INDEPENDENCIA

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $\mathcal{A}_j$, $j=1,\dots,k$ familias de conjuntos tales que $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}$, $j=1,\dots,k$.

DEFINICION 1.- Decimos que las familias $\mathcal{A}_j$ son independientes, si para cada $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j=1,\dots,k$ los sucesos $A_1,\dots,A_k$ son independientes. Es decir

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_n}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}) \qquad \text{donde } (i_1,\dots,i_n)\subset(1,\dots,k).$$

De esta definición se desprende de inmediato que las subfamilias de familias independientes son también independientes.

INDEPENDENCIA DE VARIABLES ALEATORIAS

Sea X una v.a. definida sobre $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Sea β la tribu de Borel, la familia de conjuntos de $\mathcal{A}$, $X^{-1}(\beta)$ es también una σ-álgebra como fácilmente puede comprobarse. A esta σ-álgebra se la conoce como la σ-álgebra inducida por X. Consideremos ahora un conjunto de variables aleatorias X_j, $j=1,\dots,k$, definidas todas ellas sobre el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{A},P)$ y sean $\mathcal{A}_j$, las σ-álgebras inducidas por dichas variables.

DEFINICION 2.- Decimos que las variables aleatorias X_j, $j=1,\dots,k$ son independientes si las σ-álgebras que inducen lo son.

Teniendo en cuenta la definición de la σ-álgebra inducida, $\forall A_j\in\mathcal{A}_j$, $\exists B_j\in\beta / A_j = X^{-1}(B_j)$ entonces

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_n}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}) \qquad (i_1,\dots,i_n)\subset(1,\dots,k) \quad (1)$$

pero

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_n}) = P(X_{i_j}\in B_{i_j},\ j=1,\dots,n) = \prod_{j=1}^{n} P(X_{i_j}\in B_{i_j}).$$

Como los $A_j\in\mathcal{A}_j$, $j=1,\dots,k$ están definidos como antiimágenes de conjuntos de Borel, ello supone que de verificarse la última de las desigualdades escrita, se verificará la anterior (1). En definitiva, otra definición para la independencia de las variables aleatorias, en términos de conjuntos de Borel, puede ser esta

DEFINICION 3.- Las variables aleatorias X_j, $j=1,\dots,k$ son independientes si

$$P(X_{i_j}\in B_{i_j},\ j=1,\dots,n) = \prod_{j=1}^{n} P(X_{i_j}\in B_{i_j}), \qquad (i_1,\dots,i_n)\subset(1,\dots,k)$$

cualesquiera que sean los conjuntos de Borel B_{i_j}.

Las variables aleatorias que no son independientes se dice que son dependientes.

Antes de demostrar el teorema de factorización, el más importante de este capítulo, veamos algunos lemas previos que nos serán de utilidad.

LEMA 1.- Sean X_j, $j=1,\dots,k$ variables aleatorias independientes y sean $g_j:(R,\beta)\to(R,\beta)$ funciones medibles, de manera que $g_j(X_j)$ es una variable aleatoria. Entonces las variables aleatorias $g_j(X_j)$, $j=1,\dots,k$ son también independientes.

Demostración.- Sea X una v.a y sea g una función medible. Designemos por $\mathcal{A}_X$ y $\mathcal{A}_{g(X)}$ las σ-álgebras inducidas por las v.a. X y $g(X)$. Sea $A\in\mathcal{A}_{g(X)}$, entonces $\exists B\in\beta$, tal que $[g(X)]^{-1}(B)=A$. Pero

$$A=[g(X)]^{-1}(B) = X^{-1}[g^{-1}(B)] = X^{-1}(B')$$

donde $B'=g^{-1}(B)$ y como g es medible $B'\in\beta$ y por tanto $X^{-1}(B')=A\in\mathcal{A}_X$, es decir $\mathcal{A}_{g(X)}\subset\mathcal{A}_X$.

De acuerdo con esto, para cada $j=1,\dots,k$, tendremos

$$\mathcal{A}_{g_j(X_j)}\subset\mathcal{A}_{X_j}$$

y como la familia $\mathcal{A}_{X_j}$, $j=1,\dots,k$ es independiente lo es cualquier familia de subfamilias y $g_j(X_j)$, $j=1,\dots,k$ constituyen un conjunto de v.a. independientes.

LEMA 2.- Una condición necesaria y suficiente para que las variables aleatorias X_j, $j=1,\dots,k$ sean independientes es que las familias $\mathcal{C}_j$, $j=1,\dots,k$, con

$$\mathcal{C}_j = X_j^{-1}\{]-\infty,x],\ x\in R\}$$

sean independientes.

Demostración.- Directa.- Si las v.a. son independientes, las familias $\mathcal{A}_j = X_j^{-1}(B)$, $B\in\beta$ son independientes y por tanto también lo serán las subfamilias de estas y las $\mathcal{C}_j$ son subfamilias de las $\mathcal{A}_j$.

Inversa.- Para cada $\mathcal{C}_j$ definimos

$\mathcal{C}_j^* = \{$menor clase de conjuntos estable para las sumas numerables y diferencias propias, que contiene a $\mathcal{C}_j\}$.

Las $\mathcal{C}_j^*$, así definidas también son independientes. Veámoslo. Definamos

$$\mathcal{D}_i = \Big\{D_i\in\mathcal{A};\ P\Big(D_i\cap\bigcap_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{k} A_j\Big) = P(D_i)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{k} P(A_j),\ A_j\in\mathcal{C}_j\Big\}$$

esta clase de conjuntos verifica las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{C}_i\subset\mathcal{D}_i$

$$\forall A_i \in \mathcal{C}_i \quad P\Big(A_i \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} A_j\Big) = P(A_i)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} P(A_j)\ , \ A_j \in \mathcal{C}_j$$

pues las $\mathcal{C}_j$ son independientes.

b) Sean $\{D_{in}\}_{n\geq 1}$, $D_{in}\in\mathcal{D}_i$, $\forall n$ y $D_{im}\cap D_{in}=\phi$, $m\neq n$. Entonces

$$\bigcup_{n\geq 1} D_{in} \in \mathcal{D}_i.$$

$$P\Big(\big(\bigcup_{n\geq 1} D_{in}\big)\cap\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} A_j\Big) = \sum_{n\geq 1} P\Big(D_{in}\cap\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} A_j\Big) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} P(A_j)\Big[\sum_{n\geq 1} P(D_{in})\Big] =$$

$$= P\Big(\bigcup_{n\geq 1} D_{in}\Big)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} P(A_j)\ , \ A_j\in\mathcal{C}_j.$$

c) $D_{i_1}, D_{i_2}\in\mathcal{D}_i$, con $D_{i_2}\subset D_{i_1}$, entonces $D_{i_1}-D_{i_2}\in\mathcal{D}_i$.

$$(D_{i_1}-D_{i_2})\cap\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} A_j = D_{i_1}\cap\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} A_j - D_{i_2}\cap\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} A_j\ , \ A_j\in\mathcal{C}_j$$

y de aquí el resultado.

Dadas las propiedades que verifica $\mathcal{D}_j$ y del hecho de estar definida $\mathcal{C}_j^*$ como "la menor clase ...." , entonces $\mathcal{C}_j^*\subset\mathcal{D}_j$. Además por definición de $\mathcal{D}_i$, las familias

$$\{\mathcal{D}_i, \mathcal{C}_j, j=1,\dots,k, j\neq i\}$$

son independientes, en particular como $\mathcal{C}_j^*\subset\mathcal{D}_j$, tendremos que las familias

$$\{\mathcal{C}_i^*, \mathcal{C}_j, j=1,\dots,k, j\neq i\}$$

son independientes. Repitiendo el razonamiento y sustituyendo en cada ocasión una clase $\mathcal{C}_j$ por su correspondiente $\mathcal{D}_j$ llegaremos a la conclusión de que las familias

$$\{\mathcal{D}_j, j=1,\dots,k\}$$

así como las familias

$$\{\mathcal{C}_j^*, j=1,\dots,k\}$$

son independientes. Pero las $\mathcal{C}_j^*$ gozan de otra importante propiedad. En efecto, al ser las $\mathcal{C}_j$ estables para intersecciones finitas, tenemos que $\mathcal{C}_j^* = \mathcal{A}_j = X_j^{-1}(B)$, $B\in\beta$. Veámoslo:

Sea $\mathcal{C}_j' = \{C'\in\mathcal{C}_j^*;\ C'\cap B\in\mathcal{C}_j^*, \forall B\in\mathcal{C}_j\}$

1) $C_1', C_2'\in\mathcal{C}_j'$, $C_2'\subset C_1' \rightarrow C_1'-C_2'\in\mathcal{C}_j'$

$\forall B\in\mathcal{C}_j$; $(C_1'-C_2')\cap B = C_1'\cap B - C_2'\cap B\in\mathcal{C}_j^*$

2) $\{C_n'\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{C}_j'$, $C_n'\cap C_m'=\phi$, $n\neq m \rightarrow \bigcup_{n\geq 1} C_n'\in\mathcal{C}_j'$

$\forall B\in\mathcal{C}_j$, $\big(\bigcup_{n\geq 1} C_n'\big)\cap B = \bigcup_{n\geq 1}(C_n'\cap B)\in\mathcal{C}_j^*$

Resulta pues que $\mathcal{C}_j'$ es estable para las mismas operaciones que lo era $\mathcal{C}_j^*$, además $\forall C\in\mathcal{C}_j$, $C\cap B\in\mathcal{C}_j\subset\mathcal{C}_j^*$, $B\in\mathcal{C}_j$, tendremos pues que $\mathcal{C}_j\subset\mathcal{C}_j'$ y por ser $\mathcal{C}_j^*$ mínima, tendremos $\mathcal{C}_j'\supset\mathcal{C}_j^*$, pero por definición $\mathcal{C}_j^*\supset\mathcal{C}_j'$, en definitiva $\mathcal{C}_j^*\equiv\mathcal{C}_j'$.

Sea ahora $\mathcal{C}_j'' = \{C\in\mathcal{C}_j^*;\ C\cap B\in\mathcal{C}_j^*, \forall B\in\mathcal{C}_j^*\}$. De igual manera se comprueba que esta nueva clase resulta estable para las mismas operaciones que lo era $\mathcal{C}_j^*$. Además, $\forall C\in\mathcal{C}_j$, $C\cap B\in\mathcal{C}_j^*$, $\forall B\in\mathcal{C}_j^*$ ya que $\mathcal{C}_j^*\equiv\mathcal{C}_j'$, en definitiva $\mathcal{C}_j\subset\mathcal{C}_j''$ y razonando como antes llegamos a $\mathcal{C}_j''\equiv\mathcal{C}_j^*$, es decir que $\mathcal{C}_j^*$ es estable para la intersección finita y siendo además estable para las diferencias propias y las uniones numerables, tendremos que es una σ-álgebra que necesariamente debe de coincidir con $\mathcal{A}_j = X_j^{-1}(B)$, $B\in\beta$ (se comprueba por doble inclusión).

En definitiva las familias

$$\{\mathcal{C}_j^*, j=1,\dots,k\} \equiv \{\mathcal{A}_j = X_j^{-1}(B), B\in\beta, j=1,\dots,k\}$$

son independientes, lo que supone que las variables aleatorias X_j, $j=1,\dots,k$, lo son.

<u>Observación</u>.- La demostración se ha llevado a cabo haciendo abstracción del contenido de las familias $\mathcal{C}_j$. Ello supone que tiene validez general y que en realidad hemos demostrado este teorema, de enunciado más general

<u>TEOREMA</u>.- Las σ-álgebras engendradas por familias $\mathcal{C}_j$, independientes y estables para la $\cap$ finita, son también independientes.

Consideremos ahora las funciones de distribución y de densidad conjuntas del vector aleatorio que las k v.a. $X_1,\dots,X_k$ constituyen. El teorema que a continuación demostramos establece un criterio de independencia para dichas variables basado en las citadas funciones. Constituye este teorema, sin duda, el resultado más interesante de este capítulo.

<u>TEOREMA DE FACTORIZACION</u>.- Sean $F_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_k)$ y $f_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_k)$ las funciones de distribución y densidad o cuantía conjuntas del vector aleatorio $\vec{X}=(X_1,\dots,X_k)$. Sean $F_j(x_j)$ y $f_j(x_j)$, $j=1,\dots,k$ las correspondientes marginales. Las v.a. X_j, $j=1,\dots,k$ son independientes si y sólo si se verifica alguna de las dos condiciones (equivalentes) siguientes:

1) $$F_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_k) = \prod_{j=1}^{k} F_j(x_j)\ , \quad x_j\in R,\ j=1,\dots,k$$

2) $f_{\vec{X}}(x_1 \ldots x_k) = \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j)$, $x_j \in R$, $j=1,\ldots,k$

Demostración.-

1) Si las v.a. son independientes, sabemos que

$$P(X_j \in B_j \,,\, j=1,\ldots,k) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j \in B_j) \quad , \; B_j \in \beta$$

tomando $B_j =]-\infty, x_j]$, tendremos

$$P(X_j \in]-\infty, x_j] \,,\, j=1,\ldots,k) = F_{\vec{X}}(x_1 \ldots x_k) = \prod_{j=1}^{k} F_j(x_j) \quad , \; x_j \in R$$

El inverso se verifica sin más que utilizar el lema 2.

2) Distinguiremos el caso continuo del discreto a la hora de la demostración.

2.a) Caso discreto.

Sea $A \subset R^k$ tal que $P(\vec{X} \in A) = 1$. Sea $\vec{x} = (x_1 \ldots x_k) \in A$, entonces

$$f_{\vec{X}}(x_1 \ldots x_k) = P(X_j = x_j \,,\, j=1 \ldots k)$$

y siendo independientes sabemos que

$$P(X_j = x_j \,,\, j=1 \ldots k) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j = x_j) = \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j), \quad x_j \in A_j$$

Para cualquier $\vec{x} \in R^k - A$, la igualdad es trivialmente cierta por cuanto es igual a cero en ambos lados.

Para demostrar el inverso, sean $B_j =]-\infty, y_j]$, $y_j \in R$, $j=1 \ldots k$ y sea $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k$, tenemos

$$P(\vec{X} \in B) = P(X_j \in B_j \,,\, j=1,\ldots,k) = F_{\vec{X}}(y_1, \ldots, y_k) =$$

$$= \sum_{\vec{x} \in B} f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\vec{x} \in B} f_1(x_1) \ldots f_k(x_k) = \sum_{(x_1 \ldots x_k) \in B_1 \times \ldots \times B_k} f_1(x_1) \ldots f_k(x_k) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \left[\sum_{x_j \in B_j} f_j(x_j) \right] = \prod_{j=1}^{k} F_j(y_j)$$

y por 1), las variables aleatorias son independientes.

2b) Caso continuo

Si hay independencia entre las variables aleatorias, tendremos

$$F_{\vec{X}}(x_1 \ldots x_k) = \prod_{j=1}^{k} F_j(x_j)$$

derivando parcialmente en ambos miembros llegamos a

$$f_{\vec{X}}(x_1 \ldots x_k) = \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j)$$

El punto $(x_1 \ldots x_k)$ debe constituir un punto de continuidad de la función de densidad. En cualquier caso, sabemos que para los vectores aleatorios de tipo continuo el número de puntos de discontinuidad tiene medida nula y por tanto no afecta al resultado.

Para el inverso, sea

$$f_{\vec{X}}(x_1 \ldots x_k) = \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j)$$

sea $G_j =]-\infty, y_j]$, $y_j \in R$, $j=1 \ldots k$, entonces

$$F_{\vec{X}}(y_1 \ldots y_k) = \int_{\prod_{j=1}^{k} G_j} f_{\vec{X}}(x_1 \ldots x_k)\, dx_1 \ldots dx_k = \int_{\prod_{j=1}^{k} G_j} \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j)\, dx_1 \ldots dx_k =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} F_j(x_j).$$

El teorema de factorización es también aplicable a las funciones características, pero necesitamos previamente estudiar la esperanza del producto de variables aleatorias cuando éstas son independientes.

<u>LEMA 3</u>.- Sean X_j, $j=1 \ldots k$ v.a. y sean $g_j : (R, \beta) \to (R, \beta)$ transformaciones medibles, $j=1 \ldots k$. Si las variables aleatorias X_j, $j=1 \ldots k$ son independientes, entonces

$$E\left[\prod_{j=1}^{k} g_j(X_j)\right] = \prod_{j=1}^{k} \left[E(g_j(X_j))\right].$$

Demostración.- Supongamos que el vector $\vec{X} = (X_1 \ldots X_k)$ es continuo, entonces

$$E\left(\prod_{j=1}^{k} g_j(X_j)\right) = \int_{R^k} \prod_{j=1}^{k} g_j(X_j)\, f_{\vec{X}}(x_1 \ldots x_k)\, dx_1 \ldots dx_k = \int_{R^k} \prod_{j=1}^{k} g_j(X_j) f_j(x_j)\, dx_j = \prod_{j=1}^{k} E(g_j(X_j))$$

Análogo razonamiento se aplica para el caso discreto.

Observación.- El inverso del lema no es cierto como pondremos de manifiesto más tarde mediante un adecuado contraejemplo.

COROLARIO 1.- Si X_1 y X_2 son independientes, entonces son incorreladas, siempre que existan los correspondientes momentos.

Demostración.- Recordemos que la incorrelación de dos variables aleatorias suponía que su coeficiente de correlación era nulo. A su vez

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{[\operatorname{var}(X_1) \cdot \operatorname{var}(X_2)]^{1/2}}$$

pero

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) = 0$$

y por tanto $\rho = 0$.

Hay que señalar que la implicación de signo contrario, incorrelación $\rightarrow$ independencia no es cierta en general salvo para el caso de distribuciones normales multivariantes que más tarde comentaremos.

COROLARIO 2.- Si el vector $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ está constituido por variables aleatorias independientes, entonces

$$Y = \sum_{j=1}^{k} a_j X_j$$

tiene como varianza

$$\operatorname{var}(Y) = \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \sigma_j^2 \quad , \text{donde } \sigma_j^2 = \operatorname{var}(X_j).$$

Demostración.- Recordemos que

$$\operatorname{var}(Y) = \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{j>i} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

y siendo independientes $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$, $\forall i, j$ y de aquí el resultado.

Estamos ahora en condiciones de enunciar la versión del teorema de caracterización para funciones características.

TEOREMA (de factorización para funciones características).- Las variables aleatorias X_j, $j = 1, \ldots, k$ son independientes, si y sólo si

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_k) = \prod_{j=1}^{k} \varphi_{X_j}(t_j).$$

donde $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ y φ representa la función característica.

Demostración.- Si las X_j son independientes entonces $g_j(X_j) = e^{it_j X_j}$ también lo son, $j = 1, \ldots, k$. Entonces

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_k) = E\left[e^{i \sum_{j=1}^{k} t_j X_j}\right] = E\left[\prod_{j=1}^{k} e^{it_j X_j}\right]$$

Aplicando el lema 3, tendremos

$$\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_k) = \prod_{j=1}^{k} E\left[e^{it_j X_j}\right] = \prod_{j=1}^{k} \varphi_{X_j}(t_j).$$

Supongamos ahora que se verifica la anterior factorización. Sea $F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_k)$ la función de distribución del vector $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_k)$. Definamos

$$G(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{j=1}^{k} F_j(x_j)$$

donde $F_j(x_j)$ es la función de distribución de X_j. La función característica correspondiente a la distribución de probabilidad que $G(\vec{x})$ representa viene dada por $\prod_{j=1}^{k} \varphi_{X_j}(t_j)$, pero de acuerdo con la factorización citada dicha función será igual a la función característica $\varphi_{\vec{X}}(t_1, \ldots, t_k)$ del vector $\vec{X}$, aplicando el teorema de unicidad $F_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_k) \equiv G(x_1, \ldots, x_k)$ y por tanto son independientes las variables aleatorias X_j, $j = 1, \ldots, k$.

La independencia de las componentes de un vector aleatorio tiene especial incidencia a la hora de obtener las distribuciones condicionadas. En efecto, sea $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ un vector cuyas componentes son independientes. Sean $\vec{X}_1 = (X_1, \ldots, X_m)$ y $\vec{X}_2 = (X_{m+1}, \ldots, X_k)$ dos subvectores que tienen también sus componentes independientes. Entonces

$$f_{\vec{X}_1 / \vec{X}_2}(\vec{x}_1) = \frac{f_{\vec{X}}(\vec{x})}{f_{\vec{X}_2}(\vec{x}_2)} \quad , \text{con } \vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

pero aplicando el teorema de factorización tenemos

$$f_{\vec{X}_1 / \vec{X}_2}(\vec{x}_1) = \frac{\prod_{j=1}^{k} f_j(x_j)}{\prod_{j=m+1}^{k} f_j(x_j)} = \prod_{j=1}^{m} f_j(x_j) = f_{\vec{X}_1}(\vec{x}_1).$$

La independencia supone pues que el conocimiento previo de lo ocurrido con $\vec{X}_2$ no afecta para nada a lo que ocurrirá a $\vec{X}_1$.

Incorrelación e independencia en el caso normal.- Hemos visto que la independencia de dos variables aleatorias supone su incorrelación. Ya hemos señalado que el recíproco no es cierto como pondremos de manifiesto más tarde mediante un contraejemplo, salvo en un caso concreto del que nos ocupamos en el teorema siguiente:

TEOREMA.- Sea $\vec{X} = (X_1, X_2)$ un vector normal bivariante. Entonces X_1 y X_2 son independientes si y sólo si son incorrelados.

Demostración.- Ya sabemos que

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \, e^{-q/2}$$

donde

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\,\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

ya sabemos que las marginales correspondientes vienen dadas por

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right], \quad f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\exp\left[-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right].$$

Observemos que si $\rho = 0$, entonces

$$f(x_1,x_2) = f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)$$

con lo cual las variables X_1, X_2 son independientes.

INDEPENDENCIA DE VECTORES ALEATORIOS

El concepto de independencia se extiende de inmediato a familias de vectores aleatorios.

Definición.- Los vectores $\vec{X}_j$, $j=1,\dots,k$ son independientes si lo son las σ-algebras que inducen.

Puede también enunciarse un teorema de factorización para los vectores y puede también afirmarse que cualquier transformación medible de vectores aleatorios da lugar a nuevos vectores aleatorios.

Obsérvese, no obstante, que la independencia entre vectores aleatorios no afirma nada acerca de las componentes de dichos vectores de manera que puede ser perfectamente lícito que en cada vector no haya independencia entre sus componentes. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo.- Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left[1 + xy(x^2-y^2)\right], \quad |x|\le 1,\ |y|\le 1$$

y sea (U,V) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$g(u,v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\right\} \quad u\in R,\ v\in R,\ |\rho|<1.$$

La densidad conjunta de (X,Y,U,V) viene dada por

$$h(x,y,u,v) = \frac{1}{8\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left[1+xy(x^2-y^2)\right]\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\right\}$$

y por tanto (X,Y), (U,V) son independientes. Sin embargo X e Y, así como U y V, no son independientes.

9 ALGUNAS APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CARACTERISTICAS

Veremos en este apartado la utilidad de las funciones características para obtener la distribución de probabilidad de ciertas variables aleatorias definidas como sumas de variables aleatorias independientes.

TEOREMA (Binomial).- Sean X_j unas v.a. $B(n_j,p)$, $j=1,\dots,k$ e independientes. Entonces

$$X = \sum_{j=1}^{k} X_j \quad \text{es una } B(n,p) \text{ con } n=\sum_{j=1}^{k} n_j.$$

Demostración.- Sabemos que

$$\varphi_{X_j}(t) = (pe^{it}+q)^{n_j}$$

entonces

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = E\left[e^{it\sum_j X_j}\right] = E\left[\prod_{j=1}^{k} e^{itX_j}\right] = \prod_{j=1}^{k} E(e^{itX_j}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{k}\varphi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{k}(pe^{it}+q)^{n_j} = (pe^{it}+q)^{\sum n_j}.$$

En realidad esta propiedad aditiva de las binomiales con igual p las caracteriza, por cuanto puede enunciarse el recíproco del teorema que acabamos de demostrar, lo que supone que esto sólo ocurre para las binomiales de estas características.

TEOREMA (Poisson).- Sean X_j, $P(\lambda_j)$, $j=1,\dots,k$ e independientes. Entonces

$$X = \sum_{j=1}^{k} X_j \quad \text{es } P(\lambda), \text{ con } \lambda = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j.$$

Demostración.-

$$\varphi_X(t) = \prod_{j=1}^{k}\varphi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{k}\exp(\lambda_j e^{it}-\lambda_j) = \exp\left(e^{it}\sum\lambda_j - \sum\lambda_j\right) =$$

$$= \exp(e^{it}\lambda - \lambda), \quad \text{con } \lambda = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j.$$

Al igual que antes, también esta propiedad caracteriza a las distribuciones de Poisson por cuanto también, en esta ocasión, es cierto el recíproco. Hay ahora una curiosa propiedad que se deriva del teorema que acabamos de demostrar.

COROLARIO.- Sean X e Y independientes con distribución $P(\lambda_1)$ y $P(\lambda_2)$ respectivamente. Entonces la distribución condicional de X, dada $X+Y$ es una binomial.

Demostración.- La distribución de $Z=X+Y$, de acuerdo con lo anterior, es $P(\lambda_1+\lambda_2)$. Entonces, para enteros m y n, $m<n$, tendremos

$$P(X=m / X+Y=n) = \frac{P(X=m,\, Y=n-m)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=m)\cdot P(Y=n-m)}{P(X+Y=n)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1}\cdot \lambda_1^m/m! \cdot e^{-\lambda_2}\, \lambda_2^{n-m}/(n-m)!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^n/n!} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m} = \binom{n}{m}\, p^m\, q^{n-m}$$

donde $p = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ y $q = 1-p = \lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$, y se trata de una Binomial con parámetros n y $p = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$.

<u>TEOREMA</u> (Normal).- Sean X_j, $N(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j=1,\dots,k$ e independientes. Entonces

$$X = \sum_{j=1}^{k} a_j X_j \text{ es } N(\mu,\sigma^2), \text{ con } \mu = \sum_{j=1}^{k} a_j\mu_j \text{ y } \sigma^2 = \sum_{j=1}^{k} a_j^2\sigma_j^2 .$$

Demostración.-

$$\varphi_X(t) = \prod_{j=1}^{k} E\left(e^{ita_jX_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \varphi_{X_j}(a_jt) = \prod_{j=1}^{k} \exp\left\{ita_j\mu_j - \frac{\sigma_j^2a_j^2t^2}{2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{it\sum_{j=1}^{k} a_j\mu_j - \frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{k} a_j^2\sigma_j^2\right\} = \exp\left\{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}$$

con $\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j\mu_j$ y $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{k} a_j^2\sigma_j^2$.

Una aplicación interesante de este teorema se produce en la siguiente situación:

Sean X_j $j=1,\dots,k$ variables aleatorias independientes todas ellas con igual media, μ e igual varianza σ^2. Definamos una nueva variable

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^{k} X_j/k$$

por las propiedades de la media y la varianza, y dada la independencia de las X_k, sabemos que

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{y} \quad var(\bar{X}) = \sigma^2/k .$$

Si todas las X_j son, además, normales, entonces

<u>COROLARIO</u>.- Sean X_j, $N(\mu, \sigma^2)$, $j=1,\dots,k$ e independientes. Entonces $\bar{X} = \sum_{j=1}^{k} X_j/k$ es $N(\mu, \sigma^2/k)$

Demostración.- Basta aplicar el teorema con $a_j = 1/k$, $\mu_j = \mu$ y $\sigma_j^2 = \sigma^2$, $j=1,\dots,k$. Obsérvese que la variable $Z = \sqrt{k}(\bar{X}-\mu)/\sigma$ es $N(0,1)$.

<u>TEOREMA</u> (χ^2).- Sean X_j, $\chi^2_{r_j}$, $j=1,\dots,k$ e independientes. Entonces

$$X = \sum_{j=1}^{k} X_j \text{ es } \chi^2_r \text{ con } r = \sum_{j=1}^{k} r_j .$$

Se demuestra como los anteriores. Una aplicación interesante de este teorema es la siguiente:

Sean X_j $N(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j=1,\dots,k$ e independientes. Hemos visto en otra parte que las variables

$$Z_j = \frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j} \text{ son } N(0,1) \text{ y desde luego independientes, } j=1,\dots,k.$$

También son independientes las variables Z_j^2 y además, como ya sabemos, son χ^2_1, entonces aplicando el teorema

$$\sum_{j=1}^{k} Z_j^2 = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{X_j-\mu_j}{\sigma_j}\right)^2 \text{ es } \chi^2_k .$$

<u>TEOREMA</u> (Cauchy).- Sean X_j v.a. Cauchy con $\mu=0$, $\sigma=1$, $j=1,\dots,k$ e independientes. Entonces

$$X = \sum_{j=1}^{k} X_j$$

es una variable kY, donde Y es Cauchy con $\mu=0$, $\sigma=1$ y por tanto $\bar{X} = X/k$ es Cauchy con $\mu=0$, $\sigma=1$.

Demostración.-

$$\varphi_X(t) = \prod_{j=1}^{k} \varphi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{k} e^{-|t|} = e^{-k|t|}$$

que es la función característica de una variable $Z=kY$, con Y Cauchy $\mu=0$, $\sigma=1$. La segunda afirmación es inmediata a partir de este resultado.

⇒ Un ejemplo para demostrar que la incorrelación no supone independencia.

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias que toman los valores $-1, 0, 1$ con arreglo a las siguientes probabilidades

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	
-1	α	β	α	$2\alpha+\beta$
0	β	0	β	2β
1	α	β	α	$2\alpha+\beta$
	$2\alpha+\beta$	2β	$2\alpha+\beta$	$4\alpha+4\beta$

$\alpha, \beta > 0$, $\alpha+\beta = \frac{1}{4}$

Entonces

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1).E(X_2)$$

$$E(X_1 X_2) = (-1)(-1).\alpha + (-1)1.\alpha + 1.(-1)\alpha + 1.1.\alpha = \alpha - \alpha - \alpha + \alpha = 0$$

$$E(X_1) = -(2\alpha+\beta) + 2\alpha+\beta = 0$$

$$E(X_2) = -(2\alpha+\beta) + 2\alpha+\beta = 0$$

En consecuencia

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma(X_1).\sigma(X_2)} = 0$$

pero es evidente que la función de cuantía conjunta no verifica la factorización

$$f(x_1, x_2) \neq f_1(x_1).f_2(x_2)$$ donde f_i es la marginal de X_i.