

## **Alta capacidad en magisterio: música y matemáticas (GEOGEBRA-TICS)<sup>17</sup>**

**Adela Jaime Pastor y M<sup>a</sup> José Beltrán Meneu**

Dpto. Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València. Facultad de Magisterio

**Adela Jaime** es Profesora Titular en el Departamento de Didáctica de la Matemática en la Universitat de València. Es doctora en matemáticas y las líneas en las que ha desarrollado más investigación son didáctica de la geometría y atención a la alta capacidad matemática.

**María José Beltrán Meneu** es profesora en el Departamento de Didáctica de la Matemática en la Universitat de València. Es doctora en matemáticas y sus líneas de investigación principales son el análisis funcional y la didáctica de la matemática.

### **INTRODUCCIÓN**

En el mundo de la docencia surgen de forma natural cuestiones relacionados con qué y cómo enseñar, qué y cómo aprenden los estudiantes, el interés de los estudiantes por aprender, lo que quieren aprender, la participación con los compañeros, ... En este sentido, se ha escrito mucho sobre contenidos, metodologías, modelos de aprendizaje, actitudes, aspectos sociales, afectividad, ...

Como profesores en la Facultad de Magisterio, nuestros intereses no se limitan a impartir ciertos conocimientos académicos, sino que realizamos propuestas de trabajo en las que tenemos en cuenta algunas de las preguntas planteadas en el párrafo anterior. Los estudiantes a los que va dirigida la experiencia que presentamos en este trabajo son, posiblemente, futuros profesores de Enseñanza Primaria, por lo que, además del beneficio personal que pueden experimentar al realizar la experiencia, pretendemos dotarles de cierta originalidad en sus aulas, cuando ejerzan su trabajo, promoviendo actuaciones no estándar, que puedan impactar y, por lo tanto, conseguir un aprendizaje más significativo y duradero.

### **OBJETIVOS DE LA EXPERIENCIA**

---

<sup>17</sup>Esta investigación es parte de los proyectos de investigación EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER).

En particular, en el trabajo que presentamos, pretendemos que:

- a) se adquieran o incrementen conocimientos relacionados con la enseñanza de las matemáticas,
- b) se trabaje de manera colaborativa,
- c) se rompa el estilo de trabajo usual, consiguiendo, como mínimo, incertidumbre inicial ante cómo plantear la respuesta grupal,
- d) se utilice un contexto atractivo para los estudiantes,
- e) se atienda a la originalidad de los estudiantes con alta capacidad y se potencie la creatividad.
- f) se trabaje de forma interdisciplinar,

El trabajo consiste en:

La realización de una presentación audiovisual en la que se coordine la audición de una composición musical con la ejecución de una composición pictórica realizada con el programa de geometría dinámico GeoGebra.

La duración de la presentación audiovisual es variable, de 2 a 4 minutos. La parte auditiva puede ser original, creada para este trabajo, o bien una melodía o canción ya existente con anterioridad.

## **METODOLOGÍA**

Se desarrolla de manera grupal, con 5-7 miembros aproximadamente por grupo. Los estudiantes se juntan según sus preferencias para realizar la tarea; el profesor no asigna los componentes del grupo.

Si bien en alguna clase se dedica un breve tiempo a la gestión interna de cada grupo, el trabajo no se realiza en horario lectivo. Finalizado el plazo para elaborarla, cada obra es presentada al grupo completo de la clase por sus autores, justificando el trabajo resultante.

## **JUSTIFICACIÓN DE LOS OBJETIVOS**

- a) *Adquieran o incrementar conocimientos relacionados con la enseñanza de las matemáticas:*

Este trabajo se realizó en la asignatura “Didáctica de la Geometría, la Medida, la Probabilidad y la Estadística”, en 4º curso del Grado de Maestro de Educación Primaria.

Una de las herramientas que se pretende que sepan manejar los estudiantes al finalizar la asignatura es el programa GeoGebra por dos motivos: por una parte, permite diseñar applets interactivos, los cuales pueden resultar muy útiles en las clases de E. Primaria y, por otra parte, el manejo del programa en sí permite recordar, aprender o afianzar contenidos matemáticos.

GeoGebra es un programa de geometría dinámico, de acceso gratuito, que tiene los elementos básicos (punto, segmento, recta,...) y las propiedades básicas (perpendicularidad, paralelismo, ...), suficientes para trabajar la geometría de la Enseñanza Obligatoria, pero que permite profundizar mucho más y realizar construcciones sofisticadas aplicando estas y otras herramientas.

La tarea a desarrollar se basa en la utilización de ese programa y, aunque no es necesario dominarlo, sí es imprescindible conocer construcciones elementales.

*b) Trabajo grupal colaborativo:*

Hay mucha documentación sobre esta forma de trabajo. Centrándonos en matemáticas y en algunos estudios recientes, el Grupo *La X* (Berenguer y otros, 2016) hace una recopilación sobre trabajo cooperativo en el aula de matemáticas, concluyendo que aporta beneficios para los estudiantes. López (2012), sirviéndose de actividades motivadoras en las clases de matemáticas para los alumnos de E. Secundaria, muestra el éxito de esa metodología, tanto por el interés de los alumnos como por los resultados académicos, lo cual pone de manifiesto que la combinación, motivación – colaboración es adecuada. A nivel universitario se ha utilizado este tipo de trabajo, sobre todo en cursos de formación de profesorado, pero también en otras especialidades y en particular en cursos de matemáticas universitarias (Aldana, 2012).

Nosotros somos eclécticos en nuestra metodología a lo largo del curso, por lo que utilizamos diversas formas de plantear las sesiones. El trabajo colaborativo es una de ellas, que nos parece especialmente adecuada a nivel universitario, que es donde desarrollamos nuestra experiencia.

En este trabajo, los alumnos debían colaborar para elegir qué hacer y cómo hacerlo, seleccionar la música, utilizar el software GeoGebra, controlar los tiempos, ...

c) *Se rompa el estilo de trabajo usual, consiguiendo, como mínimo, incertidumbre inicial ante cómo plantear la respuesta grupal.*

No hay que buscar matemáticas sólo en entornos académicos o en situaciones utilizadas normalmente en resolución de problemas, como dibujar o identificar ciertas figuras o algunos de sus elementos, hacer mediciones, ... el planteamiento de una tarea que rompe con lo realizado anteriormente consigue desestructurar el chiché asociado al aprendizaje en matemáticas. En este sentido, fueron varios los estudiantes que preguntaron el porqué de ese trabajo y qué relación tenía con las matemáticas, incluso pasadas varias semanas.

Sin embargo, estudiantes más creativos comenzaron pronto a planificar diversas vías para la realización del trabajo.

d) *Se utilice un contexto atractivo para los estudiantes:*

Por la edad de los estudiantes, la mayoría tiene estilos de música preferidos y durante bastantes horas escucha música por placer. Por ello, dar la posibilidad de que manejen esas melodías que les resultan familiares y les gustan, analicen su ritmo y lo traduzcan en una representación pictórica, como mínimo tiene la particularidad de buscar el aprendizaje desde los intereses de los alumnos.

e) *Se atienda a los estudiantes de alta capacidad y se potencie la creatividad:*

El colectivo de estudiantes de alta capacidad, y en particular el de alta capacidad matemática, sigue estando en la actualidad relegado a un segundo plano. Para los niveles de enseñanza primaria y secundaria, La LOMCE y su articulación en la legislación de la Consellería de Educación incluye la necesidad de atender a los estudiantes de esos niveles para que desarrollen todo su potencial. Pero en la enseñanza universitaria no hay nada legislado, por lo que no se contempla ningún tipo de atención a estos estudiantes.

Uno de los modelos explicativos más empleados en la actualidad para referirse a la alta capacidad es el modelo de Renzulli. Se considera que la superdotación se produce con la intersección de tres componentes:

“compromiso con la tarea”, “alta capacidad” y “creatividad”, siendo necesario que se produzcan las tres. En este sentido, nuestra propuesta para el aula se centra en la interconexión entre matemáticas y música desde la creatividad y las TIC.



Figura 1. Modelo de superdotación de Renzulli.

Nos resulta interesante el siguiente comentario de Juter y Sriraman (2011):

*Un estudiante universitario, llamémosle Juan, siempre era el primero en responder a las preguntas planteadas por el profesor. Algunos problemas para los cuales sus compañeros necesitaban 15 minutos, él los resolvía en un momento. Juan asistía a todas las clases obligatorias, pero no hacía todos los trabajos obligatorios, por lo que no aprobó. Siempre llegaba tarde y no estaba muy centrado en el curso, excepto en algunos problemas que de vez en cuando planteaba el profesor. Él veía las relaciones matemáticas pero no estaba especialmente interesado en el entorno de la universidad y no se amoldó a él, lo cual le condujo al suspenso. Era claramente superdotado en matemáticas y un pensador creativo en su habilidad para ver rápidamente las soluciones de los problemas, pero en las estadísticas del curso, se le consideraría como un estudiante de rendimiento bajo.*

En menor o mayor grado, esta situación no es infrecuente, aunque en la mayoría de los casos los estudiantes sí “cumplen” con la materia, pero sólo los requisitos imprescindibles para aprobar; si los alumnos son competitivos

o necesitan una nota alta, sí pueden obtener la máxima puntuación, pero sin interés. Hay que decir que también hay estudiantes de alta capacidad que están implicados en el sistema, se motivan con las tareas ordinarias y responden bien ante cualquier situación que se les plantee; son estudiantes con alto éxito académico.

A lo largo de muchos años de trabajo en la universidad, por nuestras aulas hemos visto todo tipo de perfiles.

Por ello hemos realizado esta experiencia puntual, útil para todos los alumnos, pero que de modo particular permite desarrollar la creatividad de aquellos que pueden llegar lejos y pierden interés ante tareas monótonas, rutinarias o usuales. La relación entre el programa GeoGebra y la música no es evidente, ni hay un estándar predefinido. Son los propios estudiantes quienes deben construir un puente entre ambos elementos, mediante imaginación, pero con conocimientos tecnológicos y matemáticos que permitan valorar la viabilidad del proyecto.

*f) Se trabaje de forma interdisciplinar:*

En un apartado anterior ya hemos justificado la elección de la música como contexto de interés para los estudiantes. Pero, además de la consideración de la idoneidad del trabajo desde esta perspectiva, también existe la interacción entre dos disciplinas contempladas en la formación de los maestros si eligen en el Grado de Maestro de Primaria con la mención de especialista en Educación Musical.

## **RESULTADOS**

Los objetivos propuestos se cumplieron en su totalidad. En particular, los estudiantes con un alto grado de creatividad pudieron generar obras originales, sin sentido en una propuesta de clase basada en tareas rutinarias.

Por otra parte, el trabajo requería una alta implicación porque, además de la planificación global, la coordinación de tiempos y figuras era laboriosa. Hay que destacar que el programa GeoGebra no es un programa de dibujo, y es hace necesario transformar la imagen deseada en elementos geométricos disponibles. Pero no sólo eso; para realizar la construcción de las piezas básicas geométricas no es sólo el perfil, las líneas visibles lo que hay que

conocer, porque en muchos casos la construcción se centra en las propiedades geométricas que definen el objeto. Por ejemplo, para trazar un arco hay que elegir el centro de la circunferencia y dos puntos que delimitarán el arco.

El hecho de que el contexto básico fuera música del agrado de los componentes del grupo favoreció ese alto nivel de implicación al que nos hemos referido en el párrafo anterior.

Finalmente, los alumnos con alta capacidad, en los que se dan las tres características contempladas en los anillos de Renzulli, no se limitaron a cumplir con la tarea, sino que investigaron en otros campos sobre el origen del diseño que iban a realizar y emplearon técnicas muy sofisticadas, para conseguir su dibujo final.

En relación a los tipos de producciones, distinguimos<sup>18</sup>

a) *Sucesión de elementos y figuras básicos, que aparecen al ritmo de la música.*

Por ejemplo, ver la figura 2.

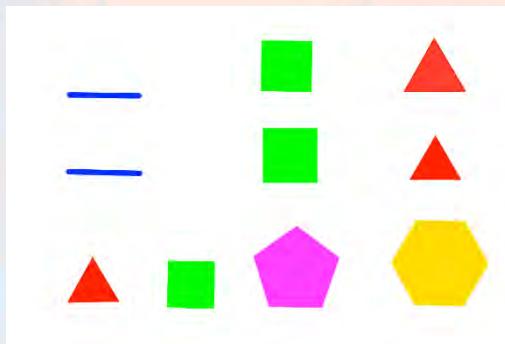


Figura 2. Secuencia básica de elementos de GeoGebra.

b) *GeoGebra se utiliza en una fase previa a la audición musical.*

Con el ordenador se diseñan formas geométricas. En una segunda fase, estas forman parte de figuras humanas, como marionetas, que se mueven a mano con el ritmo de la música, en una situación alusiva a lo que corresponde a la

<sup>18</sup> Los dibujos y letras de música aquí expuestos son ficticios, diseñados por nosotros. Los hemos elegido manteniendo la finalidad para la que se diseñaron los reales, pero no presentamos las producciones de aula para respetar los derechos de autoría de los estudiantes que los diseñaron.

banda sonora de una película. Por ejemplo, con cuadrados, rectángulos, círculos y segmentos formamos perros, pegando esas formas a palillos. En la exposición, mientras se oye la música, con las marionetas se escenifica el motivo de la canción: un encuentro entre perros.

c) *La música (una canción conocida) es un pretexto para diseñar un dibujo alusivo a la letra de la canción, que finaliza al mismo tiempo que la melodía.*

En ese momento, uno de los elementos principales de la historia queda plasmado en un dibujo, con los colores correspondientes. Por ejemplo, si la letra hace referencia a un bosque que se quema y después rebrotan los tallos, la secuencia de dibujo contemplaría el bosque, la aparición de llamas, el bosque seco y luego brotes verdes. Todo ello de manera continua, sin saltos bruscos. En los dibujos 3a, 3b y 3c, mostramos 3 momentos del vídeo resultante.

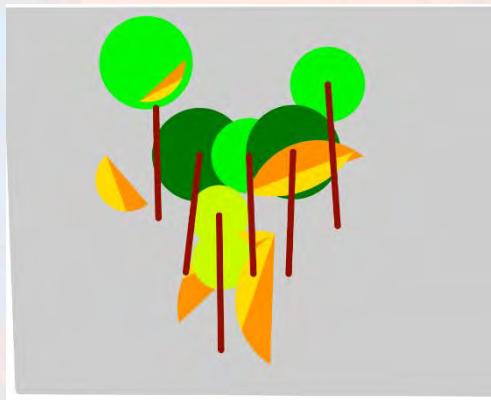
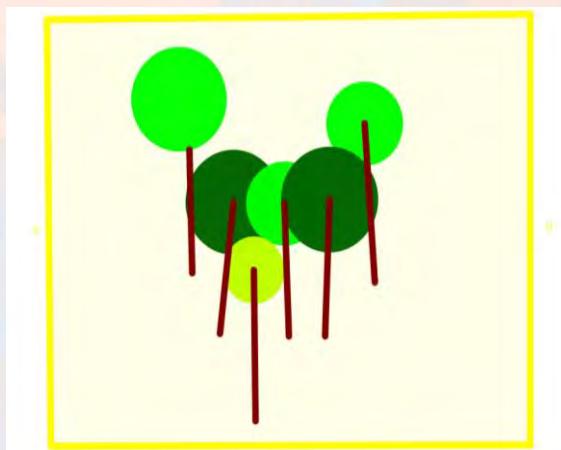


Figura 3a. Bosque verde.  
llamas.

Figura 3b. Bosque en

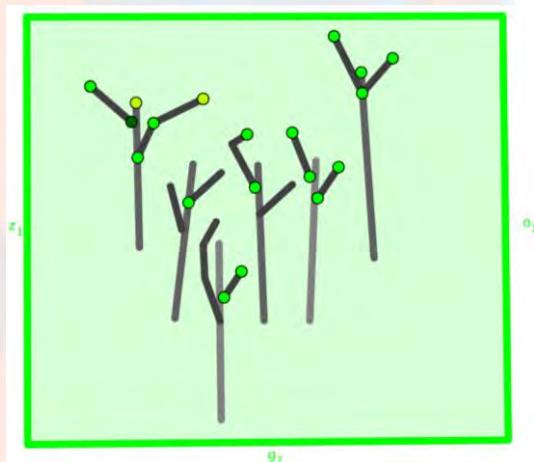


Figura 3c. Bosque rebrotando.

- d) *Al ritmo de la música, con GeoGebra se van realizando formas geométricas, en color, que forman un cuadro global.*

En este caso no existe un objetivo marcado por la letra de la música. Se trata de una melodía a la que ajustan un bonito diseño geométrico. Algo parecido al dibujo que mostramos en la figura 4.

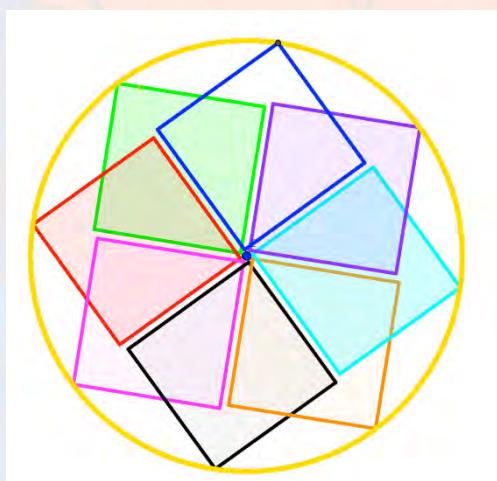


Figura 4. Dibujo geométrico.

- e) *La música permite dibujar unos muñecos que se mueven o bailan muy sincronizados con el ritmo.*

- f) Hay sincronización entre los elementos de dibujo, según se van realizando, y la música y además se tiene en cuenta la tonalidad musical en el dibujo que va apareciendo.

Hasta el final de la composición no se sabe de qué dibujo se trata. Por ejemplo, se van dibujando puntos de diversos grosores y colores, según los tonos musicales, y al final se ve que los puntos forman un barco, lo cual es el motivo central de la música. En las figuras 5a y 5b mostramos dos momentos del vídeo.

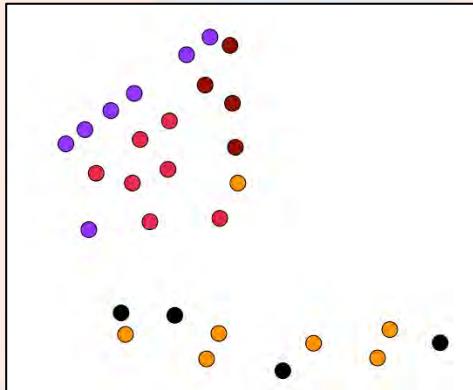


Figura 5a. Elementos dispersos.  
final.

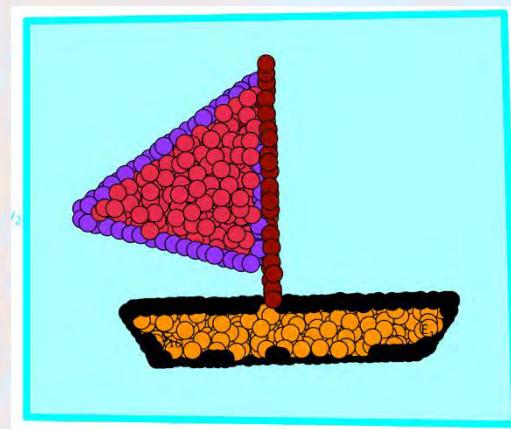


Figura 5b. Resultado

En todos los casos, los grupos han desarrollado habilidades para poder llevar a cabo la tarea.

El grupo a) siguió las instrucciones. Cumplió con lo que se pedía, pero no hubo originalidad ni creatividad. Este grupo tuvo dificultades para diseñar su proyecto. Por una parte, sus integrantes no encontraban la relación entre las matemáticas y la música y, por otra, no sabían cómo implementar algo que cumpliera con los objetivos del trabajo requerido. Finalmente siguieron paso a paso lo que se pedía en el trabajo.

El grupo b) hizo una reinterpretación en uno de los requisitos de la tarea: la sincronización entre la melodía y el dibujo con GeoGebra la transformaron en la sincronización entre la música y la escenificación de una historia con las marionetas que construyeron para realizar el vídeo. El resultado del trabajo

fue inteligente, creativo y, además divertido. Este grupo planteó la exposición en clase como una presentación del desarrollo de las diversas fases por las que había pasado el grupo hasta llegar al resultado final del trabajo, por lo que pudimos ver la organización del equipo, la utilización de GeoGebra, la construcción de las marionetas y de los escenarios y la grabación de la historia.

El grupo c) no se ajustó exactamente a lo que se pedía. Resulta extremadamente difícil diseñar al ritmo de la melodía. Por ello, este grupo optó por utilizar la melodía de fondo. La traducción del trabajo a esta idea originó producciones que cumplían con la pretensión final de los estudiantes (conseguir un dibujo concreto), o iban más allá, escenificando la situación que se desarrollaba en la canción. En el ejemplo que hemos propuesto sería dibujar los perros, o bien eso mismo y hacer luego que estos se juntaran y se separaran, o tropezaran y se cayeran, según lo requerido por la canción.

Los grupos d), e) y f) sí lograron la sincronización de la música con el dibujo en GeoGebra. El caso e) fue a través de unos muñecos sencillos, con un planteamiento muy ingenioso, que, además, hizo estallar a toda la clase en una carcajada.

El grupo f) hizo un trabajo muy sofisticado y laborioso, y fue más allá de lo que se pedía, pues los alumnos realizaron investigaciones previas a la ejecución final del dibujo, sobre cómo conseguir imágenes en pantallas de ordenador; utilizaron la idea de los píxeles, que sólo permiten visualizar la figura global cuando se han usado muchos.

En alguno de estos grupos había estudiante(s) de alta capacidad matemática y el trabajo permitió que pusieran interés en la tarea y desarrollaran una composición de alta calidad. Pero no sólo ellos, sino que también los demás alumnos debieron poner en práctica su imaginación, al mismo tiempo que utilizaron un programa de geometría dinámica y, sobre todo, realizaron una experiencia distinta a lo habitual en relación con la enseñanza-aprendizaje de matemáticas.

Con ello, estos estudiantes acumulan en su experiencia una actividad que les debería ayudar en su futuro profesional, como profesores de E. Primaria, a

abrir la mente a situaciones de aula que potencien el aprendizaje de formas interesantes para el alumno, diferentes a todo lo que conocen.

Pensamos que esta experiencia ha sido interesante para todo el alumnado y, además, encaja con el tipo de tareas interesantes para estudiantes de alta capacidad.

Finalmente adjuntamos una copia del póster que expusimos en las V Jornadas de Innovación Docente en la Educación Superior (IDES 2016), en el que aparecen las ideas básicas del trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

López Haro, I.M. (2012). *Aprendizaje cooperativo con actividades motivadoras en matemáticas* (trabajo final del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria). Almería: Universidad de Almería. Disponible el 31-08-2016 en <http://repositorio.ual.es:8080/jspui/bitstream/10835/1971/1/Trabajo.pdf>

Aldana Yarlequé, C. (2012). Trabajo colaborativo en el área de Matemáticas. *En Blanco & Negro*, 3(1), 26-35. Disponible el 31-08-2016 en <http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro>

Grupo LaX (s.f.). *Trabajo cooperativo en el aula de matemáticas. Bibliografía comentada sobre el tema*. Manuscrito disponible el 31-08-2016 en [http://www.ugr.es/~pflores/textos/otros/Bibliograf%EDa\\_UNO.pdf](http://www.ugr.es/~pflores/textos/otros/Bibliograf%EDa_UNO.pdf)

JUTER, K. Y SRIRAMAN, B. (2011). DOES HIGH ACHIEVING IN MATHEMATICS = GIFTED AND/OR CREATIVE IN MATHEMATICS?, EN B. SRIRAMAN Y K.H. LEE (EDS.), THE ELEMENTS OF CREATIVITY AND GIFTEDNESS IN MATHEMATICS (PP. 45-65). DORDRECHT: SPRINGER.