que, para los funtores contravariantes en el diagrama anterior, los límites son enviados a límites tal como se ve en el siguiente diagrama isomorfo

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathsf{C}\left(F(\mathrm{cod}(f)), X\right) \\
\mathsf{C}(C,X) \arrow[r] & \prod_{j\in \mathrm{Obj}(\mathsf{J}^{\mathrm{op}})} \mathsf{C}\left(F(j), X\right) \arrow[urr, "\pi_{\mathrm{cod}(f)}"] \arrow[rr, shift left, "c"] \arrow[rr, shift right, "d"'] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{dom}(f)}"'] & & \prod_{f\in \mathrm{Hom}(\mathsf{J}^{\mathrm{op}})} \mathsf{C}\left(F(\mathrm{cod}(f)), X\right) \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[d, "\pi_f{,}X"] \\
 & \mathsf{C}\left(F(\mathrm{dom}(f)), X\right) \arrow[rr, "\mathsf{C}(F(f),X)"'] & & \mathsf{C}\left(F(\mathrm{cod}(f)), X\right)
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.15: Diagrama de componentes de Límites.

Cuando X está fijo la Proposición 4.6.1 nos afirma que el funtor evaluación

$$ev_X : \mathsf{Set}^{\mathsf{C}} \longrightarrow \mathsf{Set},$$

donde podría verse este funtor como la flecha que conecta el funtor de representación y el del producto,

$$ev_X : \mathsf{C}(-,X) \longrightarrow \prod_{j\in \mathrm{Obj}(\mathsf{J}^{\mathrm{op}})} \mathsf{C}\left(F(j), X\right),$$

lo anterior hace que la Figura 4.15 defina un diagrama de igualador en Set.

Por el Teorema 4.2 aplicado al funtor $\mathsf{C}(F\_, X) : \mathsf{J}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$, puede verse en el diagrama de la Figura 4.15 como el diagrama cuyo igualador que define el límite $\lim_{\mathsf{J}^{\mathrm{op}}} \mathsf{C}(F\_, X)$. Entonces se tiene el isomorfismo

$$\lim_{\mathsf{J}^{\mathrm{op}}} \mathsf{C}(F\_, X) \cong \mathsf{C}(C, X)$$

para cada objeto X en C. Estos isomorfismos, estan definidos de forma que para cada objeto X en C, se juntan en un isomorofismo en $\mathsf{Set}^{\mathrm{Obj}(\mathsf{C})}$ para el que nuevamente puede aplicarse la Proposición 4.6.1 con el funtor de olvido

$$U : \mathsf{Set}^{\mathsf{C}} \longrightarrow \mathsf{Set}^{\mathrm{Obj}(\mathsf{C})},$$

para llegar a que $\mathsf{C}(C,-)$ es límite del diagrama J^{op}-indexado de funtores covariantes $\mathsf{C}(C,-)$. Ahora, el Teorema 4.5 dice que que el coigualador de C es el colímite del diagrama $F : \mathsf{J} \longrightarrow \mathsf{C}$. □

Finalmente con esto se llega al otro gran resultado del presente trabajo, el cual es consecuencia directa del teorema previo.

Corolario 4.7.1. *La categoría* Set *es cocompleta.*

Demostración. En consecuencia del teorema anterior y del hecho de que la categoría Set tiene coproductos y coigualadores, se tiene que todos los colímites pueden construirse a partir de estos dos colímites. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

Para concluir el presente trabajo, vale la pena destacar cómo se logró el objetivo planteado inicialmente, que era hacer un recorrido en un área del conocimiento tan abstracto como lo es la Teoría de Categorías. Partiendo de una adecuada construcción de las bases necesarias para la comprensión del lector que plantee iniciarse en esta teoría. Los ejemplos y sobre todo las gráficas que reflejan los comportamientos de los elementos explorados ayudan a facilitar esta comprensión. Valdría la pena mencionar lo importante de la librería **tikzcd** de LaTeX para poder realizar todas las gráficas necesarias de forma sencilla y visualmente agradable.

Puede afirmarse que se logró también introducir de manera adecuada las bases necesarias para la construcción de los límites y colímites categoriales. Se comprende cómo, a partir del capítulo 3, el seguimiento del trabajo puede tornarse más complicado para un lector poco avezado en el área, por lo cual, se hace más importante el uso de las gráficas que reflejen claramente las ideas de lo que se está construyendo; y como dificultad en la realización del presente trabajo, que vale que quede como reflexión, queda el hecho de la suma importancia del cuidado a la hora de la construcción de ciertos funtores y transformaciones naturales.

Se destaca la importancia que tuvo para la segunda sección el concepto de funtor representable que se desprende del funtor de representación que se da en la sección introductoria, con este se pudo construir el primer resultado interesante del trabajo, el Lema de Yoneda, el cual da pie a las propiedades universales. Este último siendo base fundamental para el concepto de los límites.

Como reflexión final, en el presente trabajo no solo se estudió de manera totalmente abstracta el concepto de los límites y colímites, sino que en primer lugar, se mostró una seríe de ejemplos en la categoría Set (producto, suma amalgamada, igualador, y sus duales) para finalmente comprobar cómo, para la categoría de conjuntos Set, es posible hallar todos los límites. con esto se llega afirmar cómo esta categoría es completa; para estos casos de límites en conjuntos se usó el texto Vidal [2010]. Además de lo anterior, se llega a evidenciar cómo cualquier límite en la categoría de conjuntos puede expresarse como un igualador entre dos productos. A partir de esto último también se llegó a analizar como se crean estos límites para ciertos funtores, con el fin de dualizar el resultado de la completitud de Set, para poder a afirmar que esta categoría es cocompleta, es decir, que admite todos los colimites y estos pueden expresarse como el coigualador de dos coproductos.

El trabajo fue una exploración interesante a la teoría de categorías, sin embargo, hay otras formas de ahondar en esta teoría por ejemplo, explorando la relación de dos categorías como el caso de la geometría algebraíca, tambien puede hacerse una exploración mas completa del comportamiento de límites y colímites en categorías como la topológica, anillos o grupos, aunque no se haya estudiado en este trabajo, existen diversos textos que el lector puede explorar donde se ahondan conceptos para diversas categorías por ejemplo en Vidal [2010] y también en Riehl [2014] se ven además ejemplos de límites para entre otras categorías, Top y también cómo esta es completa.

Capítulo 6

Bibliografía

S. M. Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer-Verlag, New York, second edition.

F. Lawvere and S. Schanuel. *Matemáticas conceptuales: una primera introducción a categorías*. Ciencia y técnica. Siglo XXI, 2002. ISBN 9789682323911. URL `https://books.google.es/books?id=QPEIWEOFVvUC`.

E. Riehl. *Category Theory in Context*. Cabridge University Press, 2014.

R. Rovira. *Notas para el estudio del elenco aristotélico de las categorías*. Universidad Complutense de Madrid, 2012. URL `https://eprints.ucm.es/id/eprint/14670/1/NOTAS_CATEGORIAS.pdf`.

J. C. Vidal. *Teoría de Conjuntos*. junio 2010.