VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

I. UNA CARACTERIZACION DE LAS FUNCIONES MEDIBLES

Recordemos que una función medible era una aplicación entre un espacio Ω, dotado de una σ-algebra de sus partes, $\mathcal{A}$, y la recta real R, provista de la correspondiente tribu de Borel, que verificaba

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \ \forall B \in \beta$$, donde β es la tribu (σ-algebra) de Borel.

Por otra parte, una función simple era aquella que siendo medible tenía un rango finito, lo que equivale a decir que una función simple es de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i} \qquad a_i \in R, \ i = 1, \dots, n$$

donde $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición medible finita del espacio Ω, es decir, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \cap A_j = \phi$ $i \neq j$ y $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall i$.

Existe una caracterización de las funciones medibles mediante funciones simples que damos a continuación en forma de teorema, cuya demostración omitiremos.

TEOREMA.- Una aplicación f del espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ en el espacio medible (R, β), que sea no negativa, es medible $\Leftrightarrow$ $\exists$ una sucesión monótona de funciones simples que converge a f (las funciones simples son también no negativas)

Si pretendemos trabajar con una función ~~integrable~~ medible cualquiera, no necesariamente no negativa, podemos dar una caracterización semejante, excepción hecha de la monotonía de la sucesión de funciones simples, basada en el hecho de que toda función admite una descomposición del tipo

$$f = f^{+} - f^{-}$$

donde

$$f^{+} = \begin{cases} f & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f^{-} = \begin{cases} |f| & \text{si } f \leq 0 \\ 0 & \text{si } f > 0 \end{cases}$$

y por tanto f^{+} y f^{-} son no negativas. El teorema correspondiente dice

TEOREMA.- Una aplicación f de $(\Omega, \mathcal{A})$ en (R, β) es medible $\Leftrightarrow$ $\exists$ una sucesión de funciones simples que converge a f.

II. CONTINUIDAD ABSOLUTA

II.a) Medidas absolutamente continuas. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y dotémoslo de dos medidas, μ y λ.

Definición I: Decimos que μ es absolutamente continua respecto a λ si $\mu(A) = 0$ para cada conjunto A de $\mathcal{A}$ tal que $\lambda(A) = 0$.

Si la medida μ es finita la definición dada es equivalente a,

DEFINICIÓN II: μ es absolutamente continua respecto a λ si para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\mu(E) < \varepsilon$, siempre que $\lambda(E) < \delta$, con $E \in \mathcal{A}$.

II.b) Funciones absolutamente continuas. Existe un concepto designado de la misma manera que hace referencia a las funciones a valores reales. Luego veremos que esta igualdad de nombres no es casual.

Definición III: Una función h a valores en R se dice que es absolutamente continua si, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ / $\forall \{]a_i, b_i]\}_{i=1}^{n}$ intervalos dos a dos disjuntos verificando

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{n} |h(b_i) - h(a_i)| < \varepsilon.$$

Como consecuencia de esta definición es muy fácil comprobar que una función absolutamente es continua y uniformemente continua.

II.c) Relación entre ambos conceptos. Un caso especialmente interesante es aquel en que las medidas utilizadas son unas determinadas y además también lo es el espacio medible utilizado. Situación que permite además poner de manifiesto el porqué ambos conceptos se designan de la misma forma.

Supongamos que $(\Omega, \mathcal{A}) \equiv (R, \beta)$ y además μ es una medida de probabilidad sobre (R, β) siendo λ la medida Lebesgue sobre los Borelianos de R, es decir, aquella que sobre cada intervalo vale la longitud del mismo.

Ya sabemos que a partir de P, medida de probabilidad, podemos definir una función, que resulta ser de distribución y acotada, mediante la relación $F(x) = P(]-\infty, x])$. Observemos que si P es absolutamente continua respecto a λ, tendremos que dado $\varepsilon > 0$, construyamos $I = \bigcup_{i=1}^{n} \{]a_i, b_i]\}$ con $\{]a_i, b_i]\} \cap \{]a_j, b_j]\} = \phi$ $i \neq j$, de manera que si

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{n} \lambda\{]a_i, b_i]\} = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

, estando δ elegido en función del ε, tendremos $P(I) < \varepsilon$, pero

$$P(I) = \sum_{i=1}^{n} P(]a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{n} [F(b_i) - F(a_i)] < \varepsilon$$

lo que quiere decir que F es una función absolutamente continua. Hemos visto pues que P absolutamente continua $\Rightarrow$ F absolutamente continua. Puede comprobarse, no es aquí el momento, que la implicación contraria es también cierta, lo que nos permite establecer la siguiente importante relación:

TEOREMA.- Sea F una función de distribución de probabilidad. F es absolutamente continua si y sólo si la correspondiente ~~m~~ medida de probabilidad, P, que da origen a F es absolutamente continua respecto de λ, medida de Lebesgue.

III. INTEGRACION RESPECTO DE UNA MEDIDA

Consideramos el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y una función simple no negativa, s, definida sobre él.

<u>Definición</u>: La integral sobre A de s respecto de la medida μ, se designa mediante el símbolo $\int_A s\,d\mu$ y se define mediante la relación.

$$\int_A s.d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A\cap A_i), \quad \text{donde } A\in\mathcal{A}.$$

Esta relación está siempre bien definida por cuanto $a_i\cdot\mu(A\cap A_i)$ se toma igual a 0, cuando $a_i=0$ y $\mu(A\cap A_i)=+\infty$.

La definición puede extenderse de inmediato a cualquier función medible no negativa que tengamos sobre Ω, de la siguiente forma.

<u>Definición</u>: La integral sobre A de f respecto de la medida μ se define

$$\int_A f\,d\mu = \sup\left\{\int_A s\,d\mu;\ 0\le s\le f\right\}.$$

El conjunto sobre el cual tomamos el supremo es no vacío de acuerdo con la caracterización dada para las funciones medibles no negativas, lo que garantiza la coherencia de la definición.

<u>Propiedades de la integral</u>. La aplicación así definida, en definitiva no es más que una aplicación de Ω en R, goza de una serie de propiedades que no vamos a demostrar pero que sí enunciaremos en algún caso concreto:

a) Si $a\ge 0$, $\int_A af\,d\mu = a\int_A f\,d\mu$.

b) Si $A_1\subset A_2$, $\int_{A_1} f\,d\mu \le \int_{A_2} f\,d\mu$.

c) Si $f\le g$, $\int_A f\,d\mu \le \int_A g\,d\mu$.

d) La aplicación λ, definida de $\mathcal{A}$ en R, mediante $\lambda(A)=\int_A f\,d\mu$, $A\in\mathcal{A}$ y f una función medible no negativa dada, es una medida.

e) Para f y g medibles y no negativas, tenemos $\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu$.

a)+e) suponen que para f y g medibles y no negativas $\int_A (af+bg)\,d\mu = a\int_A f\,d\mu + b\int_A g\,d\mu$ siendo los coeficientes de la combinación lineal no negativos.

f) Si A es tal que $\mu(A)=0$, entonces $\int_A f\,d\mu=0$, $\forall f$ medible y no negativa.

g) Si A es tal que $\mu(A)>0$, y f, medible y no negativa es tal que $\int_A f\,d\mu=0$ entonces $f=0$ c.p.p. (casi por todas partes, es decir salvo en un conjunto que tiene medida nula).

<u>Integración de funciones medibles cualesquiera</u>. Hemos introducido el concepto de integral únicamente para el caso de funciones medibles no negativas, el último paso consiste en generalizar el concepto para funciones medibles cualesquiera y simultáneamente introducir el concepto de integrabilidad.

<u>Definición</u>: Sea f una función medible cualquiera sobre el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, diremos que f es <u>integrable</u> [redacted] sobre $A\in\mathcal{A}$, si $\int_A f^+\,d\mu$ y $\int_A f^-\,d\mu$ son finitas. En este caso definimos la integral de f mediante

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu.$$

La integral así definida goza prácticamente de las mismas propiedades antes citadas, por ejemplo es un operador lineal, es decir

$$\int_A (af+bg)\,d\mu = a\int_A f\,d\mu + b\int_A g\,d\mu \qquad \forall a,b\in R \qquad f, g \text{ medibles}.$$

si bien algunas de ellas se pierden, por ejemplo $\lambda(A)=\int_A f\,d\mu$ no es una medida, por cuanto no puede garantizarse que sea siempre una cantidad no negativa. Surgen, sin embargo, propiedades nuevas, como por ejemplo una muy conocida:

$$\left|\int_A f\,d\mu\right| \le \int_A |f|\,d\mu.$$

<u>Observación</u>.- El concepto de integrabilidad es aplicable a cualquier función medible y por tanto también a las no negativas. En éstas el concepto equivale a decir que el valor de su integral, que siempre está definida, es finito.

IV. UNA IMPORTANTE PROPIEDAD DE LAS MEDIDAS ABSOLUTAMENTE CONTINUAS

Volvamos nuevamente a las condiciones iniciales del apartado II.a) y supongamos además que las dos medidas, λ y μ, son σ-finitas. Existe un importantísimo teorema que relaciona una medida absolutamente continua respecto a otra con ésta a través de una integral.

<u>TEOREMA DE RADON-NIKODYM</u>.- Sea μ una medida absolutamente continua respecto a λ y sean, a su vez, ambas σ-finitas. Existe entonces una función medible finita, no negativa, f, de manera que para cualquier conjunto medible, $A\in\mathcal{A}$, tenemos

$$\mu(A)=\int_A f\,d\lambda.$$

A f se la conoce con el nombre de derivada de Radon-Nikodym de μ respecto de λ, y se la designa a veces mediante $\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right]$.

<u>El teorema de Radon-Nikodym para medidas de probabilidad</u>. El teorema adquiere especial relevancia para nosotros cuando μ es una medida de probabilidad, P, y λ es la medida de Lebesgue. Sabemos que tanto una como otra son medidas σ-finitas con lo que el teorema tiene total validez en semejante situación. Tendremos pues, que $\exists f$, medible, finita, no negativa, de manera que

$$P(A)=\int_A f\,d\lambda \quad , \text{ con } A\in\beta$$

siendo $\int_A f\,d\lambda$ una integral de Lebesgue así llamada por ser λ la medida de Lebesgue. Observemos que para $A=]a,b]$, tenemos

$$P(]a,b])=\int_{A=(]a,b])} f\,d\lambda$$

pero si F es la función de distribución de probabilidad definida a partir de P, la anterior igualdad puede escribirse

$$F(b)-F(a)=\int_{]a,b]} f\,d\lambda$$

en particular para $a=-\infty$, llegaremos a

$$F(b)=\int_{]-\infty,b]} f\,d\lambda \qquad \forall b\in R$$

que preferimos escribir de la forma

$$F(x)=\int_{]-\infty,x]} f\,d\lambda \qquad , \forall x\in R.$$

Por otra parte $F(x)$ por ser monótona tiene derivada casi por todas partes y además es finita casi por todas partes, una importante propiedad, que no demostramos, nos permite afirmar que $F'=f$ c.p.p. y la última igualdad puede también escribirse

$$F(x)=\int_{]-\infty,x]} F'\,d\lambda \qquad , \forall x\in R$$

porque además de ser finita c.p.p., F' es medible e integrable y no negativa c.p.p. por serlo f.

V. <u>DEFINICIÓN DE VARIABLE ALEATORIA CONTINUA</u>

Sea X una v.a. definida de $(S,\mathcal{B},P)$ en (R,β,P'), decimos que X es una v.a. del tipo continuo, o simplemente una v.a. continua si la medida de probabilidad P' es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, lo que equivale a decir que F, función de distribución de probabilidad definida a partir de P', es absolutamente continua.

Como consecuencia de esta definición existirá una función f, medible, finita y no negativa tal que

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f\,d\lambda \quad \text{o también} \quad P'(A)=\int_A f\,d\lambda \quad , \forall x\in R \text{ y } \forall A\in\beta,$$

a la función f se la conoce con el nombre de <u>función de densidad de probabilidad</u> de la variable aleatoria X. Esta función tiene además una propiedad importante, a saber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,d\lambda = 1$$

puesto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,d\lambda = F(+\infty)=\lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

<u>Caracterización de una distribución de probabilidad mediante la función de densidad de probabilidad</u>

Recordemos que en el caso de variables aleatorias discretas podíamos caracterizar la distribución de probabilidad, es decir, la medida de probabilidad inducida o la función de distribución correspondiente con sólo conocer la función de cuantía. Exactamente el mismo procedimiento puede ser utilizado en nuestra situación actual, así como la función de distribución (o la medida de probabilidad) de una v.a. continua nos define una función, la de densidad de probabilidad, a partir de una función con características similares a ésta podemos recorrer el camino inverso para llegar al anterior punto de partida. Ello quiere decir que una v.a. continua, más correctamente, su distribución de probabilidad puede ser caracterizada mediante la correspondiente función de densidad. Veámoslo

<u>TEOREMA</u>.- Sea f una función integrable Lebesgue, es decir, medible y con $\int_R f\,d\lambda < +\infty$ tal que

a) f es finita

b) f es no negativa

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f\,d\lambda = 1$

entonces f es la función de densidad de probabilidad de alguna variable aleatoria del tipo continuo, X.

Demostración.- Basta comprobar que la función $F(x)$ definida mediante

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, d\lambda$$

es una función de distribución de probabilidad, por cuanto, $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\, d\lambda = 1$.
A partir de F podemos definir una medida de probabilidad, P sobre los Borelianos de R que puede considerarse inducida por una variable aleatoria definida de $(R,\beta) \xrightarrow{en} (R,\beta)$, concretamente la identidad.

En resumen, cuando haya que caracterizar una v.a. continua lo haremos indistintamente con P', F, función de distribución (f.d.) o f, función de densidad de probabilidad (f.d.p.).

Propiedad.- Recordemos que sea cual sea la variable aleatoria X, P' la medida de probabilidad inducida (da

$$P'(\{a\}) = P(X=a) = F(a) - F(a-0)$$

Si X es del tipo discreto y $a \in S_X$ sabemos que $F(a) \neq F(a-0)$ y $P(X=a) = P'(\{a\}) \neq 0$.
Una variable aleatoria continua se caracteriza por poseer una f.d., F, que es absolutamente continua y por tanto continua, ello quiere decir que $F(x) = F(x-0)$, $\forall x \in R$, y de aquí

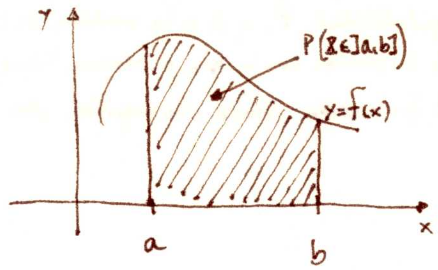
$$P'(\{a\}) = P(X=a) = 0 \quad , \forall a \in R.$$ Si X es una v.a. continua.

Relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Riemann. Antes de continuar veamos una interesante relación entre ambas integrales que nos será útil para estudiar las v.a. continuas.
Se puede demostrar, Teorema de Vitali, que toda función integrable Riemann es integrable Lebesgue y además sus integrales son iguales. El recíproco no es cierto.
La importancia de este hecho estriba en que normalmente las variables aleatorias continuas que utilizaremos dan lugar a f.d.p., f, que son continuas y por tanto integrables Riemann (Una función es integrable Riemann si y sólo si los puntos de discontinuidad de la función forman un conjunto de medida de Lebesgue nula). Ello supone que todas las integrales que aparecen en la definición de v.a. continua pueden ser consideradas como integrales de Riemann, con las ventajas que ello comporta. [A señalar que las f.d.p.'s que utilizaremos serán tales que las integrales impropias de Riemann utilizadas son convergentes].

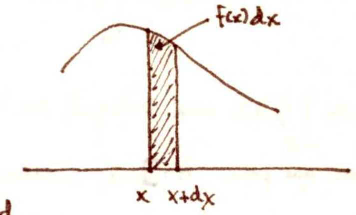
Significado físico de la probabilidad. Bajo las condiciones descritas en el párrafo precedente la probabilidad adquiere un significado físico del que carecía hasta ahora. En efecto la

$$P(X \in]a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_{]a,b]} f\, d\lambda$$

pero la integral de Riemann tiene el sentido de una superficie, más concretamente, la probabilidad descrita es el área comprendida bajo la curva $y=f(x)$ en el intervalo $]a,b]$.



Obsérvese que como F es absolutamente continua y $P(X=a)=0$ la $P(X\in]a,b]) = P(X\in[a,b]) = P(X\in[a,b[) = P(X\in]a,b[)$
Por otra parte el hecho de que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, supone que el área encerrada bajo la curva $y=f(x)$ es igual a la unidad.

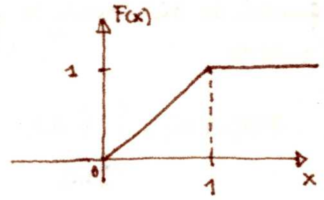


Observemos finalmente que, véase la figura, $f(x).dx$ es un elemento de área, o dicho de otra forma, es un elemento de probabilidad. $f(x)$ tendrá así el sentido de densidad de probabilidad por unidad de longitud, de donde su nombre de función de densidad de probabilidad.

EJEMPLOS

I) Sea X una v.a. con f.d. F dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

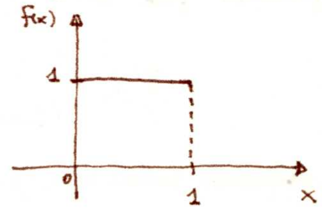


La f.d.p., f, vendrá dada por la derivada de F en los puntos de continuidad de f, así

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x<0,\ x>1 \\ 1, & 0<x<1 \end{cases}$$

f no es continua en $x=0$ y $x=1$. Los valores $f(0)$ y $f(1)$ pueden definirse de cualquier manera, por ejemplo haciendo $f(0)=f(1)=0$, tenemos

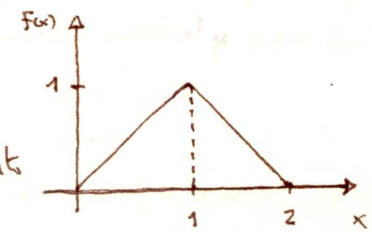
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Una variable de este tipo se la conoce con el nombre de v.a. uniforme sobre el intervalo $[0,1]$.

II) Sea X una v.a. que tiene una f.d.p triangular, es decir

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$



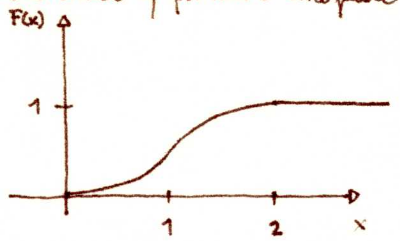
Observemos que $f(x)$ es, en efecto, una f.d.p por cuanto

a) $f(x)$ es no negativa a valores en R
b) el área encerrada bajo su gráfica es 1. Es decir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$

La f.d. F, para la v.a. X vendrá dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt$$

siendo una integral de Riemann, por cuanto f es una función continua y por tanto integrable Riemann. Así pues



$F(x) = 0$, si $x \le 0$

$$F(x) = \int_0^x t\cdot dt = \frac{x^2}{2}, \quad \text{si } 0 < x \le 1$$

$$F(x) = \int_0^1 t\cdot dt + \int_1^x (2-t)\cdot dt = 2x - \frac{x^2}{2} - 1, \quad \text{si } 1 < x \le 2$$

$F(x) = 1$, si $x > 2$

Si quisiéramos calcular la probabilidad del intervalo $]\,.3, 1.5]$, tendremos

$$P(.3 < X \le 1.5) = P(X \le 1.5) - P(X \le .3) = \left(2(1.5) - \frac{(1.5)^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{0.3^2}{2}\right) = 0.83$$

III) Sea $k > 0$ una constante, y sea

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en el resto}. \end{cases}$$

entonces

$$\int_0^1 f(x)\cdot dx = k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = k\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{k}{6}.$$

Tendremos que $f(x)$ define una f.d.p. si $k = 6$. En este caso la f.d., F, viene dada por

$F(x) = 0$, si $x \le 0$

$$F(x) = \int_0^x 6t(1-t)\, dt = 6\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right), \quad \text{si } 0 < x < 1$$

$F(x) = 1$, si $x \geq 1$

Así, $P(X > .3) = 1 - P(X \le .3) = 1 - 6\left[\frac{0.09}{2} - \frac{0.027}{3}\right] = 1 - 6\left[0.045 - 0.009\right] = 1 - 6 \times 0.036 =$
$= 0.784$

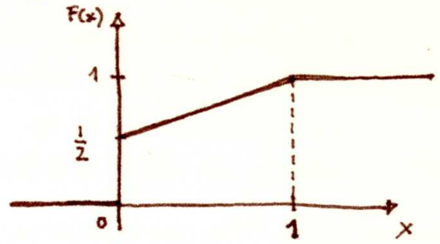
NOTA.- Debemos señalar que los dos tipos de variables aleatorias estudiadas, continuas y discretas, constituyen sólo una pequeña parte de la clase de todas las v.a.'s. Estos dos tipos, sin embargo, contienen prácticamente todas las variables aleatorias que puedan surgirnos en la práctica. Señalemos también aunque sin demostrarlo que cada función de distribución admite una descomposición de la forma

$$F(x) = a\cdot F_d(x) + (1-a)\cdot F_c(x)$$

donde F_d y F_c son ambas funciones de distribución. Concretamente F_d es la f.d. de una v.a. discreta, mientras que F_c es continua (no necesariamente absolutamente continua). De hecho se demuestra que a su vez, F_c, admite una descomposición posterior. Veamos un ejemplo que ilustre lo dicho y ponga de manifiesto una v.a., X, que no es ni discreta, ni continua.

IV) Sea X una v.a. con f.d., F, dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \le x. \end{cases}$$



Obsérvese que F tiene un salto en $x = 0$ y F es continua (de hecho, absolutamente continua) en el intervalo $(0,1)$. F es la f.d. de una v.a., X, que no es ni discreta, ni continua. De acuerdo con lo anterior F puede descomponerse como sigue,

$$F(x) = \frac{1}{2} F_d(x) + \frac{1}{2} F_c(x)$$

donde

$$F_d(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \le x. \end{cases}$$

F_d es la f.d. de una v.a. degenerada en el punto $x = 0$, llamada así por tener toda la probabilidad concentrada en un solo punto. Se trata de una variable aleatoria que toma un solo valor, es decir, es constante. F_c es la f.d. de una v.a. uniforme en el intervalo $(0,1)$.

ALGUNAS VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

I) NORMAL (o GAUSSIANA).

Se trata de una v.a. cuya f.d.p. viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad x \in R.$$

Con estas características decimos que X se distribuye normal (μ, σ^2), y lo denotaremos mediante $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ y σ^2 son llamados parámetros de la distribución, cuyo significado comprenderemos más adelante, en cualquier caso $\mu \in R$ y $\sigma > 0$. En el caso en que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la distribución normal que se obtiene se la conoce con el nombre de distribución normal Standard o normal tipificada, y se la designa mediante $N(0,1)$. La función f es una f.d.p por cuanto:

a) Es continua y por tanto medible y además es finita

b) f es no negativa

c) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

a) y b) son inmediatos de comprobar. Para demostrar c) lo haremos comprobando que $I^2 = 1$. En efecto

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \,\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\,\sigma\,dz \cdot \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}\,\sigma\,dv$$

para llegar a esta última igualdad hemos efectuado el cambio $\frac{x-\mu}{\sigma} = z$ y $\frac{y-\mu}{\sigma} = v$. Por tanto

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z^2+v^2)/2}\,dz\,dv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}\,r\,dr\,d\theta$$

obtenida esta última igualdad mediante el cambio a coordenadas polares, a saber

$$r^2 = z^2 + v^2 \quad \Big\|\quad z = r.\operatorname{sen}\theta$$
$$\theta = \operatorname{arctag}\frac{z}{v} \quad \Big\|\quad v = r.\cos\theta$$

siendo el Jacobiano de la transformación, r.

En consecuencia

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\,r\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\,r\,dr = -e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Entre otras propiedades de interés, la función $f(x)$ es simétrica respecto a μ, por cuanto para

$x_1 = \mu + k$

$x_2 = \mu - k$

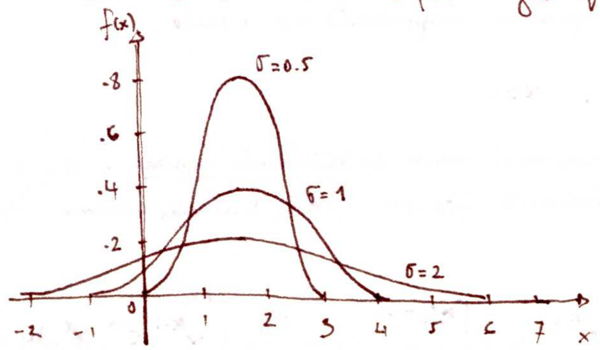
tenemos

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right] \\ f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(-k)^2}{2\sigma^2}\right]\end{array}\right\} f(x_1) = f(x_2)$$

Se comprueba fácilmente que la función alcanza un máximo para $x = \mu$, y que dicho máximo vale

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

lo que supone que la forma de la función se altera con los distintos valores de σ, más concretamente es más estirada o más plana según que σ sea menor o mayor.



Gráficas de ~~[illegible]~~ f.d.p. de normales $N(1.5, \sigma^2)$ con $\sigma = 0.5$, $\sigma = 1$ y $\sigma = 2$ respectivamente.

El nombre de normal le viene a esta variable aleatoria del hecho de ser la que admite la mayoría de los fenómenos aleatorios que se encuentran en el campo experimental. No obstante, su importancia radica en las propiedades límites de sucesiones de variables aleatorias cualesquiera, que en su momento estudiaremos.

La correspondiente función de distribución viene dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

pero hay que señalar que $f(t)$ carece de primitiva y por tanto los distintos valores de $F(x)$ se obtienen mediante unas tablas adecuadas, no obstante, las tablas son únicas, concretamente las de la normal tipificada, $N(0,1)$, y no ~~[illegible]~~ una para cada par de valores (μ, σ^2), por cuanto resultaría imposible cubrir todo el conjunto de posibles valores de dicho par de parámetros. Esto no supone ningún serio problema a la hora de obtener valores de $F(x)$ para una $N(\mu,\sigma^2)$. En efecto, si nosotros queremos calcular, para $N(\mu,\sigma^2)$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dt$$

efectuando el cambio $z=\frac{t-\mu}{\sigma}$, tendremos que los límites de integración varían, convirtiéndose en $]-\infty,x']$, con $x'=\frac{x-\mu}{\sigma}$, quedando la integral convertida en

$$\phi(x')=\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\int_{-\infty}^{x'}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-z^2/2\right]dz$$

en donde $\phi(x)$ representa la función de distribución de la $N(0,1)$ cuyos valores aparecen en la tabla.

II) GAMMA.

Se trata de una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad viene dada por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\cdot x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}\qquad \alpha>0,\ \beta>0.$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es el valor de la función Gamma correspondiente a α, es decir

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}\cdot e^{-y}\,dy,\quad \alpha>0$$

La distribución de la v.a. X se la conoce con el nombre de distribución Gamma y α y β son los parámetros de la distribución. Obviamente $f(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, es además continua y finita y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x/\beta}\,dx=\begin{bmatrix}x/\beta=y\\ x=\beta y\\ dx=\beta dy\end{bmatrix}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\cdot e^{-y}\cdot\beta^{\alpha}\cdot dy=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\Gamma(\alpha)=1.$$

Los distintos valores de la f.d., F, aparecen también tabulados, presentándose las tablas para diferentes valores de los parámetros α,β. Ello da idea de la dificultad que puede suponer obtener valores de F para cualesquiera α y β.

Respecto de la función Gamma debemos añadir que sus valores son sencillos de obtener

si α es entero o de la forma $n+\frac{1}{2}$, n natural. En efecto, mediante integraciones sucesivas por partes, puede verse que

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\cdot\Gamma(\alpha-1)=(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\Gamma(\alpha-2)$$

de manera que para α entero,

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot\Gamma(1)$$

pero

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy=1$$

y por tanto

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!.$$

Para el caso en que $\alpha=n+\frac{1}{2}$, obtengamos $\Gamma(\frac{1}{2})$.

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-y}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

haciendo $y^{\frac{1}{2}}=\frac{t}{\sqrt{2}}$, tendremos $y=\frac{t^2}{2}$, $dy=t\,dt$, $t\in(0,+\infty)$, y de aquí

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{t}e^{-t^2/2}\,t\,dt=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2/2}\,dt$$

pero la integral de la parte de la última igualdad dividida por $\sqrt{2\pi}$ es la mitad del área que cubre la f.d.p. de la $N(0,1)$ y dicha área vale $\frac{1}{2}$, así pues

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

lo que suele expresarse, en ocasiones, recordando que $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ para α entero y haciendo extensiva esta relación para cualquier α, de la forma

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\left(-\tfrac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}.$$

Es muy fácil, a partir de aquí, obtener

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ldots.$$

Hay dos clases de distribuciones Gammas, que por su importancia y uso han adquirido nombre propio y son:

II.a) JI-CUADRADO

Se trata de un caso particular de la Gamma en la que $\alpha = r/2$, r entero no negativo, $\beta = 2$. La f.d.p. tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}r)\, 2^{r/2}} \cdot e^{-x/2} \cdot x^{(r/2)-1} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad r \geq 0, \text{ entero}$$

a esta f.d.p. se la designa mediante χ^2_r, y el parámetro r es conocido como el número de grados de libertad de la distribución, cuyo significado veremos más tarde.

II.b) EXPONENCIAL NEGATIVA

Se obtiene de la Gamma para $\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$ y su f.d.p. es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0.$$

La distribución Gamma y sus derivadas aparecen en estadística cuando se estudian, entre otros, problemas de tiempo de espera. En particular la exponencial negativa está ligada a la distribución de Poisson, para el caso de desintegraciones de material radiactivo, por cuanto es la distribución de probabilidad de la v.a. que estudia el tiempo transcurrido entre dos impactos consecutivos (verlo como ejercicio).

III) BETA

Es una v.a. cuya f.d.p. es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 \text{ , en el resto} & \end{cases} \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

f es una función no negativa, continua, excepto en el punto 1, finita y además normada, pues

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta) = \left(\int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx\right) \cdot \left(\int_0^\infty y^{\beta-1} \cdot e^{-y}\, dy\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \cdot e^{-(x+y)}\, dx\, dy$$

haciendo el cambio $u = x/(x+y)$, tendremos

$$x = \frac{uy}{1-u} \quad , dx = \frac{y\, du}{1-u^2} \quad , u \in (0,1) \quad y \quad x+y = \frac{y}{1-u}$$

lo que nos lleva a

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha-1}} \cdot y^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} \cdot e^{-y/(1-u)}\, y\, \frac{du}{(1-u)^2}\, dy =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha+1}}\, y^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-y/(1-u)}\, du\, dy$$

haciendo ahora $y/(1-u) = v$, tendremos $y = v(1-u)$, $dy = (1-u)dv$, $v \in (0,+\infty)$. Entonces la integral es

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} v^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-v}\, du\, dv =$$

$$= \int_0^\infty v^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-v}\, dv \cdot \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du = \Gamma(\alpha+\beta) \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du$$

es decir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} = 1.$$

La distribución de probabilidad de X se conoce con el nombre de distribución beta, y deriva del hecho de que en Análisis la integral $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$, $\alpha, \beta > 0$ es conocida como la función beta. A α y β se les conoce como los parámetros de distribución. Para la obtención de los valores de $F(x)$ vale todo lo dicho en el correspondiente párrafo de la distribución Gamma.

OBSERVACIÓN. Para $\alpha = \beta = 1$, teniendo en cuenta que $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, la f.d.p. adquiere la forma

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{en el resto} \end{cases}$$

que es la f.d.p. de la v.a. uniforme en el intervalo $[0,1]$.

IV) CAUCHY

La f.d.p. viene dada por

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi} \cdot \frac{1}{\sigma^2 + (x-\mu)^2} \quad , x \in R \ , \mu \in R, \ \sigma > 0$$

Se trata, efectivamente, de una f.d.p. por cumplir todas las propiedades exigibles para ello. En particular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma^2+(x-\mu)^2}\,dx = \frac{1}{\sigma\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx$$

haciendo el cambio $y=\frac{x-\mu}{\sigma}$, $dx=\sigma\,dy$, y tendremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\operatorname{arctg} y\right]_{-\infty}^{\infty} = 1$$

Una distribución de probabilidad de estas características se la conoce con el nombre de distribución de Cauchy y μ y σ son los parámetros de la distribución.

La correspondiente gráfica de la f.d.p. se asemeja mucho a la de la normal con igual valores de μ y σ, con la diferencia que aquella tiene las colas mas elevadas.

V) LOGNORMAL

Se trata de una variable aleatoria con f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(\log x - \log\alpha)^2}{2\beta^2}\right], & x>0 \\ 0, & x\le 0, \text{ con } \alpha,\beta>0. \end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua, no negativa, finita y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\exp\left[-\frac{(\log x-\log\alpha)^2}{2\beta^2}\right]dx$$

haciendo el cambio $x=e^y$, $\log x = y$, $dx = e^y dy$, $y\in(-\infty,+\infty)$, tendremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^y}\exp\left[-\frac{(y-\log\alpha)^2}{2\beta^2}\right]e^y dy =$$

$$= \frac{1}{\beta}\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(y-\log\alpha)^2}{2\beta^2}\right]dy$$

pero observemos que se trata de la integral de la f.d.p. de una normal, $N(\log\alpha,\beta^2)$ y por tanto dicha integral debe de ser la unidad. Precisamente el nombre de lognormal con que se conoce a esta distribución, deriva del hecho expuesto, pues decir que X se distribuye como una lognormal es lo mismo que decir que $Y=\log X$ lo hace como una normal. Las constantes α y β se las conoce como los parámetros de la distribución.

EJERCICIOS

I). Si X es una v.a. distribuida $N(3, 0.25)$, obtener, mediante las tablas, las siguientes probabilidades

a) $P(X<-1)$, b) $P(X>2.5)$, c) $P(-0.5<X<1.3)$.

Las tablas son de una normal tipificada y debemos por tanto efectuar el correspondiente cambio para poder utilizarlas. Tendremos pues:

a) $P(X<-1) = P\left(\frac{X-3}{0.5} < \frac{-1-3}{0.5}\right) = P(Z<-8) = \Phi(-8) \simeq 0.$

b) $P(X>2.5) = P\left(\frac{X-3}{0.5} > \frac{2.5-3}{0.5}\right) = P(Z>-1) = 1-P(Z\le -1) = 1-\Phi(-1) = 0.841345$

c) $P(-0.5<X<1.3) = P\left(\frac{-0.5-3}{0.5} < \frac{X-3}{0.5} < \frac{1.3-3}{0.5}\right) = P(-7<Z<-3.4) = \Phi(-3.4)-\Phi(-7) =$

$= 0.000337.$

II) Si una v.a. X se distribuye $N(\mu,\sigma^2)$ encontrar, en términos de μ y de σ, el valor de c tal que $P(X<c) = 2-9.P(X>c)$.

$$P(X<c) = 2-9.P(X>c) = 2-9[1-P(X<c)] = 2-9+9.P(X<c)$$

$$9.P(X<c) - P(X<c) = 7 \rightarrow 8.P(X<c) = 7 \rightarrow P(X<c) = 0.875$$

luego

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 0.875 \quad \text{es decir} \quad \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 0.875$$

buscando en las tablas, encontramos

$$\Phi(1.15) = 0.875 \rightarrow \frac{c-\mu}{\sigma} = 1.15 \rightarrow \boxed{c = 1.15\sigma+\mu}$$

III) Un cierto proceso de manufactura produce bombillas cuya duración, en horas, es una v.a. X distribuida como $N(2000, 200)$. Se supone que una bombilla es defectuosa si su duración es menor de 1800 horas. Si se comprueban 25 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 15 de ellas sean defectuosas?

En el supuesto de que las distintas comprobaciones son independientes, cosa que cabe esperar así sea, el número de bombillas defectuosas es una distribución binomial, $B(25,p)$, donde p se obtiene a partir de la $N(2000,200)$ mediante

$$p = P(X<1.800) = P\left(\frac{X-2000}{\sqrt{200}} < \frac{1800-2000}{\sqrt{200}}\right) = P(Z<-\sqrt{200}) = \Phi(-\sqrt{200}) \simeq 0$$

y por tanto la probabilidad pedida será cero.

IV) Un proceso de fabricación produce bolas de rodamiento de $\frac{1}{2}$ pulgada que se suponen buenas si su diámetro cae en el intervalo 0.5 ± 0.0006 y defectuosas en cualquier otro caso. La producción de un día se examina y se encuentra que la distribución de los diámetros es aproximadamente normal con media $\mu = 0.5007$ pulgadas y $\sigma = 0.0005$ pulgadas. a) Calcular la proporción de bolas defectuosas. b) Si ajustes menores del proceso permiten cambiar el diámetro de las bolas, pero no su desviación típica, indicar cuáles serían los cambios aconsejables y calcular entonces la fracción de bolas defectuosas.

a) Las bolas defectuosas son aquellas cuyos diámetros caen fuera del intervalo 0.5 ± 0.0006, entonces la proporción buscada, p, vendrá dada por (X representa el diámetro)

$$p = P(X < 0.4994) + P(X > 0.5006) = P\left(\frac{X-0.5007}{0.0005} < \frac{0.4994-0.5007}{0.0005}\right) +$$

$$+ P\left(\frac{X-0.5007}{0.0005} > \frac{0.5006-0.5007}{0.0005}\right) = P\left(Z < -\frac{13}{5}\right) + P\left(Z > -\frac{1}{5}\right) = \phi(-2.6) + \phi(-0.2) =$$

$$= 0.004661 + 0.579260 = 0.583921$$

b) Disminuyendo el diámetro medio hasta 0.5 pulgadas, tendremos

$$p = P\left(Z < -\frac{6}{5}\right) + P\left(Z > \frac{6}{5}\right) = 2 \cdot P(Z < -1.2) = 2 \cdot (0.116070) = 0.232140.$$

Cualquier otro diámetro medio, puede comprobarse que aumentará la proporción de piezas defectuosas.

V) Supongamos que el consumo medio de agua/mes de los residentes de cierta comunidad sigue una distribución lognormal con $\alpha = 10^4$ pies cúbicos y $\beta = 10^3$ pies cúbicos por mes. Calcular la proporción de residentes que consumen más de 15×10^3 pies cúbicos mensualmente.

$$P(X > 15 \cdot 10^3) = 1 - P(X \leq 15 \cdot 10^3)$$

Sabemos que si X es lognormal con parámetros α y β, entonces $Y = \log X$ es una distribución $N(\log \alpha, \beta^2)$. Podemos replantear el problema en términos de una normal calculando la proporción de residentes que consumen más de $\log(15 \times 10^3)$ pies cúbicos de agua mensualmente. Así pues

$$P(Y > \log(15 \times 10^3)) = 1 - P(Y \leq \log(15 \times 10^3)) = 1 - P\left(\frac{Y - \log 10^4}{10^3} \leq \frac{\log(15 \times 10^3) - \log(10^4)}{10^3}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{\log 1.5}{10^3}\right) \simeq 1 - \phi(0) = 1 - 0.5 = \underline{0.5}$$

VI) <u>Relación entre las distribuciones de POISSON y EXPONENCIAL NEGATIVA.</u>

Consideremos una variable aleatoria X que denota el número de impactos, procedente de la desintegración de cierto material radiactivo, que alcanzan un contador Geiger en un intervalo de tiempo t. Ya sabemos que se trata de una v.a. con distribución de Poisson con parámetro λt, y por tanto

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda t}$$

Sea ahora T una variable que denota el tiempo transcurrido entre dos impactos consecutivos. El suceso $T > t$ representa el hecho de que no se hayan producido impactos durante el intervalo de tiempo t, y por tanto

$$P(T > t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t}$$

pero por otra parte, si designamos mediante $f(t)$ la f.d.p. de la v.a. T, tendremos

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - \int_0^t f(x)\,dx = 1 - \int_{-\infty}^t f(x)\,dx = e^{-\lambda t}$$

derivando en ambos miembros de la igualdad, llegamos a

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

que es la f.d.p. de una exponencial negativa con parámetro λ.

VII) Sea X una v.a. distribuida como $U(-\alpha, \alpha)$. Determinar el valor del parámetro α para que sea cierto lo siguiente:

a) $P(-1 < X < 2) = 0.75$, b) $P(|x| < 1) = P(|x| > 2)$

Recordemos que la f.d.p. de una $U(-\alpha, \alpha)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}, & -\alpha \leq x \leq \alpha \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Por tanto para a)

$$P(-1 < X < 2) = P(X < 2) - P(X \leq -1) = \int_{-\alpha}^{2} f(x)\,dx - \int_{-\alpha}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2\alpha}\int_{-1}^{2} dx$$

$$= \frac{2-(-1)}{2\alpha} = \frac{3}{2\alpha} = 0.75 \rightarrow \underline{\alpha = 2}$$

para b) tenemos

$$P(|X|<1) = P(-1<X<1) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1/\alpha$$

$$P(|X|>2) = P(-\alpha<X<-2) + P(2<X<\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{-2} dx + \frac{1}{2\alpha}\int_{2}^{\alpha} dx = \frac{\alpha-2}{2\alpha} + \frac{\alpha-2}{2\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha-2}{\alpha}$$

entonces

$$\frac{\alpha-2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha-2=1 \rightarrow \underline{\alpha=3}$$