Modelización con calculadoras gráficas.

Onofre Monzó del Olmo y Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València

Resumen

Usar datos reales en la enseñanza de las funciones es importante en el currículo y puede ser extremadamente motivador para los alumnos. Las calculadoras gráficas proporcionan nuevas oportunidades para llevar datos reales al aula, gracias a los nuevos artefactos que se les pueden acoplar: sensores que toman datos de diversa naturaleza y programas que los archivan de forma automática.

En el taller se presentan actividades que se pueden modelizar con diferentes familias funcionales, tales como:

Relaciones lineales -Espacio recorrido/tiempo, a paso constante, longitud de un muelle/peso que soporta, relación ºC/ºF, presión/profundidad-, cuadráticas -caída de un cuerpo, bote de una pelota-, proporcionalidad inversa -P=V/k, con volumen constante-, exponencial -calentamiento/enfriamiento de un cuerpo- trigonométrica -naturaleza del sonido-

Introducción

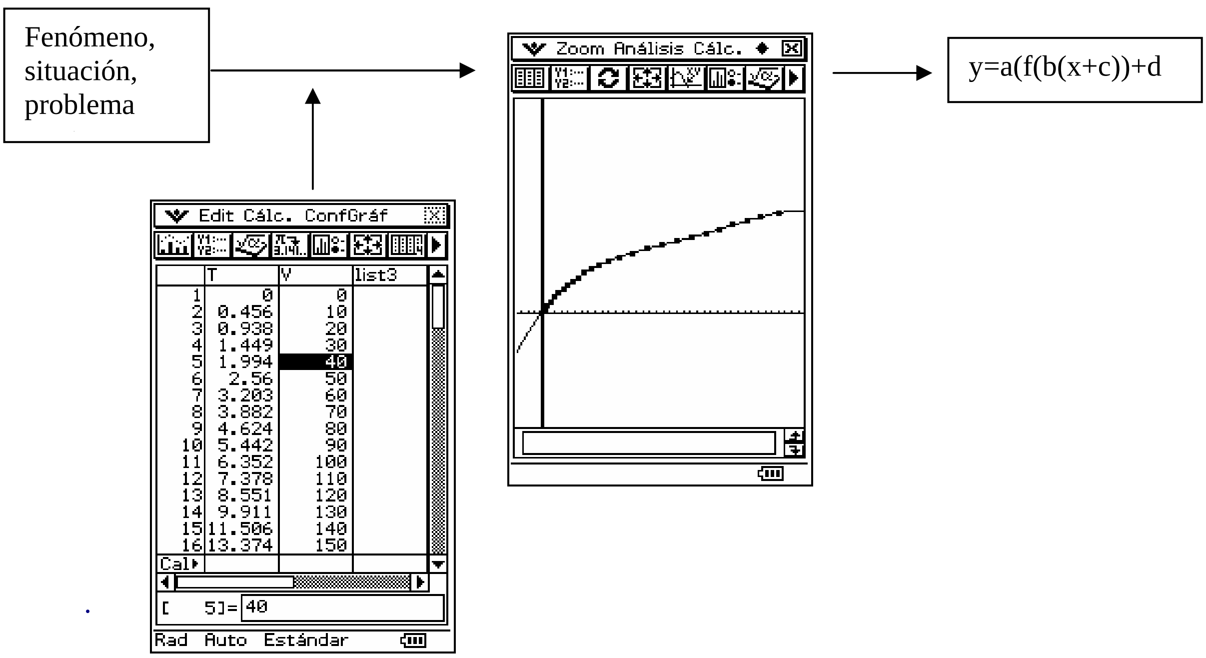
La disponibilidad creciente de las TIC está teniendo un impacto considerable no sólo en la enseñanza de las matemáticas sino también en las ideas que los usuarios de las matemáticas se hacen de ella e incluso en la propia naturaleza de las matemáticas. Esto es particularmente notable en el caso del álgebra, no sólo por el desarrollo de programas de cálculo algebraico simbólico, sino por el desarrollo del soporte de programas que son las calculadoras gráficas, que los integran junto con programas de representación gráfica de funciones y otros programas de cálculo y representación gráfica.

En el mes de enero de 2000, se reunió en la Universidad de Melbourne el Comité Internacional de Programa del estudio organizado por la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) con el título *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. En esa reunión, el comité elaboró un documento de discusión que ha dado origen al libro del mismo título recientemente publicado en la serie de ICMI Studies de la editorial Kluwer (Stacey, K.; Chick, H. & Kendal, M. (Eds.), 2004). El documento de discusión comenzaba declarando que “Álgebra” ha de entenderse en un sentido amplio que permita abarcar todo lo que se entiende por álgebra en los currículos escolares de todos los países del mundo. Para lo que a nosotros nos interesa aquí, esto ha de incluir, al menos, el álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración; el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.

Por otro lado, usar datos reales en la enseñanza de las funciones es importante en el currículo y puede ser extremadamente motivador para los alumnos. Las calculadoras gráficas proporcionan nuevas oportunidades para llevar datos reales al aula, gracias a los nuevos artefactos que se les pueden acoplar: sensores que toman datos de diversa naturaleza y programas que los archivan de forma automática.

El documento de discusión del ICMI Study citado dedica un apartado a este asunto, titulado “Álgebra con datos reales”, y otros dos a los efectos de los entornos tecnológicos, y, en particular, los sistemas de álgebra computacional.

Además, todo esto se combina con el interés creciente por la modelización matemática, entendida como la construcción de un modelo matemático a partir de una situación o problema del mundo real, que se ha visto favorecida por el avance de las nuevas tecnologías y de los nuevos entornos informáticos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en particular las calculadoras gráficas:



.

Las actividades

Según Nicaud y otros (2004), "razonar por equivalencia es uno de los principales modos de razonamiento del álgebra; esto consiste en buscar la solución de un problema remplazando la expresión algebraica resultante del problema por otras expresiones equivalentes, [… con la ayuda] de identidades que permiten la transformación de las expresiones salvaguardando la equivalencia". Es por que en la secuencia de enseñanza se propone que después de realizar la experiencia y obtener los datos se compruebe que el mismo modelo puede tener diferentes expresiones equivalentes y que según el contexto unas son mejor que otras.

La lista, no exhaustiva, siguiente muestra alguna de las actividades que se pueden realizar con el equipo EA-200 y el modelo matemático que resulta.

Relaciones lineales ($y=ax+b$)
Espacio recorrido/tiempo, a paso constante (motion sensor), longitud de un muelle/peso que soporta (motion sensor), relación ºC/ºF (temperatura), altura llenado de un recipiente/tiempo, a caudal constante (motion sensor), presión/profundidad (presión)
Cuadráticas ($y=a(x+b)^2+c$)
Caída de un cuerpo (motion sensor), bote de una pelota (motion sensor)
Proporcionalidad inversa ($y=a/(x+b)$)
P=V/k, con volumen constante (presión), T= 1/f (micrófono)
Exponencial ($y=ae^{b(x+c)}+d$)
Calentamiento/enfriamiento de un cuerpo (temperatura), carga y descarga de un condensador (voltaje)
Trigonométrica ($y= a\cdot sen(b(x+c))+d$)
Moviendo de un muelle (motion sensor), oscilación de un péndulo (motion sensor), naturaleza del sonido (micrófono)

Veamos el desarrollo de alguna de las actividades propuestas:

Enfriamiento de un cuerpo

En esta experiencia vamos a analizar la función que describe el enfriamiento de un cuerpo a partir de una temperatura aproximada de unos 70ºC. Para ello tomaremos datos durante cinco minutos espaciados, cada uno del siguiente, un segundo (dos o tres segundos también será suficiente), a partir del momento en que el sensor sea separado de la fuente de calor. Posteriormente, repetiremos la experiencia comenzando a una temperatura menor. Ajustaremos ambas representaciones de datos a funciones. Compararemos dichas funciones y analizaremos sus diferencias.

Material necesario

- Unidad EA 200
- Calculadora gráfica ClassPad 300
- Sonda de temperatura
- Programa E-ConEA200
- Recipiente y líquido, en nuestro caso, agua.
- Fuente de calor
- Termómetro

Desarrollo de la experiencia

El profesorado deberá hacer una pequeña introducción en la que presenten cuáles son los elementos con los que se va a trabajar. Simplemente identificarlos, y plantear la siguiente pregunta: ¿Sabemos cuál es el modelo que describe cómo se enfrían los cuerpos? O, dicho de otra manera, supongamos que tenemos un cuerpo muy caliente o con temperatura alta, y se le deja enfriar. ¿Cuál es la función que describe la temperatura del cuerpo en cualquier instante?

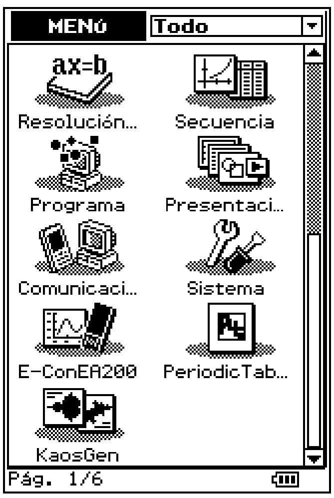
El profesor o la profesora colocará el extremo de la sonda dentro del vaso con agua caliente, la sonda conectada al EA-200, y este conectado a la calculadora.

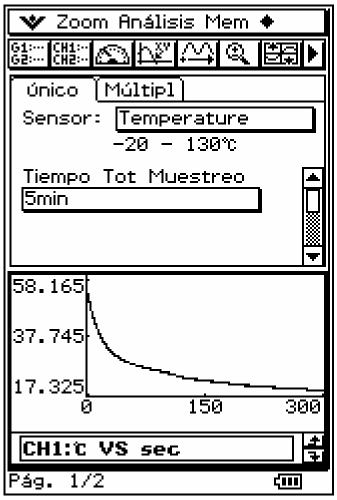
Se puede establecer un corto debate, en el que las opiniones irán orientando la atención hacia una función decreciente y con una forma determinada. Es conveniente que se hable sobre estas dos cuestiones en el caso de que no salgan espontáneamente: tendencia y forma. Sería interesante en este momento pedir a los alumnos y las alumnas que emitieran una hipótesis al respecto y por tanto, que hicieran un esbozo de cuál será la gráfica que esperan encontrar cuando hayan realizado la experiencia.

Podemos profundizar en los distintos modelos funcionales y su relación con el tipo que gráfica que generan, y a este respecto, se le puede pedir al estudiante que razone qué modelo funcional va asociado con cada una de las distintas gráficas, justificando en cada caso cuál corresponde al experimento estudiado. Para ello se puede disponer del modelo, que ya se trabajó en el problema de la presión.

A continuación el profesor ejecuta la aplicación 

y, siguiendo las instrucciones del programa, indica que la toma de datos de temperatura sea cada dos o tres segundos como máximo. Después, saca el extremo de la sonda del vaso con agua caliente en el instante en el que la máquina empieza a tomar datos de temperatura.





En la pantalla se observa la nube de puntos que se genera por lo que se puede ratificar o desechar la tendencia y forma que antes se especuló.

Necesitamos guardar los resultados obtenidos para su posterior manipulación. Para ello seleccionamos el menú mem de la barra superior. Después elegiremos la opción Todo del submenú Guardar lista. Y pondremos el nombre que queramos en las posibles opciones.

Ahora son los alumnos y las alumnas quienes deberán trabajar con los datos obtenidos en el experimento.

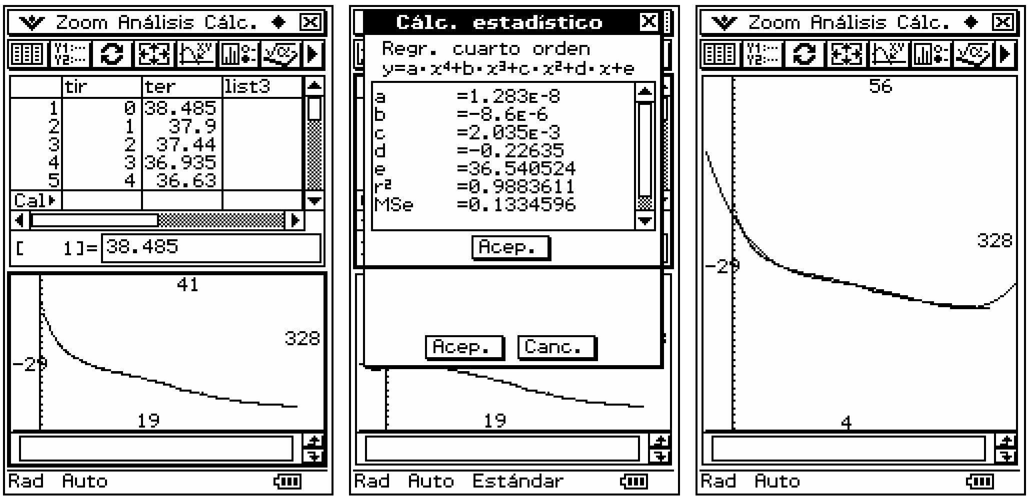
Hay que hacer notar que hemos almacenado los datos en las listas tir (tiempo) y ter (temperatura) de la carpeta main. Se procede al paso de los valores guardados en las lista tir y ter (tiempos y temperaturas) a las calculadoras del alumnado a través de la aplicación comunicación 

. La transferencia de información de una calculadora a otra, requiere únicamente el cable de conexión, que estará conectado a las dos máquinas.

También habrá que determinar los valores de la ventana, , que permiten representar en uno de los gráficos estadísticos la nube de puntos. Por supuesto, para esto habrá que definir convenientemente uno de ellos, siguiendo el modelo que la calculadora del profesor o la profesora ha establecido a partir de la ejecución del programa.

Una vez tienen en su calculadora los datos y la gráfica de la nube de puntos correspondiente, se les va a pedir que ajusten automáticamente a la nube aquella función que mejor describe la situación. Tal vez haya que empezar indicando como calcular la recta de regresión, y dibujarla tras su obtención. A partir de ahí los alumnos y las alumnas obtienen la parábola de regresión, la cúbica de regresión,... de la misma manera que ya se mostró en la propuesta de la cámara fotográfica, o en el problema de la presión.

Con cada regresión podemos plantearnos si verdaderamente dicha función proporciona la temperatura de la sonda en cualquier instante, no sólo entre los valores del rango de la muestra obtenida sino también para los valores del tiempo posteriores.



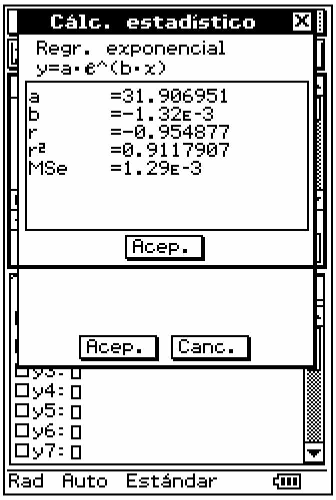
Las preguntas a plantear serían:

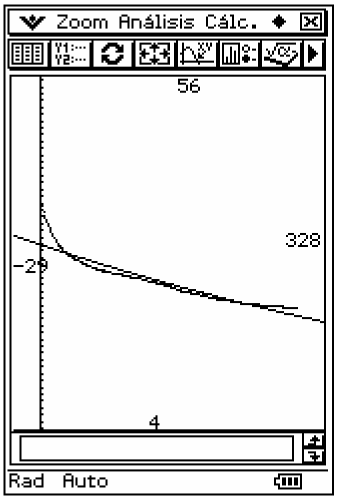
¿Cuál fue la temperatura de la sonda en el instante 5: f(5)= ?
¿Y en el instante 25: f(25)= ?
¿Y en el instante 150: f(150)= ?
¿Cuál debería ser la tendencia de la función que describe la temperatura cuando el tiempo tiende a $+\infty$?

El alumnado debe deducir que la tendencia de la temperatura de la sonda debe ser la de estabilizarse alrededor de la temperatura ambiente, por lo que no puede ser un valor negativo ni dispararse a valores muy grandes. La respuesta a esta última pregunta, debería incluir, además del valor de la temperatura ambiente de la clase en ese momento, la idea de que la función se aproxima a ese valor de manera asintótica**.**

A partir de aquí, y observando las opciones de la calculadora, se le sugiere al estudiante (si éste no lo ha descubierto ya) la utilización de la regresión exponencial.

Una vez calculada y representada, la función exponencial obtenida “se ajusta peor” para los primeros valores de la nube de puntos, pero su tendencia sigue la norma que pensamos debe seguir la temperatura de la sonda, es decir, es estrictamente decreciente y asintótica al eje de abscisas.





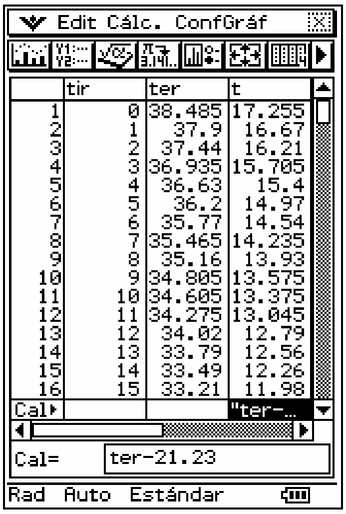
Viendo la expresión analítica de la función obtenida, se puede preguntar, igual que antes:

¿A qué tiende o cuál es el límite de la función cuando avanzamos en el tiempo de forma indefinida?

La respuesta obvia es que tiende a 0, puesto que la base de la función exponencial obtenida es menor que 1, por lo que observamos que hay algo que no funciona.

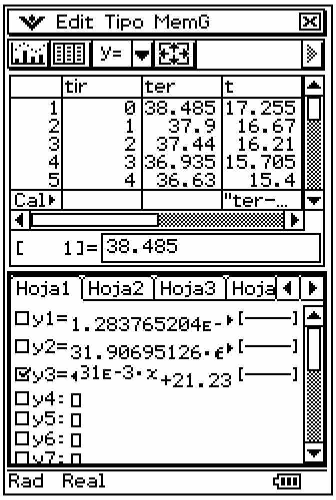
¿Cómo hacer para que la función que queremos obtener verdaderamente se ajuste a la nube según su tendencia?

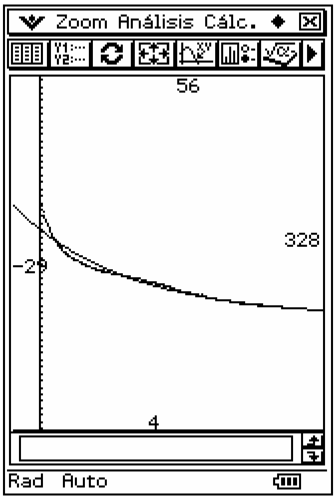
Pueden llegar a ver que simplemente hay que hacer un cambio de escala, es decir, o bien subir la gráfica el valor correspondiente a la temperatura ambiente (lo cual crearía un desajuste entre los valores de la nube y la función), o bien bajar los valores obtenidos experimentalmente con el fin de que la nube de puntos siga la tendencia de la función exponencial: aproximarse asintóticamente al eje de abscisas. Elegimos esta segunda opción, con lo cual, le decimos al alumnado que vamos a obtener una nueva lista de valores, que llamaremos t, en la que colocaremos los valores de la temperatura ajustados a la temperatura ambiente, es decir, $t = ter\text{-}T_0$.



Para hacer esto, deberemos colocarnos en la etiqueta de la lista, y pulsar en **Cal.**, de manera que el cursor parpadea en la línea de edición, y la máquina está preparada para aceptar la fórmula que queramos definir. Esta temperatura ambiente T_0 se puede obtener con el termómetro del que se dispone en el aula, o bien se puede estimar a partir del menor valor recogido por el EA 200.

Para visualizar la nueva nube de puntos, modificaremos la listay en el gráfico estadístico correspondiente (cambiando ter por t). Ahora, solamente tenemos que calcular la regresión exponencial a los nuevos valores obtenidos. A la vista de su representación gráfica, volvemos a pedir a los alumnos si verdaderamente esta función vendrá a representar el proceso de enfriamiento de la sonda, a partir de la observación de su tendencia. De nuevo se puede preguntar:





¿Cuál fue la temperatura de la sonda en el instante 5: f(5)= ?
¿Y en el instante 25: f(25)= ?
Y en el instante 150: f(150)= ?

Y las preguntas finales:

¿Cuál es la función que proporciona en este caso la temperatura de la sonda en cualquier instante?
En general, ¿qué forma tiene la gráfica que proporciona la temperatura de un cuerpo que se enfría en cualquier instante?

La respuesta correcta la proporciona la Ley de Newton en la forma siguiente:

$$T=T_0+Ke^{At}$$

Donde K y A son constantes (la constante A depende del cuerpo que se enfría), T0 la temperatura del ambiente, t el tiempo y T la temperatura del cuerpo que se está enfriando en cualquier instante.

Si elegimos en el menú Calc.\Reg. Exponencial ab la ecuación que obtenemos con la calculadora es de la forma:

$$T=T_0+ab^t$$

Las dos expresiones, ¿son equivalentes?

Tras un análisis de las dos expresiones se ve que el problema está en si $ke^{At} = ab^t$, con lo que a = k y A = ln b.

El experimento se repetirá a partir de un valor inicial de temperatura menor desarrollando el mismo procedimiento, de manera que nos sirva para comparar el valor de las constantes.

Movimiento a rectilíneo uniforme

Material necesario:

- EA-200
- Calculadora gráfica (usaremos un ClassPad 300)
- Cable de conexión.
- Aplicación E-ConEA200

Desarrollo de la experiencia

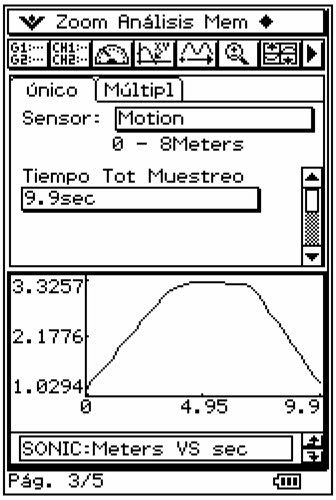
Se instala el EA-2 y se pide a un estudiante que se ponga delante del aparato y que explique el movimiento que quiere hacer:

- de dónde parte
- si se mueve hacia atrás o adelante
- en cuánto tiempo

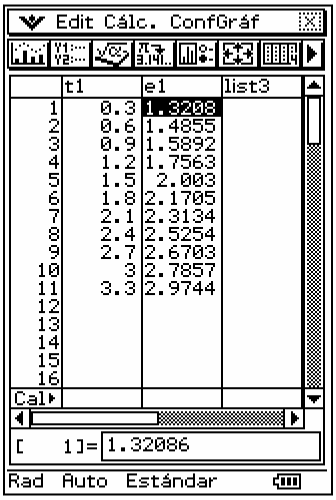
Luego se le pide que diga cómo cree que será la gráfica.

El estudiante se mueve durante 10 segundos (tiempo indicativo) y va viendo en la pantalla el resultado.

Con la gráfica en la pantalla deben analizarse:
- los ejes y sus unidades
- el punto de partida (cuál es el origen)
- la distancia al origen en cada momento
- el significado de los valores de **x** e **y**
- el significado de la pendiente de la gráfica
- ¿por qué hay una parte plana?

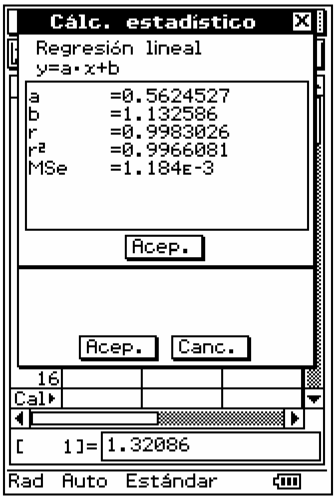


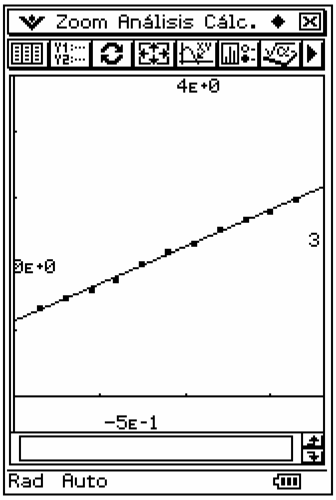
Para el estudio del movimiento se elige una parte del dominio, por ejemplo el ascendente y como en experimentos anteriores abriremos las listas en el editor de listas de la aplicación Estadística

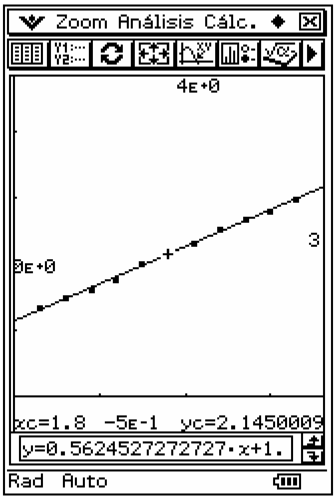


Calcularemos ahora una recta de regresión de **t1** y **e1**, y la almacenaremos en y1.

Posteriormente, definiremos un gráfico estadístico, con los puntos y la recta de regresión.



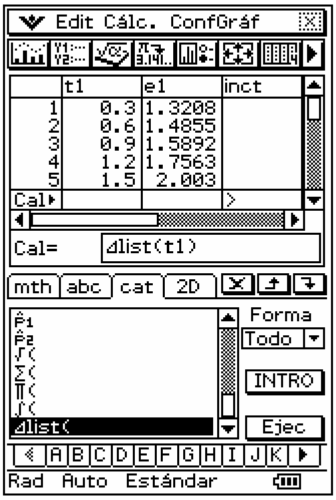


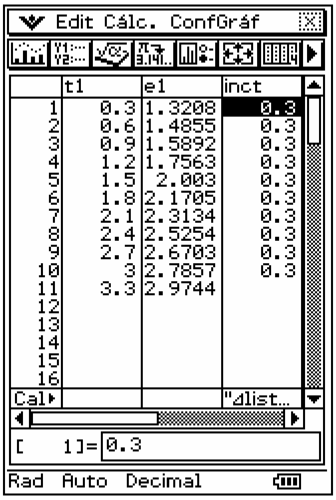


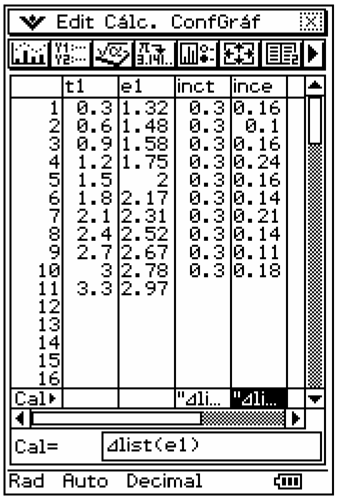
Con la opción tabla de la aplicación Gráficos & T… podemos obtener los valores correspondientes a cada segundo.

Volviendo al editor de listas, en **t1** y **e1** tenemos almacenados los datos con los que trabajaremos a continuación:

En inct almacenaremos las diferencias entre las lecturas de **t1**, y en ince las de **e1**:





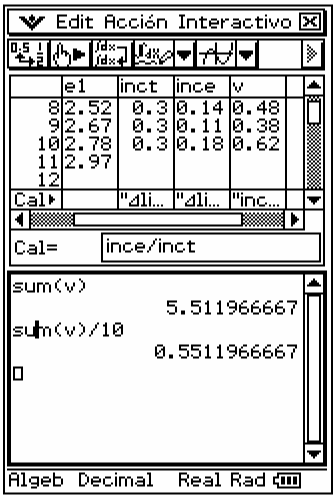


Así hemos obtenido Δe y Δt. Si en v calculamos el cociente, estamos obteniendo la velocidad para cada intervalo de lectura

Sumando los valores de v y dividiendo el total entre el número de datos tenemos la velocidad media.

Aquí es conveniente analizar los conceptos de:

- La pendiente (velocidad) en cada tramo (Δe / Δt)
- Significado de la pendiente negativa
- Velocidad instantánea
- Velocidad media
- Incrementos de velocidad
- Comparación entre el valor calculado y la pendiente de la recta de regresión



Referencias

Nicaud, J.-F., Bouhineau, D. et Chaachoua, H. (2004). Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. *International Journal of computers for Mathematical Learning, 9*, 169-211.

Stacey, K.; Carlson, D.; Drouhard, J.-P.; Fearnley-Sander, D.; Fujii, T.; Kieran, C.; Kissane, B.; Lins, R.; Rojano, T.; Puig, L.; Sutherland, R.; Hodgson, B.; Chick, H., 2000. Discussion Document for the Twelfth ICMI Study: The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, no. 48, pp. 6-13.

Stacey, K.; Chick, H. & Kendal, M. (Eds.) (2004). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study*. Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.