PRÁCTICAS DE ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES

Departamento de Análisis Matemático

Curso 2004/2005

Profesores responsables :
Fuensanta Andreu
Óscar Blasco
Carmen Fernández
Antonio GAlbis
Jesús García
Enrique Llorens
Sergio Segura de León

Práctica 1
Funciones de varias variables.
Limites.

1 Subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Para poder estudiar funciones de varias variables necesitamos estudiar previamente los conjuntos entre los cuales actúan. Por cuestiones obvias de visualización trabajaremos con dos o con tres variables.

Ejemplo 1.1
Determinar el conjunto $U := \{(x, y)| \quad x^2 + y^2 \geq 9\}$.

Si consideramos la ecuación $x^2 + y^2 = 9$, *que corresponde a una circunferencia de centro el origen y radio tres, sabemos que la curva que representa divide al plano en tres regiones, a saber:*

$C := \{(x, y)|x^2 + y^2 = 9\}$, *es decir la curva propiamente dicha.*

$I := \{(x, y)|x^2 + y^2 < 9\}$, *los puntos de su "interior" o aquéllos cuya distancia al origen es menor que tres.*

$E := \{(x, y)|x^2 + y^2 > 9\}$, *los puntos de su "exterior" o aquéllos cuya distancia al origen es mayor que tres.*

En nuestro caso $U = C \cup E$. *El conjunto es cerrado y no acotado.*

Ejemplo 1.2
Determinar el conjunto $U := \{(x, y)| \quad x + y \leq 5 \quad , \quad y > x^2 - 1\}$.

La recta $x + y = 5$ *queda determinada por dos de sus puntos, por ejemplo* $(0, 5)$ *y* $(5, 0)$, *y divide al plano en tres regiones, a saber:*

$R := \{(x, y)| \quad x + y = 5\}$, *formada por los puntos de la propia recta.*

$P_1 := \{(x, y)| \quad x + y < 5\}$, *formada por el semiplano que contiene al* $(0, 0)$ *(punto que no está en* R *y que nos sirve de test).*

$P_2 := \{(x, y)| \quad x + y > 5\}$, *formada por el semiplano que no contiene al* $(0, 0)$.

La parábola $y = x^2 - 1$ *tiene su vértice en* $(0, -1)$ *y tiene la convexidad hacia las ordenadas negativas. Divide al plano en tres regiones:*

$P := \{(x, y)| \quad y = x^2 - 1\}$, *los puntos de la parábola.*

$I := \{(x, y)| \quad y > x^2 - 1\}$, *los puntos de la parte cóncava, como por ejemplo es el* $(0, 0)$.

$E := \{(x, y)| \quad y < x^2 - 1\}$, *los puntos de la parte convexa.*

En nuestro caso $U = (R \cup P_1) \cap I$, *que no es ni abierto ni cerrado pero acotado.*

Ejemplo 1.3
Determinar el conjunto $U := \{(x, y, z)| \quad z \geq x^2 + y^2\}$.

Visualizaremos el conjunto U *estudiando sus secciones o cortes horizontales y verticales. Consideremos la superficie determinada por* $z = x^2 + y^2$.

Si cortamos por un plano horizontal $z = a$, *es decir, buscamos los puntos* (x, y, a) *tales que* $a = x^2 + y^2$, *vemos que no tiene sentido si* $a < 0$, *es el origen si* $a = 0$, *y si* $a > 0$ *se trata de una circunferencia de centro* $(0, 0, a)$ *y radio* $\sqrt{a}$. *Este proceso que reencontraremos más tarde se denomina estudio de las curvas de nivel.*

Si cortamos por un plano vertical, por ejemplo el $x = b$ *o el* $y = c$, *nos encontramos en ellos con sendas parábolas. Concluimos pues que se trata de un paraboloide que determina una partición del espacio en tres conjuntos, a saber:*

$P := \{(x, y, z)| \quad z = x^2 + y^2\}$, *los puntos del paraboloide.*

$I := \{(x, y, z)| \quad z < x^2 + y^2\}$, *el "exterior" o parte cóncava del paraboloide.*

$E := \{(x,y,z)| \quad z > x^2 + y^2\}$, el "interior" o parte convexa del paraboloide.
Así $U = P \cup E$. Es un conjunto cerrado y no acotado.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.1
Determinar los siguientes subconjuntos:

(1) $\{(x,y)| \quad x^2 + y^2 - 4 \leq 0, \quad x + y \geq 1\}$.
(2) $\{(x,y)| \quad 4x^2 + 7y^2 \leq 2, \quad x \geq 0\}$.
(3) $\{(x,y)| \quad x^2 \geq y, \quad x + y \leq 3\}$.
(4) $\{(x,y)| \quad xy \geq 1\}$.
(5) $\{(x,y)| \quad x^2 - y^2 \leq 3\}$.
(6) $\{(x,y,z)| \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2\}$.
(7) $\{(x,y,z)| \quad 1 \leq xy \leq 2, \quad x \leq y \leq 4x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$.
(8) $\{(x,y,z)| \quad x^2 + y^2 < z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$.
(9) $\{(x,y,z)| \quad x^2 + 4y^2 + 7z^2 \leq 1, \quad x + y + z \geq 0\}$.
(10) $\{(x,y,z)| \quad 4x^2 - 5y^2 = z\}$.

2 Dominio, rango y gráfica de una función de varias variables.

Una función f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ suele venir dada por una o varias expresiones o fórmulas. Llamaremos *dominio* D al subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en el que tengan sentido tales expresiones. Al subconjunto de $f(D) \subset \mathbb{R}^m$ le denominaremos *rango*. La *gráfica* de f será

$$G(f) := \{(x; f(x)) \in \mathbf{R^{n+m}}| \quad x \in D \quad , \quad y = f(x)\}.$$

Como en el apartado anterior nuestro estudio se restringirá a los casos $n = 1, 2, 3$ y $m = 1$ para obtener una cierta visualización.

Ejemplo 1.4
Sea $f(x,y) := \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.
El dominio de definición de f será

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2| \quad 25 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2| \quad x^2 + y^2 \leq 25\},$$

es decir, la región encerrada por la circunferencia de centro el origen y radio cinco.
Su rango será $R = \{z \in \mathbb{R}| \quad 0 \leq z \leq 5\}$, mientras la gráfica será

$$G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3| \quad (x,y) \in D \quad , \quad z = f(x,y)\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3| \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad , \quad 0 \leq z \leq 5\},$$

que es la semiesfera superior de centro el origen y radio cinco.

En general a los conjuntos $f(x_1, ..., x_n) = c$ se les denomina *conjuntos de nivel* y en particular si $n = 2$ *curvas de nivel* ; sirven para hacerse una idea de la gráfica de la función (como hemos hecho con el conjunto del ejemplo 3 de la sección anterior). En nuestro caso las curvas de nivel son las circunferencias determinadas por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 25 - c^2$, $(0 \leq c \leq 5)$. Para $n = 3$ se denominan *superficies de nivel*. Por ejemplo la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, cuya gráfica al estar en $\mathbb{R}^4$ nos es imposible de visualizar, tiene como superficies de nivel esferas de centro el origen.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.2
Determinar el dominio, rango y trazar las curvas de nivel de las funciones:

(1) $f(x, y) := x + y$.
(2) $f(x, y) := x^2 + 4y^2$.
(3) $f(x, y) := x^2 - y^2$.
(4) $f(x, y) := xy$.
(5) $f(x, y) := \sqrt{9 - 3x^2 - y^2}$.

3 Límites de funciones de varias variables.

3.1 Límites por curvas.

Sea $f\colon \mathbf{R^2} \to \mathbb{R}$. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ entonces para toda función real y continua g definida en un entorno de a, tal que $g(a) = b$, se cumple $\lim_{x\to a} f(x, g(x)) = L$. Geométricamente esto significa que el límite a lo largo de cualquier curva $y = g(x)$ debe ser L.

Ejemplo 1.5
Consideremos la función

$$f(x, y) := \frac{y}{y + x^2} \quad si \quad y \neq -x^2; \quad f(x, -x^2) = 1.$$

Veamos que no tiene límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ *: si hacemos* $y = g(x) = mx^2$, *es decir, tomamos las parábolas que pasan por el origen,*

$$f(x, mx^2) = \frac{m}{m + 1} \quad \text{si} \quad m \neq -1$$

con lo que el límite depende de m.

3.2 Límites iterados.

Dada una función f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, sean

$$f_1(x) := \lim_{y\to b} f(x, y), \qquad f_2(y) := \lim_{x\to a} f(x, y).$$

Se llaman límites iterados de f en (a, b) a

$$L_1 := \lim_{x\to a} f_1(x), \qquad L_2 := \lim_{y\to b} f_2(y).$$

Si la función f tiene límite L en (a, b) y existen $f_1(x)$ y $f_2(y)$ entonces existen L_1 y L_2 siendo ambos iguales a L.

Ejemplo 1.6
Sea

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = 0.$$

En $(0, 0)$ *existen los límites iterados (con la notación anterior* $L_1 = 1$ *y* $L_2 = -1$*) pero no existe el límite pues tomando las rectas* $y = mx$ *el límite depende de* m.

Ejemplo 1.7
Si consideramos la función

$$f(x,y) := y \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad si \quad x \neq 0; \quad f(0,y) = 0,$$

como $|f(x,y)| \leq |y| \leq ||(x,y)||$, *tiene límite igual a cero en* $(0,0)$, *pero* L_2 *no existe.*

Ejemplo 1.8
La función

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2} \quad si \quad (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0) = 0$$

tiene límites iterados en (0,0) iguales a cero pero no tiene límite (considerar de nuevo las rectas $y = mx$*).*

3.3 Definición y método $\epsilon - \delta$. Método general.

Trabajaremos en el caso particular de una función real de dos variables.

Son equivalentes:

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,$$

$$(b) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - L| < \epsilon,$$

$$(c) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |x-a| < \delta \quad , \quad |y-b| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - L| < \epsilon.$$

Para acotar convenientemente recurriremos a

(1) Utilización de acotaciones del tipo

$$|\ x\ | \leq \sqrt[p]{x^p + \ldots}.$$

(2) Utilización de límites conocidos, por ejemplo

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1.$$

(3) Utilización de desarrollos de Taylor, por ejemplo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O_6.$$

(4) Utilización del Teorema del Valor Medio de Cauchy

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad z \in]x, y[.$$

Ejemplo 1.9
Sea $f(x,y) := x^2 + xy + y$. *Vamos a calcular, usando la definición,*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y).$$

Solución: Como el candidato natural a límite es 3 (¿ porqué ?) calibraremos

$$|x^2 + xy + y - 3| \leq |x^2 - 1| + |xy - 1| + |y - 1| = |(x-1)(x+1)| + |xy - x + x - 1| + |y - 1| \leq$$

$$\leq |x-1||x-1+2| + |y-1||x| + |x-1| + |y-1| \leq |x-1|(|x-1|+2) + |y-1|(|x-1|+1) +$$

$$+|x-1|+|y-1|$$

Si suponemos $|x-1|<\delta,\ |y-1|<\delta$, *se tiene suponiendo* $\delta<1$

$$|x^2+xy+y-3|\le \delta(\delta+2)+\delta(\delta+1)+2\delta=2\delta^2+5\delta<7\delta.$$

Por lo tanto, dado ϵ, *si tomamos* $0<\delta<\min(1,\frac{\epsilon}{7})$ *se cumple la definición.*

Ejemplo 1.10
Determinar para que valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ *existe el límite en (0,0) de la función:*

$$f(x,y):=\frac{x^2\mid y\mid^\alpha}{x^6+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0);\quad f(0,0)=0.$$

Como $|x|\le(x^6+y^2)^{\frac{1}{6}},\ |y|\le(x^6+y^2)^{\frac{1}{2}}$ *se tiene:*

$$|f(x,y)|\le\frac{(x^6+y^2)^{\frac{1}{3}}.(x^6+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{x^6+y^2}=(x^6+y^2)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{3}}$$

Según lo anterior, si $\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{3}>0$, *esto es, si* $\alpha>\frac{4}{3}$,, *como la expresión de la derecha tiende a cero la función tiene por límite cero, y es continua.*
Si $\alpha\le\frac{4}{3}$ *hagamos* $y=mx^3$,

$$f(x,mx^3)=|x|^{3\alpha-4}\frac{|m|^\alpha}{1+m^2}$$

y entonces:
si $\alpha=\frac{4}{3}$ *el límite de* $f(x,mx^3)$ *depende de* m *y la función no es continua al no tener límite,*
si $\alpha<\frac{4}{3}$ *el límite de* $f(x,mx^3)$ *es infinito y tampoco es continua.*

3.4 Cambio a coordenadas polares.

Sean $A:=\{(\rho,\theta):\quad \rho>0,\quad \theta\in]0,2\pi]\}$ y $B:=\mathbf{R^2}\setminus(0,0)$, definamos :

$$g(\rho,\theta):=(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

donde g es una biyección continua de A en B de forma que si

$$C(\epsilon):=\{(\rho,\theta)\in A\quad:0<\rho<\epsilon,\quad 0<\theta\le 2\pi\}$$

entonces $g(C(\epsilon))=\{(x,y):0<\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon\}$.
Sea f una función de B en $\mathbb{R}$ y $F:=\ f\circ g$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L\quad\Leftrightarrow\quad\forall\epsilon>0\ \ \exists\delta>0:\quad|F(\rho,\theta)-L|<\epsilon,\quad\text{si}\quad 0<\rho<\delta,$$

uniformemente para $\theta\in]0,2\pi]$.

Ejemplo 1.11
Consideremos las funciones

$$(i)\quad f(x,y):=\frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\quad si\quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$(ii)\quad f(x,y):=\frac{y}{x}\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)\quad si\quad x\neq0;\quad f(0,y)=0$$

Si buscamos sus límites en (0,0) observamos que, en el primer caso, la correspondiente $F(\rho,\theta)=\frac{\mathrm{sen}\,\rho^2}{\rho^2}$ *tiene límite* 1 *sin depender del valor de* θ, *mientras que la correspondiente* $F(\rho,\theta)=\tan\theta.\mathrm{sen}\ \rho^2$ *tiende a cero con* ρ *pero dependiendo del valor de* θ.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 1.3
Estudiar la existencia del límite en (0,0) de las funciones:

$$(i) \qquad f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad si \quad (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0)=0,$$

$$(ii) \qquad f(x,y) := \frac{x^2y^3}{y^6+x^4} \quad si \quad (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0)=0.$$

Ejercicio 1.4
Si

$$f(x,y) := \frac{2x+y^2}{1+x^2+y^3},$$

demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 1.$$

Ejercicio 1.5
Si

$$f(x,y) := xy,$$

demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = ab.$$

Ejercicio 1.6
Determinar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es continua en (0,0) la función

$$f(x,y) := \frac{x \mid y \mid^{\alpha}}{x^4+y^4+x^2}, \quad (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0)=0.$$

Ejercicio 1.7
Determinar si existe límite en (0,0) de la función

$$f(x,y) := \frac{x\cos y - y\cos x - x + y}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0)=0.$$

Sugerencia: se puede resolver este ejercicio de tres maneras que en el fondo son la misma
(a) Como

$$f(x,y) = \frac{x^2y\frac{1-\cos x}{x^2} - xy^2\frac{1-\cos y}{y^2}}{x^2+y^2},$$

utilizar que $\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$ *y acotar.*
(b) Una alternativa es usar el desarrollo de Mc Laurin del coseno

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + R_2.$$

(c) Por coordenadas polares.

Ejercicio 1.8
Determinar si existe límite en (0,0) de

$$f(x,y) := \frac{x^4 + \operatorname{sen}\ y^4}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0)=0.$$

Ejercicio 1.9
Determinar si existe límite en (0,0) de

$$f(x,y) := \frac{1+x-\cos\,(x^2+y^2)-\arctan\ x}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0) \quad ; f(0,0)=a.$$

Ejercicio 1.10
Determinar si existe límite en (0,0) de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}$*:*

$$(i) \quad f(x,y) := \frac{1}{x}\operatorname{sen}(xy), \quad x\neq 0; \quad f(0,y)=0.$$

$$(ii) \quad f(x,y) := \frac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4}, \quad (x,y)\neq(0,0); \quad f(0,0)=a.$$

$$(iii) \quad f(x,y) := \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}, \quad (x,y)\neq(0,0); \quad f(0,0)=0.$$

$$(iv) \quad f(x,y) := \frac{(x.y)^2}{(x.y)^2+(x-y)^2}, \quad (x,y)\neq(0,0); \quad f(0,0)=0.$$

$$(v) \quad f(x,y) := \frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y}{\tan x-\tan y}, \quad \text{si} \quad \tan x\neq\tan y; \quad f(x,y)=\cos^3 x \quad \text{si} \quad \tan x=\tan y.$$

Ejercicio 1.11
Determinar si existe límite en (0,0) de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}$ *y razonar sobre su continuidad:*

$$(i) \quad f(x,y) := \frac{x\operatorname{sen}y+y}{|\,x\,|+|\,y\,|}, \quad (x,y)\neq(0,0); \quad f(0,0)=a.$$

$$(ii) \quad f(x,y) := \frac{x^2y}{x^6+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0); \quad f(0,0)=0.$$

$$(iii) \quad f(x,y) := \frac{x^2y+x\operatorname{sen}y}{\sqrt{x^2+y^2-xy}}, \quad (x,y)\neq(0,0); \quad f(0,0)=0.$$

$$(iv) \quad f(x,y) := \frac{x^2y^3}{x^4+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0); \quad f(0,0)=1.$$

$$(v) \quad f(x,y) := \frac{\operatorname{sen}x^3-\tan y^3}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0); \quad f(0,0)=0.$$

Práctica 2
Diferenciabilidad de funciones de varias variables

1 Derivadas parciales.

Sea $f\colon D \to$, siendo D un subconjunto abierto de ^{2}. Se llaman derivadas parciales primeras en el punto $(a,b) \in D$ a

$$D_1 f(a,b) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}, \qquad D_2 f(a,b) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t}.$$

De forma similar se definirán tres derivadas parciales primeras si D es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y, en general, n derivadas parciales si D está en $\mathbb{R}^n$.

2 Derivadas direccionales.

Sea $f\colon D \to$, siendo D un subconjunto abierto de ^{2}. Se llama derivada direccional de f en la dirección $v=(v_1,v_2)\neq(0,0)$, en el punto $(a,b)\in D$ a

$$D_v f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1,b+tv_2)-f(a,b)}{t}.$$

3 Gradiente.

Se llama gradiente de una función real f en un punto x al vector cuyas componentes son las derivadas parciales en ese punto. Se denota por $\nabla f(x)$.

Gemétricamente sabemos que es en la dirección del gradiente, si es no nulo, cuando la derivada direccional se hace máxima.

4 La diferencial.

Sea $f\colon D \to$, siendo D un subconjunto abierto de ^{2}. Se llama diferencial de f en $(a,b)\in D$ a una función lineal de ^{2} en , que será por lo tanto de la forma $T(h,k)=Ah+Bk$, tal que para $|h|<\delta,\ |k|<\delta$ se tenga

$$f(a+h,b+k)-f(a,b) = T(h,k) + \parallel (h,k) \parallel E(h,k),$$

siendo $\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k)=0$. Se dice entonces que f es diferenciable en (a,b) y se denota $T := df(a,b)$.

Es importante destacar las siguientes propiedades:

(i) Si f es diferenciable en (a,b), es continua en él.

(ii) Si f es diferenciable en (a,b), $A=D_1 f(a,b),\ B=D_2(a,b)$.

(iii) Si f es diferenciable en (a,b), existen $D_v f(a,b)=df(a,b)(v)$.

(iv) Si las derivadas parciales de f en (a,b) existen y son continuas en él entonces f es diferenciable en dicho punto.

5 Funciones de clase C^1.

Una función se dice que es de clase C^1 en un conjunto si existe un abierto conteniendo dicho conjunto en el que existen las derivadas parciales de la función y son continuas. Por la propiedad (iv) de la diferencial tal función es diferenciable en todos los puntos del conjunto.

Ejemplo 2.1
Sea la función

$$f(x,y) := \frac{x^4 + seny^4}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0) := 0.$$

Sabemos por el ejercicio 1.8 de la Práctica 1 que la función es continua en el origen. Estudiemos ahora sus derivadas direccionales:

Sea $v := (v_1, v_2)$ un vector no nulo, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4 v_1^4 + \operatorname{sen} t^4 v_2^4}{t^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{t\to 0} t \cdot \frac{v_1^4 + \frac{\operatorname{sen} t^4 v_2^4}{t^4 v_2^4} v_2^4}{v_1^2+v_2^2} = 0.$$

Luego $D_v f(0,0) = 0$. Sabemos así que la candidata a diferencial de f en el origen es $T(h,k) = 0h+0k = 0$, es decir, la función idénticamente nula. Notemos que si f no fuese continua automáticamente no sería diferenciable.

Si f es diferenciable en $(0,0,)$ deberá existir $E(h,k)$ tal que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = 0$ con

$$f(h,k) = 0h + 0k + \sqrt{h^2+k^2}E(h,k)$$

para h y y k suficientemente pequeños, es decir, deberá ser

$$E(h,k) = \frac{h^4 + \operatorname{sen} k^4}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $\quad |\frac{\operatorname{sen} k^4}{k^4}| \leq 1$*, podemos acotar*

$$|E(h,k)| \leq \frac{h^4 + k^4}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{(h^2+k^2)^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{h^2+k^2},$$

lo que asegura la tendencia a cero de $E(h,k)$ y la diferenciabilidad de f .

Estudiemos ahora el carácter de las derivadas parciales:

Si $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene

$$D_1 f(x,y) = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2x \operatorname{sen} y^4}{(x^2+y^2)^2},$$

que es continua, mientras que, como hemos visto, $D_1 f(0,0) = 0$. Vamos a ver que la función $g(x,y) := D_1 f(x,y)$ también es continua en el origen:

Como $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, se tiene

$$|D_1(x,y)| \leq \frac{2|x|^5 + 4|x|^3|y|^2 + 2|x||y|^4|\frac{\operatorname{sen} y^4}{y^4}|^5}{(x^2+y^2)^2} \leq$$

$$\leq \frac{2(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}} + 4(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}} + 2(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}{(x^2+y^2)^2} = 8\sqrt{x^2+y^2},$$

lo que nos asegura que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$ y $D_1 f$ es continua en el origen. Igual se haría con $D_2 f$. Por lo tanto f es de clase C^1 en todo el plano.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 2.1
Calcular, usando la definición, las derivadas parciales en (a,b) *de la función*

$$f(x,y) := 5x^2 + 3xy - 4y^3.$$

Analizar , a la vista del resultado el siguiente aserto: " Para derivar parcialmente una función con respecto a una variable se suponen constantes el resto de variables y se deriva con respecto a ella como si se tratara de una función de una variable."

Ejercicio 2.2
Calcular las derivadas direccionales en el (0,0) de las funciones:
$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *, si* $(x,y) \neq (0,0)$ *;* $f(0,0) := 0,$
$g(x,y) := y \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ *, si* $x \neq 0$ *;* $g(0,y) := 0.$
Según los resultados obtenidos, y comparando con los obtenidos en la práctica anterior, deducir si cabe alguna relación entre el hecho de que una función sea continua en un punto y el de que tenga derivadas direccionales en él.

Ejercicio 2.3
Calcular el vector gradiente de las funciones:
$f(x,y,z) := x^{y^z}$ *en* $(1,1,1)$,
$g(x,y) := log(x^2 + 2y + 1) + \int_0^x \cos t^2 dt$ *en* $(1,1)$.

Ejercicio 2.4
Determinar los valores de a, b *y* c *para los que la derivada direccional de la función*

$$f(x,y,z) := axy^2 + byz + cz^2x^3$$

tenga en $(1,2,-1)$ *un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje Z.*

Ejercicio 2.5
La temperatura de cada una de los puntos de una placa cuadrada viene determinada por la función $T(x,y) := (x-1)^3(y-2)^2$*. Se desea conocer cuáles son, en el punto (0,0), las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de la temperatura.*

Ejercicio 2.6
Denotemos por $z := 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ *la altura de una montaña en la posición* (x,y)*. ¿En qué dirección desde* $(1,0)$ *deberíamos comenzar a caminar para escalar lo más rápido posible?*

Ejercicio 2.7
Hallar el plano tangente a las gráficas de las funciones:
$f(x,y) := 2xy^2 + x^2y$ *en el punto* $(1,-1,1)$,
$g(x,y) := x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ *en el punto* $(1,1,2)$.

Ejercicio 2.8
Hallar los puntos de la superficie $z := 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$ *en los que el plano tangente es horizontal.*

Ejercicio 2.9
Estudiar la existencia de derivadas parciales, direccionales, diferenciabilidad y continuidad de las derivadas parciales en el origen de la función
$f(x,y) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$*;* $f(0,0) := 0$.

Ejercicio 2.10
Idem de $f(x,y) := \frac{x^3y}{x^4+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$*;* $f(0,0) := 0$.

Ejercicio 2.11
Idem de $f(x,y) := \frac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) := 0$.

Ejercicio 2.12
Idem de $f(x,y) := xy\log(x^2+y^2)$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) := 0$.

Ejercicio 2.13
Idem de $f(x,y) := x + x^2y \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) := 0$.

Ejercicio 2.14
Idem de $f(x,y) := \frac{x|y|^p}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) := 0$

Ejercicio 2.15
Idem de $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$ *si*$(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) := 0$.

Práctica 3
La regla de la cadena. Cambio de coordenadas.

Al igual que para el caso de funciones reales de variable real, es muy útil tener una fórmula para el cálculo de la diferencial de la composición de funciones. Es esta la conocida como *regla de la cadena* o *Teorema de la función compuesta.*

1 La regla de la cadena.

Sean U y V subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Si las aplicaciones $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ son diferenciables en $x_0 \in U$ y $f(x_0) \in V$, respectivamente. Entonces la aplicación $h := g \circ f$ es diferenciable en x_0, y además

$$Dh(x_0) = Dg\big(f(x_0)\big) \circ Df(x_0).$$

Supongamos que estamos bajo las hipótesis de la regla de la cadena, entonces, teniendo en cuenta que la matriz asociada a la composición de dos aplicaciones lineales es el producto de las matrices asociadas a dichas aplicaciones lineales, tenemos que las matrices Jacobianas cumplen la siguiente relación, conocida como **forma matricial de la regla de la cadena**

$$h'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big).f'(x_0). \tag{1}$$

Esta ecuación matricial nos da un conjunto de ecuaciones escalares que son las que nos interesan en la práctica. En efecto: Sean $f = (f_1, \dots, f_m)$, $g = (g_1, \dots, g_k)$ $h = (h_1, \dots, h_k)$, y sea $y_0 = f(x_0)$. Entonces la ecuación (1) nos queda como

$$\begin{pmatrix} D_1h_1(x_0) & D_2h_1(x_0) & \cdots & D_nh_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1h_k(x_0) & D_2f_k(x_0) & \cdots & D_nh_k(x_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D_1g_1(y_0) & D_2g_1(y_0) & \cdots & D_mg_1(y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1g_k(y_0) & D_2g_k(y_0) & \cdots & D_mf_k(y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1f_1(x_0) & D_2f_1(x_0) & \cdots & D_nf_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1f_m(x_0) & D_2f_m(x_0) & \cdots & D_nf_m(x_0) \end{pmatrix}$$

De donde, teniendo en cuenta la regla de multiplicación de matrices, nos quedan las ecuaciones

$$D_ih_j(x_0) = \sum_{r=1}^{m} D_rg_j(y_0)\ D_if_r(x_0), \qquad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k. \tag{2}$$

Que escritas en la otra notación nos quedan como

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_r}(y_0)\ \frac{\partial f_r}{\partial x_i}(x_0), \qquad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k.$$

Ejemplo 3.1
Supongamos que $f(x,y) := (x^2+1, y^2)$ *y* $g(u,v) := (u+v, u, v^2)$*. Sea* $h := g \circ f$*. Vamos a calcular, usando la regla de la cadena* $h'(1,1)$*. Tenemos que*

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$$

y

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Cuando $(x,y) = (1,1)$, $f(x,y) = (u,v) = (2,1)$. *Por tanto,*

$$h'(1,1) = g'(2,1)\ f'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora como usar la regla de la cadena para efectuar un **cambio de variables**. Supongamos que tenemos la función $z = z(x,y)$ y que queremos hacer el cambio de variable $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$. Tenemos entonces

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (x,y) & \mapsto & z(x,y). \end{array}$$

Por tanto, aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}$$

Para que este sistema, con incógnitas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, tenga solución se tiene que cumplir que

$$J := \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si se cumple esta condición, aplicando la regla de Cramer obtenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Este método es válido para tres o más variables. Como aplicación veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2
Vamos a transformar la expresión $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}$ *mediante el cambio a coordenadas polares* $x = \rho\cos\ \theta$, $y = \rho\,\text{sen}\ \theta$. *En este caso tenemos que*

$$J := \begin{vmatrix} \cos\ \theta & \text{sen}\ \theta \\ -\rho\,\text{sen}\ \theta & \rho\cos\ \theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0.$$

Luego,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \rho} & \text{sen}\,\theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}(\rho\cos\ \theta\ \frac{\partial z}{\partial \rho} - \text{sen}\ \theta\ \frac{\partial z}{\partial \theta}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \cos\ \theta & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ -\rho\,\text{sen}\ \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}(\cos\ \theta\ \frac{\partial z}{\partial \theta} + \rho\,\text{sen}\ \theta\ \frac{\partial z}{\partial \rho}).$$

Por tanto,

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = \rho\cos\ \theta\frac{1}{\rho}(\cos\ \theta\ \frac{\partial z}{\partial \theta} + \rho\,\text{sen}\ \theta\ \frac{\partial z}{\partial \rho}) - \rho\,\text{sen}\ \theta\frac{1}{\rho}(\rho\cos\ \theta\ \frac{\partial z}{\partial \rho} - \text{sen}\ \theta\ \frac{\partial z}{\partial \theta}) = \frac{\partial z}{\partial \theta}.$$

Ejemplo 3.3
Este ejemplo ilustra del riesgo que se corre al denotar las funciones por medio de variables reales. Sea $w = f(x, y, z)$ *y* $z = g(x, y)$*. Entonces, aplicando la regla de la cadena, tenemos que*

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Ahora, como $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ *y* $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$*, obtenemos que*

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

con lo cual

$$\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Pero si $w = x + y + z$ *y* $z = x + y$*, entonces*

$$\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1.$$

¿Donde está el error? Para resolverlo, vamos a plantear el mismo problema pero con notación funcional. Tenemos

$$\begin{array}{ccccc} & h & & f & \\ \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, g(x, y)) & \mapsto & f(x, y, g(x, y)). \end{array}$$

Sea $F := f \circ h$*. Entonces, aplicando la regla de la cadena nos queda que*

$$\begin{pmatrix} D_1F & D_2F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1f & D_2f & D_3f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1h_1 & D_2h_1 \\ D_1h_2 & D_2h_2 \\ D_1h_3 & D_2h_3 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual,

$$D_1F = D_1f_1D_1h_1 + D_2fD_1h_2 + D_3fD_1h_3.$$

Entonces, tomando $h_1(x, y) = x$, $h_2(x, y) = y$ *y* $h_3(x, y) = g(x, y)$*, nos queda que*

$$D_1F = D_1f + D_3fD_1g.$$

Por tanto, el error lo hemos cometido por igualar D_1F *con* D_1f*.*

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Ejercicio 3.1
Sean $f(x, y) = (e^{x+y}, x - y, x^2)$ *y* $g(u, v, w) = (uw, sen(v + w))$*. Calcula la matriz jacobiana de la función* $g \circ f$ *en el punto* $(0, 0)$*.*

Ejercicio 3.2
La temperatura en un punto (x, y, z) *viene dada por una función* $T(x, y, z)$*. Una partícula viaja por la hélice* $\sigma(t) = (cost, sent, t)$ *y denotamos por* $f(t)$ *la temperatura de la partícula en el instante* t*. Calcular* $f'(\frac{\pi}{2})$ *sabiendo que* $\bigtriangledown T(0, 1, \frac{\pi}{2}) = (2, 1, 3)$*.*

Ejercicio 3.3
Calcular las derivadas parciales de $h(x, y) = f(x \operatorname{sen} y, x, e^y)$ *en el punto* $(1, 0)$ *sabiendo que* $\bigtriangledown f(x, y, z) = (2x + y, x + z, y)$*.*

Ejercicio 3.4
Dada la función $f(u, v) = g(u - v, u + v, 2u)$ *se pide calcular las derivadas parciales de* f *en términos de las derivadas parciales de* g*.*

Ejercicio 3.5
Suponemos $f(\frac{y}{x}, \frac{g(x,y)}{x}) = 0$ *para cualquier valor de* x *e* y. *Si* $D_2 f(x,y) \neq 0$ *en todos los puntos, se pide probar que* $xD_1g(x,y) + yD_2g(x,y) = g(x,y)$.

Ejercicio 3.6
Sabemos que $F(x,y,z)$ *y* $g(x,y)$ *son dos funciones de clase* C^1 *que cumplen que* $F(x,y,g(x,y)) = 0$ *en todos los puntos* (x,y) *del plano. Calcular el vector gradiente de* g *en el punto* $(1,0)$ *suponiendo conocido que* $g(1,0) = 0$ *y* $\bigtriangledown F(1,0,0) = (-1,1,2)$.

Ejercicio 3.7
Calcular $\frac{\partial u}{\partial s}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *siendo* $u = x^2 - xy$, $x = s\cos t$, $y = t \operatorname{sen} s$.

Ejercicio 3.8
Sean $f(x,y,z) := \big(\operatorname{sen}\,(xy+z), (1+x^2)^{yz}\big)$ *y* $g(u,v) := \big(u + e^v, v + e^u\big)$. *Calcular* $\big(D(g \circ f)(1,-1,1)\big)(0,1,1)$.

Ejercicio 3.9
Supongamos que $u(x,t)$ *satisface la ecuación* $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ *y que* x, *como función* $x = f(t)$, *satisface* $\frac{dx}{dt} = u(x,t)$. *Probar que* $u(f(t),t)$ *es constante en* t.

Ejercicio 3.10
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 3$, *con* $f(x) = g(\|x\|)$, *siendo* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase* C^2.
(i) Probar que

$$\Delta f = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r), \quad r = \|x\| \neq 0.$$

(ii) Pobar que si $\Delta f = 0$ *entonces existen constantes* a *y* b, *tales que*

$$f(x) = \frac{a}{\|x\|^{n-2}} + b, \qquad x \neq 0.$$

Ejercicio 3.11
Suponiendo que f *es de clase* C^2, *transformar la ecuación en derivadas parciales*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

mediante el cambio de variable $u = x + y$, $v = x - y$.

Ejercicio 3.12
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *diferenciable,* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g = (g_1, g_2)$ *siendo* $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $g_2(x,y,z) = x + y + z$. *Demostrar que si* $h = f \circ g$, *entonces*

$$\|\nabla h\|^2 = 4\big(\frac{\partial f}{\partial u}\big)^2 g_1 + 4\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} g_2 + 3\big(\frac{\partial f}{\partial v}\big)^2.$$

Ejercicio 3.13
Siendo z *de clase* C^2, *transformar el Laplaciano de* z

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

mediante el cambio a coordenadas polares $x = r\cos\,\theta$ $y = r \operatorname{sen}\,\theta$.

Ejercicio 3.14
Calcular una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *que cumpla la ecuación*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f = 0.$$

Sugerencia: cambio $u = xy$, $v = x + y$

Ejercicio 3.15
Calcular la solución general de la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Sugerencia: cambio $\alpha = x + ct$, $\beta = x - ct$

Práctica 4
Fórmula de Taylor. Extremos relativos y absolutos.

1 Fórmula de Taylor.

En el desarrollo del cálculo, la aproximación de funciones arbitrarias por polinomios ha sido siempre una tarea destacable, ya que éstos son fácilmente computables en cualquier punto. Una de estas aproximaciones se estudia en el cálculo básico mediante los polinomios de Taylor. Más concretamente, para una función de una variable real f de clase C^{q+1} se tiene

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)h^3 + ... + \frac{1}{q!}f^{(q)}(x)h^q + R(x,h)$$

siendo $R(x,h)$ el denominado *Resto*, que determina el error, y se puede establecer aproximadamente de diferentes maneras. La más conocida es el *resto de Lagrange* en la que

$$R(x,h) = \frac{1}{(q+1)!}f^{(q+1)}(x+\theta h)h^{q+1}, \qquad \textit{con} \quad 0 < \theta < 1$$

El polinomio P_q que resulta como aproximación de f se denomina *Polinomio de Taylor de orden* q. Se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - P_q(x,h)}{|h|^q} = 0,$$

situación que caracteriza a dicho polinomio entre todos los de grado q.

En el caso de una función de clase C^∞, y si el resto tiende a cero al crecer q, se tiene la expresión como serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Para funciones de dos variables de clase C^{q+1} se tiene la expresión

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}[D_1f(x_0,y_0)(x-x_0) + D_2f(x_0,y_0)(y-y_0)]+\\
&\frac{1}{2!}[D_{11}f(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2D_{12}f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + D_{22}f(x_0,y_0)(y-y_0)^2]+\\
&\frac{1}{3!}[D_{111}f(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3D_{112}f(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)+\\
&\quad 3D_{122}f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + D_{222}f(x_0,y_0)(y-y_0)^3]+\\
&\frac{1}{4!}[\cdots] + \cdots + \frac{1}{q!}[\cdots] + R_q,
\end{aligned}$$

siendo $R_q = \frac{1}{(q+1)!}[\cdots]$, con el corchete involucrando a las derivadas parciales de orden $q+1$ actuando en un punto localizado en el segmento que une (x,y) con (x_0,y_0), y cumpliéndose que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_q}{||(x-x_0,y-y_0)||^q} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - P_q}{||(x-x_0,y-y_0)||^q} = 0$$

lo que caracteriza al polinomio P_q entre todos los de grado q.

Escriba el lector la situación para una función de tres variables.

Ejemplo 4.1
Probar que si $|x| < \frac{1}{10}$ *y* $|y| < \frac{1}{10}$, *entonces*

$$|e^x \sin(x+y) - (x+y)| < 0,05.$$

Solución: Si tomamos la función $f(x,y) = e^x \sin(x+y)$ *se tiene que*
$D_1 f(x,y) = e^x[\sin(x+y) + \cos(x+y)]$,
$D_2 f(x,y) = e^x \cos(x+y)$,
$D_{11} f(x,y) = 2e^x \cos(x+y)$,
$D_{12} f(x,y) = e^x[\cos(x+y) - \sin(x+y)]$,
$D_{22} f(x,y) = -e^x \sin(x+y)$,
con lo que el desarrollo de Taylor de orden 1 en $(0,0)$ *será*

$$e^x \sin(x+y) = x + y + R_1.$$

Al estar las segundas derivadas acotadas por $2e^x$ *se tiene que*

$$|R_1| \leq \frac{1}{2}.4.2.e^{0,1}.(0,1)^2 = 0,044 < 0,5.$$

Ejemplo 4.2
Hallar el polinomio de Taylor de orden q *en el origen de la función*

$$f(x,y) = e^{x+y}.$$

Solución: La función coincide con todas sus derivadas parciales, luego tanto ella como sus derivadas valen la unidad en el origen. Así

$$e^{x+y} = 1 + \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \cdots + \frac{1}{q!}(x+y)^q + R_q$$

Abreviadamente el polinomio es

$$P_q = \sum_{n=0}^{q} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

Compruebe el lector que si $f(x,y,z) := e^{x+y+z}$ *se trendrá*

$$P_q = \sum_{n=0}^{q} \frac{(x+y+z)^n}{n!}$$

lo que permite una extensión al caso de más variables.

Otra forma de encontrar estos polinomios de Taylor es la sigiente: si usamos que $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+R(t)$, *siendo* $\lim_{t\to 0} \frac{R(t)}{t^2} = 0$, *sustituyendo* $t = x$ *y* $t = y$ *y multiplicando los desarrollos se tiene*

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + R_2(x,y)$$

siendo, como se puede comprobar,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

y por la unicidad del polinomio de Taylor se deduce que $1 + (x+y) + \dfrac{(x+y)^2}{2}$ *es el de orden 2.*

Ejemplo 4.3
Escribir el desarrollo de Taylor de orden 1 de $f(x,y) := \log(x+e^y)$ en el $(1,0)$.

Solución: calculando

$$D_1f(x,y) = \frac{1}{x+e^y}, \quad D_2f(x,y) = \frac{e^y}{x+e^y}, \quad D_{11}f(x,y) = \frac{-1}{(x+e^y)^2},$$

$$D_{12}f(x,y) = \frac{-e^y}{(x+e^y)^2}, \quad D_{22}f(x,y) = \frac{xe^y}{(x+e^y)^2}$$

y particularizando a $x=1$ e $y=0$ y haciendo $x := 1+h$, $y=k$ se tiene para $0<\theta<1$

$$\log((1+h)+e^k) = \log 2 + \frac{h}{2} + \frac{k}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}[\frac{h^2}{(1+\theta h+e^{\theta k})^2} + \frac{2hke^{\theta k}}{(1+\theta h+e^{\theta k})^2} - \frac{(1+\theta h)e^{\theta k}k^2}{(1+\theta h+e^{\theta k})^2}].$$

Ejemplo 4.4
Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log\frac{(x+e^y)}{2} - \frac{(x+y-1)}{2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

Solución: Tomando, como en el problema anterior, $x = 1+h$ e $y=k$ y haciendo $R(h,k) := \log((1+h)+e^k) - \log 2 - \frac{h}{2} - \frac{k}{2}$ el límite se transforma en

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{||(h,k)||}$$

que sabemos que es cero por la fórmula de Taylor.

Ejemplo 4.5
Demostrar que si x e y son reales arbitrarios

$$\sin(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Solución: Si calculamos el polinomio de Taylor en el origen de orden $q = 2n+1$ se obtiene

$$P_q = (x+y) + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x+y)^q}{q!}$$

Como las derivadas parciales están acotadas por la unidad,

$$|R_q| = |\sin(x+y) - P_q| \le \frac{1}{(q+1)!}(x+y)^{q+1},$$

con lo que $\lim_{q\to\infty} R_q = 0$, cualesquiera que sean x e y reales, de donde se deduce la identidad planteada.

Nota La situación es más general alcanzando a cualquier función de dos variables de clase C^∞ cuyas derivadas parciales de orden q estén acotadas por M^q, para una constante M.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 4.1
Desarrollar la función $f(x,y) := xy$ en potencias de $x-1$ e $y-1$.

Ejercicio 4.2
Escribir el desarrollo de Taylor de orden 1 de $f(x,y) := \frac{1}{xy}$ *en el* $(1,-1)$.

Ejercicio 4.3
Idem el de orden 2 para $f(x,y) := \sin x \cdot \sin y$ *en el* $(0,0)$

Ejercicio 4.4
Idem el de orden 3 para $f(x,y) := e^{xy} \cdot \sin(x+y)$ *en el* $(0,0)$

Ejercicio 4.5
Calcular, aplicando la fórmula de Taylor, los límites:

(**i**) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x \cdot \sin y - xy}{x^2+y^2}$

(**ii**) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{(\frac{1}{xy} - x + y + 3)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+2y+2}}$

(**iii**) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x \sin(x+y) - x - y - x^2 - xy}{x^2+y^2}$

(**iv**) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \sin y + y \sin x}{xy}$

(**v**) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1-\cos xy)\log(1+x+y)}{(x^2+y^2)^2}$

2 Extremos de funciones.

Sea f una función real definida en un abierto U. Decimos que x_0 es un *máximo relativo estricto* (respectívamente un *mínimo relativo estricto* de f si existe un $r>0$ tal que si x está en U y $||x-x_0|| < r$, entonces $f(x) < f(x_0)$ (respectívamente $f(x_0) < f(x)$). Cualquiera de ambos casos lo citaremos como un *extremo relativo estricto*.

Si las desigualdades no son estrictas hablaremos de extremos relativos. En el caso de que cualquier desigualdad ocurra en todo U hablaremos de *extremos absolutos*.

Ejemplo 4.6
Consideremos $f(x,y) := e^{-|x-y^2|}$. *Como la función real* $f(t) := e^{-t}$ *es monótona decreciente en los reales no negativos y* $e^0 = 1$ *y* $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$, *entonces todo punto de la forma* (y^2, y) *es un máximo y no hay mínimos.*

Ejemplo 4.7
La función $f(x,y) := (x-1)^2 + (y-1)^4$ *es siempre no negativa y como* $f(1,1) = 0$ *observamos que* $(1,1)$ *es un mínimo absoluto.*

Para evitar la mera inspección a la hora de encontrar extremos usaremos las siguientes condiciones en dos variables:

2.1 Condición necesaria para la existencia de extremos.

Si $f(x,y)$ admite derivadas parciales en un extremo relativo, éstas son cero (a un punto con estas características se le denomina *punto estacionario* o *punto crítico*)

Todo punto estacionario que no sea extremo se denomina *punto de silla*

Ejemplo 4.8
La función $f(x,y) := x^2 - y^2$ *tiene en el* $(0,0)$ *un punto estacionario que no es máximo pues* $f(x,0) = x^2 > f(0,0)$ *si* $x \neq 0$ *y no es mínimo pues* $f(0,y) = -y^2 < f(0,0)$ *si* $y \neq 0$ *(La gráfica de la función recuerda una silla de montar a caballo, de ahí el nombre del punto).*

2.2 Condición suficiente para la existencia de extremos.

Sea f una función definida en un entorno de (x_0, y_0), un punto estacionario, de forma que existen las derivadas parciales segundas en un entorno de (x_0, y_0) siendo continuas en el punto. Sean

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad ; \quad B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad ; \quad C := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad ; \quad H := AC - B^2.$$

(i) Si $A > 0$ y $H > 0$, (x_0, y_0) es un mínimo relativo estricto de f.
(ii) Si $A < 0$ y $H > 0$, (x_0, y_0) es un máximo relativo estricto de f.
(iii) Si $H < 0$, (x_0, y_0) es un punto de silla.

Si $H = 0$ no podemos afirmar nada como nos muestran las funciones $f(x, y) := x^4 + y^4$, $g(x, y) := -x^4 - y^4$, $h(x, y) := x^4 - y^4$ que en el origen tienen respectívamente un mínimo, un máximo y un punto de silla siendo $H = 0$.

Ejemplo 4.9
Consideremos la función $f(x, y) := 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$. Calculemos sus puntos estacionarios resolviendo el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x^3 - 2x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4y = 0$$

que nos proporciona como soluciones
$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, -1), (\frac{-1}{2}, 0), (\frac{-1}{2}, 1), (\frac{-1}{2}, -1)$
Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 24x^2 - 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

se tiene, aplicando la condición suficiente, que
$(0, 0)$ *es un máximo relativo estricto,*
$(\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, -1), (\frac{-1}{2}, 1), (\frac{-1}{2}, -1)$ *son mínimos relativos estrictos y*
$(0, 1), (0, -1), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{-1}{2}, 0)$ *son puntos de silla.*

Ejemplo 4.10
Consideremos la función $f(x, y) := (y - x^2)(y - 2x^2)$
Calculemos sus puntos estacionarios resolviendo el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -6xy + 8x^3 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 3x^2 = 0$$

que nos proporciona como única solución el $(0, 0)$. Con la notación de la condición suficiente se tiene en él $A = 0$, $C = 2$ y $B = 0$, con lo que $H = 0$. A pesar de no obtener información si tomamos cualquier bola centrada en el origen, y salvo en éste, $f(x, y) < 0$ entre las parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2$, siendo $f(x, y) > 0$ en el resto de la bola. Se trata, pues, de un punto de silla.

El siguiente ejemplo nos muestra el llamado *Método de las regiones* para cuando se tiene $H = 0$

Ejemplo 4.11
Consideremos la función $f(x, y) := xy^2(3 - x - y)$
La función al ser de clase C^∞ permite que le sean aplicados todos los resultados anteriores. Calculemos en primer lugar sus puntos críticos resolviendo el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(3 - y - 2x) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xy(6 - 3y - 2x) = 0$$

cuyas soluciones son $(0,3)$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$ *y todos los puntos de la forma* $(x,0)$*. Analicemos cada caso:*

En el punto $(0,3)$ *se obtiene* $A = -18$, $B = -9$, $C = 0$ *y* $H = -81$, *luego se trata de un punto de silla.*

En el punto $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$ *se obtiene* $A = -\frac{9}{2}$, $B = -\frac{9}{4}$, $C = -\frac{27}{8}$ *y* $H = \frac{81}{4}$, *luego se trata de un máximo local estricto.*

En los puntos $(x,0)$ *vemos que* $A = B = 0$ *luego* $H = 0$*. Nuestro método de cálculo diferencial no nos aporta información luego vamos a estudiar el comportamiento de la función en un entorno de esos puntos. Como* $f(x,0) = 0$ *tendremos que estudiar el signo de* f *(si no fuese así bastaría sumar una constante a la función, no alterandose la derivadas, para conseguir el valor cero).*

La función, al estar factorizada, sabemos que se anula en los ejes ($x = 0$, $y = 0$) *y en la recta* $x + y = 3$ *. Las tres rectas dividen al plano (dominio de la función) en siete regiones (compruebese con un dibujo). Analizando el signo de los factores o eligiendo un punto al azar en el interior de cada una de ellas sabemos el signo de la función.*

Si tomamos un $(x,0)$ *con* $x < 0$ *observamos que se puede dibujar una bola centrada en él en donde la función toma un valor negativo (fuera del eje* X*) o cero (en el eje). Así pues se trata de un máximo local (no estricto).*

Si tomamos un $(x,0)$ *con* $x > 3$ *el razonamiento es idéntico.*

Si tomamos un $(x,0)$ *con* $0 < x < 3$ *el razonamiento es análogo cambiando negativo por positivo, luego se trata de un mínimo local no estricto.*

Finalmente en los puntos $(0,0)$ *y* $(3,0)$ *cualquier bola centrada en ellos contiene puntos donde la función es positiva y puntos donde la función es negativa. Se trata de un punto de silla. Conviene notar que este razonamiento valdría para el punto* $(0,3)$ *que ya habíamos visto que es de silla.*

2.3 Condiciones para la existencia de extremos absolutos.

Recordemos los siguientes resultados:

(1) Toda función real y continua sobre un compacto alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

(2) Toda función real, continua, no negativa y con límite cero en el infinito tiene máximo absoluto.

Ejemplo 4.12

Consideremos $f(x,y) := (ax^2 + by^2)e^{-(x^2+y^2)}$ *con* $a > 0$, $b > 0$.

Al ser no negativa y $f(0,0) = 0$ *resulta ser el origen el mínimo absoluto. Por la condición (2) anterior admite máximo absoluto. Distingamos su cálculo según los valores de* a *y* b.

Si $a = b$*, al considerar la función* $g(t) = ate^{-t}$ para $t \geq 0$*, con lo que* $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ *calculamos* $g'(t) = a(1-t)e^{-t}$ *con lo que en* $t = 1$ *la función pasa de creciente a decreciente y presenta un máximo relativo. Al ser* $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ *y* $g(0) = 0$ *se tiene que* f *tiene como máximos absolutos los puntos* $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Si $a \neq b$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(a - (ax^2 + by^2))e^{-(x^2+y^2)} = g_1(x,y)e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(b - (ax^2 + by^2))e^{-(x^2+y^2)} = g_2(x,y)e^{-(x^2+y^2)} = 0$$

que nos da como puntos estacionarios

$(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$

Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (-2xg_1(x,y) + (2a - 6ax^2 - 2by^2))e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-2xg_2(x,y) + (2b - 6by^2 - 2ax^2))e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (-2yg_1(x,y) - 4bxy)e^{-(x^2+y^2)}$$

se tiene que $(0,0)$ *es un mínimo relativo.*

Si $a > b$ $(0,1)$ *y* $(0,-1)$ *son puntos de silla y* $(1,0)$ *y* $(-1,0)$ *son máximos relativos.*

Si $a < b$ $(1,0)$ *y* $(-1,0)$ *son puntos de silla y* $(0,1)$ *y* $(0,-1)$ *son máximos relativos.*

En virtud del resultado (2) los extremos son absolutos.

Ejemplo 4.13

Determinemos los extremos absolutos de $f(x,y) := xy(1-x^2-y^2)$ *en* $[0,1]\times[0,1]$

Éstos existen por el resultado (1). Resolviendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-3x^2-y^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-x^2-3y^2) = 0$$

obtenemos el punto $(1/2,1/2)$. *Al ser* $A = C = -3/2$ *y* $B = -1/2$ *(luego* $H = 2$*) resulta ser un máximo relativo.*

En la frontera se tiene $f(0,y) = 0$, $f(x,0) = 0$, $f(1,y) = -y^3$, $f(x,1) = -x^3$. *Conjugando con lo anterior se obtiene que* $(1,1)$ *es el mínimo absoluto.*

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Ejercicio 4.6

Calcular los extremos relativos (y absolutos cuando existan) de las funciones:

(1) $f(x,y) := xy(1-x-y)$

(2) $f(x,y) := xye^{x+2y}$

(3) $f(x,y) := (x-y^2)(x-y^3)$

(4) $f(x,y) := y^2+x^2y+x^4$

(5) $f(x,y) := x^2+y^2+x+y+xy$

(6) $f(x,y) := (x-1)^2+(x-y)^4$

(7) $f(x,y) := y^2-x^3$

(8) $f(x,y) := \log(1+x^2+y^2) - \displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\,dt$

(9) $f(x,y) := \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

(10) $f(x,y) := \dfrac{x+y^2}{2+x^2+y^4}$

(11) $f(x,y,z) := (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$

(12) $f(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

Práctica 5
El teorema de la función implícita.

Estudiaremos en esta práctica los teoremas de la función inversa y de la función implícita haciendo hincapié, como hemos hecho en prácticas anteriores, en dimensiones dos y tres.

1 Teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^2$.

Sean $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 en el conjunto abierto U y $(x_0, y_0) \in U$ tal que $J_F(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existe V entorno abierto de (x_0, y_0) contenido en U con las siguientes propiedades:

(i) $W := F(V)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$
(ii) $F : V \to W$ es un homeomorfismo,
(iii) $F^{-1} : W \to \mathbb{R}^2$ es una función de clase C^1

Si F es de clase C^k en U entonces también F^{-1} es de clase C^k en W.

Ejemplo 5.1
Dada la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{R^2}$, $F(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$, *se pide:*
(a) Probar que F *es localmente invertible, con inversa de clase* C^∞, *en un entorno de cada punto* $(x_0, y_0), x_0 \neq 0$.
(b) ¿ Es F *invertible con inversa diferenciable en un entorno de un punto* $(0, y_0)$*?*

Solución:

(a) Es claro que F *es una función de clase* C^∞ *en* $\mathbb{R}^2$. *Además el jacobiano de* F *en un punto* (x_0, y_0) *viene dado por* $J_F(x_0, y_0) = -2x_0 \neq 0$. *Podemos aplicar el teorema de la función inversa para concluir que existe* V *entorno abierto de* (x_0, y_0) *con las propiedades (i), (ii), (iii) anteriores.*

(b) Supongamos V *entorno abierto de* $(0, y_0)$ *tal que* $W := F(V)$ *es abierto y* $F : V \to W$ *es un homeomorfismo con inversa diferenciable* G. *Entonces, por la regla de la cadena,* $dF(0, y_0) \circ dG(0, 0)=id_{\mathbb{R}^2}$ *y en consecuencia* $J_F(0, y_0).J_G(0, 0) = 1$, *lo que contradice* $J_F(0, y_0) = 0$. *Por tanto* F *no es invertible en ningún entorno de* $(0, y_0)$.

Ejercicio 5.1
Dada la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{R^2}$, $F(x, y) = (\operatorname{sen}\ x, -y + x \operatorname{sen}\ x)$ *se pide:*
(a) Averiguar si F *es invertible.*
(b) Averiguar en qué puntos es F *localmente invertible, con inversa diferenciable.*

2 Teorema de la función implícita (casos particulares).

2.1

Sean $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en el conjunto abierto U y $(x_0, y_0) \in U$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y $D_2F(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces existen $\delta > 0$ y una única función $\phi :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ de clase C^1 que cumple $\phi(x_0) = y_0$, $F(x, \phi(x)) = 0$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Si F es de clase C^k en U entonces ϕ es de clase C^k en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

2.2

Cuando $F : U \subseteq \mathbf{R^3} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en el conjunto abierto U y $(x_0, y_0, z_0) \in U$ cumple $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $D_3F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces existen V entorno abierto de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ y una única función $\phi : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que cumplen $\phi(x_0, y_0) = z_0$, $(x, y, \phi(x, y)) \in U$ y $F(x, y, \phi(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in V$. Si F es de clase C^k en U entonces ϕ es de clase C^k en V.

Ejemplo 5.2
(a) Prueba que la ecuación $xy = \log(\frac{x}{y})$ admite una única solución $y = \phi(x)$ de clase C^∞ definida en un entorno de $x_0 = \sqrt{e}$ y verificando $\phi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
(b) Deduce que la función ϕ presenta un máximo local en x_0.

Solución:

(a) Sean $U :=]0,\infty[\times]0,\infty[$ y $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x,y) = xy - \log(\frac{x}{y})$. Puesto que F es de clase C^∞ en U y el punto $(x_0,y_0) = (\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ cumple $F(x_0,y_0) = 0$ y $D_2F(x_0,y_0) = 2\sqrt{e} \neq 0$ podemos aplicar el teorema de la función implícita (I) para concluir que existen $\delta > 0$ y una única función $\phi :]x_0-\delta, x_0+\delta[\to \mathbb{R}$ de clase C^∞ que verifica $\phi(x_0) = y_0$, $F(x,\phi(x)) = 0$ para todo $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.

Esta última igualdad quiere decir que, para cada $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $(x,\phi(x)) \in U$ y además $y = \phi(x)$ es solución de la ecuación $xy = \log(\frac{x}{y})$.

(b) Comprobaremos que x_0 es un punto crítico de ϕ y que $\phi''(x_0) < 0$.

Puesto que

$$x\phi(x) = \log x - \log(\phi(x))$$

para todo $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, derivando respecto de la variable x obtenemos

$$(*)\ \phi(x) + x\phi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$$

para todo $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.

Sustituyendo $x = x_0$ y teniendo en cuenta que $\phi(x_0) = y_0 = x_0^{-1}$ se tiene

$$y_0 + x_0\phi'(x_0) = y_0 - \phi'(x_0)x_0,$$

de donde $\phi'(x_0) = 0$.

Si ahora derivamos en (*) obtendremos

$$2\phi'(x) + x\phi''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{\phi(x)\phi''(x) - (\phi'(x))^2}{(\phi(x))^2}$$

y al sustituir $x = x_0$, queda $x_0\phi''(x_0) = -y_0^2 - x_0\phi''(x_0)$, de donde $\phi''(x_0) < 0$.

Ejemplo 5.3
Siendo $F(x,y,z) = z^3\log(xy) + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$, prueba que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define exactamente dos funciones de clase C^∞, $z = \varphi_i(x,y)$ (i=1,2), en un cierto entorno de $(x_0,y_0) = (1,1)$. Compara los desarrollos de Taylor de primer orden de ambas funciones en un entorno del punto (x_0,y_0).

Solución:

(a) Resolviendo la ecuación $F(1,1,z) = 0$ obtenemos dos soluciones para z : $z_1 = -3$, $z_2 = -4$.

Puesto que F es una función de clase C^∞ en $U :=]0,\infty[\times]0,\infty[\times\mathbb{R}$, entorno abierto de (x_0,y_0,z_1) y de (x_0,y_0,z_2), y se cumple $F(x_0,y_0,z_i) = 0$, $D_3F(x_0,y_0,z_i) = 2z_i + 7 \neq 0$ (i=1,2), concluimos que existen un entorno abierto V de (x_0,y_0) y dos funciones de clase C^∞ en V, $\varphi_i : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (i=1,2), tales que $\varphi_i(x_0,y_0) = z_i$ y $F(x,y,\varphi_i(x,y)) = 0$ para todo $(x,y) \in V$.

(b) Para calcular el desarrollo de Taylor de φ_1 en un entorno de (x_0,y_0) observamos que $F(x,y,\varphi_1(x,y)) = 0$ para todo $(x,y) \in V$. Derivando respecto de x se obtiene

$$3(\varphi_1(x,y))^2 D_1\varphi_1(x,y)\log(xy) + x^{-1}(\varphi_1(x,y))^3 + 4x + 2\varphi_1(x,y)D_1\varphi_1(x,y)$$
$$+8\varphi_1(x,y) + 8xD_1\varphi_1(x,y) - D_1\varphi_1(x,y) = 0$$

y sustituyendo $x = y = 1$ queda

$$z_1^3 + 4 + 2z_1D_1\varphi_1(1,1) + 8z_1 + 7D_1\varphi_1(1,1) = 0$$

de donde $D_1\varphi_1(1,1) = 47$.

Si derivamos la ecuación $F(x, y, \varphi_1(x, y)) = 0$ *respecto de la segunda variable y después sustituimos* $x = y = 1$ *obtendremos*

$$z_1^3 + 4 + 2z_1 D_2\varphi_1(1,1) + 7D_2\varphi_1(1,1) \;=\; 0$$

y por tanto

$$D_2\varphi_1(1,1) = 23.$$

El polinomio de Taylor de primer orden de φ_1 *alrededor de (1,1) queda:*

$$P(x, y) = -3 + 47(x - 1) + 23(y - 1)$$

(c) Procediendo como en (b) obtendremos

$$z_2^3 + 4 + 2z_2 D_1\varphi_2(1,1) + 8z_2 + 7D_1\varphi_2(1,1) = 0$$
$$z_2^3 + 4 + 2z_2 D_2\varphi_2(1,1) + 7D_2\varphi_2(1,1) = 0$$

y por tanto

$$D_1\varphi_2(1,1) = -92 \quad , \quad D_2\varphi_2(1,1) = -60.$$

El polinomio de Taylor de primer orden de φ_2 *alrededor de (1,1) será:*

$$Q(x, y) = -4 - 92(x - 1) - 60(y - 1)$$

Ejercicio 5.2
Prueba que existe una única función $g : U \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *en algún entorno abierto* U *de* $(0, 0)$ *en* $\mathbb{R}^2$, *que se anule en* $(0, 0)$ *y que cumpla:*

$$e^{g(x,y)} = (1 + xe^{g(x,y)})(1 + ye^{g(x,y)}) \quad \forall (x, y) \in U.$$

Ejemplo 5.4
(a) Comprobar que el sistema
$xy^5 + yu^5 + v^5 = 1$
$x^5y + y^5u + v = 1$
define dos funciones $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ *de clase* C^∞ *en un entorno* U *de* $(x_0, y_0) = (0, 1)$ *tales que* $f(0, 1) = 1$, $g(0, 1) = 0$.
(b) Si se denota $G(x, y) := (f(x, y), g(x, y))$, *probar que* G *es invertible en un entorno de* $(0, 1)$ *y calcular la diferencial de la inversa en el punto (1,0).*

Solución:

(a) Sea $F : \mathbf{R^4} \to \mathbb{R}^2$ *la función de clase* C^∞ *cuyas funciones coordenadas son*
$F_1(x, y, u, v) := xy^5 + yu^5 + v^5 - 1$, $\quad F_2(x, y, u, v) := x^5y + y^5v + v - 1$.
Puesto que $F(0, 1, 1, 0) = (0, 0)$ *y el determinante*

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}$$

no se anula en el punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 0)$, *el teorema de la función implícita nos asegura que existe un entorno* U *de* (x_0, y_0) *y existen dos únicas funciones* $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de clase* C^∞ *tales que* $f(x_0, y_0) = u_0$, $g(x_0, y_0) = v_0$ *y se cumple que* $F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0$ *para todo* $(x, y) \in U$.

(b) Tenemos que calcular la matriz jacobiana de G *en el punto (0,1).*
Sustituyendo $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ *en el sistema de ecuaciones original y derivando respecto de la variable* x *obtendremos el sistema:*

$$y^5 + 5y(f(x,y))^4 D_1 f(x,y) + 5(g(x,y))^4 D_1 g(x,y) = 0$$
$$5x^4 y + y^5 D_1 f(x,y) + D_1 g(x,y) = 0$$

de donde, sustituyendo $x = 0$, $y = 1$, y teniendo en cuenta que $f(0,1) = 1$, $g(0,1) = 0$, se deduce $D_1 f(0,1) = -1/5$, $D_1 g(0,1) = 1/5$.

Mediante el mismo procedimiento pero derivando respecto de y se concluye que $D_2 f(0,1) = -1/5$, $D_2 g(0,1) = -5 + 1/5$.

Resulta que el jacobiano de G en (0,1) es distinto de cero y podemos aplicar el teorema de la función inversa. Por tanto existe un entorno abierto V de (0,1) tal que $W := G(V)$ es abierto, $G : V \to W$ es un homeomorfismo y la aplicación inversa $G^{-1} : W \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^∞.

Se sigue de la regla de la cadena que la matriz jacobiana de G^{-1} en el punto $(1,0) = G(0,1)$ es la inversa de la matriz jacobiana de G en $(0,1)$, cuyas componentes ya hemos calculado antes.

Ejercicio 5.3

Probar que el sistema :

$x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi$

$x^2 + y^2 + z^2 - xy = \pi^2$

define implícitamente una función $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $f : G \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $0 \in G$, G abierto de $\mathbb{R}$, en un entorno del punto $(0,0,\pi)$. Calcular $f'(0)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Ejercicio 5.4

Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 + y^3 + xy + x^3 + ax$, $a \in \mathbb{R}$. Determinar los valores de a para los que la ecuación $h(x,y) = 0$ define a y como función implícita de x de clase C^∞ en un entorno de $(0,0)$.

Sea $y = f(x)$ la función implícita determinada por $h(x,y) = 0$ en U entorno del origen. Calcular el valor de a para que el polinomio de Taylor de segundo grado de f en el origen valga 1 en $x = 1$.

Ejercicio 5.5

Comprueba que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{R^2}$, $F(x,y) = (x \cos y, \operatorname{sen}(x-y))$ tiene inversa local en un entorno del punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y calcula la matriz jacobiana de dicha inversa local en el punto $(0,0)$. Si denotamos por $G(u,v) := (f(u,v), g(u,v))$ la inversa local anterior, ¿ cuánto vale $D_1 f(0,0)$?.

Ejercicio 5.6

Prueba que la ecuación $\log(x^2 + y^2) - 2arctan(\frac{y}{x})) = 0$ define una función $y = g(x)$ de clase C^∞ en un entorno de $x_0 = 1$ tal que $g(1) = 0$ y calcula $g'(1)$.

Ejercicio 5.7

Prueba que la ecuación $\operatorname{sen}(yz) + \operatorname{sen}(xz) + \operatorname{sen}(xy) = 0$ admite una única solución $z = \phi(x,y)$ de clase C^1 en un entorno de $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$ que cumple $\phi(\pi, 0) = 1$. Calcula el polinomio de Taylor de primer grado de ϕ alrededor de $(\pi, 0)$.

Ejercicio 5.8

(a) Determinar los valores de a para los cuales el sistema :

$xz^3 + yu + xa = 1$

$2xy^3 + u^2 z + (y-1)a = 0$

define a (x,y) como función implícita de (z,u) en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0,1,0,1)$.

(b) Si (a) es cierto y se denota $(x,y) = (f(z,u), g(z,u)) := G(z,u)$, calcular la diferencial de G en (0,1) y estudiar los valores de a para los cuales G admite inversa local C^1 en un entorno de (0,1).

Ejercicio 5.9

Dada una función $F : \mathbf{R^3} \to \mathbb{R}$ de clase C^1, encontrar condiciones que garanticen que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ defina tres funciones de clase C^1

$$x = f(y,z), \quad y = g(x,z), \quad z = h(x,y)$$

en un entorno de (x_0, y_0, z_0). *Comprueba la identidad*

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Práctica 6
Extremos Condicionados

1 Introducción

El problema que nos planteamos podría enunciarse del modo siguiente:

> *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $M \subset A$. Consideremos la restricción de f a M, $f|_M$. ¿Podemos determinar los extremos absolutos de $f|_M$?.*

En realidad la pregunta anterior plantea dos cuestiones:

1. En primer lugar, debemos garantizar que $f|_M$ alcanza los valores máximo y/o mínimo, lo que generalmente haremos mediante argumentos de compacidad. (Recordemos que el *Teorema de Weierstrass* establece que toda función real, continua, definida en un compacto está acotada y alcanza su máximo y su mínimo).
2. En segundo lugar, habrá que hacer el cálculo efectivo de los valores extremos de $f|_M$. El método que emplearemos para hacer dicho cálculo será el de *Los Multiplicadores de Lagrange.*

Comenzaremos analizando la situación más simple. Supongamos que M es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que puede expresarse del siguiente modo:

$$M := \{x \in U : g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$$

siendo U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $g_1, \ldots, g_m$ funciones de clase C^1, de modo que la matriz Jacobiana $(D_i g_j(x))$ tiene rango máximo para cada $x \in M$, lo que abreviaremos diciendo que M es una *k-variedad (k=n–m) definida por la función g de coordenadas* $g_1, \ldots, g_m$. El teorema de los Multiplicadores de Lagrange establece que los extremos de $f|_M$ son puntos críticos de la función $\Phi(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)$, para ciertos valores de $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. En la práctica, se plantea y se intenta resolver el sistema de $n + m$ ecuaciones dado por:

$$\begin{cases} D_r\Phi(x) = 0, & r = 1, 2, \ldots, n \\ g_k(x) = 0, & k = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

para las $n + m$ incógnitas $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n$.

Observemos que el el Teorema de Lagrange da una condición necesaria pero no suficiente para que un punto sea extremo relativo de $f|_M$. Si el conjunto M es compacto, el Teorema de Weierstrass nos garantiza la existencia de al menos dos puntos x y x' en los que f alcanza el máximo y el mínimo respectivamente.

2 Ejemplos

Ejemplo 6.1
Calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la superficie del elipsoide

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0\}.$$

Al ser M un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$, f alcanza los valores máximo y mínimo en M. Además M es una variedad, por lo que aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Consideremos la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1)$. Sabemos que los extremos relativos de $f|_M$ son puntos críticos de F para algún valor de λ. Así pues, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda\frac{x}{64} &= 0 \\ 2y - 2\lambda\frac{y}{36} &= 0 \\ 2z - 2\lambda\frac{z}{25} &= 0 \\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos que, o bien $x = 0$ o bien $\lambda = 64$. En el primer caso, sustituyendo en las otras tres ecuaciones obtendríamos las soluciones $(0, 0, \pm 5), (0, \pm 6, 0)$.
Si $\lambda = 64$, al sustituir en las ecuaciones segunda y tercera obtenemos $y = z = 0$ y, llevando estos valores a la cuarta nos queda $x = \pm 8$. Finalmente, deberemos calcular $f(\pm 8, 0, 0), f(0, \pm 6, 0), f(0, 0, \pm 5)$, de donde resulta que el valor máximo de $f|_M$ es 64 y el mínimo es 25.

Nota. En ocasiones podemos estudiar los valores extremos de una función en un conjunto que no es compacto reduciéndolo a un problema de extremos sobre un compacto.

Ejemplo 6.2
Calcular la distancia mínima del punto $(0, b)$ a la parábola $x^2 - 4y = 0$.

Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + (y - b)^2$. Hay que calcular el mínimo de la raíz cuadrada de f restringida al conjunto $M := \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 - 4y = 0\}$. Es evidente que f y su raíz cuadrada alcanzarán el valor mínimo (si es que lo alcanzan) en el mismo punto. Por este motivo calcularemos el mínimo de $f|_M$. Puesto que M es una variedad utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello sea $F(x, y) = x^2 + (y - b)^2 + \lambda(x^2 - 4y)$. Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0 \\ 2(y - b) - 4\lambda &= 0 \\ x^2 - 4y &= 0 \end{aligned}$$

Resulta que si $b < 2$, obtenemos la solución $x = y = 0$, con lo cual la distancia mínima del punto a la parábola será, si existe tal valor mínimo, $|b|$. Si $b \geq 2$ tenemos tres posibles soluciones: $(0, 0), (\pm 2\sqrt{b - 2}, b - 2)$. Evaluando f en estos tres puntos resulta que la distancia mínima del punto $(0, b)$ a la parábola será, si existe tal mínimo, $2\sqrt{b - 1}$.
Por último, aunque M no es compacto, observemos que si un punto (x, y) se encuentra sobre la parábola pero $x \geq b$, la distancia de (x, y) a $(0, b)$ es mayor que el valor obtenido por el método de los multiplicadores, pero como el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y = 0,\ x \leq b\}$$

si que es compacto , la distancia de $(0, b)$ a dicho conjunto y, en consecuencia, la distancia a M, alcanza un mínimo.

Nota: Supongamos a continuación que M es un conjunto compacto cuyo interior no es vacío y cuya frontera es una variedad. En tal caso, si uno de los extremos de $f|_M$ se alcanza en el interior dicho punto crítico de f, mientras que si se alcanza en la frontera deberemos proceder como en el primer ejemplo. Así pues, la determinación de los extremos de $f|_M$ comporta dos etapas:

1) Hallar los puntos de máximo y mínimo relativos que sean interiores a M, trabajando en el conjunto

abierto $int(M)$, y calcular los valores de la función en los puntos obtenidos.
2) Hallar los puntos de extremo que pertenezcan a la frontera de M, y calcular los valores de la función en esos puntos.
Finalmente se tomará el mayor de los valores obtenidos en las etapas 1) y 2), y éste será el máximo absoluto. Para el mínimo tomaremos el menor de los valores obtenidos.

Ejemplo 6.3
Determinar los extremos absolutos de la función
$f(x,y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x$ *en el conjunto* $M = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} : x^2 + y^2 \leq 5\}$.

El conjunto M es compacto, su interior es la bola abierta de centro el origen y radio $\sqrt{5}$ y su frontera es la correspondiente circunferencia. Procederemos en dos etapas:

1) Buscamos los posibles extremos relativos de f en $int(M)$. Para ello calculamos los puntos críticos de f, es decir, resolvemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 0 \\ -6y &= 0 \end{aligned}$$

obteniendo la solución $(\frac{1}{2}, 0)$ y comprobamos que dicho punto pertenece a $int(M)$.

2) Determinamos los posibles extremos relativos de $f|_{\partial M}$. Para ello consideramos la función $F(x,y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ y determinamos sus puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x - 2 + 2\lambda x &= 0 \\ -6y + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se sigue que o bien $y = 0$ o bien $\lambda = 3$. En el primer caso obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$. Si $\lambda = 3$, de la primera ecuación deducimos que $x = \frac{1}{5y}$, y usando la tercera ecuación se tiene que $y = \pm\frac{2\sqrt{31}}{5}$.

Para terminar calculamos $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{5}, 0) = 10 - 2\sqrt{5}$,
$f(-\sqrt{5}, 0) = 10 + \sqrt{5}$, $f(\frac{1}{5}, \pm\frac{2\sqrt{31}}{5}) = \frac{84}{5}$, de donde resulta que el mínimo valor de $f|_M$ es $-\frac{1}{2}$ y el máximo es $\frac{84}{5}$.

Nota. A veces la frontera de M no es una variedad diferenciable, sino la unión de un número finito de variedades (convendremos en llamar *0-variedades* a los puntos). En estos casos habrá que desglosar la segunda etapa en la resolución de tantos problemas de extremos condicionados como variedades diferenciables tengamos. Por ejemplo, si M es un polígono en el plano, su frontera está formada por segmentos de diferentes rectas, es decir, su frontera es una unión de 1-variedades (los lados exceptuando los vértices) y de 0-variedades (los vértices).

3 Ejercicios Propuestos

Ejemplo 6.4
Determinar los extremos absolutos de f sobre el conjunto M:

Ejercicio 6.1
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad f(x,y,z) := 2x^2 + y^2 + z^2 - xy,$

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}$$

Ejercicio 6.2
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad f(x, y, z) := x(y + z),$

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y + z = 1\}$$

Ejercicio 6.3
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2,$

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : b^2y^2 + z^2 = 1,\ x - y = 0\}, b > 0$$

Ejercicio 6.4
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad f(x, y, z) := xy + z,$

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

Ejercicio 6.5
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) := \frac{x^2+y^2}{2} + xy,$

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq -1,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$$

Ejercicio 6.6
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) := x^2 + \frac{y}{2},$

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ y - x^2 \leq 0\}$$

Ejercicio 6.7
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) := x^2 + 3y^2 + x,$

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Ejercicio 6.8
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) = e^{x^2-y^2},$

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Ejercicio 6.9
La temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ es $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$. Hallar la temperatura máxima sobre la curva intersección de la esfera con el plano $x - z = 0$.

Ejercicio 6.10
Determinar los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2y^3(1-x-y)$ en el conjunto $K := \{(x, y) : |\, x \,| + |\, y \,| \leq 1\}$.

Ejercicio 6.11
Por el método de los Multiplicadores de Lagrange calcular la mínima distancia entre los siguientes conjuntos:
1. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $x + y = 2$.
2. El punto (a_1, a_2, a_3) y el plano $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$
3. El elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y el plano $x + y + z = 2$ con $a > b > c > 0$.

Ejercicio 6.12
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) := \sum_{i=1}^{n} b_i.x_i^2$ donde $b_i > 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ y sea M el hiperplano $M := \{x \in \mathbb{R} | a.\ x = 1\}$. Estudiar los extremos de f en M.