J.A. Oteo. Departamento de Física Teórica (UVEG).[MMF1-B]

TEMA 2: **EDO: Sistemas lineales con coeficientes constantes**

28 de noviembre de 2012

1. Sistema lineal: Notación

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \qquad A \in \mathrm{R}^{N\times N}, \qquad \vec{f}(t),\ \vec{x}(t) \in \mathrm{R}^{N} \tag{1}$$

Supondremos que la matriz de los coeficientes A es diagonalizable, con valores propios $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ y vectores propios $\{\vec{y}_k\}_{k=1}^{N}$: $A\vec{y}_k = \lambda_k \vec{y}_k$, $k = 1...N$.

2. Ecuación homogénea: $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$

2.1. Solución en función de constantes arbitrarias

Resolvemos $\vec{x}(t)$ en función de N constantes arbitrarias $\{c_k\}_{k=1}^{N}$. En el caso sin degeneración la solución es

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \exp(\lambda_i t)\vec{y}_i \tag{2}$$

La prueba es por sustitución en la ecuación diferencial.

En caso de valores propios degenerados consideramos dos posibilidades:

a) Podemos encontrar N autovectores l.i. de A, en cuyo caso podemos expresar la solución como en (2).

b) En caso contrario, convertimos el sistema a una EDO de orden superior y resolvemos.

2.2. Ejemplo 1

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \quad z \\ \dot{z} &= \quad y \end{aligned} \tag{3}$$

Notación: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Además: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con valores propios $\lambda = \pm 1$. Solución:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Mediante las condiciones iniciales: $y(0) = 1 = c_1 + c_2,\ z(0) = 0 = c_1 - c_2$; determinamos: $c_1 = 1,\ c_2 = 0$. Finalmente

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.3. Solución en función de condiciones iniciales

Queremos obtener $\vec{x}(t)$ en términos de N condiciones iniciales $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, de forma explícita.

Definimos el vector $\vec{c} \equiv (c_1, c_2, \ldots, c_N)^T$, cuyos elementos son las constantes arbitrarias de la solución (2), que podemos re-escribir en forma matricial

$$\vec{x}(t) = M(t)\vec{c} \tag{6}$$

donde la matriz $M(t)$ se construye fácilmente a partir de (2). En particular, en $t = t_0$ tenemos

$$\vec{x}(t_0) = M(t_0)\vec{c} \equiv \vec{x}_0. \tag{7}$$

Como M es invertible, podremos escribir

$$\vec{x}(t) = M(t)M^{-1}(t_0)\vec{x}_0. \tag{8}$$

Una propiedad importante de la matriz M es la siguiente. Dado que $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, teniendo en cuenta (6) será

$$\frac{d}{dt}M(t)\vec{c} = AM(t)\vec{c}. \tag{9}$$

Como (9) debe ser válida para cualquier conjunto de condiciones iniciales $\vec{c}$, concluimos con el resultado importante de que $M(t)$ satisface la ecuación diferencial matricial

$$\dot{M} = AM. \tag{10}$$

La derivada de la matriz $M(t)$ se interpreta como la derivada de cada elemento de matriz $M_{ij}(t)$.

2.4. Ejemplo 1 *revisitado*

De manera alternativa, utilizamos la matriz M para determinar la solución de (3) en términos del vector de condiciones iniciales $\vec{x}(0) = (1, 1)^T$. Podemos escribir a partir de (4)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \equiv M(t)\vec{c} \tag{11}$$

Siendo

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Finalmente usamos (8): $\vec{x}(t) = M(t)M^{-1}(0)\vec{x}(0)$, junto con (11) y (12)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Evidentemente, esta forma de resolución resultará práctica en problemas más complicados que éste.

3. Ecuación no-homogénea: $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$

Existen dos formas generales de abordar el problema:

1. Convertimos el sistema de dimensión N a una EDO de orden N, no-homogénea, y utilizamos los métodos de variación de constantes o de variación de parámetros.

2. Resolvemos mediante un método matricial.

3.1. Caso: Conversión a EDO de orden superior para dimensión dos

Si el sistema es de dimensión dos, entonces para una cualquiera de las variables dependientes, llamémosla w, obtendremos una ecuación de la forma genérica

$$\ddot{w} + \alpha\dot{w} + \beta w = g(t) \tag{14}$$

donde $g(t)$ es la correspondiente componente de $\vec{f}(t)$ y α, β constantes. La solución viene dada por

$$w(t) = C_1 w_1(t) + C_2 w_2(t) + W(t) \tag{15}$$

donde $w_1(t), w_2(t)$ representan dos soluciones l.i. de la ecuación homogénea (14) y $w(t)$ es la solución particular, que podemos buscar mediante el método de variación de constantes o el de variación de parámetros. Pero en este caso, es posible dar una expresión general explícita para $W(t)$. Para ello, definimos

$$\mathcal{S}[\phi(t)] \equiv \int \phi(t)\mathrm{d}t \tag{16}$$

La solución particular en (15) es (*método de variación de parámetros*)

$$W(t) = \mathcal{S}[w_1 g/\Delta]w_2 - \mathcal{S}[w_2 g/\Delta]w_1 \tag{17}$$

donde Δ representa el Wronskiano

$$\Delta = w_1(t)\dot{w}_2(t) - w_2(t)\dot{w}_1(t) \tag{18}$$

Por tanto, si podemos evaluar las primitivas $S[w_1 g/\Delta],\ S[w_2 g/\Delta]$, entonces tenemos una forma analítica explícita para la solución particular.

3.2. Ejemplo 2

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinar la solución del sistema:

$$\begin{array}{rl} \dot{y} = & z + 2 \\ \dot{z} = & y + 2 \end{array} \tag{19}$$

Notación: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Además: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Obtenemos una EDO de segundo orden derivando la primera ecuación y sustituyendo la segunda: $\ddot{y} - y = 2$, cuya solución es

$$y(t) = D_1 \exp(t) + D_2 \exp(-t) - 2. \tag{20}$$

Obtenemos z a partir de $z = \dot{y} - 2$:

$$z(t) = D_1 \exp(t) - D_2 \exp(-t) - 2 \tag{21}$$

Las condiciones iniciales determinan: $D_1 = 3,\ D_2 = 0$; de manera que la forma final de la solución es

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = [3\exp(t) - 2] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

De **forma alternativa**, podemos también encontrar la solución particular mediante (17). El Wronskiano de las soluciones $w_1 = e^t, w_2 = e^{-t}$ es en este caso: $\Delta = -2$. Entonces, según (17)

$$W(t) = \mathcal{S}\left[\frac{e^{-t}}{-2}2\right] e^t - \mathcal{S}\left[\frac{e^t}{-2}2\right] e^{-t} = -2 \tag{23}$$

de acuerdo con la solución obtenida en (20).

3.3. Método matricial

La matriz $M(t)$ definida en (6) en relación con la solución $\vec{x}_h(t)$ del sistema homogéneo $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, permite escribir la solución de la ecuación no-homogénea $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ en forma vectorial

$$\vec{x}(t) = M(t)M^{-1}(t_0)\vec{x}(t_0) + M(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

donde la integral de un vector es la integral de cada componente.

La prueba de (24) es por sustitución en la propia ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \dot{M}(t)M^{-1}(t_0)\vec{x}(t_0) + \dot{M}(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau + M(t)M^{-1}(t)\vec{f}(t) \\ &= AM(t)M^{-1}(t_0)\vec{x}(t_0) + AM(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau + \vec{f}(t) \\ &= A\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \end{aligned} \tag{25}$$

donde se ha tenido en cuenta la identidad (10): $\dot{M} = AM$.

3.4. Ejemplo 2 *revisitado*

Siendo $y(0) = 1, z(0) = 1$, determinamos la solución del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \quad z + 2 \\ \dot{z} &= \quad y + 2 \end{aligned} \tag{26}$$

mediante el método matricial. La matriz $M(t)$ viene determinada por el sistema homogéneo (3)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \quad z \\ \dot{z} &= \quad y \end{aligned} \tag{27}$$

cuyas matrices $M(t)$, dada en (11), e inversa son

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad M^{-1}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix} \tag{28}$$

Teniendo en cuenta $\vec{f}(t) = (2,2)^T$ y la ecuación (24), obtenemos la solución (22)

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} \\ e^{\tau} & -e^{\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3e^t - 2 \\ 3e^t - 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{29}$$