FUNCION CARACTERISTICA

Existen determinados problemas en teoría de la Probabilidad de difícil y complicada solución, concretamente todos aquellos relacionados con el estudio de las distribuciones límite y la distribución de probabilidad de sumas de variables aleatorias. Una solución relativamente sencilla a estos problemas se obtiene mediante el uso de las funciones características, funciones que se derivan de la aplicación de técnicas clásicas del análisis matemático, la transformada de Fourier, a la teoría de la Probabilidad. Todo lo que vamos a hacer en este capítulo es ocuparnos de estas funciones características.

DEFINICION.- Sea X una variable aleatoria, se define la función característica de la v.a. X como $E(e^{itX})$. A dicha función se la denota mediante $\varphi_X(t)$, o bien $\varphi(t)$ si no existe confusión posible.

De acuerdo con la definición de esperanza y según las características de la v.a. X, la función característica de X se obtendrá mediante:

a) X continua

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx .$$

b) X discreta

$$\varphi(t) = \sum_{x\in A} e^{itx} \cdot f(x) \quad , \text{ donde } A \text{ es tal que } P(X\in A) = 1.$$

Señalemos de inmediato que la función característica de cualquier v.a. existe siempre, por cuanto la correspondiente esperanza que la define siempre lo hace ya que la función e^{itx} está acotada, $|e^{itx}| \le 1$, y por tanto es integrable.

A continuación vamos a conocer las propiedades más importantes de las funciones características, en forma de teoremas.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CARACTERISTICAS.

TEOREMA 1.- Una función característica es uniformemente continua en R, y además verifica

$$\varphi(0) = 1, \quad |\varphi(t)| \le 1, \quad t\in R.$$

Demostración.- En efecto

$$\varphi(0) = E(e^{i0X}) = E(1) = 1$$

por otra parte

$$|\varphi(t)| = \left|\int_\Omega e^{itX} dP\right| \le \int_\Omega |e^{itX}| . dP \le \int_\Omega dP = P(\Omega) = 1.$$

Comprobemos la continuidad uniforme. Estudiemos para ello la diferencia $\varphi(t+h) - \varphi(t)$, tenemos

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \int_\Omega e^{i(t+h)X} dP - \int_\Omega e^{itX} dP = \int_\Omega e^{itX}(e^{ihX} - 1)\, dP$$

entonces

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \le \int_\Omega |e^{itX}(e^{ihX} - 1)|\, dP \le \int_\Omega |e^{ihX} - 1|\, dP = E(|e^{ihX} - 1|)$$

pero $|e^{ihX} - 1| \le |e^{ihX}| + |1| = 2$

por tanto $E(|e^{ihX} - 1|) \le E(2) = 2$, entonces es lícito permutar el paso al límite y la integración, de acuerdo con los teoremas de convergencia, tendremos pues

$$\lim_{h\to 0} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \le \lim_{h\to 0} E(|e^{ihX} - 1|) = E\left(\lim_{h\to 0} |e^{ihX} - 1|\right) = E(0) = 0$$

y por tanto se da la continuidad uniforme.

TEOREMA 2.- Si $Y = aX + b$, donde a y b son constantes, entonces

$$\varphi_Y(t) = e^{ibt} . \varphi_X(at).$$

Demostración.-

$$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{itb} . e^{itaX}) = e^{itb} . E(e^{i(at)X}) =$$
$$= e^{itb} . \varphi_X(at).$$

TEOREMA 3.- Si una variable aleatoria X tiene un momento absoluto de orden n, entonces su función característica es diferenciable n veces y para $k \le n$, tenemos

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k . E(X^k).$$

Demostración.- Derivando la función característica k veces, $k \le n$, tenemos

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k . e^{itX} . dP$$

Pero

$$\left|\int_\Omega X^k . e^{itX} dP\right| \le \int_\Omega |X^k| . dP$$

y por tanto, de acuerdo con la hipótesis del teorema, $\varphi^{(k)}(t)$ existe, y la derivación esté permitida. Haciendo $t=0$, tenemos

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \int_\Omega X^k \, dP = i^k . E(X^k).$$

Apoyándonos en este teorema y mediante el logaritmo de la función característica podemos obtener una sencilla y muy útil expresión para la media, y la varianza de una variable aleatoria. En efecto, sea

$$\psi(t) = \log \varphi(t)$$

entonces

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$$

y derivando nuevamente

$$\psi''(t) = \frac{\varphi''(t).\varphi(t) - [\varphi'(t)]^2}{[\varphi(t)]^2}$$

teniendo en cuenta que $\varphi(0)=1$ y de acuerdo con el teorema anterior,

$$\psi'(0) = \varphi'(0) = i.E(X)$$

$$\psi''(0) = \varphi''(0) - [\varphi'(0)]^2 = i^2 E(X^2) - [i\,E(X)]^2 = -\mathrm{var}(X),$$

de aquí

$$E(X) = \frac{1}{i}\psi'(0)$$

$$\mathrm{var}(X) = -\psi''(0).$$

A la derivada k-ésima de $\psi(0)$ multiplicada por i^k se la conoce como el <u>cumulante</u> (o semi-invariante) de k-ésimo orden de la variable aleatoria. Este cumulante es una función de los k primeros momentos de la variable. Por ejemplo,

$$i^3.\psi'''(0) = -\left\{E(X^3) - 3E(X^2).E(X) + 2(E(X))^3\right\}.$$

FORMULA DE INVERSION Y TEOREMA DE UNICIDAD

Hemos visto que a partir de la distribución de probabilidad de una v.a. X es siempre posible determinar su función característica. Sería importante que la proposición inversa también fuese cierta. Eso es lo que tratamos de establecer con el siguiente teorema

<u>FORMULA DE INVERSION DE LEVY</u>.- Sean F y φ las funciones de distribución y característica, respectivamente, de una variable aleatoria X. Se verifica entonces:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{i}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{t}\varphi(t).dt$$

, o bien su equivalente

$$F(x_0+h) - F(x_0-h) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ h>0}} \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\operatorname{sen} ht}{t} e^{-itx_0}.\varphi(t).dt$$

siempre que a y b sean puntos de continuidad de F (ó x_0+h, x_0-h).

Demostración.- Sea

$$J = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\operatorname{sen} ht}{t}.e^{-itx_0}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\operatorname{sen} ht}{t} e^{-itx_0}\left[\int_R e^{itx} dP'\right] dt$$

donde $\int_R e^{itx} dP' = E(e^{itX})$, siendo P' la probabilidad inducida por P, mediante X en R. Podemos también escribir J de la siguiente forma

$$J = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left[\int_R \frac{\operatorname{sen} ht}{t}.e^{it(x-x_0)} dP'\right] dt$$

pero

$$\left|\frac{\operatorname{sen} ht}{t}.e^{it(x-x_0)}\right| \le \left|\frac{\operatorname{sen} ht}{t}\right| < h \quad \text{y} \quad \int_R h\,dP' = h$$

en definitiva la función $\frac{\operatorname{sen} ht}{t}.e^{it(x-x_0)}$ es integrable (T es finito) y por tanto podemos aplicar el teorema de Fubini para permutar el orden de integración, es decir

$$J = \frac{1}{\pi}\int_R dP' \int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{sen} ht}{t}.e^{it(x-x_0)} dt = \frac{1}{\pi}\int_R dP'\int_{-T}^{T}\frac{\operatorname{sen} ht}{t}\left(\cos t(x-x_0) + i \operatorname{sen} t(x-x_0)\right) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_R dP'\int_0^T \frac{\operatorname{sen} ht}{t}.\cos t(x-x_0)\,dt$$

aplicando la fórmula $\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$, con $\alpha=ht$, $\beta=t(x-x_0)$,

$$J = \frac{2}{\pi}\int_R dP'\int_0^T \frac{1}{2t}\left[\operatorname{sen} t(x-x_0+h) - \operatorname{sen}(x-x_0-h)\right] dt = \frac{1}{\pi}\int_R dP'\left[\int_0^T \frac{\operatorname{sen} t(x-x_0+h)}{t}dt - \int_0^T \frac{\operatorname{sen} t(x-x_0-h)}{t}dt\right] = \frac{1}{\pi}\int_R g(x,T)\,dP'$$

donde $g(x,T)$ es la función que figura entre corchetes en el anterior miembro de la igualdad.

Por el cálculo integral sabemos que:

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$ y está acotada para todo $T>0$

Por otra parte

$$\int_0^T \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx = \int_0^{\alpha T}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy$$

En consecuencia

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^T \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} 1, & \alpha>0 \\ 0, & \alpha=0 \\ -1, & \alpha<0\end{cases}$$

aplicando este resultado a la función $g(x,T)$, tendremos:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}g(x,T) = \begin{cases} 0, & x<x_0-h \\ 1/2, & x=x_0-h \\ 1, & x_0-h<x<x_0+h \\ 1/2, & x=x_0+h \\ 0, & x>x_0+h\end{cases}$$

además $|g(x,T)|$ está acotada y podemos hacer uso de los teoremas de convergencia para permutar la integración y el paso al límite. Tendremos en definitiva:

$$\lim_{T\to\infty} J = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_R g(x,T)\,dP' = \frac{1}{\pi}\int_R \lim_{T\to\infty} g(x,T)\,dP' = \int_{x_0-h}^{x_0+h} dP' = F(x_0+h)-F(x_0-h).$$

No olvidemos que P' define F de la forma ya conocida y que x_0+h y x_0-h son puntos de continuidad de F.

COROLARIO.- Si la función característica es absolutamente integrable en R, entonces la función de distribución es absolutamente continua, su derivada es continua uniformemente y tenemos

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-ixt}\varphi(t)\,dt.$$

Demostración.- En efecto

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi}\int_R \frac{\operatorname{sen} ht}{ht}\cdot e^{-itx_0}\varphi(t)\,dt$$

tenemos que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} ht}{ht}\cdot e^{-itx_0}\cdot\varphi(t)\right| \le |\varphi(t)|$$

y como $|\varphi(t)|$ es integrable, podemos permutar el paso al límite con la integración, obteniendo

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h} = f(x_0) = F'(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx_0}\varphi(t)\,dt.$$

Existe pues la derivada de $F(x)$ para todos sus puntos de continuidad. Por otra parte la continuidad absoluta deriva del hecho de poder escribir

$$F(x_0+h) - F(x_0-h) \le 2h\cdot\frac{1}{2\pi}\int_R |\varphi(t)|\,dt$$

que podemos hacer tan pequeño como queramos eligiendo h adecuadamente.

Finalmente, para comprobar la continuidad de f, tendremos

$$|f(x+h)-f(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_R e^{-itx}(e^{-ith}-1)\varphi(t)\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_R |e^{-ith}-1|\cdot|\varphi(t)|\,dt$$

pero $|e^{-ihx}-1| = |\cos hx - i\operatorname{sen} hx - 1| = |(\cos hx-1) - i\operatorname{sen} hx| = \sqrt{(\cos hx-1)^2+\operatorname{sen}^2 hx} =$

$$= \sqrt{\cos^2 hx+\operatorname{sen}^2 hx+1-2\cos hx} = \sqrt{2(1-\cos hx)} = \sqrt{2\cdot 2\operatorname{sen}^2\frac{hx}{2}} = 2\left|\operatorname{sen}\frac{hx}{2}\right|$$

luego

$$|f(x+h)-f(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_R 2\left|\operatorname{sen}\frac{th}{2}\right|\cdot|\varphi(t)|\,dt,$$

pero como la integral es finita, podemos elegir A tal que, dado $\varepsilon>0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_R 2\left|\operatorname{sen}\frac{th}{2}\right|\cdot|\varphi(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le A} 2\cdot\left|\operatorname{sen}\frac{th}{2}\right|\cdot|\varphi(t)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>A} 2\cdot\left|\operatorname{sen}\frac{th}{2}\right|\cdot|\varphi(t)|\,dt$$

La segunda integral del segundo miembro es menor que $\varepsilon/2$ y la primera también sin más que elegir h adecuadamente. (Obsérvese que hemos comprobado la continuidad uniforme).

La fórmula de inversión nos permite demostrar uno de los resultados más importantes del capítulo, el llamado teorema de unicidad.

TEOREMA DE UNICIDAD.- Existe una correspondencia biunívoca entre la función de distribución y la función característica de una variable aleatoria.

Demostración.- Ya sabemos, por definición, que toda función de distribución da lugar a una función característica.

Si φ es la función característica de X, que tiene a F por función de distribución, entonces por el teorema de inversión sabemos que

$$F(x)-F(y) = \lim_{T\to\infty}\frac{i}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{t}\cdot\varphi(t)\,dt,$$ para x e y ptos. de continuidad de F.

por tanto

$$F(x) = \lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{i}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-e^{-ity}}{t}\,\varphi(t)\,dt$$

donde el paso al límite en y se lleva a cabo a través de puntos de continuidad de F, cosa que siempre es posible. Tenemos pues a F determinada salvo en los puntos de discontinuidad, pero en ellos podemos actuar como sigue:

Sea x un pto de discontinuidad de F. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de continuidad de F tal que $x_n \downarrow x$, entonces $F(x_n) \downarrow F(x)$ por ser F continua por la derecha. Estando los $F(x_n)$ determinados unívocamente de acuerdo con lo anterior, también lo estará $F(x)$ a través del correspondiente límite.

La utilidad de este teorema de unicidad quedará puesta de manifiesto cuando nos ocupemos del problema de la independencia de variables y más concretamente de la suma de variables aleatorias independientes.

OTRA FORMA DEL TEOREMA DE INVERSION

Existe otra manera de presentar el teorema de inversión que es especialmente útil para determinar la función de cuantía en el caso de variables aleatorias discretas. Recordemos antes que P', la probabilidad inducida por P ~~asociada~~ mediante X sobre el espacio medible (R,β), nos servía a su vez para definir la función de distribución a través de

$$F(b)-F(a) = P'(]a,b]) \quad , \text{ o sea } \quad F(x) = P'(]-\infty,x])$$

de acuerdo con esto

$$P'(\{a\}) = \lim_n P'\left(]a-\tfrac{1}{n},a]\right) = \lim_n \left(F(a)-F\left(a-\tfrac{1}{n}\right)\right) = F(a)-F(a-0)$$

si F es continua en a, entonces $P'(\{a\})=0$, de lo contrario $P'(\{a\})\neq 0$ y mide el salto que da la función en dicho punto, que recordemos, equivale al valor de la función de cuantía en dicho punto, por cuanto

$$f(a) = P(X=a) = P'(\{a\}).$$

Hecha esta introducción, que nos será útil posteriormente, enunciemos el teorema de inversión en su nueva forma

TEOREMA.- Sea X una v.a. y sean F y φ las funciones de distribución y característica, respectivamente. Entonces, para cualquier valor de x_0 tenemos

$$F(x_0) - F(x_0-0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx_0}\varphi(t)\,dt.$$

Demostración.-

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx_0}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx_0}\left[\int_R e^{itx}\,dP'\right]dt$$

dada la integrabilidad de la función podemos aplicar el teorema de Fubini y permutar el orden de integración, de manera que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx_0}\left[\int_R e^{itx}\,dP'\right]dt = \frac{1}{2T}\int_R\int_{-T}^{T} e^{it(x-x_0)}\,dt\,dP' = \frac{1}{2T}\int_R dP'\left[\int_{-T}^{T}\left(\cos t(x-x_0) + i\,\mathrm{sen}\, t(x-x_0)\right)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2T}\int_R dP'\left[2\int_0^T \cos t(x-x_0)\,dt\right] = \frac{1}{T}\int_R dP'\left[\left[\frac{\mathrm{sen}\, t(x-x_0)}{x-x_0}\right]_0^T\right] = \frac{1}{T}\int_R dP'\,\frac{\mathrm{sen}\, T(x-x_0)}{x-x_0}$$

pero

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\frac{\mathrm{sen}\, T(x-x_0)}{x-x_0} = 0, \quad \text{si } x\neq x_0$$

mientras que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,\frac{\mathrm{sen}\, T(x-x_0)}{x-x_0} = 1, \quad \text{si } x=x_0$$

entonces, aplicando el teorema de convergencia que nos permite permutar la integración y el paso al límite tendremos

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx_0}\varphi(t)\,dt = \int_R \lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{sen}\, T(x-x_0)}{T(x-x_0)}\,dP' = \int_{\{x_0\}} dP' = P'(\{x_0\})$$

y de acuerdo con lo dicho al principio del párrafo

$$P'(\{x_0\}) = F(x_0) - F(x_0-0).$$

Esta fórmula es especialmente útil para obtener la función de cuantía de una variable aleatoria discreta a partir de su función característica. Recordemos lo dicho en la introducción, aquellos puntos con probabilidad distinta de cero,

$$f(x) = P(X=x) = P'(\{x\}) = F(x)-F(x-0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\varphi(t)\,dt.$$

EL CASO DE LAS DISTRIBUCIONES EN ENREJADO (LATTICE DISTRIBUTIONS)

DEFINICION.- Se dice que una variable aleatoria discreta posee una distribución en enrejado si el enrejado $a+bn$, $n=0,\pm1,\ldots$ soporta la distribución. Es decir, si los únicos valores que toma la variable con probabilidad distinta de cero son de la forma $x=a+bn$, con $n=0,\pm1,\ldots$ siendo a y b enteros y b positivo.

Son muchos los casos de variables de este tipo. Por ejemplo, la Binomial $B(n_0,p)$ es un caso particular en la que $a=0$, $b=1$, $n=0,1,\ldots,n_0$. La Poisson y la Binomial negativa son también distribuciones en enrejado en las que $a=0$, $b=1$ y $n=0,1,\ldots$.

Este tipo de distribuciones presentan algunas peculiaridades en cuanto a sus funciones características, por ejemplo, puede demostrarse que $\exists t\neq 0$; $|\varphi(t)|=1$, si X es una distribución en enrejado. El recíproco de esta propiedad es también cierto. Otra propiedad que las caracteriza la enunciamos y demostramos a continuación.

<u>TEOREMA</u>.- Una variable aleatoria X posee una distribución en enrejado si y sólo si su función característica es periódica, con periodo 2π. Es decir $\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Demostración.- <u>Directo</u>. Si X es una distribución en enrejado, entonces $x_n=a+bn$ será un número entero y tendremos

$$\varphi(t)=\sum_n e^{itx_n}\cdot P(X=x_n)$$

y

$$\varphi(t+2\pi)=\sum_n e^{i(t+2\pi)x_n}P(X=x_n)=\sum_n e^{itx_n}\cdot e^{ix_n2\pi}\cdot P(X=x_n)$$

pero

$$e^{ix_n2\pi}=\cos x_n2\pi+i\,\mathrm{sen}\,x_n2\pi=1$$

por tanto

$$\varphi(t+2\pi)=\varphi(t).$$

<u>Inverso</u>. Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $\{x_n\}_{n\geq1}$, de manera que su función característica verifica $\varphi(t)=\varphi(t+2\pi)$, entonces

$$\varphi(t)=\sum_n e^{itx_n}P(X=x_n)=\sum_n e^{itx_n}\cdot e^{ix_n2\pi}P(X=x_n)=\varphi(t+2\pi)$$

por tanto

$$e^{ix_n2\pi}=1,\ \forall n$$

y de aquí x_n deberá tomar valores en $\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ o en algún conjunto que pueda ponerse en biyección con éste.

Para terminar con este tipo de distribuciones de probabilidad obtendremos la formulación especial que el teorema de inversión adquiere en estas variables.

<u>TEOREMA DE INVERSION PARA DISTRIBUCIONES EN ENREJADO</u>

Si X es una v.a. con distribución en enrejado, entonces su función característica permite obtener la función de cuantía mediante la siguiente fórmula de inversión:

$$P_n=f(X=n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-int}\varphi(t)\,dt.$$

Hemos supuesto que X toma valores $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ por cuanto haciendo el cambio $Y=\frac{X-a}{b}$ podemos convertirla en una variable de esas características.

Demostración.- Sabemos que

$$\varphi(t)=\sum_n e^{itn}P_n$$

tomando n' entero, $n'\neq n$,

$$e^{-in't}\cdot\varphi(t)=\sum_n e^{it(n-n')}P_n=\sum_{n\neq n'}e^{it(n-n')}P_n+P_{n'}$$

integrando en el intervalo $[-\pi,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in't}\varphi(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sum_{n\neq n'}e^{it(n-n')}P_n+P_{n'}\Big]dt=\sum_{n\neq n'}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(n-n')}P_n\,dt+2\pi P_{n'}$$

siendo lícito permutar el sumatorio con la integral por el teorema de la convergencia acotada.

Pero

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(n-n')}dt=\left[\frac{e^{it(n-n')}}{i(n-n')}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\cos(n-n')\pi+i\,\mathrm{sen}(n-n')\pi-\cos(n-n')(-\pi)-i\,\mathrm{sen}(n-n')(-\pi)}{i(n-n')}=$$

$$=\frac{2\,\mathrm{sen}(n-n')\pi}{n-n'}=0$$

por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in't}\varphi(t)\,dt=2\pi\cdot P_{n'}.$$

<u>DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS DE LA FUNCION CARACTERISTICA</u>

Ya hemos comprobado en otra parte de este capítulo que si $E(X^n)$ existe, entonces

$$\varphi^{(k)}(0)=i^k\cdot E(X^k),\quad k\leq n.$$

Aplicando la fórmula de Taylor podemos escribir

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(it)^k\cdot E(X^k)}{k!}+\frac{\varphi^{(n)}(t_1)}{n!}t^n,\quad \text{con } t_1<t$$

Si X es una variable aleatoria que posee momentos de cualquier orden, entonces $\varphi(t)$ genera una serie de Taylor que converge a $\varphi(t)$ siempre que el resto tienda a cero a medida que aumenta n, es decir

$$\varphi(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^k \cdot E(X^k)}{k!} \quad , \forall t \in A$$

donde $A = \{ t \in R ;\ \lim_{n\to\infty} \frac{t^n \cdot \varphi^{(n)}(t_1)}{n!} = 0 \text{, con } |t_1| < |t| \}$

o bien, teniendo en cuenta el valor de $\varphi^{(n)}(t_1)$ podemos también caracterizar A, exigiendo a sus elementos que verifiquen $\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n \cdot E(|X|^n)}{n!} = 0$.

FUNCION GENERATRIZ DE MOMENTOS

La función generatriz de momentos de una variable aleatoria X se define mediante

$$M(s) = E(e^{sX}) = \int_\Omega e^{sX} dP = \int_R e^{sx} dP'$$

para todos aquellos valores de s para los que la correspondiente esperanza existe.

Como ya sabemos, si la v.a. X es del tipo discreto, entonces

$$M(s) = \sum_{x_n \in A} e^{sx_n} P(X = x_n) \quad , \ A \text{ tal que } P(X \in A) = 1 .$$

mientras que para X v.a. continua, tendremos

$$M(s) = \int_R e^{sx} f(x)\, dx .$$

Esta función es conocida en análisis como la transformada de Laplace de P' (o si se prefiere de F).

Respecto de la existencia de $M(s)$ obsérvese que $\int_0^\infty e^{sx} dP'$ es finita para $s \leq 0$ y si es finita para algún s positivo, también lo será para todo s menor que aquel. Esto, junto con consideraciones análogas hechas respecto de la semirrecta real negativa, permite afirmar que $M(s)$ existe, o está definida, en algún intervalo que contiene a 0. Si X es no negativa este intervalo contiene a $]-\infty, 0]$ y puede que parte de $]0, +\infty[$, mientras que si X es no positiva entonces el intervalo contiene a $[0, +\infty[$ y puede que parte de $]-\infty, 0]$. Hay situaciones, no obstante, en las que el intervalo contiene sólo el punto 0. Por ejemplo, una v.a. que toma los valores $\pm n$, $n = 1, 2, \ldots$ con probabilidad $P(X = n) = P(X = -n) = c/n^2$.

En cualquier caso la existencia de $M(s)$ en un intervalo simétrico da lugar a una serie de importantes propiedades que transcribimos a continuación por medio del siguiente teorema.

TEOREMA.- Si $M(s)$ está definida en el intervalo $[-s_0, s_0]$, $s_0 > 0$, entonces la variable aleatoria X posee momentos de cualquier orden y además $M^{(k)}(0) = E(X^k)$ (de aquí el nombre de función generatriz de momentos que recibe $M(s)$).

Demostración.- Si $M(s)$ está definida en $[-s_0, s_0]$, ello supone que e^{sX} es integrable para $|s| \leq s_0$. Por otra parte

$$e^{|sx|} \leq e^{sx} + e^{-sx}$$

y por tanto para $|s| \leq s_0$, $e^{|sx|}$ es integrable. Observemos además que, $\forall k$

$$|x|^k \text{ es de menor orden que } e^{|sx|} \text{, cuando } x \to \pm\infty \text{, si } s \text{ es fijo y } > 0,$$

ello supone que X posee momentos de cualquier orden.

Fijémonos ahora en la serie $e^{sx} = \sum_{k\geq 0} s^k x^k / k!$, sus sumas parciales están mayoradas por la serie

$$e^{|sx|} = \sum_{k\geq 0} |sx|^k / k! \quad (\text{en ambos casos } |s| \leq s_0)$$

y no olvidemos que $e^{|sx|}$ es una función integrable, podemos entonces aplicar el teorema de la convergencia dominada y escribir

$$E(e^{sX}) = M(s) = \sum_{k\geq 0} \frac{E(X^k)}{k!} s^k \quad , \quad |s| \leq s_0.$$

Resulta pues que $M(s)$ posee un desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto 0 y de acuerdo con las propiedades de dicho desarrollo los coeficientes son las derivadas de la función en el pto 0, es decir

$$M^{(k)}(0) = E(X^k) .$$

COROLARIO.- Si $M(s)$ está definida en $|s| \leq s_0$ y de alguna manera podemos obtener un desarrollo en serie de potencias de $M(s)$, de la forma

$$M(s) = \sum_{k\geq 0} a_k s^k \quad , \ |s| \leq s_0 .$$

de acuerdo con la unicidad del desarrollo en serie en el campo de convergencia de la serie, tendremos que

$$a_k = M^{(k)}(0) / k! .$$

pero como $M^{(k)}(0) = E(X^k)$, esto nos permite obtener los momentos de X, mediante

$$E(X^k) = a_k \cdot k! .$$

<u>Relación entre la función generatriz y la función característica</u>.- Cuando la función generatriz de momentos existe, obsérvese que

$$\varphi(t) = E(e^{itX})$$
$$M(t) = E(e^{tX})$$

y por tanto

$$\varphi(t) = M(it)$$

esta relación supone que muchas de las propiedades estudiadas para la función característica sean aplicables a la función generatriz, no obstante, una de las más importante, la existencia, siempre, de la función característica, ya hemos visto que no es ~~siempre~~ verificada por $M(s)$. Este motivo es más que suficiente para que la función generatriz quede en pura anécdota y sea la característica la más utilizada en teoría de la probabilidad, sobretodo en todo lo referente a teoremas de inversión y de unicidad.

Observemos finalmente que

$$\varphi(t) = \sum_{k\geq 0} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k)$$

está mayorada por

$$\sum_{k\geq 0} \frac{|t|^k}{k!} E(|X|^k) = E(e^{|tX|})$$

y hemos dicho que si $M(t)$ está definida en $|t| \leq t_0$, entonces $e^{|tX|}$ es integrable, por tanto $\varphi(t)$ es desarrollable en serie de Taylor si la correspondiente función generatriz de momentos existe

FUNCION CARACTERISTICA DE UN VECTOR ALEATORIO

Sea $\vec{X}$ un vector aleatorio de componentes $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, se define la <u>función característica</u> del vector como la esperanza de la variable $e^{i(t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_nX_n)}$. Es decir

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E\left(\exp\left[i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right]\right), \quad t_k \in R.$$

De acuerdo con esta definición, generalización inmediata de la dada para variables aleatorias, la función característica del vector $\vec{X}$ existe siempre y goza además de las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LA F.C. DE UN VECTOR ALEATORIO

1.- $\varphi_{\vec{X}}(0, \ldots, 0) = 1$

2.- $|\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)| \leq 1$

3.- $\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)$ es uniformemente continua en R^n.

4.- Si la función característica de $\vec{X}$ es $\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)$, la del vector $\vec{Y}$, cuyas componentes se definen $Y_k = a_k X_k + b_k$, es

$$\varphi_{\vec{Y}}(t_1, \ldots, t_n) = \exp\left(i\sum_{k=1}^{n} t_k b_k\right) \cdot \varphi_{\vec{X}}(a_1t_1, \ldots, a_nt_n).$$

5.- Si el momento conjunto de orden $-(n_1, \ldots, n_n)$ existe, entonces

$$\left.\frac{\partial^{n_1+\cdots+n_n}}{\partial t_1^{n_1}\cdots\partial t_n^{n_n}}\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)\right|_{t_1=\cdots=t_n=0} = i^{\sum_{k=1}^{n} n_k} \cdot E\left(X_1^{n_1}\cdots X_n^{n_n}\right)$$

En particular

$$\left.\frac{\partial^r}{\partial t_k^r}\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)\right|_{t_1=\cdots=t_n=0} = i^r \cdot E(X_k^r) \quad , k=1, \ldots, n$$

6.- La función característica de cualquier subvector de dimensión m, $\vec{X}_1$, se obtiene a partir de la de $\vec{X}$ sin más que igualar a cero las t_k del subvector complementario, $\vec{X}_2$, de dimensión $n-m$. Así

$$\varphi_{\vec{X}_1}(t_1, \ldots, t_m) = \varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0)$$

En particular, la función característica de cada componente se obtiene mediante

$$\varphi_{X_k}(t_k) = \varphi_{\vec{X}}(0, \ldots, 0, t_k, 0, \ldots, 0).$$

Todas estas propiedades tienen una demostración análoga, si bien ligeramente más complicada, a la de sus correspondientes versiones unidimensionales.

La función característica del vector $\vec{X}$ permite obtener fácilmente la función característica de la suma de sus componentes. En efecto

<u>TEOREMA</u>.- Si el vector aleatorio $\vec{X}$ tiene por función característica $\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)$, entonces la variable aleatoria $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tiene por función característica $\varphi(t, t, \ldots, t)$.

Demostración.- Sea $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$, de acuerdo con la definición de función característica, tendremos

$$\varphi_Y(t) = E\left(e^{itY}\right) = E\left(\exp\left[it\sum_k X_k\right]\right) = E\left(\exp\left[i\sum_k tX_k\right]\right)$$

pero

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_k) = E\left(\exp\left[i\sum_k t_k X_k\right]\right)$$

que para $t_k = t$, $k = 1, \ldots, n$ da lugar a $\varphi_Y(t)$.

Finalmente enunciaremos, sin demostración por cuanto nuevamente ésta es análoga a la correspondiente unidimensional, las versiones vectoriales de la fórmula de inversión y del teorema de unicidad.

<u>FORMULA DE INVERSION</u>.- Sea $\vec{X}$ un vector aleatorio con función característica $\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)$, entonces

$$P\{a_k < X_k \le b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k}\, \varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

o bien su equivalente

$$P\{a_k - h < X_k \le a_k + h,\ k = 1, 2, \ldots, n\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} h t_k}{it_k}\, e^{-it_k a_k}\, \varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

donde a_k y b_k son números reales que satisfacen la siguiente condición:

la probabilidad de tomar valores en la superficie del paralelepípedo $\{a_k < X_k \le b_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ es igual a 0.

<u>COROLARIO</u>.- Si la función característica es absolutamente integrable, entonces el vector aleatorio es continuo y su función de densidad conjunta se puede obtener a partir de

$$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_R \cdots \int_R e^{-i\left(\sum_k t_k x_k\right)}\, \varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Existe, al igual que para las variables aleatorias, otra versión de la fórmula de inversión que permite obtener fácilmente las funciones de cuantía para vectores aleatorios del tipo discreto:

<u>OTRA FORMA DE LA FORMULA DE INVERSION</u>.- Sea $\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)$ la función característica de un vector aleatorio $\vec{X}$, entonces

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2T)^n} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} e^{-i\left(\sum_k t_k x_k\right)}\, \varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Basado en la fórmula de inversión puede enunciarse, también ahora, el siguiente teorema de unicidad.

<u>TEOREMA DE UNICIDAD</u>.- Existe una correspondencia biunívoca entre las funciones característica y de distribución de un vector aleatorio.

Para finalizar el capítulo señalemos que también podría hablarse ahora de desarrollo en serie de potencias de la función característica de un vector aleatorio. Desarrollo que se basa en la fórmula de Taylor para variables n-dimensionales.

Igualmente existe el concepto de <u>función generatriz de momentos</u> para un vector aleatorio $\vec{X}$, cuya definición es análoga a la correspondiente noción unidimensional. Igualmente goza de las propiedades ya descritas para tal concepto ~~en~~ el caso de variables aleatorias, modificadas adecuadamente para su versión vectorial.

<u>EJEMPLOS</u>

<u>Funciones características de algunas distribuciones de probabilidad</u>.

1) BINOMIAL.

Sea X una v.a. con distribución de probabilidad $B(n, p)$, entonces

$$\varphi(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^{it})^x q^{n-x} = (p \cdot e^{it} + q)^n$$

De acuerdo con la relación $M(it) = \varphi(t)$, entonces en aquellos t para los que exista,

$$M(t) = (p \cdot e^{t} + q)^n.$$

Se comprueba que $M(t)$ existe para todo t.

Por otra parte

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = n(p \cdot e^{it} + q)^{n-1} \cdot ipe^{it} \quad \text{y} \quad \left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0} = inp = i \cdot E(X).$$

La función $\psi(t) = \log \varphi(t) = n \log(pe^{it} + q)$, al derivarla

$$\psi'(t) = \frac{inpe^{it}}{pe^{it} + q} \to \psi'(0) = inp = iE(X)$$

$$\psi''(t) = \frac{i^2 npe^{it}(pe^{it} + q) - i^2 np^2 e^{2it}}{(pe^{it} + q)^2} \to \psi''(0) = \frac{-npq}{1} = -npq = -\operatorname{var}(X).$$

2) POISSON.

Para una v.a. Poisson, $P(\lambda)$, su función característica vale

$$\varphi(t) = \sum_{x\geq 0} e^{itx}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{x\geq 0}\frac{(\lambda e^{it})^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda e^{it}-\lambda}$$

3) MULTINOMIAL.

Si el vector $\vec{X}$ posee una distribución multinomial con parámetros $n;\ p_1,p_2,\dots,p_k$, su función característica vale

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1\dots t_k) = \sum_{x_1\dots x_k} e^{i\sum_j t_j x_j}\frac{n!}{x_1!\cdots x_k!}p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k} =$$

$$= \sum_{x_1\dots x_k}\frac{n!}{x_1!\cdots x_k!}(p_1e^{it_1})^{x_1}\cdots(p_ke^{it_k})^{x_k} = (p_1e^{it_1}+\dots+p_ke^{it_k})^n$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\varphi_{\vec{X}}(t_1\dots t_k)\Big|_{t_1=t_2=\dots=t_k=0} = n(n-1)\cdots(n-k+1)\,i^k p_1\cdots p_k\,(p_1e^{it_1}+\dots+p_ke^{it_k})^{n-k} =$$

$$= n(n-1)\cdots(n-k+1)\,i^k p_1\cdots p_k$$

con lo que

$$E(X_1\cdots X_k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\,p_1p_2\cdots p_k$$

Obsérvese que la función característica de la componente X_j podemos obtenerla mediante

$$\varphi_{X_j}(t_j) = \varphi_{\vec{X}}(0,\dots,0,t_j,0,\dots,0) = (p_1+p_2+\dots+p_je^{it_j}+\dots+p_k)^n =$$

$$= \Big(p_je^{it_j}+\sum_{i\neq j}p_i\Big)^n = \big(p_je^{it_j}+(1-p_j)\big)^n = (p_je^{it_j}+q_j)^n$$

y por el teorema de unicidad X_j es una $B(n,p_j)$, como en su momento habíamos establecido estudiando las marginales de la multinomial.

4) NORMAL.

Supongamos que X es una variable aleatoria $N(0,1)$, su función característica valdrá

$$\varphi(t) = \int_R e^{itx}f(x)\,dx = \int_R e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{(2itx-x^2+t^2)/2}\cdot e^{-t^2/2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\int_R e^{-(x-it)^2/2}dx = e^{-t^2/2}$$

Para obtener la función característica de una v.a. X, $N(\mu,\sigma^2)$, podemos utilizar la propiedad

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$$

puesto que si X es $N(\mu,\sigma^2)$, la variable $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ es $N(0,1)$ y por tanto

$$\varphi_X(t) = \varphi_{\sigma Z+\mu}(t) = e^{it\mu}\varphi_Z(\sigma t) = e^{it\mu}\cdot e^{-t^2\sigma^2/2} = e^{it\mu - t^2\sigma^2/2}.$$

Podríamos haber obtenido este resultado por otro camino. En efecto, sabemos que si X es $N(0,1)$, entonces

$$E(X^{2n+1}) = 0 \quad \text{y} \quad E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$$

sabemos además que $\varphi(t)$ admite un desarrollo en serie, puesto que existen todos los momentos, para todos aquellos t que verifican

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|t|^n\cdot E(|X|^n)}{n!} = 0$$

pero

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|t|^{2n}\cdot E(|X|^{2n})}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{t^{2n}\,(2n)!}{(2n)!\,2^n\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{t^{2n}}{2^n\cdot n!} = 0, \quad \forall t$$

luego

$$\varphi(t) = \sum_{k\geq 0}\frac{(it)^{2k}\cdot E(X^{2k})}{(2k)!} = \sum_{k\geq 0}\frac{(it)^{2k}\,(2k)!}{(2k)!\,2^k\cdot k!} = \sum_{k\geq 0}\left(\frac{-t^2}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{k!} =$$

$$= e^{-t^2/2}.$$

5) GAMMA.

Si X se distribuye como una Gamma con parámetros α y β, entonces

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^\alpha}\int_0^\infty e^{itx}x^{\alpha-1}\cdot e^{-x/\beta}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\cdot e^{-x(1-i\beta t)/\beta}dx$$

haciendo $x(1-i\beta t)=y$, tenemos

$$x = y/(1-i\beta t), \quad dx = dy/(1-i\beta t), \quad y\in[0,+\infty[$$

$$\varphi(t) = (1-i\beta t)^{-\alpha}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}\int_0^\infty y^{\alpha-1}\cdot e^{-y/\beta}dy = (1-i\beta t)^{-\alpha}.$$

Así, para una χ^2_r, en la que $\alpha = r/2$, $\beta = 2$, tendremos como función característica

$$\varphi_{\chi^2_r}(t) = (1-2it)^{-r/2}.$$

Para una <u>exponencial negativa</u>, $\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$, tendremos

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

6) NORMAL BIVARIANTE

Supongamos que $\vec{X}$ es un vector normal bivariante de manera que sus componentes son $N(0,1)$ cada una de ellas. Su función de densidad conjunta viene dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2 - 2\rho xy + y^2\right]\right\}$$

La función característica será

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1,t_2) = \int_R\int_R e^{i(t_1x+t_2y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{R^2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{(it_1x + it_2y - \frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx\,dy$$

Con un cambio de variable adecuado llegamos a

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1,t_2) = \int_R e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+2\rho t_1t_2+t_2^2)} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}\,du\,dv = e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+2\rho t_1t_2+t_2^2)}.$$

Si queremos ahora obtener la función característica de un vector $\vec{X}$ normal bivariante completamente general, es decir con función de densidad conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

si hacemos los cambios $Z_1 = \frac{X-\mu_1}{\sigma_1}$ y $Z_2 = \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$, las variables conjuntamente, (Z_1, Z_2) dan lugar a un vector aleatorio normal bivariante tipificado, es decir, con función de densidad conjunta como la anterior, ello supone, de acuerdo con una propiedad de las ~~~~ funciones características que

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1,t_2) = e^{i(\mu_1t_1+\mu_2t_2)} \cdot \varphi_{\vec{Z}}(\sigma_1t_1, \sigma_2t_2) =$$

$$= \exp\left\{i\mu_1t_1 + i\mu_2t_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2t_1t_2 + \sigma_2^2t_2^2)\right\}$$

Si quisiéramos ahora conocer la función característica de la variable $U = X + Y$, podemos

utilizar una propiedad de las funciones características de los vectores aleatorios que dice

$$\varphi_{\sum_k X_k}(t) = \varphi_{\vec{X}}(t,t,\ldots,t)$$

así pues

$$\varphi_U(t) = \varphi_{\vec{X}}(t,t) = \exp\left\{(i\mu_1 + i\mu_2)t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)t^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{1}{2}t^2(\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\right\}$$

pero esta es la función característica de una normal con esperanza $\mu = \mu_1 + \mu_2$ y con varianza $\sigma^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_1^2 + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2) + \sigma_2^2$. Resultado este que pone de manifiesto la utilidad del teorema de unicidad.