Resolución de los problemas de los exámenes de MATEMÁTICAS (12907) Licenciatura de Químicas Cursos 2000/01, 2001/02, 2002/03 y 2003/04

ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1 (6 de Febrero de 2001)

Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar la matriz de paso explicando su función: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: Comenzaremos estudiando los valores propios de la matriz (en adelante A). Para ello calcularemos las raíces de su polinomio característico, $det(A-\lambda I)$,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3 = -(\lambda-3)(\lambda^2-1) = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda = 1, -1, 3$.

Como los tres valores propios son reales y distintos dos a dos, sabemos que la matriz es diagonalizable y bastará con encontrar un vector propio para cada uno de ellos para conformar cada una de las columnas de la denominada matriz de paso.

Si $\lambda = 1$ buscamos un vector (v_1, v_2, v_3) tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} v_1+v_2+v_3 & = & 0 \\ 2v_1+2v_2+4v_3 & = & 0 \\ -v_1-v_2-3v_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Las dos primeras ecuaciones son, obviamente, linealmente independientes. Multiplicando la primera por -2 y sumando la segunda se tiene $v_3 = 0$, luego $v_1 = -v_2$ y como vector propio podemos tomar $(1, -1, 0)$.

Si $\lambda = -1$ buscamos un vector (v_1, v_2, v_3) tal que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3v_1+v_2+v_3 & = & 0 \\ 2v_1+4v_2+4v_3 & = & 0 \\ -v_1-v_2-v_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

De nuevo las dos primeras ecuaciones son, obviamente, linealmente independientes. Multiplicando la primera por -4 y sumando la segunda se tiene $v_1 = 0$, luego $v_2 = -v_3$ y como vector propio podemos tomar $(0, 1, -1)$.

Si $\lambda = 3$ buscamos un vector (v_1, v_2, v_3) tal que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left. \begin{array}{rcl} -v_1 + v_2 + v_3 & = & 0 \\ 2v_1 \qquad + 4v_3 & = & 0 \\ -v_1 - v_2 - 5v_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes. De la segunda se deduce $v_1 = -2v_3$ y sustituyendo en la primera $v_2 = -3v_3$, luego como vector propio podemos tomar $(-2, -3, 1)$.

Notemos que el subespacio característico asociado a cada valor propio tiene dimensión 1 al estar definido por dos ecuaciones no paramétricas. La suma de las dimensiones da 3 que como hemos indicado más arriba afirma la diagonizabilidad de A. Así pues sabemos que

$$A = P.D.P^{-1}$$

siendo P la llamada " matriz de paso" y D la matriz diagonal, esto es,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Problema 2}}$ (6 de Febrero de 2001)

Discutir y resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x - 5y + 4z & = & -3 \\ x - 2y + z & = & 5 \\ x - 4y + 6z & = & 10 \end{array} \right\}.$$

Solución: Procederemos por el método de reducción de Gauss-Jordan. Usaremos sólo, por simplicidad, los coeficientes de las incógnitas.

$$\begin{array}{cccc|c} (\mathbf{1}) & 1 & -2 & 1 & 5 \\ (\mathbf{2}) & 1 & -4 & 6 & 10 \\ (\mathbf{3}) & 2 & -5 & 4 & -3 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} (\mathbf{1}) - (\mathbf{2}) \\ 2.(\mathbf{1}) - (\mathbf{3}) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{cccc|c} (\mathbf{1'}) & 1 & -2 & 1 & 5 \\ (\mathbf{2'}) & 0 & 2 & -5 & -5 \\ (\mathbf{3'}) & 0 & 1 & -2 & 13 \end{array}$$

Reordenamos

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} (\mathbf{1}') & 1 & -2 & 1 \\ (\mathbf{2}') & 0 & 1 & -2 \\ (\mathbf{3}') & 0 & 2 & -5 \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ 13 \\ -5 \end{array} \end{array} \Longrightarrow 2.(\mathbf{2}') - (\mathbf{3}') \Longrightarrow \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} (\mathbf{1}") & 1 & -2 & 1 \\ (\mathbf{2}") & 0 & 1 & -2 \\ (\mathbf{3}") & 0 & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ 13 \\ 31 \end{array} \end{array}$$

Es decir tenemos el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcr} x - 2y + z & = & 5 \\ y - 2z & = & 13 \\ z & = & 31 \end{array}\right\}$$

lo que nos indica que el sistema inicial es compatible y determinado con solución $x = 124$, $y = 75$, $z = 31$.

$\boxed{\textbf{Problema 3}}$ (15 de Junio de 2001)

Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, calcular la matriz de paso: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Comenzaremos estudiando los valores propios de la primera matriz (en adelante A). Para ello calcularemos las raices de su polinomio característico, $det(A - \lambda I) = 0$,

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 = 0$, cuya raíz (doble) es $\lambda = 4$. Calculemos su vector propio asociado.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_2 = 0$$

Con lo que $dim(N(A - 4I)) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.

Para la segunda matriz (en adelante B) calculemos las raices de $det(B - \lambda I) = 0:$

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, cuyas raices son $\lambda = -1, 2$.

Al ser los dos valores propios distintos la matriz es diagonalizable. Para hallar la matriz de paso bastará con encontrar un vector propio para cada uno de ellos (que serán linealmente independientes) y colocarlos en columnas.

Para $\lambda = -1$ buscamos un vector (v_1, v_2) tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1 - v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = v_2.$$

Podemos tomar como vector propio asociado el $(1,1)$.

Para $\lambda = 2$ buscamos un vector (v_1, v_2) tal que

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -2v_1 - v_2 = 0 \Longrightarrow v_2 = -2v_1.$$

Podemos tomar como vector propio asociado el $(1,-2)$.

Con ello la matriz de paso es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, cuya inversa es $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, luego se tiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Problema 4 (14 de Septiembre de 2001)

Sea la aplicación $f(x,y,z) := (ax+y+z, x+ay+z, x+y+az)$, $\quad a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcular los valores del parámetro a de modo que el núcleo de f no se reduzca al elemento neutro.

(b) Hallar, en esos casos, una base de dicho núcleo.

Solución: (a) Si una terna (x,y,z) es un elemento del núcleo de f, en adelante $N(f)$, debe ser solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas homogéneo. Cuando tenga como única solución la trivial $N(f)$ se reducirá al elemento neutro siendo distinto en otro caso. Estudiemos, pues, el determinante de la matriz del sistema

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a+2)(a-1)^2$$

Dicho determinante se anula si a toma los valores 1 y -2. Consideraremos sólo esos dos valores ya que en otro caso el rango de la matriz es tres y el sistema tiene sólo la solución trivial.

(b) Si $a = 1$ las tres ecuaciones son iguales y se reducen a $x + y + z = 0$, con lo que el rango del sistema, y de la función, es uno y la dimensión del núcleo dos (usamos que $rang(f) + dimN(f) = 3$). Dado cualquier (x, y, z) en el núcleo se tiene

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

luego una base del núcleo es $\{(-1, 1, 0)\ ,\ (-1, 0, 1)\}$.

Si $a = -2$ el rango de la matriz y de f es dos y la dimensión del núcleo uno, quedando definido por las ecuaciones

$-2x + y + z = 0$

$x - 2y + z = 0$

que restadas nos dan $-3x + 3y = 0$, de donde $x = y$ y sustituyendo en la segunda, por ejemplo, $z = x$. Dado cualquier (x, y, z) en el núcleo se tiene

$$(x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$$

luego una base del núcleo es $\{(1, 1, 1)\}$.

$\boxed{\textbf{Problema 5}}$ (28 de Enero de 2002)

Considerando la aplicación lineal

$$f(x, y, z) := (x + y + z, ax - y + z, 2x - y + az)$$

(a) Encontrar los valores de a de manera que f sea biyectiva.
(b) Si $a = 1$, calcular $f^{-1}(1, 2, 3)$

Solución: *(a)* Al ser una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, aplicando el teorema del rango, es biyectiva si es exhaustiva (sobre) y tal ocurre si el rango de la aplicación (que es el de su matriz asociada M_f) es tres. Para conformar dicha matriz debemos escribir en columna los transformados de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Como $f(1, 0, 0) = (1, a, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, -1, -1)$ y $f(0, 0, 1) = (1, 1, a)$ se tiene

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Su determinante es $det(M_f) = -a^2 - 2a + 5$, que se anula si $a = -1 + \sqrt{6}$ ó si $a = -1 - \sqrt{6}$. Si a es distinta de esos dos valores el determinante es no nulo y la matriz, y la aplicación, tienen rango tres con lo que f es biyectiva.

(b) Si $a = 1$ vamos a buscar los elementos cuya imagen dé $(1, 2, 3)$, es decir vamos a buscar los (x, y, z) tales que

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x - y + z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 3 \end{array}\right\}$$

En realidad sabemos que el sistema tiene una única solución por *(a)*. Para resolverlo por el método de Gauss escribámoslo en forma de matriz orlada, con el orden $(x,\ y,\ z)$.
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$, o cambiando a $(z,\ x,\ y)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$; en él podemos restar cada una de la dos últimas filas a la primera obteniendo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$. La segunda fila corresponde a $2y = -1$, luego $y = -\dfrac{1}{2}$ y sustituyendo en la tercera $(-x + 2y = -2)$ obtenemos $x = 1$. Finalmente sustituyendo los valores anteriores en la primera ecuación $(x + y + z = 1)$ se tiene $z = \dfrac{1}{2}$. En definitiva $f^{-1}(1, 2, 3) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Nótese que el sistema se puede resolver rápidamente si nos damos cuenta al inicio que restando las dos primeras ecuaciones ya se obtiene el valor de y.

Problema 6 (28 de Enero de 2002)

Razonar si las siguientes matrices son o no diagonalizables encontrando, en su caso, la matriz de paso y su inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: (i) La ecuación característica de la primera matriz es $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$, cuya única solución, único valor propio, es $\lambda = 2$. Calculemos el subespacio característico asociado E_2: Si (u_1, u_2) está en él
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Así pues $E_2 = \{(u_1, u_2)\ :\ u_1 = 0\}$ con lo que $dim(E_2) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.

(ii) La ecuación característica de la segunda matriz es $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$ $(4-\lambda)(-1-\lambda)+4 = \lambda(\lambda-3) = 0$, cuyas soluciones son 0 y 3. Como se trata de una matriz cuadrada de orden dos y aparecen dos valores propios distintos la matriz es diagonalizable. Si la denominamos M se tendrá

$$M = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

siendo $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz diagonal semejante y P la matriz de paso que tiene por columnas vectores propios asociados a los valores 0 y 3. Para calcularla hallemos sendos vectores propios asociados a los valores propios:

Para $\lambda = 0$ hagamos $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con lo que $4u_1 - 2u_2 = 0$ o, lo que es igual, $u_2 = 2u_1$. Tomamos el vector $(1, 2)$.

Para $\lambda = 3$ hagamos $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con lo que $u_1 - 2u_2 = 0$ o, lo que es igual, $u_1 = 2u_2$. Tomamos el vector $(2, 1)$.

En definitiva $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Su inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{Problema 7}}$ (26 de Junio de 2002)

Aplicando el método de reducción de Gauss discutir, según los valores de a y b, el sistema $\left.\begin{array}{rcl} 2x - y + 3z & = & 1 \\ x - y + z & = & a \\ x + 2y + bz & = & 3 \end{array}\right\}$. *Resuélvase en el caso compatible.*

Solución: Para aplicar el método pasamos la segunda fila a la primera y escribimos el sistema como matriz orlada

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & b & 3 \end{array}\right)$. Sustituimos la segunda fila por el resultado de restar a la segunda dos veces la primera y sustituimos la tercera fila por el resultado de restar de la tercera la primera. Se tiene $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1-2a \\ 0 & 3 & b-1 & 3-a \end{array}\right)$.

Ahora sustituimos la nueva tercera fila por el resultado de restarle la segunda multiplicada por tres obteniendose $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1-2a \\ 0 & 0 & b-4 & 5a \end{array}\right)$.

La última matriz corresponde a un sistema equivalente cuya última ecuación es $(b-4)z = 5a$.

(i) Si $b \neq 4$ se tiene que $z = \dfrac{5a}{b-4}$, $y = 1-2a-\dfrac{5a}{b-4}$, $x = 1-a-\dfrac{10a}{b-4}$, luego el sistema es compatible y determinado.

(ii) Si $b = 4$, se tiene $0.z = 5a$. Si $a \neq 0$ ningún valor de z hace posible la ecuación luego el sitema es incompatible. Por otro lado si $a = 0$ queda el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ y+z & = & 1 \end{array}\right\}$$

en el que dándole a z el valor t se obtiene el conjunto de soluciones

$$z = t, \quad y = 1-t \quad x = 1-2t$$

luego el sistema es compatible e indeterminado.

$\boxed{\textbf{Problema 8}}$ (2 de Septiembre de 2002)

Estudiar si la matriz $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *es diagonalizable y calcular su potencia* A^m.

Solución: Vamos a calcular sus valores propios. La ecuación característica es $det(A-\lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 =$ $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

Calculemos los vectores y subespacios propios asociados a cada valor propio:

Si $\lambda = 1$, el subespacio $E_1 := Ker(A-I_n)$, siendo $A-I_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Buscamos vectores $\mathbf{v}$=(v_1, v_2, v_3) tales que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir que satisfagan el sistema $\left.\begin{array}{rcl} -v_1+v_2-v_3 &=& 0\\ -v_1+v_2-v_3 &=& 0\\ v_1-v_2+v_3 &=& 0 \end{array}\right\}$; en realidad una sola ecuación (lógicamente pues el rango de la matriz es uno). Así, si $\mathbf{v}$ está en E_1, $v_3=-v_1+v_2$ y, por lo tanto, $(v_1,v_2,v_3)=(v_1,v_2,-v_1+v_2)=v_1(1,0,-1)+v_2(0,1,1)$. La dimensión de E_1 es 2 y

$$E_1 =< (1,0,-1);(0,1,1) >$$

Si $\lambda=2$, el subespacio $E_2:=Ker(A-2I_n)$, siendo $A-2I_n=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Buscamos vectores $\mathbf{v}$=(v_1,v_2,v_3) tales que $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$ es decir, que satisfagan el sistema $\left.\begin{array}{rcl} -2v_1+v_2-v_3 &=& 0\\ -v_1 \quad\quad -v_3 &=& 0\\ v_1-v_2 &=& 0 \end{array}\right\}$. El rango de la matriz es dos. Si $\mathbf{v}$ está en E_2, $v_2=v_1$ y $v_3=-v_1$, por lo tanto, $(v_1,v_2,v_3)=(v_1,v_1,-v_1)=v_1(1,1,-1)$. La dimensión de E_2 es 1 y

$$E_2 =< (1,1,-1) >$$

Como $dim(E_1)+dim(E_2)=3$ la matriz es diagonalizable. Las matrices diagonal y de paso son, respectívamente,

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de P. Su determinante es -1, de donde $P^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ teniendose $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$.

Para calcular la potencia m de A basta tener en cuenta que

$$A^m=P{\cdot}D^m{\cdot}P^{-1}=P{\cdot}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix}{\cdot}P^{-1}=\begin{pmatrix} 2-2^m & -1+2^m & 1-2^m\\ 1-2^m & 2^m & 1-2^m\\ -1-2^m & 1-2^m & 2^m \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{Problema 9}}$ (21 de Enero de 2003)

Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$
$\mathbf{u} := (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} := (1, 7, 11)$ *y* $\mathbf{w} := (5, 9, -1)$.
(a) Hallar un vector de norma uno que sea ortogonal a $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{w}$.
(b) Hallar el $\cos\theta$ *, siendo* θ *el ángulo que forman* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$
(c) Hallar el volumen del paralelepípedo que forman $\mathbf{u}$ *,* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$.

Solución: *(a)* El producto vectorial de dos vectores es ortogonal al plano que determinan y, por lo tanto, a cada uno de ellos. Calcularemos dicho producto

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 9 & -1 \end{vmatrix} = (-25, 16, 19)$$

La norma de este vector es $\sqrt{25^2 + 16^2 + 19^2} = \sqrt{1242}$, con lo que basta normalizar para hallar el vector que nos piden

$$\frac{1}{\sqrt{1242}}(-25, 16, 19).$$

(b) El producto escalar de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\| \; \cos\theta$$

Como $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= 1.1 + (-2).7 + 3.11 = 20$, $\|u\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, $\|v\| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 11^2} = \sqrt{171}$ se tiene

$$\cos\theta = \frac{20}{\sqrt{14}\;.\;\sqrt{171}} = \frac{20}{\sqrt{2394}}$$

(c) El volumen del paralelepípedo viene dado por el módulo del producto mixto de los tres vectores, al ser

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 11 \\ 5 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -296$$

el volumen pedido es 296.

$\boxed{\textbf{Problema 10}}$ (21 de Enero de 2003)

Dada la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Estudiar si es invertible (hallando, en su caso, la inversa).

(b) Estudiar si es diagonalizable (hallando, en su caso, la matriz de paso y explicando su función).

Solución: *(a)* La matriz A no es invertible pues es obvio que, al tener dos filas iguales, su determinante es cero. No cabe calcular, pues, la inversa.

(b) Para estudiar su diagonalizabilidad calculemos su ecuación característica $det(A - \lambda I_3) = 0$, es decir

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 = 0$$

cuyas raíces son 0 y 2. Son éstos los valores propios de A. Hallemos sus subespacios propios asociados:

Para $\lambda = 0$, E_0 es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir $\quad E_0 = \{(x, y, z) \ : \ 2x = 0, \ x + 2y - z = 0\} =$
$= \{(x, y, z) \ : \ x = 0, \ 2y = z\} = \{(0, y, 2y) \ : \ y \in \mathbb{R}\} =< (0, 1, 2) >$

Para $\lambda = 2$, E_2 es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir $\quad E_2 = \{(x, y, z) \ : \ x = z\} =$
$= \{(x, y, x) = (x, 0, x) + (0, y, 0) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\} =< (1, 0, 1); (0, 1, 0) >$

Al ser $\ dim(E_0) + dim(E_2) = 1 + 2 = 3 = dim(\mathbb{R}^3)\ $ la matriz A es diagonalizable. La matriz D, diagonal equivalente, y la matriz de paso P que cumplen $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ son

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Problema 11}}$ (20 de Junio de 2003)

Discutir, según los valores de a y b, el sistema $\left.\begin{array}{rcr} 2x-y-2z & = & b \\ x+y+z & = & 5 \\ 4x-5y+az & = & -10 \end{array}\right\}.$

Solución: Colocamos la segunda ecuación como primera y escribimos el sistema como una matriz orlada para aplicar el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & b \\ 4 & -5 & a & -10 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & b-10 \\ 0 & -9 & a-4 & -30 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 10-b \\ 0 & 9 & 4-a & 30 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 10-b \\ 0 & 0 & -8-a & 3b \end{array}\right)$$

En el primer paso hemos sustituido la segunda fila por el resultado de restarle el producto de la primera por 2 y la tercera fila por el resultado de restarle el producto de la primera por 4. El segundo paso es simplemente multiplicar por -1 las dos últimas filas. El tercer y último paso es sustituir la tercera fila por el resultado de restarle la segunda multiplicada por 3.

Procedamos a la discusión: Si $a \neq -8$, la matriz queda perfectamente triangulada. De la tercera ecuación obtenemos un valor único de z; sustituyendo en la segunda se obtiene un único valor para la y y sustituyendo ambos en la primera se obtiene un único valor para la x. El sistema es compatible y determinado.

Si $a = -8$ y $b \neq 0$ la tercera ecuación nos da la contradicción $0 = 3b$ luego el sistema es incompatible.

Si $a = -8$ y $b = 0$ sólo tenemos dos ecuaciones (la primera y la segunda) ambas linealmente independientes y con tres incognitas. Dando a una de ellas un valor arbitrario, se obtienen sendos valores para las otras dos. Como hay infinitas elecciones del valor inicial el sistema es compatible e indeterminado.

$\boxed{\textbf{Problema 12}}$ (12 de Septiembre de 2003)

Dada la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Estudiar si es diagonalizable (hallando, en su caso, la matriz de paso y explicando su función).

Solución: Para estudiar su diagonalizabilidad calculemos su ecuación característica $det(A - \lambda I_3) = 0$, es decir

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) = 0,$$

cuyas raíces son -2 , 1 y 2. Son éstos los valores propios de A. Al ser tres y distintos dos a dos la matriz es diagonalizable. Hallemos los subespacios propios asociados:

$E(-2)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir $\quad E(-2) = \{(x,y,z)\ :\ 4x-4y+2z=0,\ 3y=0\} =$
$= \{(x,y,z)\ :\ y=0,\ -2x=z\} = \{(x,0,-2x)\ :\ x \in \mathbb{R}\} =< (1,0,-2) >$

$E(1)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir $\quad E(1) = \{(x,y,z)\ :\ x-4y+2z=0,\ 6y-3z=0\} =$
$= \{(x,y,z)\ :\ x=0,\ 2y=z\} = \{(0,y,2y)\ :\ y \in \mathbb{R}\} =< (0,1,2) >$

$E(2)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir $\quad E(2) = \{(x,y,z)\ :\ -4y+2z=0,\ -y=0,\ 6y-4z=0\} =$
$= \{(x,y,z)\ :\ y=0,\ z=0\} = \{(x,0,0)\ :\ x \in \mathbb{R}\} =< (1,0,0) >$

La matriz D, diagonal equivalente, y la matriz de paso P que cumplen $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ son

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Problema 13}}$ (13 de Febrero de 2004)

Estudiar, según los valores de a, si la aplicación lineal

$$f(x,y,z) := (x + ay + 3z,\ 2x - y + 2z,\ x - 4y - z)$$

es inyectiva. En el caso afirmativo, ¿ es f biyectiva?

Solución: Para estudiar la inyectividad de la aplicación estudiemos el núcleo de f,

$$N(f) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(x,y,z) = (0,0,0)\},$$

es decir, debemos resolver el sistema lineal homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcl} x + ay + 3z & = & 0 \\ 2x - y + 2z & = & 0 \\ x - 4y - z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Lo haremos aplicando el método de reducción de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & -1-2a & -4 \\ 0 & -4-a & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{(cambiamos al orden } (x,z,y))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & -4 & -1-2a \\ 0 & -4 & -4-a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 4 & 1+2a \\ 0 & 0 & -3+a \end{pmatrix}$$

Procedamos a la discusión: si $a = 3$, la última fila está formada por ceros y las otras dos son linealmente independientes, el sistema es indeterminado y el núcleo no se reduce al neutro. La aplicación no es inyectiva. Si, por el contrario, $a \neq 3$ las tres filas son linealmente independientes y el sistema sólo admite la solución trivial (es determinado), luego el núcleo está formado sólo por el neutro y f es inyectiva.

Como f es una aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ el teorema del rango afirma que

$$3 = dim(N(f)) + dim(Im(f)).$$

Si f es inyectiva, $dim(N(f)) = 0$, luego $dim(Im(f)) = 3$, con lo que $Im(f) = \mathbb{R}^3$ y f es suprayectiva y, por lo tanto, biyectiva.

$\boxed{\textbf{Problema 14}}$ (13 de Febrero de 2004)

Probar que la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable, encontrar la matriz de paso y explicar cómo se calcularía A^{130204}.

Solución: Para estudiar la diagonalizabilidad de A calculemos su ecuación característica $det(A - \lambda I_3) = 0$, es decir

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

cuyas raíces son -2, 1 y 3. Son éstos los valores propios de A. Con ello, al ser distintos dos a dos, ya sabríamos que A es diagonalizable. Hallemos un vector propio asociado a cada valor propio para formar la matriz de paso (que los tendrá como columnas).

Para $\lambda = -2$, sus vectores propios asociados forman un subespacio, $E(-2)$, que es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz es de rango dos (el sistema tiene dos ecuaciones linealmente independientes). Quedémonos con las dos primeras, por ejemplo, y vamos a escribir las tres incógnitas en función de un parámetro

$E(-2) = \{(x, y, z) \ : \ 4x - 2y + 3z = 0, \ x + 3y + z = 0\} =$
$= \{(x, y, z) \ : \ x = 11y, \ z = -14y\} = \{(11y, y, -14y) \ : \ y \in \mathbb{R}\} =<(11, 1, -14)>$

Similarmente para $\lambda = 1$, $E(1)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene rango dos luego elegimos dos ecuaciones linealmente independientes (las dos primeras) con lo que podremos expresar las soluciones en función de un solo parámetro

$E(1) = \{(x, y, z) \ : \ x - 2y + 3z = 0, \ x + z = 0\} =$

$= \{(x,y,z)\ :\ y=-x,\ z=-x\} = \{(x,-x,-x)\ :\ x\in\mathbb{R}\} =< (1,-1,-1) >$

Finalmente para $\lambda = 3$, $E(3)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene rango dos luego elegimos dos ecuaciones linealmente independientes (las dos primeras) con lo que podremos expresar las soluciones en función de un solo parámetro

$E(1) = \{(x,y,z)\ :\ -x-2y+3z=0,\ x-2y+z=0\} =$

$= \{(x,y,z)\ :\ y=x,\ z=x\} = \{(x,x,x)\ :\ x\in\mathbb{R}\} =< (1,1,1) >$

La matriz D, diagonal equivalente, y la matriz de paso P que cumplen $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$ son

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -14 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular cualquier potencia de A basta con calcular

$$A^n = P\cdot D^n\cdot P^{-1}$$

obteniéndose D^n elevando a ese n los elementos de su diagonal.

$\boxed{\textbf{Problema 15}}$ (14 de Junio de 2004)

Estudiar si la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y si es diagonalizable.

Solución: La matriz tiene determinante cero y, por lo tanto, no es invertible.

Para estudiar la diagonalizabilidad de la matriz (denotemosla por A) calculemos su ecuación característica $det(A-\lambda I_3)=0$, es decir

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+3\lambda^2 = \lambda^2(-\lambda+3)) = 0$$

cuyas raíces son 0 (doble), y 3. Son éstos los valores propios de A. Hallemos los subespacios propios asociados a cada valor propio.

Para $\lambda = 0$, el subespacio, $E(0)$, es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz es de rango uno, y el sistema sólo tiene una ecuación linealmente independiente $x + y + z = 0$. La dimensión de $E(0)$ será dos ya que vendrá definido por dos parámetros:

$E(0) = \{(x, y, z) \ : \ x + y + z = 0\} =$
$= \{(x, y, z) \ : \ x = -y - z\} = \{(-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) \ : \ y, z \in \mathbb{R}\} =< (-1, 1, 0); (-1, 0, 1) >$

Similarmente para $\lambda = 3$, $E(3)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene rango dos luego elegimos dos ecuaciones linealmente independientes (las dos primeras) con lo que podremos expresar las soluciones en función de un solo parámetro. La dimensión de $E(3)$ será uno.

$E(3) = \{(x, y, z) \ : \ -2x + y + z = 0, \ x - 2y + z = 0\} =$
$= \{(x, y, z) \ : \ y = x, \ z = x\} = \{(x, x, x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} =< (1, 1, 1) >.$

Finalmente como

$$dim(E(0)) + dim(E(3)) = 2 + 1 = 3,$$

la matriz resulta ser diagonalizable.

$\boxed{\textbf{Problema 16}}$ (7 de Septiembre de 2004)

Resolver, según los valores del parámetro a, el sistema $\left.\begin{array}{rcl} 2x - y - 2z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ 4x - 5y + az & = & 0 \end{array}\right\}$

Solución: Como una primera alternativa resolveremos el problema aplicando el método de reducción de Gauss-Jordan, para lo cual pasamos previamente la segunda ecuación a ser la primera, abreviamos y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -5 & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -9 & a-4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & a+8 \end{pmatrix}$$

En el primer paso hemos cambiado la segunda fila por el resultado de restarle a la segunda dos veces la primera, y la tercera por el resultado de restarle a la tercera la primera multiplicada por cuatro. En el segundo paso hemos sustituido la tercera fila por el resultado de restarle a la tercera la segunda multiplicada por tres.

Procedamos a la discusión: si $a = -8$, la última fila está formada por ceros y las otras dos son linealmente independientes; el sistema, que siempre es compatible al ser homogéneo, es indeterminado. La solución vendrá en función de un sólo parámetro, por ejemplo z, siendo de la forma

$$x = \frac{z}{3} \quad , \quad y = -\frac{4z}{3} \quad , \quad z = z$$

(la y se obtendría de la segunda ecuación reducida y la x sin más que sustituir en la primera).

Si, por el contrario, $a \neq -8$ las tres filas son linealmente independientes y el sistema sólo admite la solución trivial $x = y = z = 0$ (es determinado).

Una segunda alternativa es estudiar el rango de la matriz del sistema

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$det(A) = -3a - 24$$

(se puede hacer por la regla de Sarrus o triangulando como antes).

El determinante se anula para $a = -8$, luego A tiene, en ese caso, rango dos (el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ es no nulo) y el sistema es indeterminado. La solución se puede obtener de la dos primeras ecuaciones (que son las que corresponden al menor) despejando x e y en función de z. Se obtiene la misma solución, obviamente, que en la primera alternativa.

Si $a \neq -8$ el determinante de A es no nulo y su rango es tres con lo que el sistema es determinado y sólo admite la solución trivial.

CÁLCULO DIFERENCIAL

$\boxed{\textbf{Problema 1}}$ (6 de Febrero de 2001)

Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones de clase* C^1*, de forma que* $f(x, y, g(x, y) = e^{x^2+y^2}$*. Si* $g(0, 0) = 0$ *y* $\nabla f(0, 0, 0) = (1, 2, 1)$*, calcular* $\nabla g(0, 0)$*.*

Solución: La situación que se produce es la composición $F = f \circ G$, siendo $F(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $G(x, y) = (x, y, g(x, y))$. Al ser las funciones de clase C^1 se puede aplicar la regla de la cadena en el $(0, 0)$, es decir

$$F'(0, 0) = f'(G(0, 0)).G'(0, 0)$$

o de otro modo al ser $G(0, 0) = (0, 0, 0)$ y $f'(0, 0, 0) = (1\ 2\ 1)$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right) = (1\ 2\ 1).\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial G_3}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial G_3}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}$$

siendo $G_1(x, y) = x$, $G_2(x, y) = y$ y $G_3 = g$. Así, como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0,$$

por lo que

$$(0 \quad 0) = (1\ 2\ 1).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices y despejando se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -1 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -2 \quad \text{i.e.} \quad \nabla g(0,0) = (-1, -2).$$

NOTA: Si consideramos $f(u,v,w) = F$ y aplicamos la regla nemotécnica de la regla de la cadena

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Haciendo ahora $u = x$, $v = y$, $w = g$ y como las parciales de F en el $(0,0)$ se anulan y $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 2$, según hemos visto más arriba, se tiene

$$0 = 1 + \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -1.$$

Igualmente

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$0 = 2 + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -2,$$

lo cual es una forma directa y simplificada de lo anterior.

Problema 2 (6 de Febrero de 2001)

Calcular todos los puntos de la superficie $z = e^{x+y} + \operatorname{sen}(x-y)$ cuyo plano tangente es paralelo a $z = x + y$.

Solución: El plano tangente a $z = e^{x+y} + \operatorname{sen}(x-y)$ en un punto (a,b,c) es $z - c = A(x-a) + B(y-b)$ siendo $A = \dfrac{\partial z}{\partial x}(a,b)$, $B = \dfrac{\partial z}{\partial y}(a,b)$, $c = e^{a+b} + \operatorname{sen}(a-b)$. Como el plano citado tiene como vector normal el $(1,1,-1)$ necesitamos encontrar a y b para que se cumpla el sistema $A = 1$, $B = 1$. Como

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = e^{x+y} + \cos(x-y) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} - \cos(x-y),$$

debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} e^{a+b} + \cos(a-b) &=& 1 \\ e^{a+b} - \cos(a-b) &=& 1 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos ecuaciones se tiene $e^{a+b} = 1$, de donde $a + b = 0$. Igualmente si restamos se tiene $\cos(a-b) = 0$, luego $a - b = \dfrac{2k+1}{2}\pi$, para

$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ En definitiva

$$a = \frac{2k+1}{4}\pi \qquad b = -\frac{2k+1}{4}\pi \qquad c = 1 + (-1)^k$$

$\boxed{\textbf{Problema 3}}$ (6 de Febrero de 2001)

Calcular los puntos del elipsoide $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{16} = 1$ *cuya distancia al origen es máxima y mínima.*

Solución: La distancia de un punto (x, y, z) al origen es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y es tanto máxima o mínima cuando lo es su cuadrado. Luego debemos maximizar y minimizar $x^2 + y^2 + z^2$ bajo la condición de que el punto esté en el elipsoide. Se trata pues de un problema de multiplicadores de Lagrange con una sola condición de ligadura. Buscaremos los puntos críticos de la función lagrangiana

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} - 1).$$

Estos son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \dfrac{2}{9}x\lambda & = & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \dfrac{2}{4}y\lambda & = & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + \dfrac{2}{16}z\lambda & = & 0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} & = & 1 \end{array}\right\}$$

La primera ecuación se cumple si $\lambda = -9$, en cuyo caso de la segunda y tercera se deduce que $y = z = 0$, y por la cuarta obtenemos los puntos $(3, 0, 0)$ y $(-3, 0, 0)$. Similarmente la segunda ecuación se cumple si $\lambda = -4$, y se obtienen los puntos $(0, 2, 0)$ y $(0, -2, 0)$. Por su parte si $\lambda = -16$ se cumple la tercera ecuación y obtenemos los puntos $(0, 0, 4)$ y $(0, 0, -4)$. Cualquier otro valor de λ provocaría que $x = y = z = 0$, lo que contradice la cuarta ecuación. Los puntos obtenidos son los únicos puntos críticos de

F. Aplicando la función distancia al origen en todos ellos el mayor valor se alcanza en $(0,0,4)$ y $(0,0,-4)$ y el menor en $(0,2,0)$ y $(0,-2,0)$.

$\boxed{\textbf{Problema 4}}$ (15 de Junio de 2001)

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) := x-y$ *en la región*

$$A := \{(x,y): \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

Solución: A es la parte del círculo unidad que se encuentra en el primer cuadrante. Se trata de una función continua sobre un conjunto cerrado (contiene a su frontera) y acotado (está dentro de un círculo en el plano). Sabemos con seguridad que dicha función alcanza en A su valor máximo y su valor mínimo.

Para efectuar su cálculo procedamos primero a tomar el interior de A

$$\{(x,y): \quad x^2+y^2 < 1, \quad x > 0, \quad y > 0\}$$

Caso de tener candidatos en él deben cumplir $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$; como $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$ no existe tal posibilidad.

Pasemos a estudiar la frontera de A:

(i) En el trozo correspondiente a la circunferencia $x^2+y^2=1$ siendo $x>0, y>0$, planteamos un problema de multiplicadores de Lagrange con función lagrangiana

$$F(x,y,\lambda) = x-y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

para la que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1+2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1+2\lambda y = 0, \quad x^2+y^2=1$$

cuyas soluciones son $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\dfrac{1}{2\lambda}$, $y = \dfrac{1}{2\lambda}$, lo que nos proporciona los puntos

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

ninguno de los cuales está en A.

(ii) En el trozo en el que $x = 0$, no hace falta usar los multiplicadores de Lagrange pues ahí $f(x, y) = -y$, cuyo valor máximo se alcanza en $(0, 0)$ y su valor mínimo en $(0, 1)$.

(iii) En el trozo en el que $y = 0$, no hace falta usar tampoco los multiplicadores de Lagrange pues ahí $f(x, y) = x$, cuyo valor máximo se alcanza en $(1, 0)$ y su valor mínimo en $(0, 0)$.

Recogiendo los posibles candidatos (incluimos las intersecciones de los trozos considerados de la frontera) obtenemos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Aplicamos la función f en ellos y el valor máximo se alcanza en $(1, 0)$ (donde $f(1, 0) = 1$) y el valor mínimo se alcanza en $(0, 1)$ (donde $f(0, 1) = -1$).

$\boxed{\textbf{Problema 5}}$ (15 de Junio de 2001)

Transformar en coordenadas cartesianas la expresión $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}$, *con* $z \in C^2$.

Solución: Aplicando la regla de la cadena al cambio $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ (inversamente $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = arctg\dfrac{y}{x}$), sabemos que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\rho\cos\theta = -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}$$

Finalmente

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) = \left[T := \frac{\partial z}{\partial\theta}\right] = \frac{\partial T}{\partial\rho} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \left(-y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$\boxed{\textbf{Problema 6}}$ (14 de Septiembre de 2001)

Calcular y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) := xy(x^2 - y^2).$$

Solución: Como la función tiene como dominio $\mathbb{R}^2$, vamos a calcular sus puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones que determinan sus derivadas parciales igualadas a cero, es decir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y(x^2 - y^2) + 2x^2y = y(3x^2 - y^2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(x^2 - y^2) - 2y^2x = x(x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

En él si $y = 0$ se tiene, obviamente, que $x = 0$ y viceversa. En otro caso, de la primera ecuación se tiene $3x^2 = y^2$, y sustituyendo en la segunda queda $-8x^3 = 0$ lo que provoca que $x = 0$. Así pues la única solución es el punto $(0, 0)$.

Calculemos las derivadas parciales segundas para clasificarlo.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6xy.$$

Como todas se anulan en el $(0, 0)$ el hessiano vale cero y no obtenemos información con lo que hemos de recurrir a observar cómo se comporta la función en un entorno del punto. Como $f(0, 0) = 0$ factorizamos la función

$$f(x, y) = xy(x + y)(x - y).$$

En cualquier círculo centrado en el origen la función toma valores positivos y valores negativos (basta representar las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x - y = 0$, $x+y = 0$ y estudiar los valores en las regiones que determinan). En conclusión se trata de un punto de silla.

$\boxed{\textbf{Problema 7}}$ (14 de Septiembre de 2001)

Suponiendo que el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + \operatorname{sen} v - \operatorname{sen}^2 u = 0 \\ x \operatorname{sen} v + \cos u = 0 \end{array}\right\}$$

define a u y v como funciones de x, $u = f(x)$, $v = g(x)$, con $f(1) = \frac{\pi}{2}$ y $g(1) = 0$, calcular $f'(1)$ y $g'(1)$.

Solución: Sustituyendo u por $f(x)$ y v por $g(x)$ obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + \operatorname{sen} g(x) - \operatorname{sen}^2 f(x) = 0 \\ x \operatorname{sen} g(x) + \cos f(x) = 0 \end{array}\right\}$$

en el que, derivando respecto de x, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 1 + g'(x) \cos g(x) - 2f'(x) \operatorname{sen} f(x) \cos f(x) = 0 \\ \operatorname{sen} g(x) + xg'(x) \cos g(x) - f'(x) \operatorname{sen} f(x) = 0 \end{array}\right\}$$

Si damos el valor 1 a x se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 1 + g'(1) = 0 \\ g'(1) - f'(1) = 0 \end{array}\right\}$$

de donde se deducen $f'(1) = g'(1) = -1$.

Problema 8 (28 de Enero de 2002)

Si $z = z(x, y)$ es una función de clase $C^{(2)}$ y tenemos unas nuevas variables u y v tales que $x = u + 3v$, $y = 2u - v$, transformar la expresión

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y}$$

Solución: Como $u = \dfrac{1}{7}(x + 3y)$, $v = \dfrac{1}{7}(2x - y)$ se tiene

$$T = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{7}(\frac{\partial z}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{7}(3\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v})$$

Pasemos a volver a derivar

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{7}(\frac{\partial T}{\partial u} + 2\frac{\partial T}{\partial v}) = \frac{1}{7}(\frac{1}{7}(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}) + \frac{2}{7}(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}))$$

Al ser la función $C^{(2)}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{49}(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2})$$

Ahora sólo quedaría sustituir.

$\boxed{\textbf{Problema 9}}$ (28 de Enero de 2002)

Consideremos la superficie $xyz = 1$

(a) Encontrar los puntos de dicha superficie en los que el plano tangente es paralelo a $x + y + z = 0$.

(b) Si la porción de superficie contenida en el primer octante la intersectamos con el plano $2x + y - z = 2$ *se sabe que se pueden despejar* y *y* z *en función de* x, $(y = f(x)\ ,\ z = g(x))$, *calcular* $f'(1)$ *y* $g'(1)$.

Solución: *(a)* La superficie está escrita de forma implícita $F(x, y, z) = xyz - 1 = 0$. Su plano tangente en un punto (a, b, c) (en el que $abc = 1$) viene dado por

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

siendo

$$A := \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) = bc, \quad B := \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) = ac, \quad C := \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) = ab$$

Sustituyendo y dividiendo por abc la ecuación del plano es

$$\frac{1}{a}(x - a) + \frac{1}{b}(y - b) + \frac{1}{c}(z - c) = 0,$$

con lo que el vector $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ es proporcional a $(1, 1, 1)$. Así $a = b = c$ y como su producto es la unidad sólo puede ser $a = b = c = 1$. El punto buscado es el $(1, 1, 1)$.

(b) Asumiendo que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, consideremos el sistema: $\left.\begin{array}{rcl} xyz & = & 1 \\ 2x + y - z & = & 2 \end{array}\right\}$ en el que sustituimos y y z, respectivamente, por $f(x)$ y $g(x)$ obteniendo $\left.\begin{array}{rcl} xf(x)g(x) & = & 1 \\ 2x + f(x) - g(x) & = & 2 \end{array}\right\}$; haciendo en él $x = 1$ obtenemos de la segunda ecuación que $f(1) = g(1)$ y como la primera nos dice que $f(1)g(1) = 1$, al ser no negativos, se tiene que $f(1) = g(1) = 1$.

Derivemos el sistema respecto a x obteniendo

$$\left.\begin{array}{rcl} (f(x) + xf'(x))g(x) + xf(x)g'(x) & = & 0 \\ 2 + f'(x) - g'(x) & = & 0 \end{array}\right\} \text{, y para } x = 1 \text{ , } \left.\begin{array}{rcl} 1 + f'(1) + g'(1) & = & 0 \\ 2 + f'(1) - g'(1) & = & 0 \end{array}\right\}$$

que, obviamente,s nos proporciona los valores $f'(1) = -\dfrac{3}{2}$ y $g'(1) = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\textbf{Problema 10}}$ (28 de Enero de 2002)

Calcular los extremos de la función $f(x,y) := x^2+x+y^2+y$ en el conjunto

$$K := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Solución: K es un círculo de centro el origen y radio 1. La función f alcanza en él sus valores extremos. Para encontrarlos distinguiremos su interior y su frantera y buscaremos los posibles candidatos a extremos.

En el interior de K , $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$, dichos candidatos deben ser puntos críticos de f , luego calculemos las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 2x+1 & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & 2y+1 & = & 0 \end{array}\right\}$$, cuya única solución es $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Como dicho punto está en el interior de K lo aceptamos como candidato.

En la fontera de K , $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ disponemos de una condición de ligadura ($x^2+y^2-1=0$) luego vamos a plantear un problema de extremos condicionados, aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange: estudiamos los puntos críticos de la función lagrangiana

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + x + y^2 + y + \lambda(x^2+y^2-1)$$

calculando sus derivadas parciales, igualando a cero y exigiendo que cumplan la condición, esto es

$$\left.\begin{array}{rcccl} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & 2x+1+2\lambda x & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = & 2y+1+2\lambda y & = & 0 \\ & & x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right\},$$

podemos restar las dos primeras ecuaciones obteniendo $(x-y)(1+\lambda) = 0$. Si el segundo paréntesis es cero $\lambda = -1$, pero eso no puede ser ya que al sustituir en las ecuaciones se obtiene la aporía $1 = 0$. No queda más remedio que sea el otro paréntesis cero con lo que $x = y$, y con la condición de ligadura se obtiene $2x^2 = 1$, es decir $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se tiene como candidatos los puntos $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Para saber cuales son los valores extremos de f basta con calcularla en los tres candidatos y comparar. Como

$$f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \quad f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 + \sqrt{2} \quad f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \sqrt{2}$$

resulta que el segundo punto es en el que la función alcanza su valor máximo y el primero en el que alcanza su valor mínimo.

$\boxed{\textbf{Problema 11}}$ (26 de Junio de 2002) *Sea la función* $f(x,y) = xy + \cos(xy) + x - y$

(i) Calcular el plano tangente a su gráfica en el punto $(0,0,1)$

(ii) Si f *se anula se puede despejar* y *en función de* x*. Calcular* $y'(0)$*.*

Solución: *(i)* El plano tangente será

$$z - 1 = A(x-0) + B(y-0)$$

siendo A y B las derivadas parciales de f en el $(0,0)$. Como $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y - ysen(xy) + 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x - xsen(xy) - 1$, resulta ser $A = 1$ y $B = -1$ con lo que el plano tangente es $z = x - y + 1$.

(ii) Si $0 = xy + cos(xy) + x - y$ y asumimos $y = y(x)$ haciendo $x = 0$ se obtiene $0 = 1 - y(0)$, luego $y(0) = 1$. Si derivamos en la primera ecuación se tiene $y + xy' - y'sen(xy) + 1 - y' = 0$ que aplicando en $x = 0$ nos da $1 + 0y' - y'sen(0) + 1 - y'(0) = 0$ de donde $y'(0) = 2$.

$\boxed{\textbf{Problema 12}}$ (26 de Junio de 2002) *Calcular los extremos absolutos de* $f(x,y) := x^2 - y^2$ *en el triángulo determinado por los puntos* $A = (3,0)$ *,* $B = (0,3)$ *y* $C = (-2,-2)$*.*

Solución: La función es continua sobre el triángulo $\mathbf{T}$ que es cerrado y acotado luego alcanza en él su valor máximo y su valor mínimo. Distinguiremos el interior y la frontera de la región:

Interior de $\mathbf{T}$: Los posibles candidatos deben ser soluciones del sistema $\left.\begin{array}{rrr} \dfrac{\partial f}{\partial x} = & 2x = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = & -2y = & 0 \end{array}\right\}$ luego el único candidato es el $(0,0)$, que al estar en en interior de $\mathbf{T}$ lo mantenemos como tal. Le llamamos P_1.

Frontera de $\mathbf{T}$: Trataremos cada uno de los lados como un problema de multiplicadores de Lagrange

Lado que une A con B: su ecuación es (recta que pasa por dos puntos) $x+y-3=0$. La función lagrangiana es

$$F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+\lambda(x+y-3)$$

cuyos puntos críticos son solución del sistema $\left.\begin{array}{rcl} 2x+\lambda & = & 0 \\ -2y+\lambda & = & 0 \\ x+y-3 & = & 0 \end{array}\right\}$

De la primera y segunda ecuación se deduce que $y=-x$, que al sustituir en la tercera nos proporciona $0=3$. No hay candidatos en este lado.

Lado que une B con C: su ecuación es $5x-2y+6=0$. La función lagrangiana es

$$F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+\lambda(5x-2y+6)$$

cuyos puntos críticos son solución del sistema $\left.\begin{array}{rcl} 2x+5\lambda & = & 0 \\ -2y-2\lambda & = & 0 \\ 5x-2y+6 & = & 0 \end{array}\right\}$

De la segunda ecuación se deduce que $y=-\lambda$, que nos deja la primera como $2x-5y=0$. Ésta junto a la tercera nos proporciona el $(-\frac{10}{7},-\frac{4}{7})$ que se encuentra en el lado. Lo reservamos llamándole P_2.

Lado que une C con A: su ecuación es $2x-5y-6=0$. La función lagrangiana es

$$F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+\lambda(2x-5y-6)$$

cuyos puntos críticos son solución del sistema $\left.\begin{array}{rcl} 2x+2\lambda & = & 0 \\ -2y-5\lambda & = & 0 \\ 2x-5y-6 & = & 0 \end{array}\right\}$

De la primera ecuación se deduce que $x=-\lambda$, que nos deja la segunda como $-2x+5y=0$. Ésta junto a la tercera nos proporciona el $(-\frac{4}{7},-\frac{10}{7})$ que se encuentra en el lado. Lo reservamos llamándole P_3.

Añadimos a la reserva que estamos haciendo los tres vértices del triángulo.

Calculemos finalmente la función en los seis puntos candidatos. $f(P_1)=0$, $f(P_2)=\frac{12}{7}$, $f(P_3)=-\frac{12}{7}$, $f(A)=9$, $f(B)=-9$ y $f(C)=0$. En resumidas cuentas el máximo se alcanza en A y el mínimo en B.

Problema 13 (2 de Septiembre de 2002)

Pasar a coordenadas polares la expresión

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$$

siendo $z = z(x, y)$.

Solución: Vamos a resolverlo de dos maneras, ambas usando la regla de la cadena:

En primer lugar como $x := \rho\cos\theta$, $y := \rho \operatorname{sen}\theta$ se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \rho} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\theta\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho\operatorname{sen}\theta\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \rho\cos\theta\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

Considerando lo anterior como un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incognitas ($\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$) cuyo determinante es no nulo (vale ρ) obtenemos, usando la regla de Cramer:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Sustituyendo en la expresión inicial se tiene

$$\rho\cos\theta(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta}) + \rho\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta}) = \rho\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

Otra opción sería considerar que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ con lo que se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \rho} - \dfrac{y}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$$

que tras cambiar x e y por sus valores en polares nos proporciona idéntico resultado al obtenido anteriormente.

Problema 14 (2 de Septiembre de 2002)

Estudiar y clasificar, usando el cálculo diferencial, los puntos críticos de la función $f(x, y) := (2x - y)(x^2 - y)$.

Solución: Hallemos los puntos críticos de f buscando los que anulen a sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x^2 - y) + 2x(2x - y) = 6x^2 - 2xy - 2y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2 - y) - (2x - y) = 2y - x^2 - 2x = 0$$

Obtenemos $(0, 0)$, $(1, \frac{3}{2})$, $(2, 4)$.

Calculemos las derivadas parciales segundas y el Hessiano:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 2y,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x - 2,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,\ H := AC - B^2.$$

Al aplicarlo en cada uno de los puntos críticos se tiene

Para $(1, \frac{3}{2})$: $A = 9$, $B = -4$, $C = 2$ y $H = 2$; es un mínimo local.

Para $(0, 0)$: $A = 0$, $B = -2$, $C = 2$ y $H = -4$; es un punto de silla.

Para $(2, 4)$: $A = 16$, $B = -6$, $C = 2$ y $H = -4$; es un punto de silla.

$\boxed{\textbf{Problema 15}}$ (21 de Enero de 2003)

Sean F y h funciones de clase C^1 que cumplen $F(x+y, h(x,y), x-y) = 0$, para todo x e y. Averiguar el gradiente de h en $(1,1)$ sabiendo que $h(1,1) = 1$ y $\nabla F(2,1,0) = (1,1,-1)$.

Solución: En la situación que se nos plantea comenzamos con dos variables (x, y) obteniendo $(x + y, h(x, y), x - y)$; al aplicarle luego F se obtiene cero luego si $\phi(x, y) := (x + y, h(x, y), x - y)$, la composición $F \circ \phi$ es la función idénticamente nula. Como todas las funciones con las que trabajamos son de clase C^1 se puede aplicar la regla de la cadena que en su expresión matricial nos asegura que

$$\mathbf{0} = F'(\phi(x,y)) \cdot \phi'(x,y) = (0 \quad 0) = (D_1F \quad D_2F \quad D_3F) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ D_1h & D_2h \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Particularizando para $x = y = 1$ se tiene

$$(0 \quad 0) = (1 \quad 1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ D_1h & D_2h \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de donde $D_1h = 0$ y $D_2h = -2$, con lo que $\nabla h(1,1) = (0, -2)$.

$\boxed{\textbf{Problema 16}}$ (21 de Enero de 2003)

Consideremos la función $f(x,y) := \operatorname{sen}(x+y) + 2(x-y)$

(a) ¿Tiene la función extremos? Razonar la respuesta.

(b) Calcular razonadamente la dirección de máximo crecimiento en el punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Solución: *(a)* La función no tiene extremos absolutos pues haciendo crecer x la función crece arbitrariamente y haciendo crecer y la función decrece arbitrariamente. Como es de clase C^∞ para ver si tiene extremos relativos hallemos sus puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y) + 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y) - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Como el coseno toma valores entre -1 y 1 el sistema no tiene solución, f no tiene puntos críticos y, por lo tanto, tampoco extremos relativos o locales.

(b) La dirección de mayor crecimiento de una función de clase C^1 como la que tratamos es la del gradiente luego basta conocerlo en el punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$\nabla f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \right) = (1, -3)$

$\boxed{\textbf{Problema 17}}$ (21 de Enero de 2003)

Maximizar la función $f(x,y,z) := x + 2y + z$ *en el elipsoide* $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 1.$

Solución: Se trata de un problema de multiplicadores de Lagrange con una sola condición de ligadura. Como la función es continua (es un polinomio) y está definida sobre un cerrado y acotado del espacio, toma seguro un valor máximo y un valor mínimo. Ambos se tomarán en puntos críticos de la función lagrangiana

$$F(x,y,z,\lambda) := x + 2y + z + \lambda(x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 1)$$

que estén en el elipsoide. Dichos puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 + 6\lambda y = 0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 + 10\lambda z = 0\\ x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 1\end{array}\right\}$$

De la primera ecuación se deduce que x no puede anularse. Así pues $\lambda = -\dfrac{1}{2x}$ con lo que si sustituimos en la segunda y tercera ecuación se tiene $y = \dfrac{2}{3}x$; $z = \dfrac{1}{5}x$, valores que, sustituidos en la ecuación del elipsoide, nos dan

$$x^2 + 3\frac{4}{9}x^2 + 5\frac{1}{25}x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{15}{38}}$$

Así los puntos críticos de F son los ocho puntos

$$(\pm\sqrt{\frac{15}{38}}\ ,\ \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{15}{38}}\ ,\ \pm\frac{1}{5}\sqrt{\frac{15}{38}})$$

Es inmediato que la función f alcanza el valor máximo cuando las tres coordenadas son positivas, esto es

$$f(\sqrt{\frac{15}{38}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{15}{38}}, \frac{1}{5}\sqrt{\frac{15}{38}}) = \frac{38}{15}\sqrt{\frac{15}{38}} = \sqrt{\frac{38}{15}}$$

Problema 18 (20 de Junio de 2003)

Transformar razonadamente la expresión

$$2\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y}$$

mediante el cambio de variables $x = 2u + 3v$; $y = -3u + 2v$.

Solución: La situación que tenemos es una función $z = z(x, y)$ de dos variables x e y que, a su vez, son funciones de dos nuevas variables u y v. Aplicamos la regla de la cadena y tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Para calcular la parciales de u y v respecto a x e y debemos despejar las primeras resolviendo el sistema $x = 2u+3v$; $y = -3u+2v$, cuya solución es

$$u = \frac{\begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{13}x - \frac{3}{13}y \quad ; \quad v = \frac{\begin{vmatrix} 2 & x \\ -3 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{13}x + \frac{2}{13}y$$

Así

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{13} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3}{13} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3}{13} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{13}$$

de donde

$$2\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(\frac{2}{13}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{3}{13}\frac{\partial z}{\partial v}\right) - 3\left(-\frac{3}{13}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{2}{13}\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$\boxed{\textbf{Problema 19}}$ (21 de Junio de 2003)

Representar en $\mathbb{R}^2$ *el conjunto* $A := \{(x, y) \ : \ x^2 \leq y \leq 1\}$ *y calcular los extremos en él de la función* $f(x, y) := x^2 + y^2 - y$.

Solución: El conjunto es la región del plano limitada inferiormente por la parábola $y = x^2$ y superiormente por la recta $y = 1$. Es inmediato que es acotado (está contenido, por ejemplo, dentro del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 2), y es cerrado ya que contiene a su frontera. La función f es polinómica, luego continua. Se dan las condiciones del teorema de Weierstrass luego la función alcanza en el conjunto sus valores máximo y mínimo. Dichos extremos serán puntos críticos de la función: calculémoslos

(a) Puntos críticos en el interior de A: deben ser solución del sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1 = 0,$$

es decir $(0, \frac{1}{2})$, que está en el interior de A.

(b) Puntos críticos en la frontera de A, que está formada por dos trozos, a saber

(b_1): El trozo de parábola entre los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$. Planteamos un problema de multiplicadores de Lagrange con una condición de ligadura. Buscamos los puntos críticos de

$$F(x,y) := x^2 + y^2 - y + \lambda(x^2 - y)$$

que estén en el trozo citado de parábola, es decir las soluciones de

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x(1+\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - 1 - \lambda = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right\}$$

cuya única solución es el $(0,0)$.

(b_2): El trozo de la recta $y = 1$ que está entre los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$. Planteamos otro problema de multiplicadores de Lagrange.Buscamos los puntos críticos de

$$F(x,y) := x^2 + y^2 - y + \lambda(y - 1)$$

que estén en el trozo citado. Son las soluciones de

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - 1 + \lambda = 0 \\ y = 1 \end{array}\right\}$$

cuya única solución es el $(0,1)$.

Añadimos a los puntos obtenidos los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$ intersección de los trozos de frontera.

Finalmente, una vez obtenidos los candidatos, calculamos la función f en cada uno de ellos: $f(0,0) = 0$; $f(0,1) = 0$; $f(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$; $f(-1,1) = 1$; $f(1,1) = 1$, con lo que la función alcanza su valor mínimo en $(0,\frac{1}{2})$ y su valor máximo en los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$.

Problema 20 (12 de Septiembre de 2003)

Hallar los puntos en los que el plano tangente al hiperboloide $x^2+y^2-z^2 = 81$ *es paralelo al plano* $x + y + z = 3$. *Calcular en ellos la ecuación de dicho plano y la de la recta normal.*

Solución: El plano tangente al hiperboloide en un punto $P := (x_0, y_0, z_0)$ tendrá como vector normal las derivadas parciales de la función $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2 - 81$, ya que $f = 0$ lo describe como superficie. Con lo cual dicho vector debe ser

$$\mathbf{v} = (2x_0, 2y_0, -2z_0).$$

Como nos exigen que el plano sea paralelo a $x+y+z = 3$, que tiene como vector normal el $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, ambos vectores deben ser proporcionales, es decir

$$(2x_0, 2y_0, -2z_0) = \alpha(1, 1, 1)$$

de donde se deduce que $x_0 = y_0 = -z_0$. Sustituyendo en la ecuación de hiperboloide se obtiene los puntos $(9, 9, -9)$ y $(-9, -9, 9)$.

Las ecuaciones de los respectivos planos tangentes son

$$18(x - 9) + 18(y - 9) + 18(z + 9) = 0$$

$$-18(x + 9) - 18(y + 9) - 18(z - 9) = 0$$

o bien

$$x + y + z = 9 \quad , \quad x + y + z = -9.$$

Las respectivas rectas normales al ser perpendiculares a los planos tienen como vector director el vector normal al correspondiente plano, luego sus ecuaciones son, en forma continua

$$x - 9 = y - 9 = z + 9 \quad , \quad x + 9 = y + 9 = z - 9.$$

Problema 21 (12 de Septiembre de 2003)

Un servicio de paquetería requiere que las dimensiones de una caja rectangular, x, y, z, cumplan $x + 2y + 2z \leq 108$. ¿Cuál es el volumen de la caja más grande que puede enviar el servicio?

Solución: El volumen de la caja es $V(x, y, z) := xyz$ y nos debemos restringir al conjunto

$$C := \{(x, y, z) \ : \ x + 2y + 2z \leq 108 \ ; \ x \geq 0, \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0\}$$

Se trata de maximizar V (una función polinómica, luego continua) en el conjunto del espacio comprendido entre el plano $x + 2y + 2z = 108$ y los planos coordenados. Como tal conjunto es cerrado (pues contiene a su frontera) y obviamente acotado, la función alcanza sus valores tanto máximo como mínimo. El valor mínimo se obtendrá cuando alguna de las dimensiones se anule. Basta, pues para maximizar, descomponer C en

$$\{(x,y,z) \in C \ : \ x+2y+2z < 108\ \} \cup \{(x,y,z) \in C \ : \ x+2y+2z = 108\ \}$$

y buscar los puntos críticos de V.

En el primer caso los puntos críticos son las soluciones de

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = xy = 0,$$

que exigen necesariamente que alguna dimensión sea cero. Los despreciamos.

En el segundo caso tenemos un problema de multiplicadores de Lagrange. Planteemos la función Lagrangiana

$$F(x,y,z,\lambda) := xyz + \lambda(x+2y+2z-108)$$

cuyos puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y} = xz + 2\lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial z} = xy + 2\lambda = 0 \\[2ex] x+2y+2z = 108 \end{array}\right\}$$

De la segunda y la tercera ecuación se deduce que $xz = xy$, de donde o bien x es cero (lo cual hemos dicho que no nos interesa) o bien $z = y$. Si usamos la primera y la segunda obtendríamos similarmente que $xz = 2yz$ de donde (ya considerando que z no es cero) $x = 2y$.

Sustitutendo en la cuarta se tiene $2y + 2y + 2y = 108$, por lo que $y = z = 18$, mientras que $x = 36$. Ésas son las dimensiones que maximizan V.

$\boxed{\textbf{Problema 22}}$ (13 de Febrero de 2004)

Si $z = z(x,y)$ es una función de clase C^∞ transformar la expresión

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x},$$

en coordenadas polares.

Solución: Comencemos por el cálculo de las derivadas parciales de primer orden; tenemos dos alternativas, ambas usando la regla de la cadena:

La primera es tener en cuenta que $x := \rho\cos\theta$, $y := \rho\operatorname{sen}\theta$ y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \rho} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\theta\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho\operatorname{sen}\theta\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \rho\cos\theta\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

Considerando lo anterior como un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incognitas ($\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$) cuyo determinante es no nulo (vale ρ) obtenemos, usando la regla de Cramer:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Otra opción sería considerar que $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ con lo que se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \rho} - \dfrac{y}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \rho} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$$

Se sustituye $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ obteniendose el mismo resultado.

Pasemos a calcular la derivada parcial de segundo orden: si $A := \dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial A}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \theta} =$$

(calculamos ahora las derivadas de A)

$$= \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\partial \theta}) + \frac{\cos\theta}{\rho}(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial \rho} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 z}{\partial \theta\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}) =$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta\partial \rho} - \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}$$

Quedaría sólo sustituir tanto una como otra.

$\boxed{\textbf{Problema 23}}$ (13 de Febrero de 2004)

Consideremos la función $f(x,y) := x^2y^3 + \cos(xy)$. *Hallar el plano tangente a su gráfica en el punto* $(1, \pi, \pi^3 - 1)$. *Citar un punto donde el plano tangente sea horizontal.*

Solución: El plano tangente a la gráfica de f en (a, b, c) es

$$z - c = A(x - a) + B(y - b)$$

siendo A y B, respectivamente, las derivadas parciales de f respecto de x e y calculadas en (a, b). Hallemos pues

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - y \operatorname{sen}(xy) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - x \operatorname{sen}(xy)$$

luego haciendo $x = 1$ e $y = \pi$, obtenemos $A = 2\pi^3$ y $B = 3\pi^2$, resultando el plano tangente

$$z = \pi^3 - 1 + 2\pi^3(x - 1) + 3\pi^2(y - \pi) = 2\pi^3x + 3\pi^2y - 4\pi^3 - 1.$$

Finalmente, si $x = 0$ e $y = 0$ tanto A como B se anulan, y el plano tangente es horizontal (sería exactamente $z = 1$).

$\boxed{\textbf{Problema 24}}$ (13 de Febrero de 2004)

Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) := (x + y)^3 - 12xy$$

sobre el conjunto $B := \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solución: El conjunto B es el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 2. Se trata de un conjunto cerrado y acotado donde la función f alcanza sus extremos absolutos. Para calcularlos vamos a encontrar candidatos en el interior y en la frontera.

(a) Interior de B: es el conjunto $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 4\}$. Los candidatos a extremos serán puntos críticos de f, esto es, soluciones del sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x + y)^2 - 12y = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(x + y)^2 - 12x = 0,$$

restando ambas ecuaciones se obtiene que $x = y$ y, sustituyendo en cualquiera de ellas,

$$12x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1,$$

que nos proporciona los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, ambos en dicho interior.

(b) Frontera de B: es el conjunto $\{(x,y) \, : \, x^2+y^2 = 4\}$ (la circunferencia).

Se trata de un problema de multiplicadores de Lagrange con una sola condición de ligadura. Los candidatos serán puntos críticos de la función lagrangiana

$$F(x,y,\lambda) := (x+y)^3 - 12xy + \lambda(x^2+y^2-4).$$

Dichos puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3(x+y)^2 - 12y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3(x+y)^2 - 12x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array}\right\}$$

Despejamos $3(x+y)^2$ en ambas e igualamos, teniendo

$$12y - 2\lambda x = 12x - 2\lambda y \Rightarrow 12(y-x) = -2\lambda(y-x)$$

Si $y = x$ se cumple lo anterior, luego sustituyendo en la tercera se tiene $x^2 = 2$, luego se tienen los puntos

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{y} \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Si, por el contrario, $y \neq x$ se tiene que $y - x \neq 0$ luego cancelando, debe ser $\lambda = -6$, y las dos primeras ecuaciones quedan

$$3(x+y)^2 - 12y - 12x = 0 \quad ; \quad 3(x+y)^2 - 12x - 12y = 0,$$

es decir, $(x+y)(3(x+y) - 12) = 0$ con lo que, o bien $x + y = 0$, es decir $x = -y$, que sustituyendo en $x^2 + y^2 = 4$ obliga a que $x^2 = 2$, lo que nos proporciona los puntos

$$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \text{y} \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

o bien $x + y \neq 0$ con lo que $3(x+y) = 12$, es decir $x = 4 - y$ y, al sustituir en $x^2 + y^2 = 4$ obtenemos $y^2 - 4y + 6 = 0$, que no tiene solución real.

Calculamos ahora el valor de f en cada uno de los candidatos obtenidos
$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = -4, \quad f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 24,$

$f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 16\sqrt{2} - 24, \quad f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -16\sqrt{2} - 24.$

En definitiva el máximo se alcanza en los puntos $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, mientras que el mínimo se alcanza en $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

$\boxed{\textbf{Problema 25}}$ (14 de Junio de 2004)

Transformar razonadamente la expresión $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$ *, mediante el cambio de variables* $x = u + v$ *;* $y = u - v$*.*

Solución: Comencemos por el cálculo de las derivadas parciales de primer orden usando la regla de la cadena:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right.$$

Sumando $x = u + v$, $y = u - v$ se tiene $u = \frac{1}{2}(x + y)$, y restando $v = \frac{1}{2}(x - y)$, de donde tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right.$$

Pasemos a calcular la derivada parcial de segundo orden; si $A := \dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial v}$$

y al ser

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}) \quad ; \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v})$$

se tiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}) = \frac{1}{4}(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2})$$

donde hemos supuesto que la función es de clase C^2 para igualar las derivadas cruzadas. Finalmente basta sustituir en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$\boxed{\textbf{Problema 26}}$ (14 de Junio de 2004)

Calcular la mínima distancia del punto $(0, 3)$ *a la parábola* $x^2 - 4y = 0$.

Solución: Es un problema de extremos condicionados ya que hay que calcular el mínimo de la función distancia del punto (x, y) al $(0, 3)$ con la restricción de que $x^2 - 4y = 0$. Al ser una función distancia (luego positiva) podemos calcular el mínimo de su cuadrado

$$D^2 = x^2 + (y - 3)^2.$$

Planteamos entonces un problema de multiplicadores de Lagrange con una condición de ligadura. La función Lagrangiana será

$$L = x^2 + (y - 3)^2 + \lambda(x^2 - 4y)$$

cuyos puntos críticos serán las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 2x(1 + \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2(y - 3) - 4\lambda = 0 \\ x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Si en la primera ecuación $x = 0$ entonces de la tercera se obtiene que $y = 0$ y tenemos el punto $(0, 0)$. Si, por el contrario, $x \neq 0$ debe ser $\lambda = -1$ con lo que en la segunda ecuación se sustituye y se obtiene $y = 1$ que, usando la tercera ecuación, nos da los puntos $(2, 1)$ y $(-2, 1)$. Son esos los puntos entre los que encontraremos el mínimo de D^2 y, por supuesto, de D. Sustituyendo se tiene

$$D(0, 0) = 3 \quad ; \quad D(2, 1) = 2\sqrt{2} \quad ; \quad D(-2, 1) = 2\sqrt{2}$$

con lo que la mínima distancia se alcanza en los puntos $(2, 1)$ y $(-2, 1)$ y su valor es $2\sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{Problema 27}}$ (7 de Septiembre de 2004)

Hallar el plano tangente y la recta normal a la superficie $xyz = 12$ *en el punto* $(2, -2, -3)$.

Solución: Consideremos la superficie, definida de forma implícita,

$$F(x, y, z) := xyz - 12 = 0 \ ,$$

que pasa por el punto en cuestión. Calculamos sus derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy$$

que, aplicadas en el punto valen $A = 6$, $B = -6$ y $C = -4$, con lo que el vector normal al plano tangente será $(6, -6, -4)$ y su ecuación, por tanto,

$$6(x-2) - 6(y+2) - 4(z+3) = 0, \quad \text{o bien,} \quad 3x - 3y - 2z = 18,$$

mientras que la ecuación de la recta normal será

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+3}{-4}$$

Una alternativa sería expresar la superficie de forma explícita $z = \dfrac{12}{xy}$, y calcular las parciales de z respecto a x e y, particularizandolas en el punto $(x = 2 \ , \ y = -2)$. Con dichos valores (llamémosles M y N) las ecuaciones del plano tangente y la recta normal serían

$$M(x-2) + N(y+2) = z+3 \quad , \quad \frac{x-2}{M} = \frac{y+2}{N} = \frac{z+3}{-1}.$$

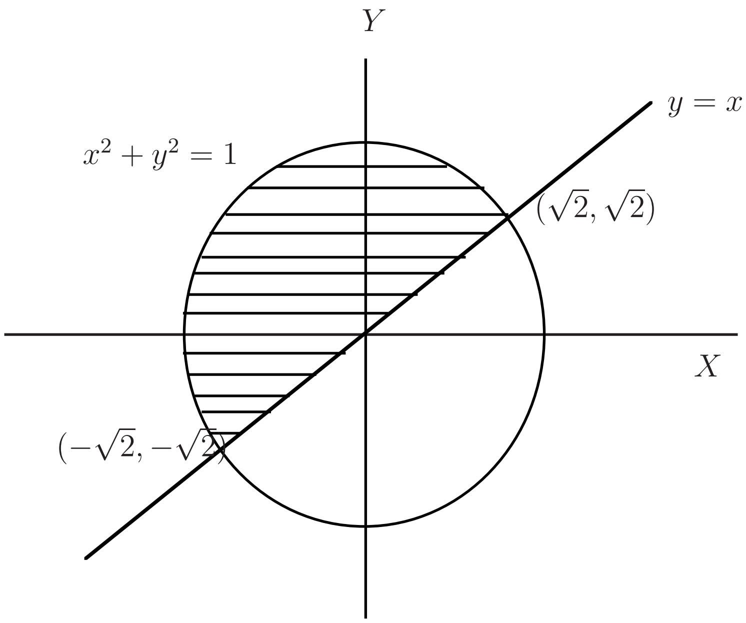
(obviamente $M = \dfrac{3}{2}$, $N = \dfrac{-3}{2}$).

$\boxed{\textbf{Problema 28}}$ (7 de Septiembre de 2004)

Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - y^2 + x$ *en el conjunto*

$$K := \{(x,y) \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad , \quad y \geq x\}.$$

Solución: El conjunto en cuestión es el semicírculo superior formado al cortar al círculo unidad (de centro el origen y radio uno) por la bisectriz del primer cuadrante (ver parte rayada en la figura)



La función es continua en un conjunto cerrado y acotado luego alcanza en él tanto su máximo como su mínimo absolutos. Busquemos los candidatos a serlo: K se puede dividir en su interior

$$int(K) = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1 \quad , \quad y > x\},$$

y su frontera (a su vez dividida en dos trozos)

$$Fr(K) = \{(x, y) \in K \ : \ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in K \ : \ y = x\}$$

En el interior los candidatos a extremos son los puntos críticos de f que estén en él, es decir las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{array} \right.$$

La única solución es el punto $(\dfrac{-1}{2}, 0)$ que está en el interior. Lo reservamos.

En el primer trozo de la frontera (el que corresponde a la semicircunferencia) planteamos un problema de multiplicadores de Lagrange cuya función lagrangiana es

$$F = x^2 - y^2 + x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

cuyos puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 1 + 2\lambda x = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y + 2\lambda y = 2y(-1 + \lambda) = 0 \\ \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Si en la segunda ecuación es $y = 0$, ésta se satisface y, sustituyendo en la tercera, se obtiene que $x = \pm 1$, con lo que se tienen los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Los reservamos también. Si, por el contrario, $y \neq 0$ eso obliga a que $\lambda = 1$ con lo que de la primera ecuación se deduce que $x = -\dfrac{1}{4}$; sustituyendo en la tercera ecuación se obtiene $y = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Estos cálculos nos dan los puntos $(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4})$ y $(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{\sqrt{15}}{4})$ de los que reservamos el primero.

En el segundo trozo de la frontera (el que corresponde al segmento de la bisectriz) planteamos un problema de multiplicadores de Lagrange cuya función lagrangiana es

$$F = x^2 - y^2 + x + \lambda(y - x)$$

y cuyos puntos críticos son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 1 - \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y + \lambda = 0 \\ \\ y = x \end{cases}$$

De la primera y la tercera se deduce que $\lambda = 2y + 1$ y de la segunda que $\lambda = 2y$, ambas contradictorias, luego en ese trozo no hay candidatos.

Finalmente añadamos como candidatos los puntos intersección de la circunferencia y la bisectriz (hallando los puntos que satisfacen, a la vez, las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $y = x$, que nos proporcionan los puntos $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Al calcular el valor de la función en los cinco puntos reservados vemos que el valor máximo se alcanza en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, donde la función toma el valor $\sqrt{2}$ y el mínimo en $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ donde la función toma el valor $-\sqrt{2}$.

CÁLCULO INTEGRAL

NOTA.- Los problemas **3** y **8** corresponden a intregrales de superficie tema que se ha suprimido del programa desde el curso 2002/03.

$\boxed{\textbf{Problema 1}}$ (15 de Junio de 2001)

Calcular el volumen de la región del primer octante limitada por $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: La región se puede escribir como

$$A := \{(x, y, z) \quad : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq z \leq xy\}.$$

Así pues,

$$v(A) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{xy} dzdydx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\, dydx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\int_0^1 x\frac{(1-x^2)}{2}\, dx = -\frac{1}{4}\int_0^1 -2x(1-x^2)\, dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{(1-x^2)^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}(0-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}.$$

$\boxed{\textbf{Problema 2}}$ (15 de Junio de 2001)

Calcular la integral de línea

$$\int_\gamma (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$$

siendo γ la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo.

Solución: Aunque se puede hacer directamente la resolveremos utilizando el Teorema de Green. Éste afirma que si γ es un camino cerrado, positivamente orientado, que envuelve a una región D en el plano entonces

$$\int_\gamma M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

En nuestro caso $M = 2x^3 - y^3$, $N = x^3 + y^3$, con lo que $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ y $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -3y^2$, de donde

$$\int_\gamma (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy = 3 \int\int_D (x^2 + y^2)\ dxdy$$

siendo $D = \{(x, y) \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$. Si hacemos un cambio usando coordenadas polares

$$3 \int\int_D (x^2 + y^2)\ dxdy = 3 \int\int_B \rho^3\ d\rho d\theta$$

siendo $B = \{(\rho, \theta) \quad : \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$3 \int\int_B \rho^3\ d\rho d\theta = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3\ d\theta d\rho = 6\pi \int_0^1 \rho^3\ d\rho = 6\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Problema 3}}$ (15 de Junio de 2001)

Sea S la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ situada por encima del plano $z = 0$. Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) := (x, y, z)$ a través de S.

Solución: La superficie se puede parametrizar como

$$\phi(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$$

definida en el conjunto $D = \{(x, y) \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$. El vector normal a la superficie en cada punto viene dado por

$$\mathbf{n} = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1) = (2x, 2y, 1)$$

Con todo lo anterior el flujo pedido es

$$\int\int_\phi F = \int\int_D F(\phi(x, y)) \cdot \mathbf{n}\ dxdy = \int\int_D (4 + x^2 + y^2)\ dxdy$$

Procediendo a cambiar de coordenadas cartesianas a polares y siendo $B = \{(\rho, \theta) \quad : \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, se tiene

$$\iint_\phi F = \iint_B (4+\rho^2)\rho \, d\rho d\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4+\rho^2)\rho \, d\theta d\rho = \pi \int_0^2 (4+\rho^2) \, 2\rho \, d\rho =$$

$$= \pi \left[\frac{(4+\rho^2)^2}{2} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{64}{2} - \frac{16}{2} \right) = 24\pi.$$

$\boxed{\textbf{Problema 4}}$ (14 de Septiembre de 2001)

Una esfera centrada en el origen y de radio r se corta por un plano horizontal a una altura h , ($0 < h < r$). Hallar el volumen de la parte de la esfera que se encuentra por encima de dicho plano.

Solución: Nos piden que calculemos el volumen del conjunto A que queda entre el plano $z = h$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Es decir

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (x, y) \in D \; , \; h \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\}$$

siendo D el círculo, en $\mathbb{R}^2$, de centro el origen y radio $r^2 - h^2$.

Como $v(A) = \iiint_A dxdydz$=(cilíndricas)= $\iiint_B \rho \; d\rho d\theta dz$, siendo B el conjunto A escrito en las nuevas coordenadas, es decir

$$B = \{(\rho, \theta, z) \; : \; 0 \leq \theta < 2\pi \; , \; 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - h^2} \; , \; h \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2}\}$$

con lo que se tiene, aplicando el teorema de Fubini,

$$v(A) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r^2-h^2}} \int_h^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho \; dz d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{r^2-h^2}} \rho(\sqrt{r^2-\rho^2} - h) d\rho =$$

$$= 2\pi \left([-\frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{3}]_0^{\sqrt{r^2-h^2}} - h[\frac{\rho^2}{2}]_0^{\sqrt{r^2-h^2}} \right) = 2\pi \left((-\frac{1}{3}h^3 + \frac{r^3}{3}) - h\frac{r^2-h^2}{2} \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3}(r^3 - h^3) - \frac{hr^2}{2} + \frac{h^3}{2} \right) = 2\pi (\frac{r^3}{3} - \frac{hr^2}{2} + \frac{h^3}{6}).$$

$\boxed{\textbf{Problema 5}}$ (14 de Septiembre de 2001)

Calcular $\int_\gamma F$ *, siendo* $F(x,y) := (\cos x \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} x \cos y)$*, si* γ *es una curva suave que une los puntos* $(0, -\pi)$ *y* $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Solución: El campo $F = (F_1, F_2)$ tiene como dominio $\mathbb{R}^2$, que es conexo y allí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \cos x \cos y = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Se trata de un campo conservativo. Existe una función potencial del mismo, es decir, una aplicación f escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de forma que $\nabla f = F$. Calculémosla:

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F_1 = \cos x \operatorname{sen} y$, $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \varphi(y)$. Así

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sen} x \cos y + \varphi'(y)$, luego $\varphi'(y) = 0$, lo que nos permite tomar como $\varphi(y)$ cualquier función constante, en particular la más simple, la nula. Por tanto tomamos $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

Finalmente para calcular $\int_\gamma F$ sólo nos interesa el punto inicial y final de la curva ya que al ser F conservativo es independiente de la curva que se considere, teniéndose

$$\int_\gamma F = f(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - f(0, -\pi) = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} . \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 . \operatorname{sen}(-\pi) = -1$$

$\boxed{\textbf{Problema 6}}$ (26 de Junio de 2002)

Hallar el volumen de la región comprendida entre el plano $z = 0$ *y el paraboloide* $x^2 + y^2 = 4 - z$.

Solución: Nos piden el volumen de

$$B := \{(x,y,z) \quad : \quad 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

Veremos dos maneras de calcularlo: primero mediante una integral triple

$$V(B) = \iiint_B dxdydz = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

siendo $D := \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leq 4\}$. Efectuando el cambio a coordenadas cilíndricas

$$V(B) = \int\int_M (4-\rho^2)\rho\, d\rho d\theta \quad ,\text{con} \quad M := \{(\rho,\theta)\ :\ 0 \leq \rho \leq 2\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

y aplicando el teorema de Fubini

$$V(B) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4-\rho^2)\rho d\theta\, d\rho = 2\pi \int_0^2 (4-\rho^2)\rho d\rho = -\pi \left[\frac{(4-\rho^2)^2}{2}\right]_0^2 = 8\pi$$

Otra forma de hacerlo sería usando el principio de Cavalieri. Para ello escojamos la altura z (que varía entre 0 y 4) y si B_z es la sección horizontal del paraboloide, que tiene un área $S(B_z)$

$$V(B) = \int_0^4 S(B_z)\, dz$$

Dicha sección es, a la altura z, el círculo $x^2+y^2 \leq 4-z$, luego

$$V(B) = \int_0^4 \pi(4-z)\, dz = \pi \left[-\frac{(4-z)^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

$\boxed{\textbf{Problema 7}}$ (26 de Junio de 2002)

Consideremos el campo de fuerzas

$$F(x,y) := (2xy \operatorname{sen}(x^2y) + \cos x,\ x^2 \operatorname{sen}(x^2y) - \frac{1}{y})$$

definido en el semiplano $y > 0$.

(i) ¿Es F *conservativo?*

(ii) Calcular el trabajo producido al trasladar una partícula bajo ese campo por el camino $\gamma(t) := (t\cos t, 1 - \frac{t}{\pi} + t^{\cos t})$ *, con* $t \in [0,\pi]$

Solución: *(i)* Para ver si es conservativo sea $F := (M,N)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x(\operatorname{sen}(x^2y) + x^2y\cos(x^2y)) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Al ser el dominio de F estrellado (o convexo) la condición necesaria es también suficiente y F resulta ser conservativo.

(ii) Por el apartado anterior basta encontrar la función potencial de F, f, y el trabajo será

$$W := \int_\gamma F = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(-\pi, \frac{1}{\pi}) - f(0,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2xy\,\mathrm{sen}(x^2y) + \cos x, \quad \text{luego} \quad f = -\cos(x^2y) + \mathrm{sen}\, x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\,\mathrm{sen}(x^2y) + \varphi'(y) = N = x^2\,\mathrm{sen}(x^2y) - \frac{1}{y}$$

Con ello $\varphi(y) = -\log y + C$. Tomamos $C = 0$ con lo que resulta

$$f(x,y) = -\cos(x^2y) + \mathrm{sen}\, x - \log y$$

y, por lo tanto,

$$W = 2 + \log \pi.$$

$\boxed{\textbf{Problema 8}}$ (26 de Junio de 2002)

Hallar el área encerrada por la elipse intersección del plano $x+y+z=1$ con el cilindro $x^2+y^2=1$.

Solución: Nos están pidiendo el área de la superficie dada por el plano y circunscrita por el cilindro. Parametrizamos la superficie

$$\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x,y) = (x,y,z) = (x,y,1-x-y)$$

siendo $D := \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \le 1\}$. Así el área pedida es

$$S = \iint_D \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}\; dxdy = \iint_D \sqrt{3}\; dxdy = \sqrt{3}\iint_D \; dxdy$$

Como la integral es el área de D, esto es π, se tiene

$$S = \sqrt{3}\pi$$

$\boxed{\textbf{Problema 9}}$ (2 de Septiembre de 2002)

Sea $A := \{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ ,\ z \leq 0\}$. *Calcular*

$$I := \iiint_A \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\ dxdydz.$$

Solución: Por la forma del integrando y al ser A un trozo de esfera deberemos ensayar el cambio a coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{array}{rc} x = & \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = & \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = & \rho\cos\varphi \end{array}\right\} \text{con jacobiano } J = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

El conjunto A se transforma en

$$B = \{(\rho, \theta, \varphi)\ :\ 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}$$

Aplicamos el teorema de cambio de variable y tenemos

$$I = \iiint_B \frac{1}{1+\rho^2}\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\ d\rho d\theta d\varphi = (\text{Fubini}) = \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{sen}\,\varphi d\varphi\ d\theta\ d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\ d\rho = 2\pi\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+\rho^2})\ d\rho = 2\pi[\rho - \arctan\rho]_0^1 = 2\pi(1 - \frac{\pi}{4}) = 2\pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Problema 10}}$ (2 de Septiembre de 2002)

Dado el campo vectorial

$$F(x, y) := (-3x^2y^2\,\mathrm{sen}(x^3y^2), -2yx^3\,\mathrm{sen}(x^3y^2))$$

calcular $\displaystyle\int_\gamma F$, *si* γ *es un camino,* C^1 *a trozos, que une los puntos* $(1, 7)$ *y* $(4, 9)$.

Solución: El campo es de la forma $F = (M, N)$, con

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6x^2y\,\mathrm{sen}(x^3y^2) - 6x^5y^3\cos(x^3y^2) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

luego, al estar definido en todo el plano, se trata de un campo conservativo. Calculemos su función potencial. Debe ser una $f(x, y)$ tal que

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2y^2 \operatorname{sen}(x^3y^2)$, con lo que $f(x,y) = \cos(x^3y^2) + g(y)$. Como, por otro lado, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2yx^3 \operatorname{sen}(x^3y^2)$, necesariamente es $g'(y) = 0$. Podemos tomar $f(x,y) = \cos(x^3y^2)$.

La integral de línea sabemos que depende sólo de los valores que toma cualquier función potencial en los extremos del camino, con lo que

$$\int_\gamma F = f(4,9) - f(1,7) = \cos 5184 - \cos 49.$$

$\boxed{\textbf{Problema 11}}$ (20 de Junio de 2003)

Evaluar

$$\int\int_D \log(x^2+y^2)\ dxdy\ ,$$

siendo D la región del primer cuadrante comprendida entre las circunferencias cuyo centro es el origen y cuyos radios son, respectivamente, a y b ($a < b$).

Solución: El conjunto se expresa, en coordenadas cartesianas, como

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad a^2 \le x^2+y^2 \le b^2 \quad x \ge 0, \quad y \ge 0\}$$

y en coordenadas polares como

$$B = \{(\rho,\theta) \quad : \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad a \le \rho \le b\}.$$

Aplicando a la integral el teorema de cambio de variable, teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación vale ρ, se tiene

$$\int\int_D \log(x^2+y^2)\ dxdy = \int\int_B \rho\ \log(\rho^2)\ d\rho d\theta = 2\int\int_B \rho\ \log(\rho)\ d\rho d\theta$$

integral que se resuelve por la correspondiente iterada

$$\int_a^b (\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\ \log(\rho)\ d\rho) d\theta = \frac{\pi}{2}\int_a^b \rho\ \log(\rho)\ d\rho$$

Para resolver la integral aplicamos integración por partes

$$\int \rho\ \log(\rho)\ d\rho = \begin{pmatrix} u := \log(\rho) & du = \frac{d\rho}{\rho} \\ dv := \rho\ d\rho & v = \frac{\rho^2}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\rho^2\log(\rho) - \int \rho\ d\rho) = \frac{\rho^2}{2}(\log(\rho) - \frac{1}{2})$$

con lo que, sustituyendo, nos resulta

$$\int\int_D \log(x^2+y^2)\ dxdy = \frac{\pi}{2}(b^2\log b - a^2\log a - \frac{b^2-a^2}{2}).$$

$\boxed{\textbf{Problema 12}}$ (20 de Junio de 2003)

Consideremos el campo vectorial

$$F(x,y) := (1 + y\cos xy\ ,\ x\cos xy).$$

(i) Probar que F es conservativo.
(ii) Hallar su función potencial.
(iii) Calcular $\displaystyle\int_\gamma F$ *, siendo γ la elipse de centro* $(1,-2)$ *y semiejes* 3 *y* 5.

Solución: *(i)* Sean $M := 1 + y\cos xy$, $N := x\cos xy$, como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos xy - xy\operatorname{sen} xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

en todo $\mathbb{R}^2$, que es convexo, se tiene que F es conservativo.

(ii) Sea f la función potencial de F, esto es $F = \nabla f$; $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + y\cos xy$, con lo que integrando respecto de x,

$$f(x,y) = x + \operatorname{sen} xy + \varphi(y).$$

Derivamos ahora respecto a y teniendose
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy + \varphi'(y) = x\cos xy$, con lo que $\varphi'(y) = 0$ lo que garantiza que $\varphi(y)$ es constante. En definitiva

$$f(x,y) = x + \operatorname{sen} xy.$$

(iii) $\displaystyle\int_\gamma F = 0$ ya que el camino es cerrado y el campo conservativo.

$\boxed{\textbf{Problema 13}}$ (20 de Junio de 2003)

Calcular el volumen del recinto limitado por la superficie $z = \operatorname{sen}^2 x$, *con* $0 \leq x \leq \pi$, *y los planos* $y = 0$ *e* $y = 3$.

Solución: La región cuyo volumen nos piden se puede describir como

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 0 \leq x \leq \pi \ , \ 0 \leq y \leq 3 \ , \ 0 \leq z \leq \operatorname{sen}^2 x\}$$

con lo que su volumen se calculará

$$v(A) := \iiint_A dxdydz = \int_0^{\pi} \int_0^{3} \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} dzdydx = \int_0^{\pi} \int_0^{3} \operatorname{sen}^2 x \, dydx = 3 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

Para resolver esta última integral usemos que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ con lo que

$$v(A) = \frac{3}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{3}{2}[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi$$

Una alternativa a esta forma de resolver el problema es calcular el área encerrada por la curva $z = \operatorname{sen}^2 x$ en el plano ZX (que nos daría $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$), y luego como la región que nos dan tiene como secciones dicha área a lo largo del eje Y desde $y = 0$ hasta $y = 3$, aplicamos el principio de Cavalieri con lo que sólo tenemos que multiplicarla por 3. Las operaciones a realizar son exactamente las mismas.

$\boxed{\textbf{Problema 14}}$ (12 de Septiembre de 2003)

Calcular razonadamente el área encerrada por una elipse de semiejes a *y* b $(a < b)$.

Solución: El conjunto encerrado por una elipse de semiejes a y b es

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Su área será $s(A) := \iint_A dxdy$. Para resolver la integral de manera cómoda realicemos una homotecia en cada eje de razón a y b respectivamente, y un cambio a coordenadas polares. Realizamos pues el cambio

$x = a\ \rho\cos\theta$, $y = b\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$; con dichas nuevas coordenadas el conjunto A se transforma en

$$B := \{(\rho,\theta) \quad : \quad 0 \le \rho \le 1\ ,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$$

y, aplicando el teorema de cambio de variable, se tiene

$$s(A) = \int\!\!\int_B ab\rho\ d\rho d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} ab\rho d\theta\ d\rho = 2\pi ab \int_0^1 \rho\ d\rho = \pi ab,$$

donde hemos usado que el jacobiano de la transformación es $ab\rho$. El problema se puede realizar con el concepto de área e integrales de una variable despejando

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

si consideramos sólo la parte del primer cuadrante calcularíamos

$$\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

mediante la sustitución trigonométrica $x = a\,\mathrm{sen}\ t$. El resultado sería $\frac{\pi ab}{4}$ y luego bastaría, por simetría, multiplicar por 4.

$\boxed{\textbf{Problema 15}}$ (12 de Septiembre de 2003)

Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$F(x,y) = (xy + 2\ ,\ x^2 + y^2)$$

al mover una partícula a lo largo de la circunferencia unidad, recorrida en sentido positivo. ¿Es F conservativo?.

Solución: La circunferencia de centro el origen y radio uno, recorrida en sentido positivo (antihorario), se puede parametrizar como

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \gamma(t) := (\cos\ t, \mathrm{sen}\ t).$$

El trabajo que desarrolla el campo F a lo largo de γ es

$$W := \int_\gamma F = \int_0^{2\pi} < F(\gamma(t)), \gamma'(t) >\ dt = \int_0^{2\pi} < (\cos\ t\,\mathrm{sen}\ t{+}2, 1), (-\,\mathrm{sen}\ t, \cos\ t) >\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos\ t\ \mathrm{sen}^2\ t - 2\,\mathrm{sen}\ t + \cos\ t)\, dt = [-\frac{\mathrm{sen}^3\ t}{3}]_0^{2\pi} + [2\cos\ t]_0^{2\pi} + [\mathrm{sen}\ t]_0^{2\pi} = 0.$$

Por otro lado el campo F no es conservativo pues no cumple la condición necesaria ya que

$$\frac{\partial(xy+2)}{\partial y} = x \neq 2x = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}.$$

Problema 16 (14 de Junio de 2004)

Calcular

$$\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{9x^2+4y^2}}$$

siendo A el interior de la elipse centrada en el origen y de semiejes 2 *y* 3.

Solución: Al tratarse de una elipse realizaremos un cambio de variable combinación de cambio a polares y una homotecia de razón 2 en el eje X y de razón 3 en el eje Y. Es decir

$$x = 2\rho\cos\theta \quad ; \quad y = 3\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

con lo que

$$A = \{(x,y) \quad : \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$$

pasa a transformarse en

$$B = \{(\rho,\theta) \quad : \quad 0 \leq \rho < 1\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Como $\sqrt{9x^2+4y^2} = \sqrt{36\rho^2\cos^2\theta + 36\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = 6\rho$ y el jacobiano de la transformación es también $J = 6\rho$, la fórmula de cambio de variables nos da

$$\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{9x^2+4y^2}} = \iint_B \frac{6\rho}{6\rho}\, d\rho d\theta = \int_0^1 (\int_0^{2\pi} d\theta) d\rho = 2\pi.$$

$\boxed{\textbf{Problema 17}}$ (14 de Junio de 2004)

Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$F(x,y) := (2x-3, 2y+2)$$

a lo largo de la curva $\gamma(t) := (t + \dfrac{\operatorname{sen} t}{1+t}, e^t)$, $t \in [0,\pi]$.

Solución: Tratar de calcular el trabajo $W := \displaystyle\int_\gamma F$ directamente sería imposible dada la complejidad del camino, sin embargo notemos que si $F = (F_1, F_2)$ entonces

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

lo que al estar definido el campo en todo el plano nos asegura que es conservativo. Así que usaremos su función potencial f asociada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 \Longrightarrow f(x,y) = x^2 - 3x + \varphi(y)$$

con lo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y) = 2y + 2 \Longrightarrow \varphi(y) = y^2 + 2y$$

y, en definitiva, $f(x,y) = x^2 - 3x + y^2 + 2y$. Aplicamos ahora la regla de Barrow generalizada y tenemos:

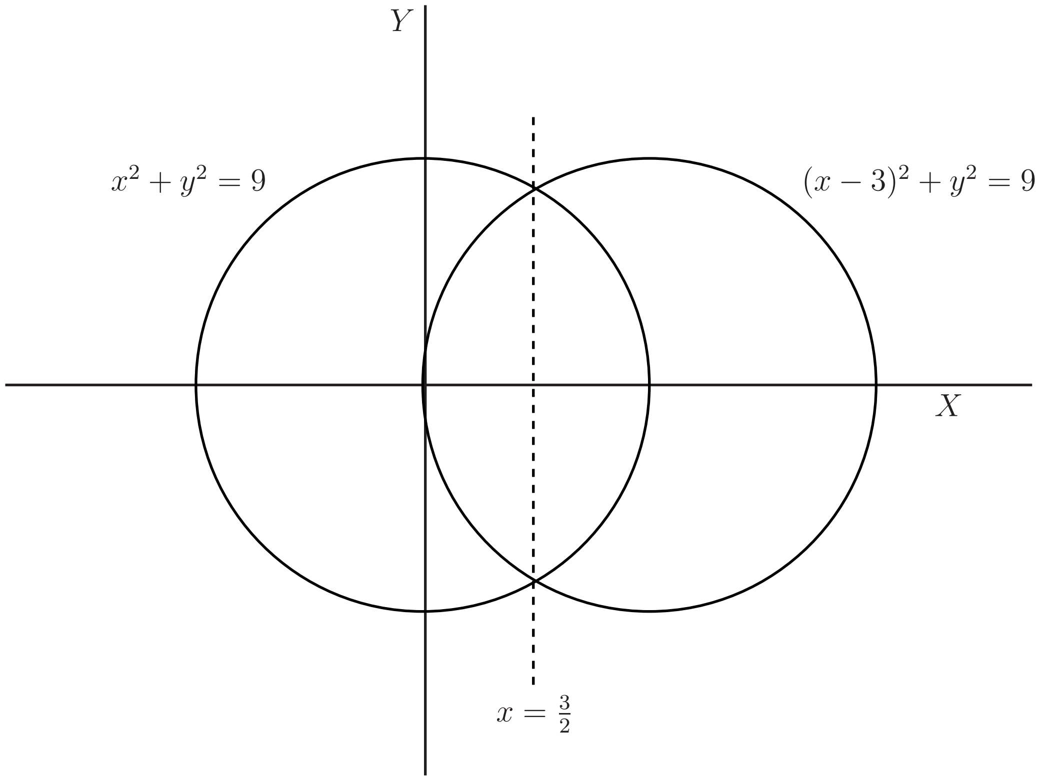
$$\int_\gamma F = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(\pi, e^\pi) - f(0,1) = \pi^2 - 3\pi + e^{2\pi} + 2e^\pi - 3.$$

$\boxed{\textbf{Problema 18}}$ (14 de Junio de 2004)

Calcular el área común a los círculos encerrados por

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{y} \quad (x-3)^2 + y^2 = 9.$$

Solución: $x^2 + y^2 = 9$ representa la circunferencia de centro el origen y radio 3, mientras que $(x-3)^2 + y^2 = 9$ es la circunferencia de centro $(3,0)$ y radio 3 (ver la figura adjunta).



Los puntos de intersección son los que corresponden a la abscisa $x = \dfrac{3}{2}$, luego la región comprendida entre ambas queda dividida por el eje de abscisas y la recta vertical citada en cuatro partes iguales. El área buscada el el cuádruple de una de ellas. Elijamos, por comodidad, la superior derecha. Así

$$S = 4 \int_{\frac{3}{2}}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} dy\ dx = 4 \int_{\frac{3}{2}}^{3} \sqrt{9-x^2}\ dx$$

Como

$$\int \sqrt{9-x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{3}\ ,$$

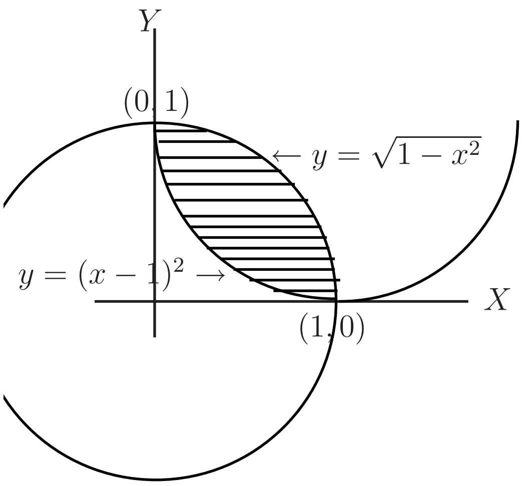
integral que podemos hacer bien por partes, bien con el cambio $x = 3 \operatorname{sen} t$, se tiene

$$S = 4\ (\frac{9\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{3\pi}{4}) = 6\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$\boxed{\textbf{Problema 19}}$ (7 de Septiembre de 2004)

Calcular razonadamente el área de la región del plano comprendida entre las gráficas $y = (x-1)^2$ *e* $y = \sqrt{1-x^2}$.

Solución: La ecuación $y = (x-1)^2$ corresponde a una parábola cóncava en dirección a las ordenadas positivas y de vértice $(1,0)$, mientras que $y = \sqrt{1-x^2}$ corresponde a la semicircunferencia superior de centro el origen y radio unidad ($x^2+y^2=1$). Ambas se intersectan en los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ quedando la región entre ambas en el primer cuadrante y estando la segunda por encima de la primera (ver figura).



Así el área de la región encerrada es

$$a(D) = \int_0^1 \left(\int_{(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right) dx = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - (x-1)^2)\, dx$$

Calculemos ambas integrales:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = (x = \operatorname{sen} t \quad , \quad dx = \cos t\, dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\, dt = [\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 (x-1)^2\, dx = [\frac{(x-1)^3}{3}]_0^1 = -\frac{1}{3}, \quad \text{con lo que } a(D) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}.$$

$\boxed{\textbf{Problema 20}}$ (7 de Septiembre de 2004)

Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$F(x, y) = (x + y, y - x)$$

al mover una partícula a lo largo de la circunferencia unidad, recorrida en sentido negativo .

Solución: La parametrización de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio uno en sentido negativo (el de las agujas del reloj) es

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \gamma(t) := (\cos t, -\operatorname{sen} t)$$

y el trabajo desarrollado por F es

$$W = \int_\gamma F = \int_\gamma (x + y)\ dx + (y - x)\ dy$$

Haciendo $x = \cos t$, $y = -\operatorname{sen} t$, se tiene que $dx = \operatorname{sen} t\ dt$, $dy = -\cos t\ dt$, con lo que

$$W = \int_0^{2\pi} [(\cos t - \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (-\cos t - \operatorname{sen} t)(-\cos t)]\ dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \operatorname{sen} t \cos t)\ dt = \int_0^{2\pi}\ dt = 2\pi$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

$\boxed{\textbf{Problema 1}}$ (15 de Junio de 2001)

Integrar

$$y' + y\cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}.$$

Solución: Se trata de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. Para integrarla vamos a suponer factorizada la solución $y = u \cdot v$. En ese caso la ecuación queda

$$u'v + v'u + uv\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$$

$$u'v + u(v' + v\cos x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

Igualando el paréntesis a cero se tiene la ecuación con variables separables

$$\frac{v'}{v} = -\cos x$$

cuya solución es $\log v = -\operatorname{sen} x$, es decir, $v = e^{-\operatorname{sen} x}$. Así la ecuación original queda

$$u'e^{-\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \cos x$$

de donde

$$u' = e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x$$

Resolviendo

$$u = \int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x dx = \text{(por partes)} = \operatorname{sen} x e^{\operatorname{sen} x} - \int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x(e^{\operatorname{sen} x} - 1) + C$$

Con todo ello

$$y = Ce^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1.$$

$\boxed{\textbf{Problema 2}}$ (15 de Junio de 2001)

Calcular la solución particular de la ecuación $y''' - y'' = 4x^2$ *que cumple las condiciones iniciales* $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Solución: *Primer método* La ecuación propuesta es una ecuación de orden tres no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general se puede obtener como suma de una solución particular y de la solución general de la correspondiente homogénea $y''' - y'' = 0$.

Para encontrar dicha solución tomemos la ecuación característica

$$m^3 - m^2 = 0,$$

que tiene como raíces $m = 0$ (doble) y $m = 1$. La solución buscada es combinación lineal de las funciones $e^{0x} = 1$, $xe^{0x} = x$ y e^x, es decir

$$y_h = A + Bx + Ce^x$$

La solución particular de la ecuación original debe ser (a la vista del segundo miembro que es un polinomio de grado dos y del hecho de que el cero es una raíz doble de la ecuación característica):

$$y_p = x^2(ax^2 + bx + c)$$

Calculamos su segunda y tercera derivadas y sustituimos en la ecuación obteniendo

$$(24ax + 6b) - (12ax^2 + 6bx + 2c) = 4x^2$$

de donde, identificando coeficientes, se deduce el sistema $-12a = 4, \quad 24a - 6b = 0, \quad 6b - 2c = 0$, cuya solución es $a = -\frac{1}{3}, \quad b = -\frac{4}{3}, \quad c = 4$. En definitiva la solución general de la ecuación inicial es

$$y = A + Bx + Ce^x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2.$$

Si buscamos la solución particular que cumple las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, derivamos una y dos veces y sustituimos x por cero obteniendo

$$y(0) = 1 = A + C, \quad y'(0) = 1 = B + C, \quad y''(0) = 1 = C - 8$$

con lo que $A = -8$, $B = -8$ y $C = 9$ y la solución particular buscada es

$$y = 9e^x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x - 8.$$

Segundo método: Podemos utilizar la trasformada de Laplace. Al aplicarla a la ecuación se tiene

$$Ł(y''') - Ł(y'') = 4Ł(x^2)$$

Como

$$Ł(y''') = s^3 Ł(y) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3 Ł(y) - s^2 - s - 1$$
$$Ł(y'') = s^2 Ł(y) - sy(0) - y'(0) = s^2 Ł(y) - s - 1$$
$$Ł(x^2) = \frac{2}{s^3}$$

La ecuación trasformada queda

$$(s^3 - s^2)Ł(y) = \frac{8}{s^3} + s^2 = \frac{8 + s^5}{s^3}$$

y de ahí

$$Ł(y) = \frac{8 + s^5}{s^5(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s^3} + \frac{E}{s^4} + \frac{F}{s^5}$$

de donde

$$8 + s^5 = As^5 + Bs^4(s-1) + Cs^3(s-1) + Ds^2(s-1) + Es(s-1) + F(s-1)$$

cuya solución es $A = 9$, $B = -8$, $C = -8$, $D = -8$, $E = -8$ y $F = -8$, es decir

$$Ł(y) = \frac{9}{s-1} - \frac{8}{s} - \frac{8}{s^2} - \frac{8}{s^3} - \frac{8}{s^4} - \frac{8}{s^5} = 9(\frac{1}{s-1}) - 8(\frac{1}{s}) - 8(\frac{1}{s^2}) - 4(\frac{2}{s^3}) - \frac{4}{3}(\frac{3.2}{s^4}) - \frac{1}{3}(\frac{4.3.2}{s^5})$$

y, en definitiva,

$$y = 9e^x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x - 8.$$

Problema 3 (14 de Septiembre de 2001)

Integrar

$$(5 + y^3 \operatorname{sen} x)dx + 3y^2 \cos x dy = 0.$$

Solución: La ecuación es de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, con

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{3y^2 \operatorname{sen} x + 3y^2 \operatorname{sen} x}{3y^2 \cos x} = 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

con lo que sabemos que admite un factor integrante μ, función sólo de x, de forma que la ecuación $\mu(x)M(x,y)dx+\mu(x)N(x,y)dy = 0$ resulta ser exacta.

Debemos entonces tener $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, o de otra forma

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu' N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

En definitiva

$\dfrac{\mu'}{\mu} = 2\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, de donde $\log\mu = -2\log|\cos x|$, y

$$\mu = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Para resolver la ecuación diferencial exacta

$$\frac{5+y^3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx + \frac{3y^2}{\cos x}dy = 0$$

calculamos la función potencial integrando

$$\int_0^x \mu(x)M(x,y)dx + \int_0^y \mu(0)N(0,y)dy = C$$

es decir

$$\int_0^x \frac{5+y^3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx + \int_0^y 3y^2dy = C$$

de donde se tiene la solución

$$5\tan x + \frac{y^2}{\cos x} = C.$$

$\boxed{\textbf{Problema 4}}$ (26 de Junio de 2002)

Integrar la ecuación

$$y' = \frac{x+y+1}{-x+y+3}.$$

Solución: La ecuación se puede hacer de dos maneras.

Primera forma: La ecuación se puede reducir a una homogénea. Resolvamos para ello el sistema $\left.\begin{array}{rcl} x+y+1 & = & 0 \\ -x+y+3 & = & 0 \end{array}\right\}$ cuya solución es el punto $(1,-2)$. Hacemos el cambio $s = x-1$, $t = y+2$ con lo que $ds = dx$ y $dt = dy$ (quedando $y' = t'$) y la ecuación queda

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{t+s}{t-s} = \frac{\frac{t}{s}+1}{\frac{t}{s}-1}$$

Hagamos $t = us$, $t' = u's+u$, de donde $u's+u = \dfrac{u+1}{u-1}$, y de ahí haciendo $u' = \dfrac{du}{ds}$, separamos las variables obteniendo

$$\frac{(u-1)\,du}{-u^2+2u+1} = \frac{ds}{s}$$

Integrando se obtiene

$$-\frac{1}{2}\log(-u^2+2u+1) + C = \log s, \quad \text{es decir} \quad s\sqrt{-u^2+2u+1} = e^C = D$$

Basta deshacer el cambio y agrupar constantes, obteniendose

$$x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 6y = E$$

Segunda forma: Haciendo $y' = \dfrac{dy}{dx}$, la ecuación la podemos escribir como $Mdx + Ndy = (x+y+1)dx + (x-y-3)dy = 0$, que es exacta pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

luego basta encontrar la función potencial de (M,N). Para ello esta vez integremos con $x_0 = y_0 = 0$

$$\int_0^x M(x,y)dx + \int_0^y N(0,y)dy = \int_0^x (x+y+1)dx + \int_0^y (-y-3)dy = K$$

$$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^2}{2} - 3y = K$$

Basta multiplicar por 2 para tener la misma solución que antes con $2K = E$.

$\boxed{\textbf{Problema 5}}$ (26 de Junio de 2002)

Integrar la ecuación

$$y'' - 6y' + 9y = 12 \operatorname{sen} x + 16 \cos x.$$

Solución: Es una ecuación lineal de segundo orden. Su solución será suma de la solución general de la homogénea $y'' - 6y' + 9y = 0$ y de una solución particular de la ecuación completa. Para encontrar la primera escribamos la ecuación característica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

que tiene 3 como una raíz doble. Eso nos indica que la solución general de la homogénea es

$$y_g = (A + Bx)e^{3x}$$

El segundo miembro de la ecuación es de la forma

$$e^{ax}(P_m(x) \operatorname{sen} bx + Q_n(x) \cos bx) \quad a = 0,\ b = 1,\ P_m(x) = 12,\ Q_n(x) = 16$$

no siendo $a \pm bi$ raíz de la ecuación característica, luego ensayaremos $y_p = C \operatorname{sen} x + D \cos x$,

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = (8C + 6D) \operatorname{sen} x + (8D + -6C) \cos x = 12 \operatorname{sen} x + 16 \cos x$$

que, identificando y resolviendo el sistema, nos da $C = 0$, $D = 2$, luego $y_p = 2 \cos x$.

En definitiva la solución es

$$y = (A + Bx)e^{3x} + 2 \cos x.$$

$\boxed{\textbf{Problema 6}}$ (2 de Septiembre de 2002)

Integrar la ecuación

$$-y\ dx + (x + y^2)\ dy = 0.$$

Solución: La ecuación es de la forma $Mdx + Ndy$ con

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = -\frac{2}{y}$$

luego admite un factor integrante μ , que depende sólo de y, y que cumple que $\dfrac{\mu'}{\mu} = -\dfrac{2}{y}$. Integrando se tiene que $\log \mu = -2 \log y$, es decir $\mu = \dfrac{1}{y^2}$. Dicho factor convierte la ecuación en diferencial exacta, en concreto

$$-\frac{1}{y}\, dx + (\frac{x}{y^2} + 1)\, dy = 0$$

Hallemos la función potencial $f(x, y) = C$ que la genera: debe cumplir que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{y}$, es decir $f(x, y) = -\dfrac{x}{y} + \varphi(y)$. Así $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2} + \varphi'(y) = \dfrac{x}{y^2} + 1$, de donde tomando $\varphi(y) = y$ resulta la solución

$$-\frac{x}{y} + y = C \quad \text{o, equivalentemente,} \quad x = y^2 - Cy.$$

Otra forma de resolverla sería escribirla como $x' - \dfrac{1}{y}x = y$, que resulta ser lineal suponiendo x en función de y. Se supone entonces $x = u.v$, luego $x' = u'.v + v'.u$ y tenemos

$$u.v' + v.(u' - \frac{1}{y}u) = y$$

Exigiendo que el paréntesis sea igual a cero obtenemos $u = y$, luego $y.v' = y$ de donde $v' = 1$, es decir $v = y + D$ con lo que

$$x = y(y + D).$$

$\boxed{\textbf{Problema 7}}$ (20 de Junio de 2003)

Integrar la ecuación

$$y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}.$$

Solución: Como es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes la solución general $y = y_H + y_p$ donde y_H es la solución general de la homogénea o reducida $y'' + 3y' - 10y = 0$ e y_p es una solución particular de la ecuación completa.

Cálculo de la y_H: Consideremos la ecuación característica

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0,$$

cuyas raíces son 2 y -5 (reales y distintas) lo que nos indica que

$$y_H = Ae^{2x} + Be^{-5x}$$

Cálculo de la y_p: Como el segundo miembro es $6e^{4x}$ y 4 no es raíz de la ecuación característica ensayaremos una solución del tipo $y_p := ae^{4x}$. Como

$$y_p'' + 3y_p' - 10y_p = 18ae^{4x} = 6e^{4x} \ ,$$

lo que obliga a que $a = \frac{1}{3}$.

En definitiva la solución buscada es

$$y = Ae^{2x} + Be^{-5x} + \frac{1}{3}e^{4x}.$$

$\boxed{\textbf{Problema 8}}$ (20 de Junio de 2003)

Integrar la ecuación

$$(x^2 - y^2)\ dx + xy\ dy = 0.$$

Solución: Como las funciones $f(x,y) := x^2 - y^2$ y $g(x,y) := xy$ son ambas homogéneas de grado dos la EDO es homogénea. Para resolverla usemos el cambio $y = ux$ pasando así de tener las variables x , y a las variables x , u. En ese caso $dy = u\ dx + x\ du$. La EDO se transforma en

$$(x^2 - u^2x^2)\ dx + ux^2(u\ dx + x\ du) = 0,$$

que, al simplificarla, nos resulta

$$dx + ux\ du = 0,$$

una EDO de variables separables. Al separar se tiene

$$\frac{dx}{x} + u\ du = 0.$$

Si integramos la solución es $\quad \log x - \dfrac{u^2}{2} = C \quad$, o bien

$$\log x + \frac{y^2}{2x^2} = C.$$

La ecuación también se puede resolver viendo que admite un factor integrante que depende de x, en concreto $\mu = \dfrac{1}{x^3}$.

$\boxed{\textbf{Problema 9}}$ (12 de Septiembre de 2003)

Integrar la ecuación

$$y' + y - x = 0.$$

Solución: Escribiendola de la forma $y' + y = x$ es una EDO lineal de primer orden. Exigimos que su solución y sea el producto de dos funciones u y v, esto es, $y = u \cdot v$ con lo que $y' = u'v + v'u$, quedando la ecuación

$$u'v + v'u + uv = x, \quad \text{o bien} \quad u'v + u(v' + v) = x.$$

Si exigimos que la función v cumpla que el paréntesis sea cero, obtenemos la EDO de variables separables $v' + v = 0$, por lo que $\dfrac{dv}{v} = -dx$ y así una de sus soluciones es $v = e^{-x}$. Sustituyendo en la primera expresión nos queda $u'e^{-x} = x$, es decir $u' = xe^x$. Para calcular u simplemente integramos por partes

$$u = \int xe^x\ dx = \left(\begin{array}{cc} t := x & dt = dx \\ ds := e^x\ dx & s = e^x \end{array} \right) = xe^x - \int e^x\ dx = (x-1)e^x + C$$

En definitiva

$$y = ((x-1)e^x + C)\ e^{-x} = x - 1 + Ce^{-x}$$

Una alternativa es escribir la EDO de forma desglosada ($M\ dx + N\ dy = 0$, con $M = y - x$ y $N = 1$) y encontrar un factor integrante (que sería, naturalmente, e^x).

Una tercera opción sería aplicar la transformada de Laplace a la ecuación. Se tendría $\mathcal{L}(y' + y) = \mathcal{L}(x)$, es decir $\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(x)$. Como $\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - K$, siendo $K = y(0)$, y como $\mathcal{L}(x) = \dfrac{1}{s^2}$ queda

$$(s+1)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2} + K \quad \text{o bien,} \quad \mathcal{L}(y) = \frac{1 + Ks^2}{s^2(s+1)}.$$

Descompongamos en fracciones simples la última expresión

$$\frac{1 + Ks^2}{s^2(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+1} = \frac{as(s+1) + b(s+1) + cs^2}{s^2(s+1)},$$

donde identificando numeradores e igualando los respectivos coeficientes de s^2 , s y términos independientes se obtiene $a = -1$, $b = 1$ y $c = 1 + K$ con lo que

$$\mathcal{L}(y) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1+K}{s+1}$$

Usando la transformada inversa obtenemos

$$y = -1 + x + (1+K)e^{-x}.$$

(Notemos que si calculamos en la solución inicial $y(0) = -1 + C$ con lo que se tiene $C = 1 + K$, como cabía esperar.)

$\boxed{\textbf{Problema 10}}$ (14 de Junio de 2004)

Integrar la ecuación diferencial

$$y' = y \cos x + \operatorname{sen} 2x.$$

Solución: Escribiendo la ecuación como $y' - y\cos x = \operatorname{sen} 2x$, vemos que es una EDO lineal de primer orden. Para resolverla supongamos su solución y descompuesta como producto de dos funciones, esto es $y = u \cdot v$

En tal caso la ecuación queda $u'v + v'u - uv\cos x = \operatorname{sen} 2x$, es decir $u'v + u(v' - v\cos x) = \operatorname{sen} 2x$; si ahora exigimos que el paréntesis se anule $v' = v\cos x$, que es una EDO con variables separables $\dfrac{v'}{v} = \cos x$, cuya solución es $v = e^{\operatorname{sen} x}$. Llevando este resultado a la ecuación queda

$$u'e^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} 2x \Longrightarrow u' = e^{-\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} 2x = 2e^{-\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x,$$

Integrando se tiene
$$u = 2\int e^{-\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x \; dx$$
Haciendo el cambio $\operatorname{sen} x = t$ (con lo que $dt = \cos x dx$) nos queda
$$u = 2\int t\, e^{-t}\, dt = \text{(partes)} = 2(-\mathrm{te^{-t}} + \int \mathrm{e^{-t}\, dt}) = 2(-\mathrm{te^{-t}} - \mathrm{e^{-t}}) + \mathrm{C} = -2(\operatorname{sen}\mathrm{x}+1)\mathrm{e^{-senx}} + \mathrm{C}$$
y ya, en definitiva,
$$y = Ce^{senx} - 2(\operatorname{sen} x + 1).$$

$\boxed{\textbf{Problema 11}}$ (14 de Junio de 2004)

Calcular la solución particular de la ecuación
$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$
que satisface $y(0) = y'(0) = 0$.

Solución: Usaremos la transformada de Laplace $\mathcal{L}$
$$\mathcal{L}(y'' - 3y' + 2y) = \mathcal{L}(e^x)$$
aplicando la linealidad se tiene $\mathcal{L}(y'') - 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^x)$ y usando las propiedades de la transformada
$$s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) - 3(s\mathcal{L}(y) - y(0)) + 2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1}$$
Al ser $y(0) = y'(0) = 0$ se tiene
$$(s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1} \Longrightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)(s-1)} = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)}$$
Si descomponemos en fracciones simples queda
$$\mathcal{L}(y) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-2}$$
de donde obtenemos que $A = B = -1$, $C = 1$, es decir
$$\mathcal{L}(y) = -\frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-2} = -\mathcal{L}(e^x) - \mathcal{L}(xe^x) + \mathcal{L}(e^{2x}) = \mathcal{L}(-e^x - xe^x + e^{2x})$$

con lo que

$$y = -e^x - xe^x + e^{2x}.$$

Podríamos haberla resuelto también calculando la solución general de la homogénea o reducida $y'' - 3y' + 2y = 0$, cuya ecuación característica es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, que al tener como raíces 1 y 2 nos da como solución $y_H = Ae^x + Be^{2x}$. A ésta hay que sumarle una solución particular de la ecuación completa que resulta ser $y_P = -xe^x$. Una vez hecho esto sólo hay que sustituir en y y en y' el valor de $x = 0$ y calcular A y B que resultarán $A = -1$ y $B = 1$.

$\boxed{\textbf{Problema 12}}$ (7 de Septiembre de 2004)

Integrar la ecuación

$$(y^2 + xy)\ dx - x^2\ dy = 0.$$

Solución: Se trata de una ecuación diferencial de primer orden homogénea ya que tanto $y^2 + xy$ como $-x^2$, son homogéneas de grado dos. Hagamos pues $y = ux$, pasando de una ecuación en x e y a una en x y u.

Como $dy = u\ dx + x\ du$ tendremos $(u^2x^2 + ux^2)\ dx - x^2(u\ dx + x\ du) = 0$, luego simplificando, $u^2\ dx - x\ du = 0$, que es de variables separables. Dividimos por $x\ u^2$ y se tiene

$$\frac{dx}{x} - \frac{du}{u^2} = 0\ ,$$

e integrando se tiene

$$\log x + \frac{1}{u} = C \Longrightarrow u = \frac{1}{C - \log x}$$

y retomando las variables x e y

$$y = \frac{x}{C - \log x}.$$

Una alternativa, aunque más complicada, es dividir por dx dejando

$$y^2 + xy - x^2y' = 0$$

que, dividiendo por x^2 y adecuadamente ordenada, nos da la ecuación de Bernouilli

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

que se resuelve usando la factorización $y = u \cdot v$ donde resulta $v = x$ y $u = \dfrac{1}{C - \log x}$.