PRÁCTICAS DE VARIABLE COMPLEJA

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2000/2001

Práctica 1
El Sistema de los números complejos.

Un número complejo se escribe como $z = x + iy$ donde $x = \Re\text{e}z$ se denomina parte real de z e $y = \Im\text{m}z$ parte imaginaria. El número $\overline{z} = x - iy$ se llama el complejo conjugado de z. El valor absoluto de $z = x + iy$ se define como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Todo número complejo $z \neq 0$ se puede escribir en coordenadas polares como $z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)$, siendo $t \in \mathbb{R}$. Cada uno de los valores t que cumplen la anterior igualdad se dice que es un argumento de z. Dos de estos valores difieren en un múltiplo de 2π, con lo cual sólo hay un valor en el intervalo $]-\pi, \pi]$, que se denomina argumento principal.

En los siguientes problemas se utilizan únicamente las propiedades elementales de las operaciones con números complejos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 1.1
Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + iy$.
(i) $(1 + 2i)^3$
(ii) $\frac{5}{-3+4i}$
(iii) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$
(iv) $i^5 + i^{16}$
(v) $\frac{1+i}{1+i^{-8}}$
(vi) $(1 + i)^n - (1 - i)^n$
(vii) $\sum_{k=1}^{100} i^k$

Ejercicio 1.2
Probar que
(i) $|z + 1| > |z - 1| \Longleftrightarrow \Re\text{e}z > 0$
(ii) $\Im\text{m}z > 0$ *e* $\Im\text{m}w > 0 \rightarrow \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right| < 1$
(iii) $|z - w|^2 \leq (1 + |z|^2) \cdot (1 + |w|^2)$

Ejercicio 1.3
3.- *Probar la ley del paralelogramo:* $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *para todo* $z, w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 1.4
Sean $a, b, z \in \mathbb{C}$ *tales que* $|z| = 1$. *Probar que* $\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = 1$.

Ejercicio 1.5
Sea $P(z)$ *un polinomio con coeficientes complejos; esto es,* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, *y sea* $\overline{P}(z) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j z^j$. *Probar que*
(i) $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.
(ii) Si $a_j \in \mathbb{R}$ *para todo* j *y* z_0 *es una raíz de* $P(z) = 0$, *entonces* $\overline{z}_0$ *también lo es.*

Raíces de números complejos

Si $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existen exáctamente n números complejos diferentes z_0, z_1, ... ,z_{n-1} tales que $z_k^n = z$ para $k = 0, \ldots, n-1$.

Escribiendo $z = |z| \cdot (\cos t + i \text{ sen } t\ )$ con $t \in [0, 2\pi[$, las raíces vienen dadas por las fórmulas

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\mathbb{C}dot(\mathbb{C}os\frac{t+2k\pi}{n} + i \text{ sen } \frac{t+2k\pi}{n}\ ), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Por tanto, dado $z \neq 0$, la expresión $\sqrt[n]{z}$ designa un conjunto de n elementos.

Ejemplo 1.1
Vamos a calcular las raíces cúbicas de 1.

Por ser $1 = \cos 0 + i \text{ sen } 0$, *se sigue de la fórmula anterior que las raíces cúbicas son* $z_0 = \mathbb{C}os 0 + i \text{ sen } 0 = 1$, $z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *y* $z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 1.6
Calcular las siguientes expresiones.
(i) $\sqrt[3]{2+2i}$.
(ii) $\sqrt[4]{i}$.
(iii) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+3i}$.
(iv) $\sqrt[3]{-1}$.

Ejercicio 1.7
(i) Resolver la ecuación $\overline{z} = z^{n-1}$, *siendo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $n \neq 2$.
(ii) Determinar los valores $x, y \in \mathbb{R}$ *que satisfacen la igualdad* $x + iy = (x - iy)^2$.

Ejercicio 1.8
Probar que las raíces n-ésimas de la unidad distintas de 1 *satisfacen la ecuación* $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = 0$.

Práctica 2
Funciones holomorfas

Una función de variable compleja $f : D \to \mathbb{C}$ se dice que es derivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y ese número complejo se denota por $f'(z_0)$. Es fácil ver que $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

La derivación compleja verifica las propiedades usuales de la derivación de suma, producto, cociente o composición de funciones derivables.

La relación entre la derivabilidad de una función compleja y la diferenciabilidad como función de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ viene expresada por el siguiente resultado.

Una función f es derivable en $z_0 = (x_0, y_0)$ si, y sólo si, es diferenciable en (x_0, y_0) y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Ejemplo 2.1
La función definida por $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i2xy$ es derivable compleja.

En efecto, por un lado es diferenciable en cualquier punto por ser cada componente un polinomio. Por otro lado, como $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$, se verifica que $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Además, $f'(z) = 2x + i2y = 2z$.

Otra manera de verlo es comprobando que, en realidad, $f(z) = z^2$.

Ejemplo 2.2
La función definida por $f(x+iy) = (x^2 - 3y) + i(y^2 + 2xy)$ no es derivable compleja en ningún punto porque, aunque es diferenciable (al ser cada componente un polinomio), no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sean $u(x, y) = x^2 - 3y$ y $v(x, y) = y^2 + 2xy$. Si se cumpliesen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ con lo cual $2x = 2y + 2x$ que sólo se cumple para $y = 0$. Por otra parte, de $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ se deduce que $-3 = -2y$, con lo cual $y \neq 0$.

1 PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 2.1
Estudiar para qué valores son diferenciables y para qué valores son derivables las siguientes funciones.
(i) $f(x + iy) = x$.
(ii) $f(x + iy) = y$.
(iii) $f(x + iy) = x^2 + y^2$.

Ejercicio 2.2
(i) Demostrar que la función conjugado $f(z) = \overline{z}$ es diferenciable en todo punto y derivable en ninguno.

(ii) Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función derivable en todo punto, demostrar que existe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable tal que $\overline{g(z)} = f(\overline{z})$.

Ejercicio 2.3
Probar que las siguientes funciones cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto 0 pero no son derivables complejas.

(i) $$f(x+iy)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & si\ \ x+iy\neq 0;\\ 0, & si\ \ x+iy=0.\end{cases}$$

(ii) $$f(z)=\begin{cases}\frac{z^5}{|z^4|}, & si\ \ z\neq 0;\\ 0, & si\ \ z=0.\end{cases}$$

(iii) $$f(x+iy)=\sqrt{|x|\cdot|y|}$$

Ejercicio 2.4
Estudiar en qué puntos las siguientes funciones son derivables y calcular sus derivadas.
(i) $f(x+iy)=x^2+iy^2$
(ii) $f(x+iy)=x^2+2x-iy$
(iii) $f(x+iy)=2xy+i(x+\frac{2}{3}y^3)$

Ejercicio 2.5
Calcular los valores que deben tomar $a, b, c\in\mathbb{R}$ *para que la función* f *sea derivable en* $\mathbb{C}$.
(i) $f(x+iy)=x+ay+i(bx+cy)$
(ii) $f(x+iy)=\cos x\ (\text{ch } y+a \text{ sh } y)+i \text{ sen } x\ (\text{ch } y+b\text{ sh } y)$

Ejercicio 2.6
En este problema se muestra que el teorema del valor medio no se cumple para la derivada compleja. Probar que para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ *se cumple* $|\lambda+i(1-\lambda)|^2\geq\frac{1}{2}$. *Deducir que si* $f(z)=z^3$, *no existe* $\xi\in[1,i]$ *tal que* $f(i)-f(1)=(i-1)f'(\xi)$.

Ejercicio 2.7
Sean $D\subset\mathbb{C}$ *un abierto conexo y* $f:D\to\mathbb{C}$ *una función derivable en* D
(i) Demostrar que si $f'(z)=0$ *para todo* $z\in D$, *entonces* f *es constante.*
(ii) Probar que si para un $n\in\mathbb{N}$ *se cumple que* $f^{(n+1)}(z)=0$ *para todo* $z\in D$, *entonces* f *es un polinomio de grado menor o igual que* n.

Ejercicio 2.8
Sea $f:D\to\mathbb{C}$ *derivable en* $z\in D$, *con* $f'(z)\neq 0$.
(i) Probar que f *preserva el ángulo entre dos arcos diferenciables que pasan por* z.
(ii) Demostrar que $\overline{f}$ *preserva la magnitud del ángulo entre dos arcos diferenciables que pasan por* z, *pero invierte la orientación.*

Ejercicio 2.9
Sean $D\subset\mathbb{C}$ *un abierto conexo y* $f:D\to\mathbb{C}$ *una función derivable en* D, *con* $u=\Re\mathrm{e} f$ *y* $v=\Im\mathrm{m} f$.
Probar que f *es constante en* D *si se cumple una de las siguientes condiciones:*
(i) $v(x,y)=u(x,y)^2$ *para todo* $z=x+iy\in D$.
(ii) $u(x,y)^2+v(x,y)^2=cte$ *para todo* $z=x+iy\in D$.
(iii) Existen $a, b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *tales que* $au(x,y)^2+bv(x,y)^2=cte$ *para todo* $z=x+iy\in D$.

Ejercicio 2.10
Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *de la forma* $f(x+iy)=u(x)+iv(y)$. *Probar que* f *es derivable en* $\mathbb{C}$ *si, y sólo si, existen* $\lambda\in\mathbb{R}$ *y* $c\in\mathbb{C}$ *tales que* $f(z)=\lambda z+c$ *para todo* $z\in\mathbb{C}$.

Ejercicio 2.11
Sea $f:D\to\mathbb{C}$, *donde* D *es un abierto convexo. Demostrar que si* f *es derivable en* D *y* $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ *para todo* $x+iy\in D$, *entonces* f' *es constante.*

Ejercicio 2.12
Demostrar que una función derivable en un abierto conexo D *y cuyos valores son reales se reduce a una constante.*

Práctica 3
Series de potencias

1 Radios de convergencia

Presentamos en primer lugar la fórmula de Cauchy-Hadamard para el cálculo del radio de convergencia de una serie de potencias:

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, *se considera*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Entonces:

a) Si $|z-a| < R$, *la serie converge absolutamente; además, si* $0 < r < R$, *la serie converge uniformemente en* $\{z : |z| \le r\}$.

b) Si $|z-a| > R$, *la serie diverge.*

Ejemplo 3.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2},$$

Obsérvese que esta serie puede reescribirse en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n \neq k^2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ k!, & \text{si} \quad n = k^2 \quad \text{para algún} \;\; k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Así, $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \sup\{0, \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}\} = 1$, y por lo tanto el radio de convergencia de la serie es 1.

Para calcular el radio de convergencia de las series de potencias, es a veces útil la siguiente propiedad:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* R. *Entonces:*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

cuando el límite existe.

La fórmula de Cauchy-Hadamard no proporciona información sobre el comportamiento de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en los puntos donde $|z-a| = R$, siendo R el radio de convergencia. En tales puntos, es necesario un estudio particular de la serie considerada.

Ejemplo 3.2
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ *tiene radio de convergencia* 1. *Debe estudiarse así su convergencia o divergencia para los valores* $z \in \mathbb{C}$ *tales que* $|z| = 1$.

La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente; si $|z| = 1,\ z \neq 1$, se tiene que:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z^j\right| = \left|\frac{z - z^{n+1}}{1-z}\right| \le \frac{2}{|1-z|},$$

y por lo tanto la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge por el criterio de Dirichlet:

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^+$ *monótona decreciente y convergente a* 0 *y sea* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ *tal que* $\{\sum_{j=1}^{n} b_j\}_{n=1}^{\infty}$ *está acotada. Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *es convergente en* $\mathbb{C}$.

2 Problemas propuestos.

Ejercicio 3.1
Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(i)\ \sum_{n=2}^{\infty} n^{\log n} z^n \qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \qquad (iii)\ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$$

$$(iv)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!} \quad (v)\ \sum_{n=0}^{\infty} \sin n z^n \quad (vi)\ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+a}{n} z^n \quad a \in \mathbb{N}$$

$$(vii)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ donde } a_n = \begin{cases} \frac{1}{m^2}, & si \quad n = 3m, \\ \frac{2m}{2m+1}, & si \quad n = 3m+1, \\ m^4, & si \quad n = 3m+2. \end{cases}$$

Ejercicio 3.2
Estudia el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las siguientes series:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} z^n \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$$

$$(iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n} \quad p \in \mathbf{N} \qquad (v)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{3n-1}}{\log n}$$

3 Producto de series. Holomorfía de las funciones analíticas.

Una función que puede expresarse por medio de una serie de potencias se denomina analítica. Una función analítica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

es infinitamente diferenciable en el interior de su disco de convergencia $D(a, R)$. Además se cumple:

1.- $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} \qquad \forall z \in D(a, R)$.

2.- $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad \forall n \geq 0$.

Como consecuencia, el desarrollo en serie de potencias de una función analítica es único.

Ejemplo 3.3
Calcular la serie de potencias de $\frac{z}{(1-z)^2}$,.

Consideremos en primer lugar la identidad elemental:

$$\sum_{j=0}^{n} z^j = \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

de donde se obtiene:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \forall z: \ |z| < 1.$$

Tomando derivadas en la igualdad anterior y multiplicando por z se deduce que:

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots.$$

Un criterio de utilidad en el estudio de las series de potencias es el llamado **teorema de Mertens**:

Sean $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ dos series de potencias con radio de convergencia R_1, R_2, respectivamente. Entonces $A(z)B(z)$ define una serie de potencias:

$$A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

convergente en el recinto $|z-a| < \text{mín}(R_1, R_2)$.

Ejemplo 3.4
Calcular la serie de potencias centrada en 0 de

$$\frac{e^z}{z^2 - 4z + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{1, 3\}),$$

Escribimos:

$$(z^2 - 4z + 3)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = e^z,$$

y el teorema de Mertens asegura que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z = 3a_0 + (3a_1 - 4a_0)z + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_{n-1} + 3a_n)z^n.$$

Por la unicidad del desarrollo en serie, se obtiene:

$$a_0 = \frac{1}{3}, \ a_1 = \frac{7}{9}, \ \ a_n = \frac{4a_{n-1} - a_{n-2} + \frac{1}{n!}}{3} \ \forall n \geq 2.$$

Ejemplo 3.5
Ejemplo 3. *Sea L una determinación continua del logaritmo en un entorno de 0, calcular el desarrollo en serie de potencias centrado en 0 de $f(z) := L(\frac{1+z}{1-z})$.*

Observemos que

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}.$$

Por tanto

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2n+1}\right) z^{2n+1},$$

donde $a_0 = L(1)$.

4 Problemas propuestos

Ejercicio 3.3
Calcula el desarrollo en serie de potencias centrado en 0 de:

$$(i)\ \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \quad k\in\mathbb{N} \qquad (ii)\ \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

$$(iii)\frac{z}{z^2-4z+13} \qquad (iv)\ \frac{1}{1-z+z^2}$$

Ejercicio 3.4
Calcula el desarrollo en serie de potencias centrado en 1 y calcula el radio de convergencia del desarrollo obtenido de la función:

$$\frac{z^2}{(z+1)^2}.$$

Ejercicio 3.5
Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:
1.- $(1-z^2)f''(z)-4zf'(z)-2f(z)=0, \quad f(0)=f'(0)=1.$
2.- $(1-z)zf'(z)-f(z)=0, \quad f(0)=0.$

Ejercicio 3.6
Dadas las funciones hiperbólicas:

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

calcula su desarrollo en serie de potencias centrado en 0.

Ejercicio 3.7
Determina las series de Taylor para las funciones $\sin z$ *y* $\cos z$ *en* $\frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 3.8
Halla la serie de Taylor en 0 *de*

$$(z+a)^\beta = e^{\beta L(z+a)},$$

donde L *es una rama continua del logaritmo y* $a\neq 0$; *calcula su radio de convergencia.*

Ejercicio 3.9
Demuestra que:

$$\frac{1}{\cos z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{2n!}z^{2n}$$

donde E_n *viene dado por la expresión recurrente:*
$E_0=1,$
$\binom{2n}{0}E_0+\binom{2n}{2}E_2+\cdots+\binom{2n}{2n}E_{2n}=0.$

Práctica 4
Funciones elementales. Argumentos y logaritmos.

La función exponencial se define como la función analítica en $\mathbb{C}$ dada por la serie de potencias:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por medio de las fórmulas de Euler se introducen las funciones trigonométricas:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

de donde se deduce inmediatamente su desarrollo en serie de potencias:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Dado un número complejo z no nulo, llamaramos argumento (respect. logaritmo) de z a todo número real θ (resp. complejo ξ) tal que $z = |z|e^{i\theta}$ (resp. $z = e^{\xi}$). Al conjunto de todos los argumentos (resp. logaritmos) de z lo denotaremos por arg z (resp. $\log z$).

Si ξ es un logaritmo de z entonces $\Im\mathrm{m}\ \xi$ es un argumento de z y si θ es un argumento de z entonces $\log|z| + i\theta$ es un logaritmo de z. Además si θ_0 y ξ_0 son un argumento y logaritmo de z respectivamente entonces

$$\log z = \{\xi_0 + 2p\pi i : \ p \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad \arg z = \{\theta_0 + 2p\pi : \ p \in \mathbb{Z}\}.$$

Dado $S \subset \mathbb{C}$ diremos que $L : S \to \mathbb{C}$ (respectivamente $A : S \to \mathbb{R}$) es una determinación continua o rama uniforme del logaritmo (resp. argumento) si L (resp. A) es una función contínua en S y $L(z)$ (resp. $A(z)$) es un logaritmo (resp. un argumento) de z para todo $z \in S$.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ denotamos por H_α la semirecta $H_\alpha := \{-re^{i\alpha} : r \geq 0\}$. Existe una única rama uniforme del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus H_\alpha$ tal que $\alpha - \pi < \Im mz < \alpha + \pi$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus H_\alpha$.

Ejercicio 4.1
Sea A la rama uniforme del argumento en $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ que toma valores en $]-\pi, \pi[$. Se pide calcular $A(z)$ en los siguientes casos

1. $z = cos\alpha + isen\alpha$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
2. $z = \frac{1+cos\alpha - isen\alpha}{1+cos\alpha+isen\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
3. $z = -a(cos\alpha + isen\alpha)$, $a > 0$ *y* $\mid \alpha \mid < \pi$, $\alpha \neq 0$.

Ejercicio 4.2
Probar que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ es un argumento de $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$. Calcular el módulo de este último número. Se sugiere hacer un dibujo.

Ejercicio 4.3
Aplicar las fórmulas de De Moivre para obtener expresiones para $\cos 5t$ *y* $\operatorname{sen} 5t$ *en función de* $\cos t$ *y* $\operatorname{sen} t$.

Ejercicio 4.4
Probar la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt=\frac{1}{2}+\frac{\text{sen }(n+\frac{1}{2})t}{2\text{ sen }\frac{t}{2}}$$

para $\text{sen}\frac{t}{2}\neq 0$.

Ejercicio 4.5

1. *Encuentra el error en la paradoja de Bernouilli:*

   $0=log(1)=log(-1)^2=2log(-1)$ *luego* $0=log(-1)$ *y por tanto* $-1=e^0=1$.

2. *Estudia la relación entre* $L(z_1z_2)$ *y* $L(z_1)+L(z_2)$ *donde* L *es una rama uniforme del logaritmo.*

3. *Sea* L *rama uniforme del logaritmo en* $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ *cuya parte imaginaria toma valores en* $]-\pi,\pi[$. *Probar que si* z_1 *y* z_2 *tienen parte real positiva entonces* $L(z_1z_2)=L(z_1)+L(z_2)$.

Ejercicio 4.6
Averigua los ceros de las funciones

1. $1+e^z$

2. $1+i-e^z$

Ejercicio 4.7

1. *¿Están acotadas las funciones seno y coseno en todo* $\mathbb{C}$*?.*

2. *Resolver la ecuación* $cosz=4$.

Ejercicio 4.8
Calcular 1^i, i^i, $i^{\sqrt{2}}$.

Ejercicio 4.9
Sea L *la rama uniforme del logaritmo en* $\mathbb{C}\setminus H_\alpha$ *tal que* $\alpha-\pi<\Im m L(z)<\alpha+\pi$ *y sea también* $z_0\in H_\alpha\setminus\{0\}$.

1. *Calcula* $L(-z_0)$.

2. *Sean* L_1 *y* L_2 *las restricciones de* L *a los conjuntos*

   $$\{z\in\mathbb{C}:\Im m\ L(z)\in]\alpha,\alpha+\pi[\}\quad y\quad\{z\in\mathbb{C}:\Im m\ L(z)\in]\alpha-\pi,\alpha[\}.$$

   Demuestra que existen los límites $\lim_{z\to z_0}L_1(z)$, $\lim_{z\to z_0}L_2(z)$ *y calcula cuánto valen.*

Ejercicio 4.10
Sean f *una función derivable en* z_0, $f(z_0)\neq 0$, *y* $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$. *Demuestra que existe un entorno* V *de* z_0 *y una función* $h:V\to\mathbb{C}$ *derivable en* z_0, *tal que* $h^n=f$.

Ejercicio 4.11
Sea L_1 *una rama uniforme del logaritmo en* $\{z\neq 0:\Im m\ z\geq 0\}$. *Calcula* $L_1(1)-L_1(-1)$.

Sea L_2 *una rama uniforme del logaritmo en* $\{z\neq 0:\Im m\ z\leq 0\}$. *Calcula* $L_2(-1)-L_2(1)$.

Deduce de los apartados anteriores que no existe ninguna rama uniforme del logaritmo en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Ejercicio 4.12
Estudia la relación entre los conjuntos $z^{2\alpha}$, $(z^\alpha)^2$, $(z^2)^\alpha$.

Ejercicio 4.13
Prueba que no existe g continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $e^{g(z)} = z^2$.

Ejercicio 4.14
Sea C un subconjunto conexo del plano complejo, $n \in \mathbb{N}$ y $f : C \to \mathbb{C}$, $g : C \to \mathbb{C}$, determinaciones continuas de la raíz n-ésima. Demuestra que existe un $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n-1$, tal que

$$f(z) = g(z)e^{2k\pi i/n}, \quad \forall z \in C.$$

Práctica 5
Integración sobre caminos. El teorema de Cauchy-Goursat.

Para calcular integrales curvilíneas, se utilizan fundamentalmente tres métodos. Además de la propia definición, podemos aplicar el teorema fundamental; es decir, utilizar la existencia de primitivas, o bien la fórmula de Cauchy.

Ejemplo 5.1
Por la definición. Calcular $\int_\gamma f(z)\ dz$, siendo $\gamma(t) := e^{it}$ $0 \le t \le 2\pi$ y $f(z) := z^{-1+i}$ tomando A el argumento comprendido entre 0 y 2π .

Como $z^{-1+i} = e^{(log|z|+i\cdot A(z))(-1+i)}$ y si $t \in [0, 2\pi]$ y $z = e^{it}$, se tiene $|z| = 1$ y $arg\ z = t$ luego

$$\int_\gamma z^{-1+i}\ dz = \int_0^{2\pi} e^{(-1+i)it} ie^{it}\ dt = i\int_0^{2\pi} e^{-t}\ dt = [-ie^{-t}]_0^{2\pi} = i(1 - e^{-2\pi}).$$

Ejemplo 5.2
Por la existencia de primitiva. Calcular la integral de la función $1/z$ a lo largo del cuadrado de vértices $1+i,\ 1-i,\ ,-1-i,\ -1+i,$ recorrido en sentido antihorario.

Calcularemos lo que vale la integral en cada uno de los lados del cuadrado y sumaremos. Lo hacemos así porque no existe una primitiva de $1/z$ en un abierto que incluya al cuadrado. En cambio cada uno de los lados está contenido en un abierto convexo en el que $1/z$ sí tiene una primitiva, que será una conveniente rama del logaritmo.

Así, en $[1+i, -1+i]$ elegiremos el argumento comprendido entre $-\pi$ y π. Entonces,

$$\int_{[1+i,-1+i]} 1/zdz = [\log z]_{1+i}^{-1+i} =$$

$$= \log\sqrt{2} + i\cdot A(-1+i) - (\log\sqrt{2} + i\cdot A(1+i)) = i(3\pi/4 - (\pi/4)) = i\pi/2.$$

En el segmento $[-1+i,\ -1-i]$ elegiremos la rama del argumento comprendido entre 0 y 2π Entonces

$$\int_{[-1+i,-1-i]} 1/z\ dz = [\log z]_{-1+i}^{-1-i} =$$

$$= \log\sqrt{2} + i\cdot A(-1-i) - (\log\sqrt{2} + i\cdot A(-1+i)) = i(5\pi/4 - (3\pi/4)) = i\pi/2.$$

En el segmento $[-1-i,\ 1-i]$ elegiremos la rama del argumento comprendido entre 0 y 2π Entonces

$$\int_{[-1+i,-1-i]} 1/zdz = [\log z]_{-1-i}^{1-i} =$$

$$= \log\sqrt{2} + i\cdot A(1-i) - (\log\sqrt{2} + i\cdot A(-1-i)) = i(7\pi/4 - (5\pi/4)) = i\pi/2.$$

Por último, en el segmento $[1-i,\ 1+i]$ elegiremos la rama del argumento comprendido entre $-\pi$ y π Entonces

$$\int_{[-1+i,-1-i]} 1/zdz = [\log z]_{1-i}^{1+i} =$$

$$= \log\sqrt{2} + i\cdot A(1+i) - (\log\sqrt{2} + i\cdot A(1-i)) = i(\pi/4 - (-\pi/4)) = i\pi/2.$$

Sumando todos los resultados se obtiene

$$\int_{[1+i,-1+i]} \frac{1}{z}\ dz + \int_{[-1+i,-1-i]} \frac{1}{z}\ dz + \int_{[-1+i,-1-i]} \frac{1}{z}\ dz + \int_{[-1+i,-1-i]} \frac{1}{z}\ dz = 2\pi i$$

con lo cual $\int_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i$.

Ejemplo 5.3
Por la fórmula integral de Cauchy. *Calcular* $\int_\gamma f(z)\, dz$ *siendo* $\gamma(t) := e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ *y* $f(z) = e^{iz}/z^2$.

Aplicando la fórmula para la derivada a la función e^{iz} *en el punto* 0, *resulta*

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\, dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i i e^{i0} = -2\pi.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 5.1
Calcular las integrales de las funciones $z(z-1)$ *y* $Re(z)$ *a lo largo de los segmentos* $[0, 1+i]$, $[0,1]$, $[-1, 1+i]$.

Ejercicio 5.2
Calcular $\int_\gamma f(z)\, dz$ *siendo* $\gamma(t) := 1 + \frac{1}{2}e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ *y* $f(z) = L(z)/z^n, n \in \mathbb{N}$. *Aquí* L *denota una rama uniforme del logaritmo en* $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ *cuya parte imaginaria está entre* $-\pi$ *y* π.

Ejercicio 5.3
Calcula

$$\int_\gamma \frac{dz}{z+2i},$$

siendo $\gamma(t) = te^{it}$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

Ejercicio 5.4
Calcular $\int_\gamma f(z)\, dz$, *siendo*
(i) $\gamma(t) := e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ *y* $f(z) = (e^z - e^{-z})/z^n$, $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\gamma(t) := e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ *y* $f(z) = (senz)/z^3$.

Ejercicio 5.5
Calcular las siguientes integrales:
(i) $\int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)}dz$; *donde* γ *es una circunferencia de centro* 0 *y radio mayor que* 2.
(ii) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} dz/(1-z)^3$.
(iii) $\int_{|z+1|=\frac{1}{2}} dz/(1-z)^3$.
(iv) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$.
(v) $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z\, dz}{(1-z)^3}$.
(vi) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}\, dz$.
(vii) $\int_{|z-1|=2} \frac{e^{\operatorname{sen} z^2}}{z^2(z-4)}\, dz$.

Ejercicio 5.6
Calcular $\int_{C(2i,1)} \frac{L(z)}{z^2+2}\, dz$, *donce* $L(z)$ *es una rama uniforme del logaritmo con argumento tomando valores en* $]6\pi, 8\pi[$ *y* $C(2i,1)$ *es la circunferencia de centro* $2i$ *y radio 1 recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.*

Ejercicio 5.7
Sea $P(z)$ *un polinomio de grado* n, *sea* $R > 0$ *suficientemente grande para que* $P(z)$ *no se anule en* $\{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid \geq R\}$. *Sea* $C(0,R)(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. *Probar que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz = n.$$

Ejercicio 5.8
Desarrollar en serie de potencias centrada en 0 *la función* $f(z) = \int_{[0,z]} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$.

Principio de prolongación analítica

Ejercicio 5.9
Sean $f, g : U \to \mathbb{C}$ *dos funciones holomorfas en* U *abierto conexo tal que* $f(z) \cdot g(z) = 0$ *para todo* $z \in U$. *Probar que* $f \equiv 0$ *o* $g \equiv 0$ *en* U.

Ejercicio 5.10
Sean $f, g : U \to \mathbb{C}$ *dos funciones holomorfas en* U *abierto conexo tal que ni* f *ni* g *son idénticamente cero en* U. *Supongamos que existe una sucesión* (z_n) *en* U *convergente a* $z_0 \in U$ *con* $z_n \neq z_o, n = 1, 2, \ldots$
y $f(z_n)g'(z_n) - f'(z_n)g(z_n) = 0, n = 1, 2, \ldots$. *Probar que existe un* $c \in \mathbb{C}$ *tal que* $f(z) = cg(z), z \in U$.

Ejercicio 5.11
Averigua si es posible construir una función $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ *holomorfa tal que* $f(1/n) = z_n$ *cuando:*
(i) $z_n = (-1)^n$.
(ii) $z_n = n/(n+1)$.
(iii) $z_n = 0$ *si* n *es par y* $z_n = 1/n$ *si* n *es impar.*
(iv) $z_n = \operatorname{sen}(1/n)$ *si* n *es par y* $z_n = \cos(1/n)$ *si* n *es impar.*

Ejercicio 5.12
Sea f *una función entera tal que* $f(1/n) = 1/n^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Calcular* $f(i)$.

Ejercicio 5.13
Sea $f : \mathbb{C} \setminus\,]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ *una función holomorfa tal que* $f(e^{i\frac{n+1}{n}}) = i\frac{n+1}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Calcular* $f(2i)$.

Ejercicio 5.14
Sea f *una función entera tal que* $f^2(x) + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. *Calcula* $|f(i)|$.

Principio del módulo máximo y teorema de Liouville

Ejemplo 5.4
Sea $f : U \to \mathbb{C}$ *una función holomorfa no constante en* U *abierto conexo. Probar que* $u = Re\, f(z)$ *y* $v = Im\, f(z)$ *cumplen los principios locales del módulo máximo y mínimo.*

La función e^f *es holomorfa, no constante y no se anula en ningún punto. Entonces cumple los principios del módulo máximo y mínimo, es decir,* $|e^f| = e^u$ *no tiene extremos relativos en* U. *En consecuencia,* u *tampoco tiene extremos relativos.*

Para v, *bastaría razonar del mismo modo con la función* if.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 5.15
Sea $f : cl(U) \to \mathbb{C}$ *una función continua y holomorfa en* U *abierto conexo acotado. Probar que la parte real y la parte imaginaria de* f *alcanzan el mínimo y el máximo en* $Fr(U)$.

Ejercicio 5.16
Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función entera .*
(i) Probar que si $f(\mathbb{C})$ *no es constante entonces para cada* $c > 0$ *se cumple que* $cl\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\} = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$.
(ii) Si $f(\mathbb{C})$ *no es un conjunto denso en* $\mathbb{C}$ *entonces* f *es constante.*
(iii) Probar que si $Re\, f(z)$ *o* $Im f(z)$ *es una función acotada entonces* f *es constante.*

Ejercicio 5.17
Si f *es entera y toma valores reales en la circunferencia unidad, probar que* f *es constante.*

Ejercicio 5.18
Comprobar que

$$\int_0^{+\infty} cosx^2 dx = \int_0^{+\infty} senx^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

(Sugerencia: Considerar la función e^{iz^2} *y el camino que delimita a la región* $\{z : |z| < r \;\; 0 < A(z) < \pi/4\}$*.)*

Ejercicio 5.19
Comprobar que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} cos(2bx)dx = e^{-b^2}\sqrt{\pi}/2$ *sabiendo que* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$
(Sugerencia: Considerar la función e^{-z^2} *y el camino que delimita al rectángulo* $[-r, r] \times [0, b]$*.)*

Práctica 6
Índice y Teorema general de Cauchy

Ejercicio 6.1
Sea $\varphi : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = \cos^2 t e^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. *Calcular* $I(\varphi, 1/2)$.

Ejercicio 6.2
Sea $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = 2\cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. *Calcular* $I(\varphi, 0)$.

Ejercicio 6.3
Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analítica tal que* $f(z) \neq 0$ *para* $z \in \Omega$. *Probar que todo logaritmo continuo de* f *es también un logaritmo analítico en* Ω.

Ejercicio 6.4
Determinar para que valor del parámetro a, *la función*

$$f(z) := \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3}\right) e^z$$

tiene primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejercicio 6.5
Sea Ω *un abierto del plano complejo y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $0 \notin f(\Omega)$, *probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\exists F \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $e^{F(z)} = f(z)$, $\forall z \in \Omega$,

ii) $\exists G \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $G'(z) = f'(z)/f(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Ejercicio 6.6
Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1}$, *siendo*

$$\gamma(t) := \begin{cases} -1 + e^{it}, & si \;\; t \in [-2\pi, 0]; \\ 1 - e^{it}, & si \;\; t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Ejercicio 6.7
Calcular $\int_\gamma f(z)\, dz$, *siendo* $f(z) = \frac{1}{z^3-1}$ *y*

$$\gamma(t) := \begin{cases} 2t\frac{4}{\pi} e^{i(\pi/4)}, & si \;\; t \in [0, \pi/4]; \\ 2e^{it}, & si \;\; t \in [\pi/4, 7\pi/4]; \\ 2(2\pi - t)\frac{4}{\pi} e^{-i\pi/4}, & si \;\; t \in [7\pi/4, 2\pi]. \end{cases}$$

Ejercicio 6.8
Calcular $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt = \frac{2\pi}{ab}$, *relacionándola con la integral* $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$, *siendo*
$\gamma(t) = a\cos t + ib \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$.

Práctica 7
Series de Laurent. Singularidades.

Ejercicio 7.1
Escribir el desarrollo en serie de Laurent de

- $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ *en* $z=2$ *y en la corona* $1<|z|<2$.
- $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ *en* $z=0$.
- $e^{\frac{1}{1-z}}$ *en* $z=1$.
- $cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ *en* $z=2$.

Ejercicio 7.2
Obtener tres desarrollos de Laurent diferentes de $\frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$ *alrededor de* $z=-1$. *¿Contradice esto la unicidad del desarrollo?*

Ejercicio 7.3
Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ *el desarrollo de Laurent de una función holomorfa en* $B(a,r)\setminus a$. *Calcular el radio de convergencia de la serie* $\sum a_{-n}z^n$.

Ejercicio 7.4 (Regla de L'Hopital)
Sean f, g *analíticas en* a, *no idénticamente nulas en un entorno de* a *con* $f(a)=g(a)=0$. *Probar que existen (en* $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$*)* $\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}$ *y* $\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}$ *y coinciden.*

Ejercicio 7.5
Clasificar las singularidades de las funciones

1. $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2+1}$
2. $\frac{z}{senz}$
3. $e^{(z+\frac{1}{z})}$
4. $\frac{1}{e^{z^2}-1}$
5. $\frac{1+cosz}{z-\pi}$
6. $\frac{e^{z+a}}{z+a}$
7. $zsh\frac{1}{z}$

Ejercicio 7.6
Clasificar la singularidades de las siguientes funciones, incluyendo el punto del infinito

- $\frac{sen^2 z}{z^4}$
- $\frac{1}{z^2(z+1)}+sen\frac{1}{z}$
- $\frac{1}{senz}-\frac{k}{z}$.

Ejercicio 7.7
Hallar la singularidades aisladas y la naturaleza de las mismas de la función $sen\left(\frac{1}{sen\frac{1}{z}}\right)$.

Ejercicio 7.8
a) Si f tiene una singularidad esencial en a, también f^2 la tiene. b) Si, además, f no se anula en un entorno reducido de a, entonces $\frac{1}{f}$ también tiene una singularidad esencial en a.

Ejercicio 7.9
Si f es derivable en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ y $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, probar que existe $\lim_{|z|\to\infty} z^2 f(z)$.

Ejercicio 7.10
Si f tiene una singularidad aislada en a y $Re(f)(z) > 0$ en un entorno reducido de a, entonces a es evitable. (En primer lugar,descartar que sea esencial)

Ejercicio 7.11
Si f tiene una singularidad aislada esencial en a y P es un polinomio no constante, entonces a es una singularidad aislada esencial de $P \circ f$.

Ejercicio 7.12
Si f es una función entera tal que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty$, f es un polinomio.

Práctica 8
Cálculo de residuos y aplicaciones

Ejercicio 8.1
Sean g, h analíticas en a con $g(a) \neq 0,\ h(a) = 0$ y $h'(a) \neq 0$. Entonces $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ tiene un polo simple en a y

$$res(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{1}$$

En general, si g tiene un cero de orden k en a y h tiene un cero de orden $k + 1$, entonces f tiene un polo simple cuyo residuo es $(k + 1)\frac{g^{(k)}(a)}{h^{(k+1)}(a)}$.

Ejercicio 8.2
Sean g, h analíticas en a con $g(a) \neq 0,\ h(a) = 0$, $h'(a) = 0 y$ $h''(a) \neq 0$. Entonces $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ tiene un polo de orden 2 en a y

$$res(f, a) = \frac{2g'(a)}{h''(a)} - \frac{2g(a)h'''(a)}{3h''(a)^2}.$$

Ejercicio 8.3
Calcular los residuos de la funciones indicadas en sus puntos singulares aislados:

- $\frac{1}{z^3 - z^5}$
- $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$
- $\frac{sen2z}{(1+z)^3}$
- $z^3 cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$
- $z^n sen(\frac{1}{z})$
- $\frac{1}{sen\frac{1}{z}}$
- $\frac{1}{z^2 senz}$

Ejercicio 8.4
Demostrar que $z^4 + 6z + 3$ tiene todas las raíces en el círculo $|z| \leq 2$ y que tres de ellas están en el anillo $1 < |z| < 2$.

Ejercicio 8.5
Hallar el número de raíces de la ecuación $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ en el anillo $1 < |z| < 2$. Idem para $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0$ en $2 < |z| < 3$.

Ejercicio 8.6
Sea f analítica en un abierto que incluye a $D(0, 1)$ tal que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Demostrar que la ecuación $f(z) = z^n$ tiene n raíces en $D(0, 1)$.

Ejercicio 8.7
¿Cuántas raíces tiene en $B(0, 1)$ la ecuación $e^z - 4z^n + 1 = 0$?

Ejercicio 8.8
Demostrar que la ecuación $z = \lambda - e^{-z}$ $(\lambda > 1)$ tiene en el semiplano derecho una raíz unica (y real).

Ejercicio 8.9
Demostrar que $ze^{\lambda - z} = 1, \quad \lambda > 1$, *tiene en* $D(0,1)$ *una sola raíz (real y positiva).*

Ejercicio 8.10
Sea f *holomorfa en* $B(0,\rho)$ *y sea* $0 < r < \rho$. *Pongamos* $m := inf_{|z|=r}|f(z)|$ *y supongamos que* $|f(0)| + r|f'(0)| < m$. *Por medio del desarrollo de Taylor de* f, *del orden adecuado, demostrar que* f *tiene al menos dos ceros en* $B(0.r)$.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 8.11
Sea f *analítica en* $\mathbb{C}$ *salvo en los polos* 1 *y* -1 *para los que* $\operatorname{res}(f,1) = -\operatorname{res}(f,-1)$. *Probar que f tiene una primitiva en* $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

Ejercicio 8.12
Probar que si $P(z)$ *es un polinomio de grado mayor o igual que 2 la suma de todos los residuos de* $\frac{1}{P(z)}$ *es 0. Deducir que si* P *tiene* n *raíces distintas,* $z_1, \ldots, z_n$, *entonces* $\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{P'(z_j)} = 0$.

Práctica 9
Cálculo de integrales reales

TIPO I

$\int_0^{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{senx}, \mathbf{cosx})\mathbf{dx}$, siendo $R(x,y)$ una función racional de dos variables reales, se puede escribir usando las fórmulas de Euler como $\int_{C(0,1)} R(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2})\frac{1}{iz}dz$. Esta última integral se resuelve con ayuda del teorema de los residuos.

Ejercicio 9.1
$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+cosx}dx$ *siendo* $a \in \mathbb{R}$, $\mid a \mid > 1$.

Ejercicio 9.2
$\int_0^{2\pi} sen^{2n}xdx.$

En los siguientes 3 lemas γ_R denotará el arco de circunferencia $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $\theta_1 \le t \le \theta_2$.

Lema A. Sea g una función continua en $\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \ge R_0, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$. Si $lim_{z\to\infty} zg(z) = 0$ entonces $lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0$.

Lema B. Sea g una función continua en $\{z = \rho e^{i\theta} : 0 < \rho \le R_0, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$. Si $lim_{z\to 0} zg(z) = 0$ entonces $lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} g(z)dz = 0$.

Lema C. Sea g una función continua en un sector del semiplano superior $\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \ge R_0, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$, $0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \pi$. Si $lim_{z\to\infty} g(z) = 0$, $\lambda > 0$ entonces $lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} g(z)dz = 0$.

En lo que sigue $A_p(z)$ y $B_q(z)$ denotarán dos polinomios (de grado p y q respectivamente), (a_k) son los ceros de B_q y f representa la función racional $f(z) := \frac{A_p(z)}{B_q(z)}$. Representaremos por γ_R la semicircunferencia $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

TIPO II

$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}.$

Suponemos que B_q no tiene ceros reales y $q \ge p + 2$. Cuando $R > 0$ es suficientemente grande se tiene, en virtud del teorema de los residuos,

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum (Res(f(z), a_k) : Im(a_k) > 0).$$

Se sigue del Lema A:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum (Res(f(z), a_k) : Im(a_k) > 0).$$

Ejercicio 9.3
$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx.$

Ejercicio 9.4
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a > 0$.

TIPO III

$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)e^{i\lambda x}dx}$.

Suponemos que B_q no tiene ceros reales, $q \geq p+1$ y $\lambda > 0$. Al igual que antes, se tiene para $R > 0$ suficientemente grande,

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum (Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k) : Im(a_k) > 0).$$

Se sigue del Lema C:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum (Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k) : Im(a_k) > 0).$$

Debe observarse que cuando $q \geq p+2$ se tiene que $f(x)e^{i\lambda x}$ es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$ pero cuando $q = p+1$ y $\lambda > 0$ la integral anterior debe interpretarse como una integral de Riemann impropia.

Ejercicio 9.5
$\int_0^{+\infty} \frac{cosmx}{(x^2+y^2)^2}dx.$

Ejercicio 9.6
$\int_0^{+\infty} \frac{xsenmx}{1+x^2+x^4}dx.$

TIPO IV

V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)e^{i\lambda x}dx}$.

Supongamos ahora que $f(z) := \frac{A_p(z)}{B_q(z)}$ tiene un **polo real simple** a_0 y sean $q \geq p+1$ y $\lambda \geq 0$ (o bien $q \geq p+1$ y $\lambda = 0$). Dados $R > 0$ y $0 < \epsilon < R$ denotamos por $\gamma_{R,\epsilon}$ la frontera de la región limitada por el eje real y las semicircunferencias γ_R y $a_0 + \gamma_\epsilon$, orientada positivamente. Para R suficientemente grande y ϵ suficientemente pequeño el teorema de los residuos proporciona

$$\int_{\gamma_{R,\epsilon}} f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i \sum (Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k) : Im(a_k) > 0).$$

Se sigue de los lemas A,C y la observación $lim_{\epsilon \to 0} \int_{a_0+\gamma_\epsilon} g(z)dz = i\pi Res(g(z), a_0)$ que existe el valor principal

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum (Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_k) : Im(a_k) > 0) + i\pi Res(f(z)e^{i\lambda z}, a_0).$$

Una expresión similar se obtiene cuando f presenta varios polos reales simples.

Ejercicio 9.7
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx}{x}dx.$

Ejercicio 9.8
$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{costx}{1-x^3}dx.$

TIPO V

$\int_0^{+\infty} \mathbf{x^{a-1}f(x)dx}$.

Supongamos que f no tiene polos en $]0,+\infty[$, $a \in]0,+\infty[\setminus\mathbb{N}$ y existen $0 < b < a < c$ tales que $lim_{z\to 0} \mid f(z) \mid\mid z \mid^b = lim_{z\to\infty} \mid f(z) \mid\mid z \mid^c = 0$. Entonces

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}f(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum (Res(z^{a-1}f(z), a_k) : a_k \neq 0)$$

siendo $z^{a-1} = e^{(a-1)log_\pi(z)}$, log_π la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$ con $0 < Im(log_\pi) < 2\pi$.

Basta integrar $z^{a-1}f(z)$ a lo largo de la curva $\gamma_{R,r,\epsilon}$ determinada por los segmentos $[re^{i\epsilon}, Re^{i\epsilon}]$, $[re^{-i\epsilon}, Re^{-i\epsilon}]$ y los arcos de circunferencia $\gamma_R(t) = Re^{it}$ y $\gamma_r(t) = re^{it}$ ($\epsilon \leq t \leq 2\pi - \epsilon$). Después se toman límites cuando $R \to \infty$, $r \to 0$ y $\epsilon \to 0$.

Ejercicio 9.9
$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2+x+1}dx$.

Ejercicio 9.10
$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)^2}dx$, $0 < \alpha < 1$.

TIPO VI

$\int_0^{+\infty} \mathbf{f(x)logxdx}$ y $\int_0^{+\infty} \mathbf{f(x)dx}$.

Suponemos que $f(z) = \frac{A_p(z)}{B_q(z)}$ no tiene polos en $[0,+\infty[$, $q \geq p+2$ y f toma valores reales en la recta real. Procediendo como en el caso anterior se obtiene

$$\int_0^{+\infty} f(x)logxdx = -\frac{1}{2}Real(\sum(Res(f(z)(log_\pi(z))^2, a_k))$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{2\pi}Im(\sum(Res(f(z)(log_\pi(z))^2, a_k)).$$

Ejercicio 9.11
$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}dx$.

Ejercicio 9.12
$\int_0^{+\infty} \frac{logx}{x^2+a^2}dx$.

Suma de series

Sean $(a_k : 1 \leq k \leq m)$ las singularidades aisladas de una función meromorfa f. Suponemos que a_k no es un número entero $(1 \leq k \leq m)$ y existen constantes $M, R > 0$ tales que $\mid f(z) \mid \leq \frac{M}{|z|^2}$ siempre que $\mid z \mid > R$. Definimos $g(z) = \pi\frac{cos\pi z}{sen\pi z}f(z)$, $h(z) = \frac{\pi}{sen\pi z}f(z)$. Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_{k=1}^{m} Res(g(z), a_k)$$

y también

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{k=1}^{m} Res(h(z), a_k).$$

Para obtener las relaciones anteriores basta integrar g y h a lo largo de un cuadrado centrado en el origen y de semilado $N + \frac{1}{2}$, $N \in \mathbb{N}$, para después tomar límites cuando $N \to \infty$.

Ejercicio 9.13
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Ejercicio 9.14
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$, $a > 0$.

Ejercicios complementarios

No todos los siguientes ejercicios propuestos corresponden a alguno de los seis tipos anteriores. Para su resolución hay que usar recintos adecuados y los técnicas usadas en los ejercicios de los tipos anteriores.

Ejercicio 9.15
$\int_0^{2\pi} \frac{cosmx}{1-2acosx+a^2} dx$, $0 <| a |\neq 1$.

Ejercicio 9.16
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

Ejercicio 9.17
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx$.

Ejercicio 9.18
$\int_0^{+\infty} \frac{cosmx}{x^2+y^2} dx$.

Ejercicio 9.19
$\int_0^{+\infty} \frac{cosax-cosbx}{x^2} dx$.

Ejercicio 9.20
$\int_0^{+\infty} \frac{sen^2 x}{x^2} dx$.

Ejercicio 9.21
$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(1+x^2)^2} dx$, $-1 < p < 3$.

Ejercicio 9.22
$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, $n \geq 2$.

Ejercicio 9.23
$\int_0^{+\infty} \frac{logx}{(1+x)^3} dx$.

Ejercicio 9.24
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$.