ALGUNOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA

Antes de comenzar el capítulo de funciones características enunciaremos algunos teoremas que proporcionan las condiciones mediante las cuales es lícito permutar la integración y el paso al límite cuando trabajamos con familias de funciones medibles. Muchos de estos teoremas de convergencia, pues así son conocidos, deben su origen a Lebesgue que fue quien se ocupó en primer lugar, al menos con cierto rigor y sistematización, de la teoría de la medida y de la integración abstractas, de aquí que muchos de estos teoremas lleven su nombre.

TEOREMA DE LA CONVERGENCIA MONÓTONA DE LEBESGUE.- Sea $\{f_n\}$ una sucesión monótona creciente de funciones medibles no negativas tales que $\lim_n f_n = f$. Entonces

$$\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_n f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu .$$

(El enunciado del teorema es también válido si la convergencia de las funciones es casi por todas partes).

COROLARIO.- Sea $f_n \geq 0$, $\forall n$ y sea $f = \sum_n f_n$, entonces la sucesión $g_n = \sum_{i=1}^n f_i$ verifica las condiciones del teorema anterior y podemos escribir

$$\int_\Omega \sum_n f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_n g_n \, d\mu = \lim_n \int_\Omega g_n \, d\mu = \lim_n \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i \, d\mu = \sum_n \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Del teorema de la convergencia monótona de Lebesgue se deriva a su vez un conocido lema

LEMA DE FATOU.- Para funciones medibles no negativas, f_n, se verifica siempre

$$\int_\Omega \underline{\lim}_n f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_\Omega f_n \, d\mu .$$

donde $\underline{\lim}$ denota el límite inferior.

A su vez el lema de Fatou permite obtener el otro importante teorema de convergencia, válido ahora para cualesquiera funciones medibles

TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DOMINADA DE LEBESGUE.- Sean f_n funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$, (casi por todas partes), donde g es una función medible integrable. Además $f_n \to f$ (casi por todas partes), entonces f y f_n son integrables y además $\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$.

Si en este teorema reemplazamos la función g por una constante positiva y suponemos además que la medida sea finita, entonces

$$\int_\Omega M \, d\mu = M \cdot \mu(\Omega) < +\infty$$

lo que supone que M es una función integrable. Obtenemos entonces un nuevo teorema que se conoce como el

TEOREMA DE LA CONVERGENCIA ACOTADA.- Si $\mu(\Omega) < +\infty$ y las f_n están uniformemente acotadas, entonces $f_n \to f$ (casi por todas partes) implica que $\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$

Al igual que para el teorema de la convergencia monótona, también para el de la convergencia dominada existe, como corolario, una versión para series, a saber

COROLARIO DEL T.C.D.- Si $\sum_n f_n$ converge (casi por todas partes) y $\left|\sum_{k=1}^n f_k\right| < g$ (casi por todas partes), donde g es una función integrable, entonces $\sum_n f_n$ es integrable y tenemos

$$\sum_n \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega \sum_n f_n \, d\mu .$$

OBSERVACIÓN.- Si bien todos estos teoremas han sido enunciados para sucesiones se demuestra que son también válidos para conjuntos de índices cualesquiera.

Como consecuencia de esta observación enunciamos finalmente un teorema, también de utilidad en el estudio de las funciones características, y que resuelve el problema de derivar una integral mediante la derivación bajo el integrando.

TEOREMA.- Supongamos que $f(\omega,t)$ es una función medible para cada $t \in]a,b[$.

1) Supongamos que $f(\omega,t)$ es continua (casi por todas partes) para $t=t_0$ y supongamos además que para cada t perteneciente a un entorno de t_0, $|f(\omega,t)| \leq g(\omega)$ (casi por todas partes), siendo g integrable. Entonces $\int_\Omega f(\omega,t) \, d\mu$ es continua para $t=t_0$.

2) Supongamos que para $\omega \in A$ (A medible tal que $\mu(\Omega - A) = 0$), $f(\omega,t)$ tiene en $]a,b[$ derivada, $f'(\omega,t)$, respecto de t. Supongamos además que $|f'(\omega,t)| \leq g(\omega)$, $\omega \in A$ y $t \in]a,b[$, siendo g integrable. Entonces

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega f(\omega,t) \, d\mu = \int_\Omega f'(\omega,t) \, d\mu , \quad t \in]a,b[.$$