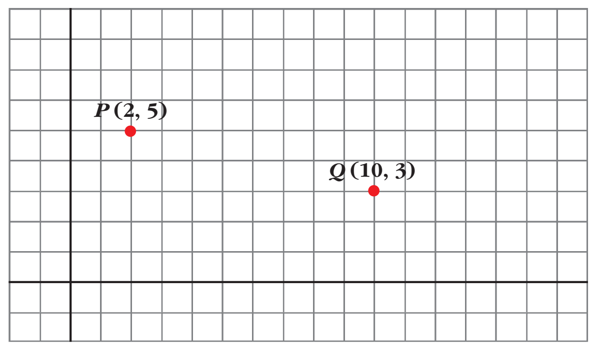
8 GEOMETRÍA ANALÍTICA. PROBLEMAS AFINES Y MÉTRICOS

Página 188

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Punto medio de un segmento

Toma los puntos $P(2, 5)$, $Q(10, 3)$ y represéntalos en el plano:



- **Localiza gráficamente el punto medio M del segmento PQ y da sus coordenadas. ¿Encuentras alguna relación entre las coordenadas de M y las de P y Q?**

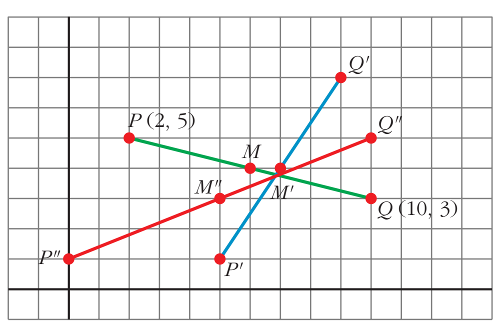
- **Haz lo mismo con los segmentos de extremos:**

  a) $P'(5, 1)$, $Q'(9, 7)$ b) $P''(0, 1)$, $Q''(10, 5)$

- **Basándote en los resultados anteriores, intenta dar un criterio para obtener las coordenadas del punto medio de un segmento a partir de las de sus extremos.**

- $M(6, 4)$

  $M\left(\dfrac{10+2}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right)$



- a) $M'(7, 4)$

  b) $M''(5, 3)$

- Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ los extremos de un segmento.

  El punto medio de AB será $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$.

Ecuaciones de la recta

Observa las siguientes ecuaciones: $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = \quad\;\; 2t \end{cases}$

- **Comprueba que, dando a t los valores 0, 1, 3, 4, 5, se obtienen puntos que están todos sobre una recta.**

- **Comprueba que las ecuaciones** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = \;4 - t \end{cases}$ **corresponden también a una recta, hallando varios de sus puntos. (Dale a t los valores –2, –1, 0, 1, 2, 3 y representa los puntos correspondientes; comprobarás que todos están sobre la misma recta).**

- **Elimina el parámetro procediendo del siguiente modo:**

  — Despeja t en la primera ecuación.

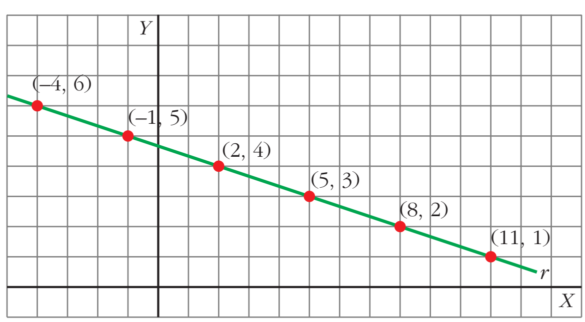
  — Sustituye su valor en la segunda.

  — Reordena los términos de la ecuación resultante.

  Obtendrás, así, la ecuación de esa recta, en la forma habitual.

-

t	–2	–1	0	1	2	3
(x, y)	(–4, 6)	(–1, 5)	(2, 4)	(5, 3)	(8, 2)	(11, 1)

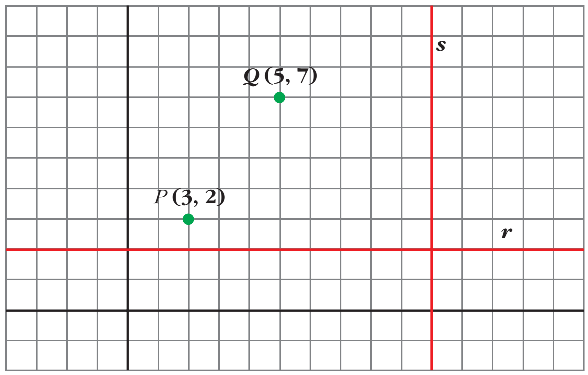


- $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-2}{3} \\ \\ t = 4 - y \end{array}\right\} \to \dfrac{x-2}{3} = 4 - y \to x - 2 = 12 - 3y \to y = \dfrac{-x+14}{3} \to$

  $\to y = \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{14}{3}$

Página 189

Distancias en el plano



- **Halla la distancia de P y de Q a cada una de las rectas r y s.**
- **Halla la distancia entre los puntos P y Q (ayúdate del Teorema de Pitágoras).**
- **Halla, también, la distancia entre:**

  a) $P'(0, 5)$, $Q'(12, 0)$ b) $P''(3, 1)$, $Q''(7, 4)$

- $d(P, r) = 1$; $d(P, s) = 8$; $d(Q, r) = 5 = d(Q, s)$
- $d(P, Q) = \overline{PQ} \to \overline{PQ}^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \to \overline{PQ} = 5$
- a) $d(P', Q') = \overline{P'Q'} \to \overline{P'Q'}^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \to \overline{P'Q'} = 13$

  b) $d(P'', Q'') = \overline{P''Q''} \to \overline{P''Q''}^2 + 4^2 + 3^2 = 25 \to \overline{P''Q''} = 5$

- $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, donde $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$.

  $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$

Página 191

1. Halla las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$, siendo $M(7, -5)$ y $N(-2, -11)$.

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

2. Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ y $R(10, 25)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-3, -14) \\ \overrightarrow{QR} = (6, 28) \end{array}\right\} \to \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \to A, B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

3. **Calcula el valor de k para que los puntos de coordenadas $A(1, 7)$, $B(-3, 4)$, $C(k, 5)$ estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-4, -3) \\ \overrightarrow{BC} = (k+3, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \rightarrow -4 = -3k - 9 \rightarrow 3k = -5 \rightarrow k = \frac{-5}{3}$$

Página 192

4. **Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, -1)$:**

a) Halla el punto medio de PQ.

b) Halla el simétrico de P respecto de Q.

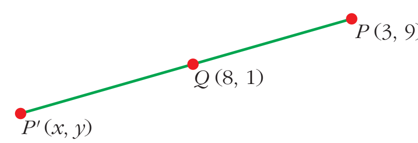
c) Halla el simétrico de Q respecto de P.

d) Obtén un punto A de PQ tal que $\overline{PA}/\overline{AQ} = 2/3$.

e) Obtén un punto B de PQ tal que $\overline{PB}/\overline{PQ} = 1/5$.

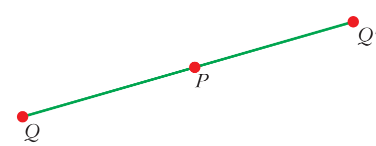
a) $M\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l} \frac{3+x}{2} = 8 \rightarrow x = 13 \\ \frac{9+y}{2} = -1 \rightarrow y = -11 \end{array}\right\} \rightarrow P'(13, -11)$$



c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de Q respecto de P.

Así: $$\left.\begin{array}{l} \frac{x'+8}{2} = 3 \rightarrow x' = -2 \\ \frac{y'+(-1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19 \end{array}\right\} Q'(-2, 19)$$



d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{2}{3}(8-x, -1-y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 3 = \frac{2}{3}(8-x) \rightarrow x = 5 \\ y - 9 = \frac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y = 5 \end{array}\right\} A(5, 5)$$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{PQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ y - 9 = -2 \rightarrow y = 7 \end{array}\right\} B(4, 7)$$

Página 194

1. Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) Que pasa por $A(-3, 7)$ y tiene una dirección paralela al vector $\vec{d}(4, -7)$.

b) Que pasa por $M(5, 2)$ y es paralela a $\vec{d}\,'(2, 2)$.

En ambos casos, dando valores al parámetro, obtén otros cinco puntos de la recta.

a) $\vec{OX} = \vec{OA} + t\vec{d} \rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(d_1, d_2) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 7t \end{cases}$$

t	–2	–1	0	1	2	3
(x, y)	(–11, 21)	(–7, 14)	(–3, 7)	(1, 0)	(5, –7)	(9, –14)

b) $\vec{OX} = \vec{OM} + t\vec{d}\,' \rightarrow (x, y) = (m_1, m_2) + t(d'_1, d'_2) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = m_1 + td'_1 \\ y = m_2 + td'_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

t	–2	–1	0	1	2	3
(x, y)	(1, –2)	(3, 0)	(5, 2)	(7, 4)	(9, 6)	(11, 8)

2. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por:

a) $P(5, -2)$ y $Q(0, 4)$

b) $M(3, 7)$ y $N(3, 0)$

c) $A(0, 0)$ y $B(7, 0)$

d) $R(1, 1)$ y $S(3, 3)$

a) El vector dirección es: $\vec{PQ} = (-5, 6) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$

b) $\vec{d} = \vec{MN} = (0, -7) \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 - 7t \end{cases}$

c) $\vec{d} = \vec{AB} = (7, 0) \rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 0 \end{cases}$

d) $\vec{d} = \vec{RS} = (2, 2) \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

3. Halla k para que $S(-5, k)$ pertenezca a r: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} -5 = 1 + 3t \rightarrow t = -6/3 = -2 \\ k = 2 - 4t \end{cases}\right\} \rightarrow k = 2 - 4(-2) = 10$$

Página 195

1. Halla el ángulo que forman las siguientes rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

Los vectores directores de r_1 y r_2 son, respectivamente, $\vec{d_1}(-2, 1)$ y $\vec{d_2}(-4, 3)$.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{|\vec{d_1}|\ |\vec{d_2}|} = \frac{8+3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{25} \approx 0{,}984 \ \to \ \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}4''$$

2. Obtén para las rectas del ejercicio anterior:

a) La paralela a r_1 que pase por el punto (5, 7).

b) Una perpendicular a r_2 que pase por (0, 0).

a) $\left.\begin{array}{l} r \parallel r_1 \\ P(5, 7) \in r \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \vec{d} = \vec{d_1} \\ P \in r \end{array}\right\} \to r: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l} r' \perp r_2 \to \vec{d'} \perp \vec{d_2} \to \vec{d'} = (3, 4) \\ P(0, 0) \end{array}\right\} \to r': \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}$

Página 196

1. Considera las siguientes rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad r_3: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -5 - 6t \end{cases} \quad r_4: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -12 + 4t \end{cases}$$

Halla la posición relativa de r_1 y r_2, r_2 y r_3, r_3 y r_4.

- Posición relativa de r_1 y r_2

  $\left.\begin{array}{r} 7 + 5t = 2 + s \\ -2 - 3t = 1 - 2s \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5t - s = -5 \\ -3t + 2s = 3 \end{array}\right\}$ Por 2 la 1ª ecuación y se suman:

  $10t - 2s = -10$

  $-3t + 2s = 3$

  $7t \quad = -7 \to t = -1 \to$ de la 1ª ecuación: $s = 5 + 5(-1) = 0$

  Como tiene solución única, entonces r_1 y r_2 se cortan en el punto $P(2, 1)$ (que se obtiene sustituyendo $t = -1$ en r_1 o $s = 0$ en r_2).

- Posición relativa de r_2 y r_3

  $\left.\begin{array}{r} 2 + s = 5 + 3t \\ 1 - 2s = -5 - 6t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} s - 3t = 3 \\ -2s + 6t = -6 \end{array}\right\}$ Las dos ecuaciones son equivalentes.

  Luego el sistema tiene infinitas soluciones. Por tanto, $r_2 = r_3$ (son la misma recta).

• Posición relativa de r_3 y r_4

$$\left.\begin{array}{r} 5 + 3t = 5 - 2s \\ -5 - 6t = -12 + 4s \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3t + 2s = 0 \\ -6t - 4s = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tienen solución.}$$

Luego no tienen ningún punto en común. Por tanto, son paralelas.

Es decir, $r_3 \,//\, r_4$.

Página 197

1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene por ecuación:

$5x - 3y + 8 = 0$

Sea $x = t \rightarrow 5t - 3y + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8/3 + (5/3)t \end{cases}$

NOTA – 2º MÉTODO

El vector $(5, -3)$ es perpendicular a r. Por tanto, el vector $(3, 5)$ es paralelo a r. Podemos tomarlo como vector dirección:

$$\vec{d} = (3, 5)$$

Si $x = 0 \rightarrow y = \frac{8}{3}$. Luego $\left(0, \frac{8}{3}\right) \in r$

Así, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 8/3 + 5t \end{cases}$$

(equivalente a la obtenida por el otro método).

2. Halla la ecuación implícita de la recta: $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, y las sumamos:

$$2x = 10 - 6t$$
$$3y = -3 + 6t$$
$$\overline{2x + 3y = 7} \rightarrow r: 2x + 3y - 7 = 0$$

NOTA – 2º MÉTODO: $\left.\begin{array}{l} x = 5 - 3t \rightarrow t = \dfrac{x - 5}{-3} \\ y = -1 + 2t \rightarrow t = \dfrac{y + 1}{2} \end{array}\right\} \dfrac{x - 5}{-3} = \dfrac{y + 1}{2}$

$$2x - 10 = -3y - 3$$
$$r: 2x + 3y - 7 = 0$$

Página 199

1. Escribe la ecuación de la recta de pendiente 3 y cuya ordenada en el origen es –5.

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ P(0, -5) \in r \end{array}\right\} \to r: y = -5 + 3(x - 0) \to$$

$\to r: y = 3x - 5 \to$ ECUACIÓN EXPLÍCITA

$\to r: 3x - y - 5 = 0 \to$ ECUACIÓN IMPLÍCITA

2. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:

a) (–7, 11), (1, 7) **b) (3, –2), (1, 4)**

c) (6, 1), (11, 1) **d) (–2, 5), (–2, 8)**

a) $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{7 - 11}{1 - (-7)} = \dfrac{-4}{8} = \dfrac{-1}{2}$

Tomando el punto (1, 7)

$y - 7 = \dfrac{-1}{2}(x - 1)$

$x + 2y - 15 = 0$

b) $m = \dfrac{4 + 2}{1 - 3} = \dfrac{6}{-2} = -3$

Tomando el punto (1, 4)

$y - 4 = -3(x - 1)$

$3x + y - 7 = 0$

c) $m = \dfrac{1 - 1}{11 - 6} = 0$

Tomando el punto (6, 1)

$y - 1 = 0 \to y = 1$

d) $m = \dfrac{8 - 5}{-2 + 2}$ ¡Imposible! Entonces, no tiene pendiente.

No se puede poner de forma explícita. Es la recta $x = -2$, paralela al eje Y.

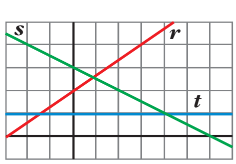
3. Halla dos puntos de la recta $y = -3x + 4$. Calcula a partir de ellos su pendiente, y comprueba que es la que corresponde a esa ecuación.

Si $x = 0 \to y = 4 \to A(0, 4) \in r$

Si $x = 1 \to y = 1 \to B(1, 1) \in r$

$$m = \frac{1 - 4}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3$$

Efectivamente, es la de la recta $y = -3x + 4$.

4. 

Escribe las ecuaciones de las rectas representadas.

$$s: \left\{\begin{array}{l} m_s = -1/2 \\ P_s(0, 3) \end{array}\right. \to \text{Como } s: y = mx + n \to s: y = \frac{-1}{2}x + 3$$

$r: \begin{cases} m_s = 2/3 \\ P_r(0,\ 2) \end{cases} \rightarrow r: y = \dfrac{2}{3}x + 2; \quad t: \begin{cases} m_t = 0 \\ P_t(0,\ 1) \end{cases} \rightarrow t: y = 1$

Página 201

1. Averigua la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} -x + 3y + \ \ 4 = 0 \\ 3x - 9y - 12 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + \ \ y + \ \ 3 = 0 \\ x - 2y + 16 = 0 \end{cases}$

Se puede resolver el sistema o bien observar los coeficientes y el término independiente de ambas ecuaciones:

a) $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{-1}{3} = \dfrac{3}{-9} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{4}{-12} = \dfrac{C}{C'}$

Es decir: $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \rightarrow$ Son la misma recta.

b) $\dfrac{5}{1} \neq \dfrac{1}{-2} \rightarrow \dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'} \rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Para calcular el punto de corte, bastará con resolver el sistema.

Despejando en la primera ecuación: $y = -3 - 5x$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$x - 2(-3 - 5x) + 16 = 0 \rightarrow x + 6 + 10x + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$

Con lo que:

$y = -3 - 5(-2) = 7 \rightarrow (x,\ y) = (-2,\ 7) \rightarrow$ Punto de corte

2. ¿Cuál es la posición relativa de estos dos pares de rectas?

a) $\begin{cases} 3x + \ \ 5y - 8 = 0 \\ 6x + 10y + 4 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y \quad\ \ = 0 \end{cases}$

a) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10} \neq \dfrac{-8}{4} \rightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'} \rightarrow$ Son paralelas.

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y \quad\ = 0 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} 2x + x - 4 = 0 \\ x \quad\quad\quad\ = y \end{array}\right\} \ \begin{array}{l} 3x = 4 \ \rightarrow \ x = 4/3 \\ y = 4/3 \end{array}$

Son dos rectas que se cortan en el punto $(4/3,\ 4/3)$

Página 202

1. Obtén la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a) (3, –5), (1, 4) b) (0, 7), (–5, 7) c) (–2, 5), (–3, –7) d) (8, 14), (3, 2)

a) $dist\,(P,\ Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(1-3)^2 + (4+5)^2} = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$

b) $dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-5-0)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{25+0} = 5$

c) $dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3+2)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{145}$

d) $dist(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3-8)^2 + (2-14)^2} = \sqrt{169} = 13$

2. Halla la distancia de $Q(-3, 4)$ a las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 4$ **b)** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5}$ **c)** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$ **d)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

a) $2x + 3y - 4 = 0$

$$dist(Q, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-6 + 12 - 4|}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \approx 0{,}55$$

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} \rightarrow 5x - 5 = 2y - 8 \rightarrow 5x - 2y + 3 = 0$

$$dist(Q, r) = \frac{|5 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|-15 - 8 + 3|}{\sqrt{29}} = \frac{20\sqrt{29}}{29} \approx 3{,}71$$

c) $\left.\begin{array}{l} t = \frac{x-1}{-2} \\ t = \frac{y-3}{-6} \end{array}\right\} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-6} \rightarrow -6x + 6 = -2y + 6 \rightarrow 6x - 2y = 0 \rightarrow 3x - y = 0$

$$dist(Q, r) = \frac{|3 \cdot (-3) - 4|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-9-4|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10} \approx 4{,}11$$

d) $3x + 2y = 6 \rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$

$$dist(Q, r) = \frac{|3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|-9 + 8 - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} \approx 1{,}94$$

Página 207

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Ecuaciones de la recta

1 **Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $A(-3, 7)$ y tiene una dirección paralela al vector $\vec{d}(4, -1)$. Dando valores al parámetro, obtén otros cinco puntos de la recta.**

$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - t \end{cases}$

t	-2	-1	1	2	3
(x, y)	$(-11, 9)$	$(-7, 8)$	$(1, 6)$	$(5, 5)$	$(9, 4)$

2 **Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por:**

a) $P(6, -2)$ y $Q(0, 5)$ b) $M(3, 2)$ y $N(3, 6)$ c) $A(0, 0)$ y $Q(8, 0)$

Halla, en todos los casos, la ecuación implícita.

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7) \rightarrow r: \begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases} \equiv r: \begin{cases} x = -6t \\ y = 5 + 7t \end{cases} \rightarrow$

(Usando el punto P) (Usando Q)

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow t = \dfrac{x}{-6} \\ t = \dfrac{y-5}{7} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{-6} = \frac{y-5}{7}$$

$\rightarrow 7x = -6y + 30 \rightarrow r: 7x + 6y - 30 = 0$

b) $\overrightarrow{MN} = (0, 4) \rightarrow r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ — $x = 3 \rightarrow$ recta paralela al eje Y

c) $\overrightarrow{AQ} = (8, 0) \rightarrow r: \begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow r: y = 0 \rightarrow$ eje X

3 **Halla las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas:**

a) $2x - y = 0$ b) $x - 7 = 0$ c) $3y - 6 = 0$ d) $x + 3y = 0$

a) Si $x = t \rightarrow 2t - y = 0 \rightarrow y = 2t \rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 7 \\ y = t \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = t \\ y = 6/3 = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$

4 **Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.**

☛ ***Ambos ejes pasan por el origen de coordenadas y sus vectores directores son los vectores de la base.***

Eje X: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{eje } X \\ \vec{d}_X = (1, 0) \end{cases} \rightarrow$ Eje X: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$

Eje Y: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{eje } Y \\ \vec{d}_Y = (0, 1) \end{cases} \rightarrow$ Eje Y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \rightarrow x = 0$

5 **Halla la ecuación de la paralela a $2x - 3y = 0$ cuya ordenada en el origen es -2.**

☛ ***La recta pasa por el punto $(0, -2)$.***

$r: 2x - 3y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} s \,//\, r \rightarrow \text{pendiente de } s \text{ ha de ser igual a la de } r \\ P(0, -2) \in s \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m_s = m_r = 2/3 \\ P(0, -2) \in s \end{cases} \rightarrow \underbrace{y = \frac{2}{3}x - 2}_{\text{ECUACIÓN EXPLÍCITA}} \rightarrow \underbrace{2x - 3y - 6 = 0}_{\text{ECUACIÓN IMPLÍCITA}}$$

6 **Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.**

☛ ***El eje de ordenadas es el vertical: $x = 0$.***

- Veamos primero cuál es el punto de corte, $P(x, y)$, de la recta con el eje de ordenadas.

$$r: \begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ \text{Eje } Y: x = 0 \end{cases} \to 4 - 0 + 3y - 6 = 0 \to 3y = 6 \to y = 2$$

Luego $P(0, 2) \in r$ y también debe ser $P(0, 2) \in s$, donde $s \perp r$.

- Como $s \perp r \to$ sus pendientes deben cumplir:

$$m_s \cdot m_r = -1 \to m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-4/3} = \frac{3}{4}$$

- Como $P(0, 2) \in s$ y $m_s = \dfrac{3}{4} \to y = \dfrac{3}{4}x + 2 \to 3x - 4y + 8 = 0$

7 **Escribe las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:**

a) Su vector de posición es $\vec{a}(-3, 1)$ y su vector de dirección $\vec{v}(2, 0)$.

b) Pasa por $A(5, -2)$ y es paralela a: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

c) Pasa por $A(1, 3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$.

d) Es perpendicular al segmento PQ en su punto medio, siendo $P(0, 4)$ y $Q(-6, 0)$, en su punto medio.

a) La ecuación vectorial será:

$$\vec{OX} = \vec{a} + t\vec{v} \to (x, y) = (-3, 1) + t(2, 0) \to \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$$

b) El vector dirección de la recta buscada debe ser el mismo (o proporcional) al de la recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ (pues debe ser paralela a ella).

Luego: $\vec{d}(-1, 2)$

Como debe pasar por A$(5, -2)$ $\to \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) La pendiente de la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ es:

$$m_r = \frac{2}{3} \to m_s = \frac{-3}{2} \quad \text{(pues } m_r \cdot m_s = -1 \text{ por ser } r \perp s)$$

Un vector director puede ser $\vec{s} = (2, -3)$.

Además, $A(1, 3) \in s$.

Por tanto, $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

d) El punto medio de PQ es $m\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$\overrightarrow{PQ} = (-6, -4)$

$$\rightarrow \begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}\,(4, -6) \text{ es un vector director de } s, \text{ pues } \vec{d} \perp \overrightarrow{PQ} \end{cases}$$

Luego, $s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

Coordenadas de puntos

8 El punto $P(5, -2)$ es el punto medio del segmento AB, y conocemos $A(2, 3)$. Halla B.

☛ ***Si $B = (x, y)$, $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2)$***

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } B = (x, y) \\ \text{Como } P \text{ es punto medio de } AB \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2 = 10 \rightarrow x = 8 \\ y + 3 = -4 \rightarrow y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow B = (8, -7)$$

9 Halla el punto simétrico de $P(1, -2)$ respecto del punto $H(3, 0)$.

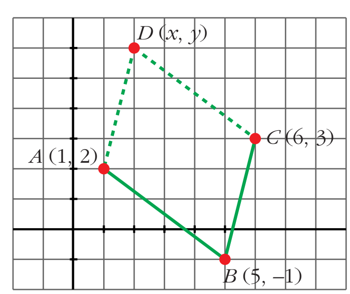
☛ ***H es el punto medio entre P y su simétrico.***

Si $P'(x, y)$ es simétrico de $P(1, -2)$ respecto de $H(3, 0)$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ H es el punto medio de PP' $\rightarrow$

$$\rightarrow \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-2}{2}\right) = (3, 0) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 1 = 6 \rightarrow x = 5 \\ y - 2 = 0 \rightarrow y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow P'(5, 2)$$

10 Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(6, 3)$.



Sea $D(x, y)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(5 - 1, -1 - 2) = (6 - x, 3 - y) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 4 = 6 - x \\ -3 = 3 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$

11 Da las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(3, 4)$ y $B(0, -2)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.

Sea $P(x, y)$.

Sustituimos en la condición que nos imponen:

$$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \to (x - 0,\ y - (-2)) = 2(3 - x,\ 4 - y) \to$$

$$\to \begin{cases} x = 2(3 - x) \\ y + 2 = 2(4 - y) \end{cases} \to \begin{cases} x = 6 - 2x \\ y + 2 = 8 - 2y \end{cases} \to \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \to P(2,\ 2)$$

12 **Determina k para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.**

Debe ocurrir que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (5, -4) \\ \overrightarrow{BC} = (4,\ k - 1) \end{array}\right\} \to \frac{5}{4} = \frac{-4}{k - 1} \to 5k - 5 = -16 \to k = \frac{-11}{5}$$

Distancias

13 **Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ a las siguientes rectas:**

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$ **b)** $y = \frac{9}{4}$ **c)** $2x + 5 = 0$

a) Veamos primero la ecuación implícita de la recta:

$$\begin{cases} t = x/2 \\ t = -y \end{cases} \to \frac{x}{2} = -y \to x + 2y = 0$$

Entonces:

$$dist\,(P,\ r) = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

b) $y = \frac{9}{4} \to y - \frac{9}{4} = 0$

Por tanto:

$$dist\,(P,\ r) = \frac{|1(-3) - 9/4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|-3 - 9/4|}{\sqrt{1}} = \frac{21}{4}$$

c) $dist\,(P,\ r) = \dfrac{|2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 0}} = \dfrac{9}{2}$

14 **Calcula la distancia del origen de coordenadas a las siguientes rectas:**

a) $3x - 4y + 12 = 0$ **b)** $2y - 9 = 0$

c) $x = 3$ **d)** $3x - 2y = 0$

a) $dist\,(0,\ r) = \dfrac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{12}{5}$

b) $dist\,(0,\ r) = \dfrac{|2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \dfrac{9}{2}$

c) $dist\,(0,\ r) = \dfrac{|0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \dfrac{3}{1} = 3$

d) $dist\,(0,\ r) = \dfrac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{13}} = 0$

(es decir, la recta $3x - 2y = 0$ pasa por el origen).

15 **Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.**

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

- $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \rightarrow -2y + 5 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow A\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y

- $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow$

  $\rightarrow B(5,\ 0)$ es el punto de corte con el eje X

- Luego $\overline{AB} = dist\,(A,\ B) = \quad (5 - 0)^2 + \left(0 - \dfrac{5}{2}\right)^2 =$

  $= \quad 25 + \dfrac{25}{4} = \sqrt{\dfrac{125}{4}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

16 **Halla la distancia entre las rectas r: $x - 2y + 8 = 0$ *y* r': $-2x + 4y - 7 = 0$.**

☛ ***Comprueba que son paralelas; toma un punto cualquiera de r y halla su distancia a r'.***

Sus pendientes son $m_r = \dfrac{1}{2} = m_{r'} \rightarrow$ Son paralelas.

Entonces, la distancia entre r y r' será:

$$dist\,(P,\ r') \text{ donde } P \in r$$

Sea $x = 0$.

Sustituyendo en $r \rightarrow y = \dfrac{-8}{-2} = 4 \rightarrow P(0,\ 4) \in r$

Así:

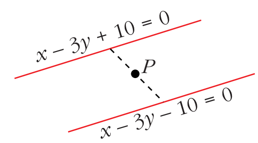
$dist\,(r,\ r') = dist\,(P,\ r') = \dfrac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \dfrac{|16 - 7|}{\sqrt{20}} = \dfrac{9}{2\sqrt{5}} = \dfrac{9\sqrt{5}}{10}$

17 **Determina c para que la distancia de la recta $x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Hay dos soluciones).**

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Hay dos soluciones: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \;\rightarrow\; c_1 = 10 \\[2ex] \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \;\rightarrow\; c_2 = -10 \end{cases}$

Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas:



18 **Calcula el valor de a para que la distancia del punto $P(1, 2)$ a la recta $ax + 2y - 2 = 0$ sea igual a $\sqrt{2}$.**

$$dist\,(P, r) = \sqrt{2} \;\rightarrow\; \frac{|a \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \;\rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \;\rightarrow\; a + 2 = \sqrt{2(a^2 + 4)} \\[2ex] \dfrac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = -\sqrt{2} \;\rightarrow\; a + 2 = -\sqrt{2(a^2 + 4)} \end{cases}$$

Al elevar al cuadrado obtenemos la misma ecuación en ambos casos.

$$\rightarrow (a + 2)^2 = 2(a^2 + 4) \;\rightarrow\; a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 8 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Página 208

Ángulos

19 **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 5y + 7 = 0 \\ 10x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y + 3 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} r\!: y = 2x + 5 \\ s\!: y = -3x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ sus pendientes son: $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$tg\ \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r\, m_s} \right| = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = 1 \;\rightarrow\; \alpha = 45°$$

b) $\left.\begin{array}{l}\vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2\end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1\, r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \to$

$$\to \cos\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = \frac{|30 - 30|}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = 0 \to \alpha = 90°$$

c) Los vectores directores de esas rectas son:

$$\vec{d_1} = (-1, 2) \quad \text{y} \quad \vec{d_2} = (-3, 1)$$

Entonces:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{|\vec{d_1}|\,|\vec{d_2}|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45°$$

d) $\left.\begin{array}{l}\vec{a_1} = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a_2} = (0, 2) \perp r_2\end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1\, r_2} = \widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}} \to$

$$\to \cos\alpha = \frac{|\vec{a_1} \cdot \vec{a_2}|}{|\vec{a_1}|\,|\vec{a_2}|} = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} =$$

$$\approx 0{,}4472 \to \alpha = 63°\ 26'\ 5{,}82''$$

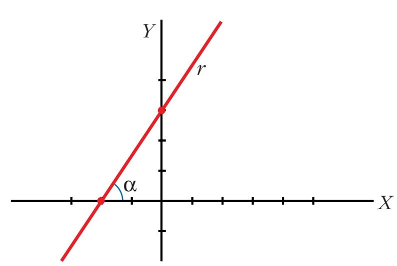
20 **¿Qué ángulo forma la recta $3x - 2y + 6 = 0$ con el eje de abscisas?**

☛ ***No es necesario que apliques ninguna fórmula. Sabes que la pendiente de r es la tangente del ángulo que forma r con el eje de abscisas. Halla el ángulo con la pendiente de r.***

La pendiente de r es $m_r = \frac{3}{2}$.

La pendiente de r es, además, $tg\ \alpha$:

$$m_r = tg\ \alpha \to tg\ \alpha = \frac{3}{2} \to \alpha = 56°\ 18'\ 35{,}8''$$



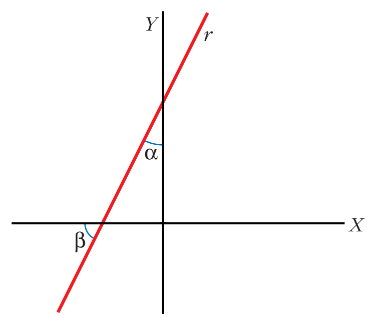
21 **¿Qué ángulo forma la recta $2x - y + 5 = 0$ con el eje de ordenadas?**

☛ ***El ángulo pedido es el complementario del ángulo que la recta forma con el eje de abscisas.***

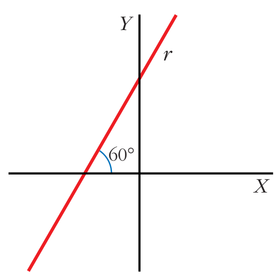
El ángulo pedido, α, es complementario de $\beta \to tg\ \beta = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$

Por otro lado, $tg\ \beta = m_r = 2$:

$$tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \beta} = \frac{1}{2} \to \alpha = 26°\ 33'\ 54{,}2''$$



22 **Calcula n de modo que la recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de $60°$ con el OX.**



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\dfrac{3}{n} \end{array}\right\}\ \text{Como } tg\ 60° = m_r, \text{ se tiene que:}$$

$$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \to n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

PARA RESOLVER

23 **Calcula m y n en las rectas de ecuaciones:**

$$r\!: mx - 2y + 5 = 0 \qquad s\!: nx + 6y - 8 = 0$$

sabiendo que son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(1, 4)$.

☛ ***Las coordenadas de P deben verificar la ecuación de r. Así calculas m. Expresa la perpendicularidad con vectores o con pendientes y halla n.***

- $P(1, 4) \in r \to m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \to m = 3$
- $\left.\begin{array}{l} (m, -2) \perp r \\ (n, 6) \perp s \\ \text{Como deben ser } r \perp s \end{array}\right\} \to (m, -2) \perp (n, 6) \to$

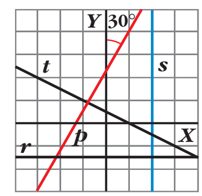
$\to (m, -2) \cdot (n, 6) = 0 \to m \cdot n + (-2) \cdot 6 = 0 \to$

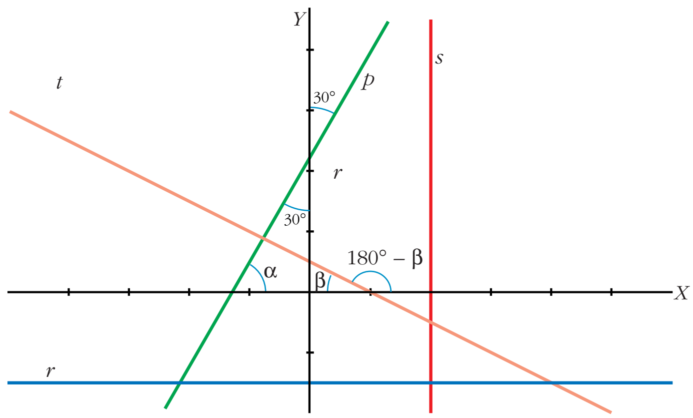
$\to 3n - 12 = 0 \to n = 4$

NOTA: Usando las pendientes $m_r = \dfrac{m}{2}$ y $m_s = \dfrac{-n}{6}$, para que $r \perp s$ debe ser $m_r \cdot m_s = -1$, es decir:

$$\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{-n}{6}\right) = -1 \;\rightarrow\; -mn = -12 \;\rightarrow\; -3n = -12 \;\rightarrow\; n = 4$$

24 **Halla las ecuaciones de las rectas *r*, *s*, *t* y *p*.**





- p: Pasa por los puntos $(-3, -3)$ y $(1, 4)$.

  Así, su pendiente es:

$$m = \frac{4-(-3)}{1-(-3)} = \frac{7}{4}$$

  Por tanto:

$$p:\; y = 1 + \frac{7}{4}(x-4) \;\rightarrow\; 7x - 4y + 9 = 0$$

- r: Su pendiente es 0 y pasa por el punto $\left(0, \dfrac{-3}{2}\right)$.

  Por tanto:

$$r:\; y = -\frac{3}{2}$$

- s: Su vector director es $(0, 1)$ y pasa por $(2, 0)$.

  Por tanto:

$$s:\; \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$$

- t: Pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(-3, 2)$.

  Así, su pendiente es:

$$m = \frac{2-0}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

  Por tanto:

$$t:\; y = -\frac{1}{2}(x-1) \;\rightarrow\; x + 2y - 1 = 0$$

25 **Dada la recta** $\boldsymbol{r}$**:** $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + kt \end{cases}$ **halla** $\boldsymbol{k}$ **de modo que** $\boldsymbol{r}$ **sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.**

- La bisectriz del segundo cuadrante es $x = -y \to \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$ (en paramétricas).
  Su vector director es $\vec{d} = (-1, 1)$.
- El vector director de r es $\vec{r} = (3, k)$.
- Como queremos que r // bisectriz del segundo cuadrante, entonces sus vectores directores deben ser proporcionales:

$$\frac{-1}{3} = \frac{1}{k} \to k = -3$$

26 **En el triángulo de vértices** $\boldsymbol{A(-2, 3)}$**,** $\boldsymbol{B(5, 1)}$**,** $\boldsymbol{C(3, -4)}$**, halla las ecuaciones de:**

a) La altura que parte de $\boldsymbol{B}$**.**

b) La mediana que parte de $\boldsymbol{B}$**.**

c) La mediatriz del lado $\boldsymbol{CA}$**.**

a) La altura que parte de B, h_B, es una recta perpendicular a AC que pasa por el punto B:

$$\left.\begin{array}{l} h_B \perp AC(5, -7) \to \text{el vector director de } h_B \text{ es } \vec{h}_B(7, 5) \\ B(5, 1) \in h_B \end{array}\right\} \to$$

$$\to h_B: \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \to \begin{cases} t = \dfrac{x - 5}{7} \\ t = \dfrac{y - 1}{5} \end{cases} \to \frac{x - 5}{7} = \frac{y - 1}{5} \to$$

$$\to h_B: 5x - 7y - 18 = 0$$

b) m_B (mediana que parte de B) pasa por B y por el punto medio, m, de AC:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\dfrac{-2 + 3}{2}, \dfrac{3 - 4}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in m_B \\ B(5, 1) \in m_B \end{array}\right\} \to$$

$$\to \vec{m}_B\left(5 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ es vector director de } m_B.$$

Luego:

$$m_B: \begin{cases} x = 5 + \dfrac{9}{2}t \\ y = 1 + \dfrac{3}{2}t \end{cases} \to \begin{cases} 2x = 10 + 9t \\ t = \dfrac{2y - 2}{3} \end{cases} \to$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x-10}{9} \\ t = \dfrac{2y-2}{3} \end{cases} \rightarrow \dfrac{2x-10}{9} = \dfrac{2y-2}{3} \rightarrow m_B\text{: } 6x - 18y - 12 = 0$$

c) La mediatriz de CA, z, es perpendicular a CA por el punto medio del lado, m'. Así:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (-5, 7) \perp z \rightarrow \text{vector director de } z\text{: } \vec{z}(7, 5) \\ m'\left(\dfrac{3-2}{2}, \dfrac{-4+3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in z \end{array}\right\} \rightarrow$$

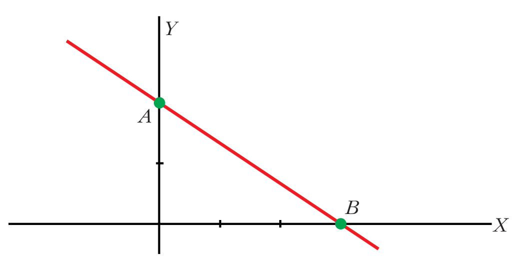
$$\rightarrow z\text{: } \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 7t \\ y = -\dfrac{1}{2} + 5t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x-1}{14} \\ t = \dfrac{2y+1}{10} \end{cases} \rightarrow \dfrac{2x-1}{14} = \dfrac{2y+1}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow z\text{: } 20x - 28y - 24 = 0 \rightarrow z\text{: } 5x - 7y - 6 = 0$$

27 **La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, un segmento AB.**

Halla la ecuación de la mediatriz de AB.

☛ ***Después de hallar los puntos A y B, halla la pendiente de la mediatriz, inversa y opuesta a la de AB. Con el punto medio y la pendiente, puedes escribir la ecuación.***



- $A = r \cap \text{eje } Y\text{: } \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow A(0, 2)$

- $B = r \cap \text{eje } X\text{: } \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow B(3, 0)$

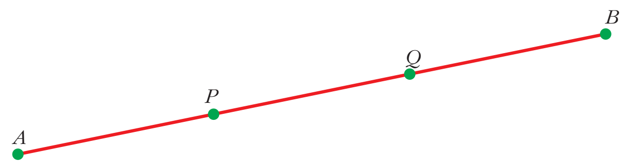
- $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, -2) \perp m_{AB} \text{ (mediatriz de } AB) \rightarrow \overrightarrow{m_{AB}} = (2, 3) \\ m_{AB}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, 1\right) \text{ (punto medio de } AB) \in \text{mediatriz} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow y - 1 = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4} \rightarrow m_{AB}\text{: } 6x - 4y - 5 = 0$$

28 **Determina los puntos que dividen al segmento AB, $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, en tres partes iguales.**

☛ ***Si P y Q son esos puntos, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.***

Escribe las coordenadas de $\overrightarrow{AP}$ y de $\overrightarrow{AB}$ y obtén P. Q es el punto medio de $\overline{PB}$



- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \rightarrow (x + 2, y - 1) = \frac{1}{3}(7, 3) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2 = \dfrac{7}{3} \rightarrow x = \dfrac{7}{3} - 2 = \dfrac{1}{3} \\ y - 1 = \dfrac{3}{3} \rightarrow y = 1 + 1 = 2 \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{1}{3}, 2\right)$$

- Q es un punto medio de $PB \rightarrow Q\left(\dfrac{1/3 + 5}{2}, \dfrac{2 + 4}{2}\right) \rightarrow Q\left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$

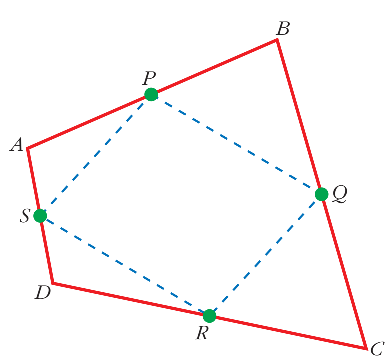
29 **¿Qué coordenadas debe tener P para que se verifique que $3\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{QR} = 0$, siendo $Q(3, 2)$ y $R(-1, 5)$?**

$3\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{QR} \rightarrow 3(3 - x, 2 - y) = 2(-4, 3) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 9 - 3x = -8 \\ 6 - 3y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{3} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{17}{3}, 0\right)$$

30 **Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices:**

$A(3, 8)$ $B(5, 2)$ $C(1, 0)$ $D(-1, 6)$



$P\left(\dfrac{5 + 3}{2}, \dfrac{8 + 2}{2}\right) = (4, 5)$

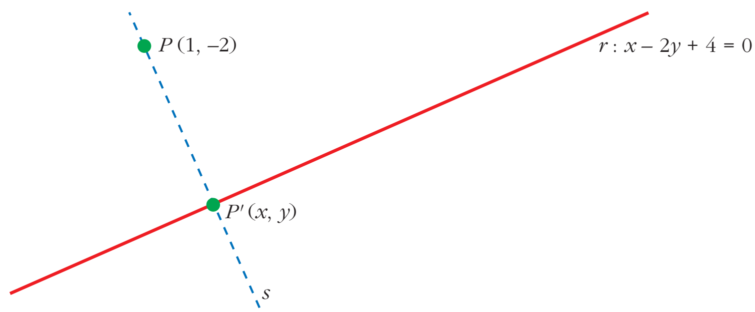
$Q(3, 1)$; $R(0, 3)$; $S(1, 7)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (3 - 4, 1 - 5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0 - 1, 3 - 7) = (-1, -4) \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SP} = (4 - 1, 5 - 7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3 - 0, 1 - 3) = (3, -2) \end{array}\right\} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$$

31 **Halla el pie de la perpendicular trazada desde $P(1, -2)$ a la recta r: $x - 2y + 4 = 0$.**

☛ ***Escribe la perpendicular a r desde P y halla el punto de corte con r.***



Sea s la recta perpendicular a r desde P y $\vec{r} = (2, 1)$ vector director de r.

Así, $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{r} \Rightarrow$ el vector director de s, $\vec{s}$, también es perpendicular a $\vec{r}$ ($\vec{s} \perp \vec{r}$), luego podemos tomar $\vec{s}(1, -2)$. Como $P(1, -2) \in s$:

$$s: \begin{cases} x = 1 + t & \to t = x - 1 \\ y = -2 - 2t & \to t = \dfrac{y+2}{-2} \end{cases} \to x - 1 = \frac{y+2}{-2} \to -2x + 2 = y + 2 \to$$

$$\to s: 2x + y = 0$$

El punto $P'(x, y)$ es tal que:

$$P' = s \cap r \begin{cases} s: 2x + y = 0 \to y = -2x \\ r: x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - 2(-2x) + 4 = 0 \to x + 4x + 4 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-4}{5} \to y = -2\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

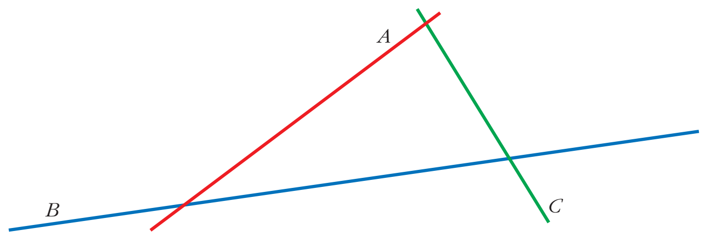
Luego: $P'\left(\dfrac{-4}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

32 **Las ecuaciones de los lados del triángulo ABC son AB: $x + 2y - 4 = 0$, AC: $x - 2y = 0$, BC: $x + y = 0$. Halla:**

a) Los vértices del triángulo.

b) El vector que une los puntos medios de AB y AC. Comprueba que es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

☛ ***b) Las coordenadas de $\overrightarrow{BC}$ deben ser proporcionales a las del vector que has hallado.***



a) $A = AB \cap AC$

$B = AB \cap BC$

$C = AC \cap BC$

• A: $\begin{cases} AB: & x + 2y - 4 = 0 \\ AC: & x - 2y = 0 \end{cases}$ Sumamos las ecuaciones:

$2x \quad - 4 = 0 \ \rightarrow \ x = 2$

Sustituyendo en AC: $2 - 2y = 0 \ \rightarrow \ y = 1$

Luego: $A(2, 1)$

• B: $\left.\begin{cases} AB: & x + 2y - 4 = 0 \\ BC: & x + y = 0 \ \rightarrow \ x = -y \end{cases}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow -y + 2y - 4 = 0 \ \rightarrow \ y = 4 \ \rightarrow \ x = -4$

Luego: $B(-4, 4)$

• C: $\left.\begin{cases} AC: & x - 2y = 0 \\ BC: & x + y = 0 \ \rightarrow \ x = -y \end{cases}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow -y - 2y = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \ \rightarrow \ x = 0$

Luego: $C(0, 0)$

b) El punto medio de AB es $M_{AB}\left(-1, \dfrac{5}{2}\right)$.

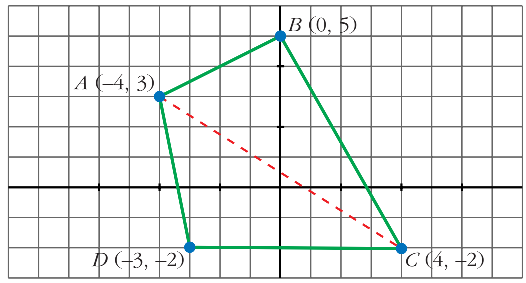
El punto medio de AC es $M_{AC}\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{M_{AB}M_{AC}} = (2, -2) \\ \overrightarrow{BC} = (4, -4) \end{array}\right\}$ Así, $\overrightarrow{M_{AB}M_{AC}} \,//\, \overrightarrow{BC}$, pues: $\overrightarrow{M_{AB}M_{AC}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

33 **Halla el área del cuadrilátero de vértices:**

$$\boldsymbol{A(-4, 3),\ B(0, 5),\ C(4, -2)\ \text{y}\ D(-3, -2)}$$

☛ ***Traza una diagonal para descomponerlo en dos triángulos de la misma base.***



• La diagonal AC divide el cuadrilátero en dos triángulos con la misma base, cuya medida es:

$$|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$$

• Sean h_B y h_D las alturas desde B y D, respectivamente, a la base:

$$h_B = dist\,(B, r) \quad \text{y} \quad h_D = dist\,(D, r)$$

donde r es la recta que contiene el segmento $\overrightarrow{AC}$.

Tomando como vector director de r el vector $\overrightarrow{AC}$, la ecuación de dicha recta es:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y + k = 0 \\ \text{Como } (-4, 3) \in r \end{array}\right\} \; -20 + 24 + k = 0 \;\Rightarrow\; k = -4 \;\Rightarrow\; r\text{: } 5x + 8y - 4 = 0$$

Luego:

$$h_B = dist\,(B, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

$$h_D = dist\,(D, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

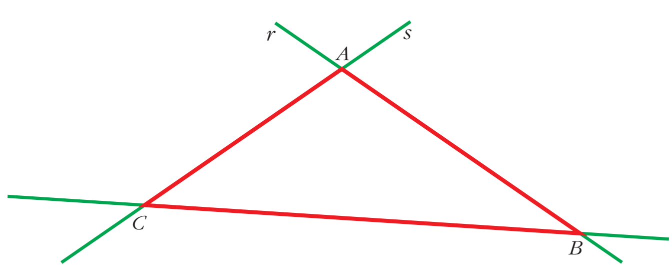
• Así:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} = \frac{b}{2}(h_B + h_D) =$$

$$= \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

34 **Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:**

$$\boldsymbol{r: x = 3 \qquad s: 2x + 3y - 6 = 0 \qquad t: x - y - 7 = 0}$$



- $A = r \cap s \quad \begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \quad \to 6 + 3y - 6 = 0 \to y = 0$

  Luego: $A(3, 0)$

- $B = r \cap t \quad \begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \quad \to 3 - y - 7 = 0 \to y = -4$

  Luego: $B(3, -4)$

- $C = s \cap t \quad \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \to x = y + 7 \end{cases} \quad \to$

  $\to 2(y + 7) + 3y - 6 = 0 \to$

  $\to 2y + 14 + 3y - 6 = 0 \to 5y + 8 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-8}{5} \to$

  $\to x = \dfrac{-8}{5} + 7 = \dfrac{27}{5}$

  Luego: $C\left(\dfrac{27}{5}, \dfrac{-8}{5}\right)$

- Consideramos el segmento AB como base:

$$|\overrightarrow{AB}| = |(0, -4)| = \sqrt{16} = 4$$

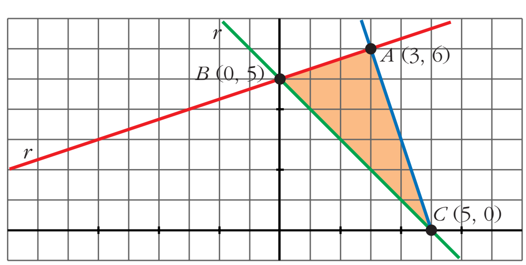
- La altura desde C es $h_C = dist\,(C, r) = \dfrac{|(-8/5) - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \dfrac{23}{5}$

- Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot h_C}{2} = \frac{4 \cdot 23/5}{2} = \frac{46}{5}$$

Página 209

35 **Traza, por el punto $B(0, 5)$, una recta de pendiente $1/3$. Por el punto $C(5, 0)$, traza una recta perpendicular a la anterior. Se cortan en un punto A. Halla el área de triángulo ABC.**



- Sea r la recta por A y B. Su pendiente es $m_r = \dfrac{1}{3} \to r\colon y = \dfrac{1}{3}x + 5$

- Sea s la recta por A y C. Su pendiente es $m_s = -3$ (pues $r \perp s$):

$$s: y - 0 = -3(x - 5) \;\to\; s: y = -3x + 15$$

- $A = r \cap s$ $\begin{cases} y = (1/3)x + 5 \\ y = -3x + 15 \end{cases} \;\to\; \dfrac{1}{3}x + 5 = -3x + 15 \;\to$

$$\to\; \frac{10}{3}x = 10 \;\to\; x = 3 \;\to\; y = \frac{1}{3} \cdot 3 + 5 = 6$$

Luego: $A(3, 6)$

- La base del triángulo es: $|\overrightarrow{AB}| = |(-3, -1)| = \sqrt{10}$

La altura es: $|\overrightarrow{AC}| = |(2, -6)| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

El área es: $A_{ABC} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 10$

36 **En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$, halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de B.**

- *Mediana*. Es el segmento BM donde M es el punto medio de AC.

$$M\left(\frac{3}{2}, 0\right) \;\to\; \overrightarrow{BM} = \left(\frac{3}{2} - 2, 0 - 4\right) = \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$$

La longitud de la mediana es: $|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{1/4 + 16} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

- *Altura*. Es el segmento BP donde P es el pie de la perpendicular a AC desde B.

$\overrightarrow{AC} = (5, 2) \;\Rightarrow$ la recta que contiene ese segmento es:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \;\to\; \frac{x + 1}{5} = \frac{y + 1}{2} \;\to\; 2x - 5y - 3 = 0$$

$\vec{v} = (-2, 5) \perp \overrightarrow{AC} \;\Rightarrow$ la recta $s \perp r$ que pasa por B:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases} \;\to\; \frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 4}{5} \;\to\; 5x + 2y - 18 = 0$$

$$P = r \cap s \;\to\; \begin{cases} r: 2x - 5y - 3 = 0 \\ s: 5x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 2 y la segunda por 5, y sumamos:

$$\begin{array}{l} 4x - 10y - 6 = 0 \\ 25x + 10y - 90 = 0 \\ \hline 29x - 96 = 0 \;\to\; x = \dfrac{96}{29} \;\to \end{array}$$

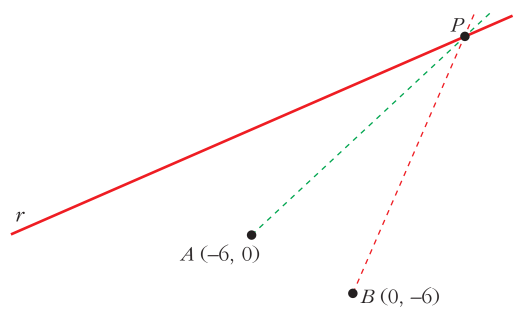
$$\to 2 \cdot \frac{96}{29} - 5y - 3 = 0 \to 5y = \frac{192}{29} - 3 = \frac{105}{29} \to$$

$$\to y = \frac{105}{29} : 5 = \frac{21}{29}$$

Luego: $P\left(\frac{96}{29}, \frac{21}{29}\right)$

Así: $h_B = |\overrightarrow{BP}| = \left|\left(\frac{38}{29}, -\frac{95}{29}\right)\right| = \sqrt{\frac{10\,469}{29^2}} \approx \frac{\sqrt{10\,469}}{29} \approx 3{,}528$

37 **Halla el punto de la recta $3x - 4y + 8 = 0$ que equidista de $A(-6, 0)$ y $B(0, -6)$.**



$P(x, y)$ debe verificar dos condiciones:

1. $P(x, y) \in r \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

2. $dist\,(A, P) = dist\,(B, P) \Rightarrow \sqrt{(x + 6)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 6)^2}$

$$\to \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x^2 + 12x + 36 + y^2 = x^2 + y^2 + 12y + 36 \end{cases} \to \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \to$$

$$\to 3x - 4x + 8 = 0 \to x = 8 = y \to P(8, 8)$$

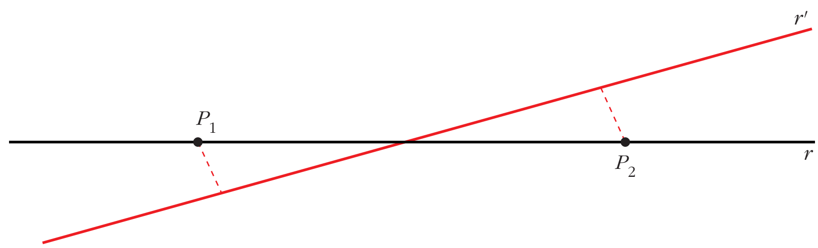
38 **Determina un punto en la recta $y = 2x$ que diste 3 unidades de la recta $3x - y + 8 = 0$.**

$$\begin{cases} P(x, y) \in r\text{: } y = 2x \\ dist\,(P, r') = 3, \text{ donde } r'\text{: } 3x - y + 8 = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y = 2x \\ \dfrac{|3x - y + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \end{cases} \to \frac{|3x - 2x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \to \frac{|x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \to$$

$$\to \text{dos posibilidades: } \begin{cases} x + 8 = 3\sqrt{10} \to x_1 = 3\sqrt{10} - 8 \to \\ x + 8 = -3\sqrt{10} \to x_2 = -3\sqrt{10} - 8 \to \end{cases}$$

$$\begin{cases} \to\ y_1 = 6\sqrt{10} - 16 \\ \to\ y_2 = -6\sqrt{10} - 16 \end{cases} \to \begin{cases} P_1\ (3\sqrt{10} - 8,\ 6\sqrt{10} - 16) \\ P_2\ (-3\sqrt{10} - 8,\ -6\sqrt{10} - 16) \end{cases}$$



39 **Halla los puntos de la recta $y = -x + 2$ que equidistan de las rectas $x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 2y + 1 = 0$.**

Sean r_1, r_2 y r_3 las tres rectas del ejercicio, respectivamente.

Buscamos los puntos $P(x, y)$ que cumplan:

$$\begin{cases} P \in r_1 \ \Rightarrow\ y = -x + 2 \\ dist(P, r_2) = dist(P, r_3) \ \to\ \dfrac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{20}} \end{cases} \to$$

$$\to \frac{|x + 2(-x + 2) - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2(-x + 2) + 1|}{2\sqrt{5}} \to$$

$$\to |-x - 1| = \frac{|6x - 3|}{2} \to \begin{cases} -x - 1 = \dfrac{6x - 3}{2}, \ \text{ o bien} \\ -x - 1 = \dfrac{-6x + 3}{2} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} -2x - 2 = 6x - 3, \ \text{ o bien} \\ -2x - 2 = -6x + 3 \end{cases} \to \begin{cases} 8x = 1 \\ 4x = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1/8 \\ x_2 = 5/4 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{8} + 2 = \dfrac{15}{8} \\ y_2 = -\dfrac{5}{4} + 2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \to \begin{cases} P_1\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{15}{8}\right) \\ P_2\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

40 **Calcula c para que la distancia entre las rectas $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.**

Sea $P \in r_1$ donde $x_0 = 0 \ \to\ y_0 = 2 \ \to\ P(0, 2) \in r_1$

Así, $dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \ \to$

$$\to \frac{|6 + c|}{5} = 3 \to \begin{cases} 6 + c = 15 \ \to\ c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \ \to\ c_2 = -21 \end{cases}$$

41 **El lado desigual del triángulo isósceles ABC, tiene por extremos $A(1, -2)$ y $B(4, 3)$.**

El vértice C está en la recta $3x - y + 8 = 0$.

Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.

• La recta del lado desigual (base) tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \rightarrow \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{5} \rightarrow r: 5x - 3y - 11 = 0$$

• La recta que contiene la altura tiene por vector director $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio del lado desigual AB, es decir, por $m\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$h_c: \begin{cases} x = 5/2 - 5t \\ y = 1/2 + 3t \end{cases} \rightarrow \frac{2x - 5}{-10} = \frac{2y - 1}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow h_c: 12x + 20y - 40 = 0 \rightarrow h_c: 6x + 10y - 20 = 0$$

• $C = s \cap h_c$ donde $s: 3x - y + 8 = 0$

$$\begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x + 2y - 16 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$12y - 36 = 0 \rightarrow y = \frac{36}{12} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x - 3 + 8 = 0 \rightarrow 3x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

Luego: $C\left(\frac{-5}{3}, 3\right)$

• $$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{Cm}|}{2} \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{34} \cdot \left(\sqrt{850}/6\right)}{2} \approx 14{,}17$$

$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{Cm}\left(\frac{-25}{6}, \frac{-5}{2}\right) \rightarrow |\overrightarrow{Cm}| = \frac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

42 **Dos casas están situadas en los puntos $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$. Se quiere construir un pozo que esté a la misma distancia de A y de B, y a 8 m de una tubería que une A y B. ¿Cuál es el lugar adecuado?**

La recta que une A y B tiene por vector director:

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 3) \rightarrow r: \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow \frac{x - 4}{-4} = \frac{y}{3} \rightarrow r: 3x + 4y - 12 = 0$$

El pozo debe estar en un punto $P(x, y)$ tal que:

$$\begin{cases} dist(P, r) = 8 \\ dist(P, A) = dist(P, B) \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{|3x + 4y - 12|}{5} = 8 \\ \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} \to x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} |3x + 4y - 12| = 40 \\ -8x + 16 = -6y + 9 \to x = \dfrac{6y + 7}{8} \end{cases} \to$$

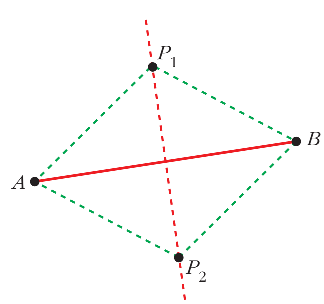
$$\to \left| 3 \cdot \frac{6y + 7}{8} + 4y - 12 \right| = 40 \to |18y + 21 + 32y - 96| = 320 \to$$

$$\to |50y - 75| = 320 \to \begin{cases} 50y - 75 = 320 \\ 50y - 75 = -320 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y_1 = \dfrac{320 + 75}{50} = \dfrac{79}{10} \to x_1 = \dfrac{6 \cdot (79/10) + 7}{8} = \dfrac{(474 + 70)/10}{8} = \dfrac{34}{5} \\ y_2 = \dfrac{-320 + 75}{50} = \dfrac{-49}{10} \to x_2 = \dfrac{6 \cdot (-49/10) + 7}{8} = \dfrac{-14}{5} \end{cases}$$

Luego: $P_1\left(\dfrac{34}{5}, \dfrac{79}{10}\right)$, $P_2\left(\dfrac{-14}{5}, \dfrac{-49}{10}\right)$

(Son dos puntos de la mediatriz del segmento AB).



43 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s y forma un ángulo de 45° con la recta: $x + 5y - 6 = 0$.**

$$\boldsymbol{r: 3x - y - 9 = 0 \qquad s: x - 3 = 0}$$

$$P = r \cap s: \begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x \quad\;\; - 3 = 0 \end{cases} \to 9 - y - 9 = 0 \to y = 0$$

Luego: $P(3, 0)$

Como la recta pedida y $x + 5y - 6 = 0$ forman un ángulo de 45°, entonces si sus pendientes son, respectivamente, m_1 y m_2, se verifica:

$$tg\ 45° = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right| \rightarrow 1 = \left| \frac{(-1/5) - m_1}{1 + (-1/5) \cdot m_1} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 = \left| \frac{-1 - 5 \cdot m_1}{5 - m_1} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5 - m_1 = -1 - 5m_1, \text{ o bien} \\ -(5 - m_1) = -1 - 5m_1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4m_1 = -6 \rightarrow m_1 = -6/4 \\ 6m_1 = 4 \rightarrow m_1 = 4/6 \end{cases}$$

Hay dos posibles soluciones: $t_1: y - 0 = \frac{-6}{4}(x - 3) \rightarrow t_1: y = \frac{-3}{2}x + \frac{9}{2}$

$t_2: y - 0 = \frac{4}{6}(x - 3) \rightarrow t_2: y = \frac{2}{3}x - \frac{6}{3}$

44 Dadas las rectas:

***r*: 2*x* – 5*y* – 17 = 0** **_s_: 3*x* – *ky* – 8 = 0**

Calcula el valor de *k* para que *r* y *s* se corten formando un ángulo de 60°.

Halla la pendiente de r. La pendiente de s es 3/k. Ten en cuenta que obtendrás dos soluciones.

Las pendientes de r y s son, respectivamente:

$$m_r = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad m_s = \frac{3}{k}$$

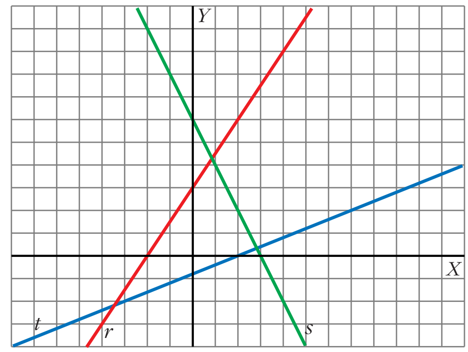
Entonces:

$$tg\ 60° = \left| \frac{2/5 - 3/k}{1 + 2/5 \cdot 3/k} \right| \rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{2k - 15}{5k + 6} \right| \rightarrow \text{ dos casos:}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3}(5k + 6) = 2k - 15 \rightarrow 5\sqrt{3}k + 6\sqrt{3} = 2k - 15 \\ \\ -\sqrt{3}(5k + 6) = 2k - 15 \rightarrow -5\sqrt{3}k - 6\sqrt{3} = 2k - 15 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow k_1 = \frac{-15 - 6\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 2}, \quad k_2 = \frac{-15 + 6\sqrt{3}}{-5\sqrt{3} - 2}$$

45 **Las rectas $r: 3x - 2y + 6 = 0$, $s: 2x + y - 6 = 0$ y $t: 2x - 5y - 4 = 0$ son los lados de un triángulo. Represéntalo y halla sus ángulos.**



$m_r = \dfrac{3}{2}$

$m_s = -2;$

$m_t = \dfrac{2}{5}$

$$tg\ \widehat{(r, s)} = \left| \frac{3/2 - (-2)}{1 + 3/2 \cdot (-2)} \right| = \frac{7/2}{2} = \frac{7}{4}$$

Luego: $\widehat{(r, s)} = 60° \ 15' \ 18{,}4''$

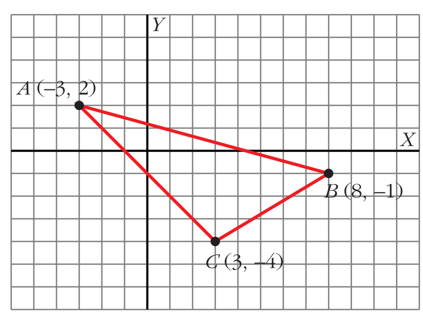
$$tg\ \widehat{(r, t)} = \left| \frac{3/2 - 2/5}{1 + 3/2 \cdot 2/5} \right| = \left| \frac{15 - 4}{10 + 6} \right| = \frac{11}{16}$$

Luego: $\widehat{(r, t)} = 34° \ 30' \ 30{,}7''$

Por último, $\widehat{(s, t)} = 180° - \widehat{(r, s)} - \widehat{(r, t)} = 85° \ 14' \ 11''$

46 **Halla los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ y $C(3, -4)$.**

☛ ***Representa el triángulo y observa si tiene algún ángulo obtuso.***



$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{BA}\ (-11, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (6, -6)$; $\overrightarrow{CA}\ (-6, 6)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$; $\overrightarrow{CB}\ (5, 3)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|} = \frac{66 + 18}{\sqrt{130}\ \sqrt{72}} \approx 0{,}868$$

Luego: $\hat{A} = 29° \ 44' \ 41{,}6''$

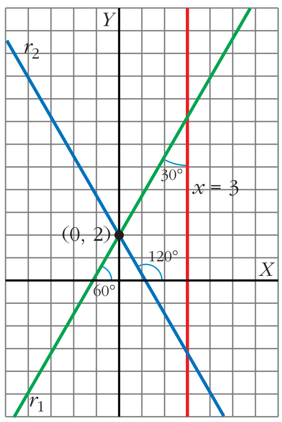
$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\ |\overrightarrow{BC}|} = \frac{55 - 9}{\sqrt{130}\ \sqrt{34}} \approx 0{,}692$$

Luego: $\hat{B} = 46° \ 13' \ 7{,}9''$

Así, $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 104° \ 2' \ 10{,}5''$

47 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 2) y forma un ángulo de 30° con la recta $x = 3$.**

☛ ***La recta que buscamos forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje OX.***



La recta r forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje OX.

Su pendiente es:

$$\begin{cases} m_1 = tg\ 60° = \sqrt{3}, \text{ o bien} \\ m_2 = tg\ 120° = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que debe pasar por $P(0, 2)$, las posibles soluciones son:

$$r_1: y = \sqrt{3}\,x + 2$$

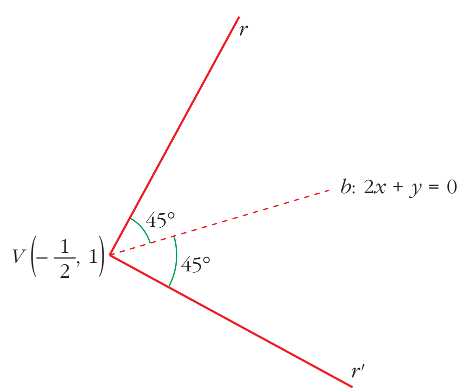
$$r_2: y = -\sqrt{3}\,x + 2$$

48 **La recta $2x + y = 0$ es la bisectriz de un ángulo recto cuyo vértice es $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.**

Halla las ecuaciones de los lados del ángulo.

Las pendientes de las tres rectas son:

$$m_b = -2, \quad m_r, \quad m_{r'}$$



$$tg\ 45° = \left|\frac{m_b - m_r}{1 + m_b\,m_r}\right| \to 1 = \left|\frac{-2 - m_r}{1 - 2m_r}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} 1 - 2m_r = -2 - m_r \to m_r = 3 \\ -1 + 2m_{r'} = -2 - m_{r'} \to m_{r'} = -1/3 \end{cases} \to$$

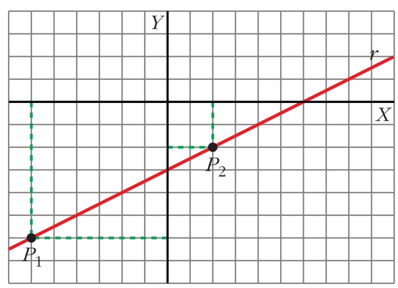
$$\to \begin{cases} r: y - 1 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = 3x + \frac{5}{2} \\ r': y - 1 = \frac{-1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{6} \end{cases}$$

49 **Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } X\text{: } y = 0 \\ \text{Eje } Y\text{: } x = 0 \\ P(x, y) \in r \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} dist\,(P, \text{eje } X) = dist\,(P, \text{eje } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{array}\right. \to$$

$$\to \begin{array}{l} \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \to \text{dos casos: } \left\{\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right. \to \\ x - 2y - 6 = 0 \end{array}$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} y - 2y - 6 = 0 \to y_1 = -6 \to x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \to y_2 = -2 \to x_2 = 2 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} P_1\,(-6, -6) \\ P_2\,(2, -2) \end{array}\right.$$



50 **Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por $A(-2, 2)$ y forman un ángulo de 60° con la recta $x = y$.**

$b: x = y \to$ su pendiente es $m_b = 1$

$$tg\ 60° = \left|\frac{1 - m}{1 + 1 \cdot m}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1 - m}{1 + m}\right| \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} \sqrt{3} + \sqrt{3}\,m = 1 - m \to m_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}\,m = 1 - m \to m_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 1} \end{array}\right.$$

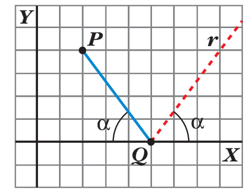
Teniendo en cuenta que pasan por $A(-2, 2)$:

$$r_1: y - 2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}(x + 2)$$

ECUACIONES PUNTO-PENDIENTE

$$r_2: y - 2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 1}(x + 2)$$

51 **Un rayo luminoso parte del punto $P(2, 4)$ y se refleja sobre el eje de las abscisas en el punto $Q(5, 0)$. Halla la ecuación del rayo reflejado.**



- Sea β el ángulo que forma PQ con el eje X.

  Como $\overrightarrow{PQ} = (3, -4)$:

$$tg\ \beta = \frac{-4}{3}$$

- Por otra parte, $\alpha = 180° - \beta \ \rightarrow\ tg\ \alpha = tg\,(180° - \beta) = -tg\ \beta$

$$tg\ \alpha = \frac{4}{3}$$

- Como la pendiente de r es $m_r = tg\ \alpha = \dfrac{4}{3}$ y esa recta, r, pasa por $Q(5, 0)$:

$$r\!: y - 0 = \frac{4}{3}(x - 5) \ \rightarrow\ r\!: y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$

52 **Escribe la ecuación de la recta r que pasa por $A(2, 3)$ y $B(5, 6)$ y halla la ecuación de una recta paralela a r, cuya distancia a r sea igual a la distancia entre A y B.**

- $r\!: \begin{cases} \text{vector director } \overrightarrow{AB} = (3, 3) \\ \text{pasa por } A(2, 3) \end{cases} \ \rightarrow\ r\!: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \end{cases} \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{3} \ \rightarrow\ 3x - 3y + 3 = 0 \ \rightarrow\ r\!: x - y + 1 = 0$$

- $s \,//\, r \ \rightarrow\ m_s = m_r = 1 \ \rightarrow\ y = x + c \ \rightarrow\ s\!: x - y + c = 0$

$$dist\,(r, s) = dist\,(A, s) = dist\,(A, B) \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \frac{|2 - 3 + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = |\overrightarrow{AB}| \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \frac{|1 + c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} \ \rightarrow\ \begin{cases} -1 + c = 6 \ \Rightarrow\ c_1 = 6 + 1 = 7 \\ -1 + c = -6 \ \Rightarrow\ c_2 = -6 + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ s_1\!: x - y + 7 = 0$$

$$s_2\!: x - 5 = 0$$

53 **Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$.**

- $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}$ donde P' es el simétrico de P respecto a esa recta y $\vec{v}$ es el vector director de la misma.

  $\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \ \rightarrow\ (x - 1, y - 1) \cdot (2, 1) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ 2(x - 1) + (y - 1) = 0 \ \rightarrow\ 2x + y - 3 = 0$$

- Además, el punto medio de PP', m, debe pertenecer a la recta. Luego:

$$m\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \in r \;\to\; \frac{x+1}{2} - 2\,\frac{y+1}{2} - 4 = 0 \;\to$$

$$\to x + 1 - 2y - 2 - 8 = 0 \;\to$$

$$\to x - 2y - 9 = 0$$

- Así, teniendo en cuenta las dos condiciones:

$$\left.\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \;\to\; x = 9 + 2y \end{cases}\right\} \to$$

$$\to 2(9 + 2y) + y - 3 = 0 \;—\; 18 + 4y + y - 3 = 0 \;\to\; y = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\to x = 9 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$$

Luego: $P' = (3, -3)$

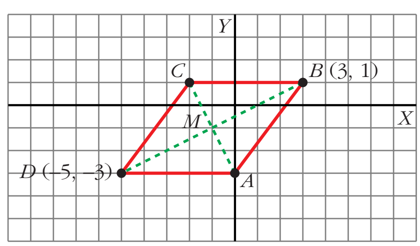
54 **Un rombo *ABCD* tiene un vértice en el eje de las ordenadas; otros dos vértices opuestos son *B*(3, 1) y *D*(–5, –3).**

Halla las coordenadas de los vértices *A* y *C* y el área del rombo.

Sea $A \in$ eje $Y \to A = (0, y_1)$ y sea el punto $C = (x_2, y_2)$.

Como estamos trabajando con un rombo, sus diagonales AC y BD se cortan en su punto medio, M.

Además, $AC \perp BD$.



- $M\left(\frac{3-5}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (-1, -1)$ es el punto medio de BD (y de AC).

- Sea d la recta perpendicular a BD por M (será, por tanto, la que contiene a AC):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BD} = (-8, -4) \;\to\; \vec{d} = (4, -8) \text{ es vector director de } d \\ M(-1, -1) \in d \end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{La pendiente de } d \text{ es } m_d = \frac{-8}{4} = -2 \\ M(-1, -1) \in d \end{cases} \to$$

$$\to d: y + 1 = -2(x + 1) \;\to\; y = -2x - 3$$

- Así:

$$A = d \cap \text{eje } Y: \left.\begin{cases} y = -2x - 3 \\ x = 0 \end{cases}\right\} \to y = -3 \;\to\; A(0, -3)$$

• M es punto medio de AC $\rightarrow$ $(-1, -1) = \left(\dfrac{0 + x_2}{2}, \dfrac{-3 + y_2}{2}\right)$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 = \dfrac{x_2}{2} \;\rightarrow\; x_2 = -2 \\[2ex] -1 = \dfrac{-3 + y_2}{2} \;\rightarrow\; y_2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow\; C(-2, 1)$$

• $\text{Área} = \dfrac{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BD}|}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-2, 4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\[1ex] |\overrightarrow{BD}| = |(-8, -4)| = \sqrt{8} = 4\sqrt{5} \end{array}\right\} \rightarrow\; \text{Área} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 20$$

55 **En el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(4, 1)$, halla el ortocentro y el circuncentro.**

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas. El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices.

ORTOCENTRO: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$ donde h_A, h_B y h_C son las tres alturas (desde A, B y C, respectivamente).

• $h_A \left\{\begin{array}{l} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3, -2) \;\rightarrow\; \vec{a} = (2, 3) \\ A \in h_A \end{array}\right. \rightarrow\; h_A: \left\{\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow\; \dfrac{x + 3}{2} = \dfrac{y - 2}{3} \;\rightarrow\; h_A: 3x - 2y + 13 = 0$

• $h_B \left\{\begin{array}{l} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (7, -1) \;\rightarrow\; \vec{b} = (1, 7) \\ B \in h_B \end{array}\right. \rightarrow\; h_B: \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 + 7t \end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow\; x - 1 = \dfrac{y - 3}{7} \;\rightarrow\; h_B: 7x - y - 4 = 0$

• $h_C \left\{\begin{array}{l} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = ((4, 1) \;\rightarrow\; \vec{c} = (1, -4) \\ C \in h_C \end{array}\right. \rightarrow\; h_C: \left\{\begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = 1 - 4t \end{array}\right. \rightarrow$

$\rightarrow\; x - 4 = \dfrac{y - 1}{-4} \;\rightarrow\; h_C: 4x + y - 17 = 0$

Bastaría con haber calculado dos de las tres alturas y ver el punto de intersección:

$h_B \cap h_C: \left\{\begin{array}{l} 7x - y - 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{array}\right.$ Sumando:

$$\left.\begin{array}{l} 11x \quad - 21 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{21}{11} \\[2ex] y = 7x - 4 = 7 \cdot \dfrac{21}{11} - 4 = \dfrac{147 - 44}{11} = \dfrac{103}{11} \end{array}\right\} R\left(\frac{21}{11}, \frac{103}{11}\right)$$

NOTA: Puede comprobarse que el ortocentro, R, está también en h_A. Basta con sustituir en su ecuación.

CIRCUNCENTRO: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, donde m_A, m_B y m_C son las tres mediatrices (desde A, B y C, respectivamente).

- $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{BC} \rightarrow \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punto medio de } BC\text{: } m\left(\frac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \rightarrow$

  $\rightarrow y - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$

- $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \vec{AB} = (4, 1) \rightarrow \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punto medio de } AB\text{: } m'\left(-1, \frac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \rightarrow$

  $\rightarrow y - \frac{5}{2} = -4(x + 1) \rightarrow y = -4x - \frac{3}{2}$

Así:

$$S = m_A \cap m_C\text{: } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \\ y = -4x - \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = -4x - \frac{3}{2} \rightarrow$$

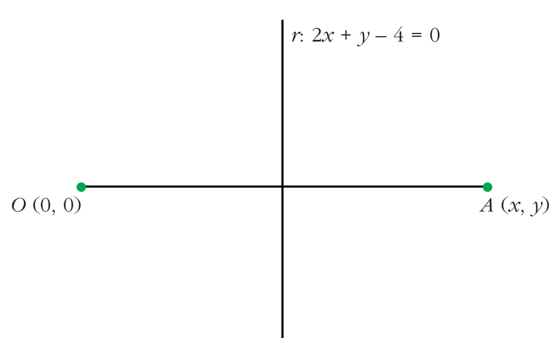
$$\rightarrow 6x - 7 = -16x - 6 \rightarrow 22x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{22} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -4 \cdot \frac{1}{22} - \frac{3}{2} = \frac{-4 - 33}{22} = \frac{-37}{22}$$

Así, $S\left(\frac{1}{22}, \frac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Se podría calcular m_B y comprobar que $S \in m_B$.

56 **La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto (0, 0). Halla las coordenadas del otro extremo.**



Un vector director de la recta es el $\vec{v} = (1, -2)$.

• Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \vec{OA} = \vec{v} \cdot \vec{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \;\rightarrow\; x - 2y = 0 \;\rightarrow\; x = 2y$$

• Además, el punto medio de OA, M, pertenece a la recta:

$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \;\rightarrow\; 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \;\rightarrow\; 4y + y - 8 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; y = \frac{8}{5} \;\rightarrow\; x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

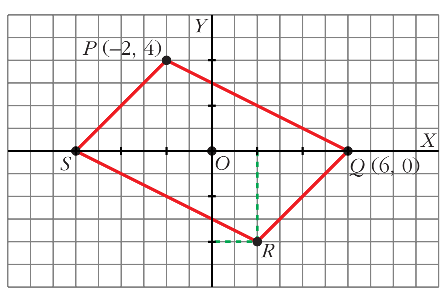
Luego: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

Página 210

57 Los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(6, 0)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo que tiene el centro en el origen de coordenadas. Halla:

a) Los otros dos vértices.

b) Los ángulos del paralelogramo.



a) Como las dos diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, que es el centro, se tienen fácilmente los otros dos vértices:

$$R(2, -4), \;\; S(-6, 0)$$

b) $\vec{PQ} = \vec{SR} = (8, -4) \;\rightarrow\; \vec{QP} = \vec{RS} = (-8, 4)$

$\vec{PS} = \vec{QR} = (-4, -4) \;\rightarrow\; \vec{SP} = \vec{RQ} = (4, 4)$

$$\cos \hat{P} = \frac{\vec{PS} \cdot \vec{PQ}}{|\vec{PS}|\;|\vec{PQ}|} = \frac{-32 + 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = -0{,}31623 \;\rightarrow\; \hat{P} = 108°\ 26'\ 5{,}8'' = \hat{R}$$

$$\hat{S} = \frac{360° - (\hat{P} + \hat{R})}{2} = 71° \ 33' \ 54'' = \hat{Q}$$

NOTA: Podríamos haber calculado $\hat{S}$ con los vectores:

$$\cos \hat{S} = \frac{\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR}}{|\overrightarrow{SP}| \ |\overrightarrow{SR}|} = \frac{32 - 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = 0{,}31623 \ \rightarrow \ \hat{S} = 71° \ 33' \ 54''$$

58 **Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$ y uno de sus vértices es el punto (6, 0). Halla los otros vértices.**

- Como las rectas no son paralelas, el punto donde se corten será un vértice:

$$\begin{array}{l} r_1: \\ r_2: \end{array} \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3y - 6 = 0 \ \rightarrow \ y = 2 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x + 2 - 2 = 0 \ \rightarrow \ x = 0$$

Luego un vértice es $A(0, 2)$.

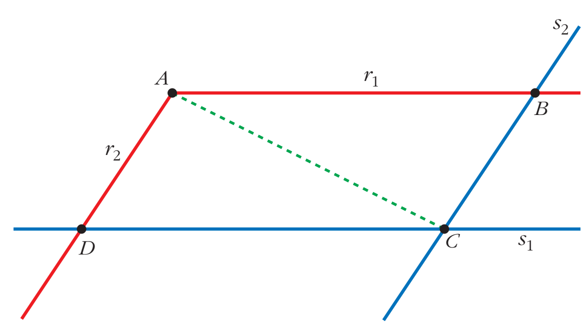
- El vértice que nos dan, $C(6, 0)$, no pertenece a ninguna de las rectas anteriores (pues no verifica sus ecuaciones, como podemos comprobar fácilmente sustituyendo los valores de x e y por las coordenadas de C). Así pues, el vértice C no es consecutivo de A.

Sean $s_1 // r_1$ una recta que pasa por C y $s_2 // r_2$ una recta que pasa por C.

Se trata de las rectas sobre las que están los otros lados.

Así, los otros vértices, B y D, serán los puntos de corte de:

$r_1 \cap s_2 = B \qquad r_2 \cap s_1 = D$



$$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \ \rightarrow \ 6 + 0 + a = 0 \ — \ a = -6 \end{cases} \rightarrow \ s_1: x + y - 6 = 0$$

$$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \ \rightarrow \ 6 - 0 + b = 0 \ \rightarrow \ b = -6 \end{cases} \rightarrow \ s_2: x - 2y - 6 = 0$$

- $B = r_1 \cap s_2: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema:

De la primera ecuación $\rightarrow x = 2 - y \rightarrow$ en la segunda $\rightarrow 2 - y - 2y - 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{-4}{3} \rightarrow x = \dfrac{10}{3} \rightarrow B\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$

- $D = r_2 \cap s_1: \left.\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \ \to \ x = 6 - y \end{cases}\right\} \to 6 - y - 2y + 4 = 0 \ \to$

  $\to y = \dfrac{10}{3} \ \to x = \dfrac{8}{3} \ \to D\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$

59 **Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $4x + 3y + 6 = 0$ y $3x + 4y - 9 = 0$.**

$P(x, 0)$ debe verificar $dist(P, r) = dist(P, s)$:

$$\frac{|4x + 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x + 4 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{25}} \ \to$$

$$\to \begin{cases} 4x + 6 = 3x - 9 & \to x_1 = -15 \\ 4x + 6 = -(3x - 9) & \to x_2 = 3/7 \end{cases} \ \to P_1(-15, 0), \ P_2\left(\frac{3}{7}, 0\right)$$

60 **Dada la recta $r: x - 2y - 4 = 0$ y el punto $P(1, 1)$, halla los vértices de un cuadrado que tiene en P uno de sus vértices y un lado sobre r.**

☛ ***Traza la perpendicular a r desde P y halla el punto de corte, Q. Halla la paralela a r que pasa por P y las paralelas a PQ a una distancia igual a PQ. Hay dos cuadrados.***

- Un segundo vértice estaría en el punto de corte de r con la perpendicular a r por P, s (de vector director $(1, -2)$).

  $\left.\begin{array}{l} s: 2x + y + C = 0 \\ P(1, 1) \in s \end{array}\right\} \to 2 + 1 + C = 0 \ \to C = -3 \ \to s: 2x + y - 3 = 0$

  Así: $Q = s \cap r \begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$

  Resolvemos el sistema y obtenemos $Q(2, -1)$.

- Un tercer vértice estará en una recta t, $t \parallel r$, que pase por $P(1, 1)$.

  Entonces:

  $\left.\begin{array}{l} t: x - 2y + k = 0 \\ P(1, 1) \in t \end{array}\right\} \to 1 - 2 + k = 0 \ \to k = 1 \ \to t: x - 2y + 1 = 0$

  Así, el tercer y cuarto vértices serán los puntos de corte de la recta paralela (hay dos soluciones) a s a una distancia igual a PQ, con t y con r, respectivamente.

  Sea $m \parallel s \ \to 2x + y + M = 0$, con:

  $$dist(P, m) = dist(P, Q) \ \to \ \frac{|2 \cdot 1 + 1 + M|}{\sqrt{5}} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} \ \to$$

  $$\to \frac{|3 + M|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \ \to |3 + M| = 5 \ \to$$

  $$\to \begin{cases} 3 + M = 5 & \to M_1 = 2 & \to m_1: 2x + y + 2 = 0 \\ 3 + M = -5 & \to M_2 = -8 & \to m_2: 2x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

Calculemos, por último, los vértices R y S (habrá dos soluciones para cada uno):

$$R_1 = m_1 \cap r \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 2 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \;\to\; x = 4 + 2y \end{array} \right\} \to$$

$\to\; 2(4 + 2y) + y + 2 = 0 \;\to\; 5y = -10 \;\to\; y = -2 \;\to\; x = 0$

Luego: $R_1\,(0, -2)$

$$R_2 = m_2 \cap r \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 8 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \;\to\; x = 4 + 2y \end{array} \right\} \to$$

$\to\; 2(4 + 2y) + y - 8 = 0 \;\to\; 5y = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\; x = 4$

Luego: $R_2\,(4, 0)$

$$S_1 = m_1 \cap t \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 2 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \;\to\; x = 2y - 1 \end{array} \right\} \to$$

$\to\; 2(2y - 1) + y + 2 = 0 \;\to\; 5y = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\; x = -1$

Luego: $S_1\,(-1, 0)$

$$S_2 = m_2 \cap t \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 8 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \;\to\; x = 2y - 1 \end{array} \right\} \to$$

$\to\; 2(2y - 1) + y - 8 = 0 \;\to\; 5y = 10 \;\to\; y = 2 \;\to\; x = 3$

Luego: $S_2\,(3, 2)$

- Por tanto, hay dos cuadrados: PQR_1S_1 y PQR_2S_2

NOTA: Podríamos haber calculado S_1 y S_2 teniendo en cuenta que el punto medio de las dos diagonales coincide.

61 Halla el punto de la recta $2x - 4y - 1 = 0$ que con el origen de coordenadas y el punto $P(-4, 0)$ determina un triángulo de área 6.

☛ ***Si tomamos como base $|\overrightarrow{PO}| = 4$, la altura del triángulo mide 3. El punto que buscamos está a 3 unidades de PO y en la recta dada. Hay dos soluciones.***

Los vértices son $O(0, 0)$, $P(-4, 0)$, $Q(x, y)$.

Si tomamos como base OP, entonces:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{OP}| \cdot h}{2} \;\to\; 6 = \frac{4 \cdot h}{2} \;\to\; h = 3$$

El punto $Q(x, y) \in r \;\to\; 2x - 4y - 1 = 0$ y debe verificar que $d(Q, OP) = 3$.

La recta sobre la que se encuentra OP tiene por vector director $\overrightarrow{OP}(-4, 0)$ y pasa por $(0, 0)$. Luego es el eje X: $y = 0$.

Así:

$$\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - 4 \cdot 3 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{13}{2} \\ 2x - 4(-3) - 1 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-11}{2} \end{cases}$$

Luego hay dos triángulos, OPQ_1 y OPQ_2, donde:

$$Q_1\left(\frac{13}{2}, 3\right) \text{ y } Q_2\left(\frac{-11}{2}, -3\right)$$

62 **Dados los puntos $A(-2, -1)$ y $B(4, 0)$, determina un punto C tal que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$.**

Halla la recta que pasa por C y tiene pendiente igual a 2. Llama D al punto de corte de esa recta con el eje de ordenadas.

Demuestra que el área del triángulo ACD es el doble de la del triángulo BCD.

- $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{BC} \rightarrow (x + 2, y + 1) = 2(x - 4, y - 0) \rightarrow$

  $$\rightarrow \begin{cases} x + 2 = 2x - 8 \rightarrow x = 10 \\ y + 1 = 2y \rightarrow y = 1 \end{cases} \rightarrow C(10, 1)$$

- r: $y - 1 = 2(x - 10) \rightarrow y = 2x - 19$

- $D = r \cap \text{eje } Y \rightarrow D(0, -19)$

- $$\text{Área}_{ACD} = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot h_D}{2}$$

  $$\text{Área}_{BCD} = \frac{|\overrightarrow{BC}| \cdot h'_D}{2}$$

  Pero como C es tal que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$, entonces:

  $$A, B \text{ y } C \text{ están alineados } \rightarrow h_D = h'_D$$

  $$|\overrightarrow{AC}| = 2\,|\overrightarrow{BC}| \rightarrow \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

  Luego:

  $$\text{Área}_{ACD} = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot h_D}{2} = \frac{2\,|\overrightarrow{BC}| \cdot h'_D}{2} = 2\ \text{Área}_{BCD}$$

63 **Sean A, B, C, D los puntos de corte de las rectas $x - 2y + 2 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.**

Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles y halla su área.

Sean: $A = r \cap \text{eje } OX: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } OY: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 1 \Rightarrow B(0, 1)$

$C = s \cap \text{eje } OX: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1, 0)$

$D = s \cap \text{eje } OY: \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2 \Rightarrow D(0, -2)$

Calculamos los vectores dirección de los lados:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1) \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -2) \\ \overrightarrow{DA} = (-2, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

Luego, efectivamente, $ABCD$ es un trapecio isósceles de bases BC y DA.

Para calcular el área necesitamos la altura:

Como $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}(2, -2) \\ D(0, -2) \end{array}\right\} \rightarrow y = -x - 2 \rightarrow AD: x + y + 2 = 0,$

$$h = dist(B, AD) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DA}|}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$$

64 **La recta $x + y - 2 = 0$ y una recta paralela a ella que pasa por el punto $(0, 5)$ determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. Halla su área.**

$$\left.\begin{array}{l} s /\!/ r: x + y - 2 = 0 \Rightarrow x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array}\right\} \rightarrow 0 + 5 + k = 0 \rightarrow k = -5$$

Luego $s: x + y - 5 = 0$

• Sean: $A = r \cap \text{eje } X$: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } Y$: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2)$

$C = s \cap \text{eje } X$: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 5 \Rightarrow C(5, 0)$

$D = s \cap \text{eje } Y$: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 5 \Rightarrow D(0, 5)$

• $\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$; $\overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot h = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist(A, s) =$$

$$= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2}$$

65 **Los puntos $A(1, -2)$ y $B(2, 3)$ son vértices de un triángulo de área 8. El vértice C está sobre la recta $2x + y - 2 = 0$. Hállalo.**

• $\text{Área} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot h}{2} \rightarrow 8 = \dfrac{|(1, 5)| \cdot h}{2} \rightarrow 8 = \dfrac{\sqrt{26} \cdot h}{2} \rightarrow h = \dfrac{16}{\sqrt{26}}$

• $h = dist(C, AB)$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 5) \rightarrow \text{pendiente } m = 5 \\ A(1, -2) \in AB \end{array}\right\} \rightarrow AB: y + 2 = 5(x - 1) \rightarrow$

$\rightarrow AB: y = 5x - 7 \rightarrow AB: 5x - y - 7 = 0$

$h = dist(C, AB) \rightarrow \dfrac{16}{\sqrt{26}} = \dfrac{|5x - y - 7|}{\sqrt{26}} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 5x - y - 7 = 16 \\ 5x - y - 7 = -16 \end{cases} \rightarrow$ hay dos soluciones:

C_1: $\begin{cases} 5x - y - 7 = 16 \\ r: 2x + y - 2 = 0 \rightarrow y = 2 - 2x \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow 5x - 2 + 2x - 7 = 16 \rightarrow 7x = 25 \rightarrow x = \dfrac{25}{7} \rightarrow$

$\rightarrow y = 2 - 2 \cdot \dfrac{25}{7} = \dfrac{-36}{7} \rightarrow C_1\left(\dfrac{25}{7}, \dfrac{-36}{7}\right)$

C_2: $\begin{cases} 5x - y - 7 = -16 \\ r: 2x + y - 2 = 0 \rightarrow y = 2 - 2x \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow 5x - 2 + 2x - 7 = -16 \rightarrow 7x = -7 \rightarrow x = -1 \rightarrow$

$\rightarrow y = 4 \rightarrow C_2(-1, 4)$

66 **Un punto P, que es equidistante de los puntos $A(3, 4)$ y $B(-5, 6)$, dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P?**

• $d(P, OX) = 2d(P, OY) \rightarrow |y| = 2|x| \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$

• $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(-5-x)^2 + (6-y)^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 36 - 12y \rightarrow$

$\rightarrow -6x - 8y + 25 = 10x - 12y + 61 \rightarrow 16x - 4y + 36 = 0 \rightarrow 4x - y + 9 = 0$

• Como deben cumplirse las dos condiciones, habrá dos soluciones:

$$P_1: \begin{cases} y = 2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x - 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{2} \rightarrow y = -9$$

Luego: $P_1\left(\frac{-9}{2}, -9\right)$

$$P_2: \begin{cases} y = -2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x + 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2} \rightarrow y = 3$$

Luego: $P_2\left(\frac{-3}{2}, 3\right)$

67 **De todas las rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$, halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.**

☛ ***La ecuación $y = 2 + m(x - 1)$ representa a todas esas rectas. Pásala a forma general y aplica la condición $d(O, r) = 1$.***

• Esas rectas tienen por ecuación:

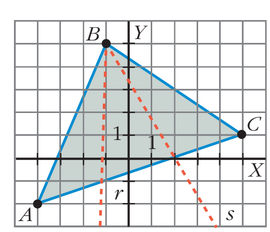
$$y = 2 + m(x - 1) \rightarrow mx - y + (2 - m) = 0$$

• $d(0, r) = 1 \rightarrow \dfrac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow (2 - m)^2 = m^2 + 1 \rightarrow 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4 - 4m = 1 \rightarrow m = \dfrac{3}{4}$

68 **Dado el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$, halla las ecuaciones de las rectas r y s que parten de B y que cortan a AC, dividiendo al triángulo en tres triángulos de igual área.**



• La altura de los tres triángulos es igual a la distancia de B al lado AC. Por tanto, tendrán la misma área si tienen la misma base. Así, se trata de hallar los puntos, P y Q, que dividen el lado AC en tres partes iguales:

$$\vec{OP} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OC}}{3} = \left(-\frac{2}{3}, -1\right); \ \vec{OQ} = \frac{\vec{OC} + 2\vec{OC}}{3} = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

- La recta r es la que pasa por B y por P:

$$m = \frac{-1-5}{(-2/3)-(-1)} = \frac{-6}{(1/3)} = -18$$

$y = 5 - 18(x+1) \ \rightarrow \ r: 18x + y + 13 = 0$

- La recta s es la que pasa por B y por Q:

$$m = \frac{5-0}{(-1)-(8/3)} = \frac{-5}{(-11/3)} = -\frac{15}{11}$$

$y = 5 - \frac{15}{11}(x+1) \ \rightarrow \ 11y = 55 - 15x - 15 \ \rightarrow \ s: 15x + 11y - 40 = 0$

69 **Dada la recta r: $2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de r, respecto al eje OX.**

- Hallamos dos puntos de la recta dada. Por ejemplo:

$A(2, 3)$ y $B(5, 5)$

- Los dos puntos simétricos respecto al eje OX de A y B son $A'(2, -3)$ y $B'(5, -5)$
- La recta, r', simétrica de r respecto al eje OX será la que pasa por A' y B':

$$m = \frac{-5-(-3)}{5-2} = \frac{-5+3}{3} = \frac{-2}{3}$$

La recta r' es:

$y = -3 - \frac{2}{3}(x-2) \ \rightarrow \ 3y = -9 - 2x + 4 \ \rightarrow \ 2x + 3y + 5 = 0$

- De otra forma:

Si (x, y) es un punto de la recta r, entonces $(x, -y)$ es un simétrico respecto al eje OX. Por tanto, la ecuación de la recta r', simétrica de r respecto al eje OX, será:

$2x - 3(-y) + 5 = 0 \ \rightarrow \ 2x + 3y + 5 = 0$

Página 211

CUESTIONES TEÓRICAS

70 **Prueba que si las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son perpendiculares, se verifica que $aa' + bb' = 0$.**

- El vector (a, b) es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.
- El vector (a', b') es perpendicular a la recta $a'x + b'y + c' = 0$.
- Si las dos rectas son perpendiculares, entonces:

$(a, b) \cdot (a', b') = 0$; es decir, $aa' + bb' = 0$.

71 **Dada la recta $ax + by + c = 0$, prueba que el vector $\vec{v} = (a, b)$ es ortogonal a cualquier vector determinado por dos puntos de la recta.**

☛ ***Llama $A(x_1, y_1)$ y $B(x_1, y_1)$ y haz $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB}$. Ten en cuenta que A y B verifican la ecuación de la recta.***

- Si $A(x_1, y_1)$ pertenece a la recta, entonces $ax_1 + by_1 + c = 0$
- Si $B(x_2, y_2)$ pertenece a la recta, entonces $ax_2 + by_2 + c = 0$
- Restando las dos igualdades: $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$

Esta última igualdad significa que:

$(a, b) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0$; es decir, que el vector (a, b) es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A y B dos puntos cualesquiera de la recta.

72 **a) ¿Qué se puede decir de una recta si en su ecuación general falta el término independiente?**

b) ¿Y si falta el término en x?

c) ¿Y si falta el término en y?

a) La recta pasa por $(0, 0)$.

b) Es una recta horizontal (paralela al eje OX).

c) Es una recta vertical (paralela al eje OY).

73 **Prueba que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ puede escribirse de la forma:**

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y un punto de la recta es $P(x_1, y_1)$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta serán:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + (x_2 - x_1)\, t \;\rightarrow\; t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\[2ex] y = y_1 + (y_2 - y_1)\, t \;\rightarrow\; t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \;\rightarrow\; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

74 **Demuestra que si una recta corta a los ejes en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, su ecuación es:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Como $A(a, 0)$ y $B(0, b)$ son dos puntos de la recta, podemos tratar como vector director $\overrightarrow{AB} = (-a, b)$.

La pendiente de la recta será:

$$m = -\frac{b}{a}$$

Luego su ecuación es:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \qquad \text{(ecuación implícita)}$$

$$bx + ay = ab$$

Dividimos entre $a \cdot b$ los dos miembros de la ecuación:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

75 **Dada la recta $r: Ax + By + C = 0$ y un punto (x_0, y_0) que no pertenece a r, estudia la posición de estas rectas con respecto a r:**

$$s: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad t: B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$$

- $s: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \rightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$

  Como $\dfrac{A}{A} = \dfrac{B}{B} = 1$:

  — Si $\dfrac{C}{-Ax_0 - By_0} = 1 \rightarrow$ coinciden r y s

  — Si $\dfrac{C}{-Ax_0 - By_0} \neq 1 \rightarrow$ son paralelas $r \,//\, s$

  Es decir:

  — Si $Ax_0 + By_0 + C = 0 \rightarrow$ coinciden; pero esto significará que $(x_0, y_0) \in r$, lo cual es falso. Por tanto, $r \neq s$.

  — Si $Ax_0 + By_0 \neq -C \rightarrow r \,//\, s$. Ahora bien, como

  $$(x_0, y_0) \notin r \rightarrow Ax_0 + By_0 + C \neq 0 \rightarrow Ax_0 + By_0 \neq -C$$

  Por tanto, $r \,//\, s$.

- $t: B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0 \rightarrow Bx - Ay + Ay_0 - Bx_0 = 0$

  El vector director de t es $\vec{t} = (A, B)$ y el de r es $\vec{r} = (B, -A)$.

  Luego $t \perp r$ (pues $\vec{t} \cdot \vec{r} = 0$).

  Además, $(x_0, y_0) \in t$, pues verifica su ecuación.

  Por tanto, t es la recta perpendicular a r que pasa por el punto (x_0, y_0).

76 **¿Cómo varía la pendiente de la recta $Ax + By + C = 0$ si se duplica A? ¿Y si se duplica B? ¿Y si se duplica C?**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ t\text{: } 2Ax + By + C = 0 \;\rightarrow\; m_t = \dfrac{-2A}{B} \\[2ex] \quad r\text{: } Ax + By + C = 0 \;\rightarrow\; m_r = \dfrac{-A}{B} \end{array}\right\} m_t = 2m_r \text{ (la pendiente se duplica)}$$

- $s\text{: } Ax + 2By + C = 0 \;\rightarrow\; m_s = \dfrac{-A}{2B} \;\rightarrow\; m_s = \dfrac{m_r}{2}$ (la pendiente se reduce a la mitad)

- $n\text{: } Ax + By + 2C = 0 \;\rightarrow\; m_n = \dfrac{-A}{B} = m_r$ (la pendiente no varía)

77 **Demuestra que las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$ son:**

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

☛ ***$2\,\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$; M es el punto medio de AC.***

El baricentro (punto donde se cortan las medianas) verifica, para cualquier triángulo de vértices A, B, C que $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM}$, donde G es el baricentro, $G(x, y)$, y M es el punto medio de AC.

Así:

$$(x - x_2, y - y_2) = 2\left(\frac{x_1 + x_3}{2} - x, \frac{y_1 + y_3}{2} - y\right) \;\rightarrow$$

$$x - x_2 = 2 \cdot \frac{x_1 + x_3 - 2x}{2} \;\rightarrow\; x - x_2 = x_1 + x_3 - 2x$$

$$y - y_2 = 2 \cdot \frac{y_1 + y_2 - 2y}{2} \;\rightarrow\; y - y_2 = y_1 + y_3 - 2y$$

$$3x = x_1 + x_2 + x_3 \;\rightarrow\; x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$3y = y_1 + y_2 + y_3 \;\rightarrow\; y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Luego:

$$G(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

PARA PROFUNDIZAR

78 **Un rombo tiene un vértice en el punto $(6, 1)$ y una diagonal que mide $2\sqrt{5}$ sobre la recta $2x + y - 3 = 0$. Halla los otros tres vértices.**

- $A(6, 1) \notin r\text{: } 2x + y - 3 = 0$, pues no verifica la ecuación.

Entonces, la diagonal que está en r y que mide $2\sqrt{5}$ será BD (llamando $ABCD$ al rombo), pues es la que no contiene al punto A.

Así, $|\overrightarrow{BD}| = 2\sqrt{5}$

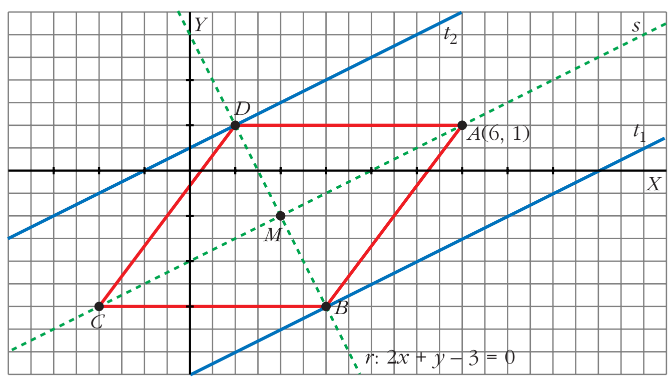
- La otra diagonal, AC, es perpendicular a r y pasa por A.

  Sea s la recta que contiene dicha diagonal.

  Será:

$$\left\{\begin{array}{l} s\colon x - 2y + G = 0 \\ \text{Como } A(6, 1) \in s \end{array}\right. \to 6 - 2 + G = 0 \to G = -4 \to$$

$$\to s\colon x - 2y - 4 = 0$$



- El punto de corte de ambas rectas será el punto medio de las diagonales, y punto donde se cortan:

$$M = r \cap s \left\{\begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \to x = 4 + 2y \end{array}\right\} \to 8 + 4y + y - 3 = 0 \to y = -1 \to$$

$$\to x = 2 \to M(2, -1)$$

- Además, M es el punto medio de ambas diagonales. Luego M es punto medio de AC:

$$(2, -1) = \left(\frac{6 + C_1}{2}, \frac{1 + C_2}{2}\right) \to \left\{\begin{array}{l} 2 = \dfrac{6 + C_1}{2} \to C_1 = -2 \\ -1 = \dfrac{1 + C_2}{2} \to C_2 = -3 \end{array}\right.$$

  Luego: $C(-2, -3)$

- B y D están en las rectas que equidistan de AC. Dichas rectas son todos los puntos $P(x, y)$ tales que:

$$d(P, s) = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \to \frac{|x - 2y - 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} x - 2y - 4 = 5 \to t_1\colon x - 2y - 9 = 0 \\ x - 2y - 4 = -5 \to t_2\colon x - 2y + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Así:

$B = t_1 \cap r: \begin{cases} x - 2y - 9 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow 2(9 + 2y) + y - 3 = 0 \rightarrow 18 + 4y + y - 3 = 0 \rightarrow 5y + 15 = 0$

$\rightarrow y = -3 \rightarrow x = 9 + 2(-3) = 3 \rightarrow B(3, -3)$

$D = t_2 \cap r: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \rightarrow x = -1 + 2y \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow$

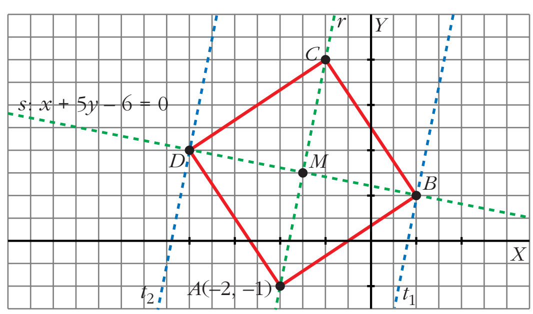
$\rightarrow 2(-1 + 2y) + y - 3 = 0 \rightarrow -2 + 4y + y - 3 = 0 \rightarrow 5y - 5 = 0$

$\rightarrow y = 1 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \rightarrow D(1, 1)$

79 **Un cuadrado tiene una diagonal sobre la recta $x + 5y - 6 = 0$ y uno de sus vértices es $A(-2, -1)$. Halla los otros vértices y la longitud de la diagonal.**

- Se comprueba que $A \notin s$
- Luego la otra diagonal en la que está A será r tal que $r \perp s$:

$\left.\begin{array}{l} 5x - y + G = 0 \\ \text{Como } A \in r \end{array}\right\} \rightarrow -10 + 1 + G = 0 \rightarrow G = 9 \rightarrow r: 5x - y + 9 = 0$



- $M = r \cap s$ será el punto medio de las dos diagonales:

$\left\{\begin{array}{l} 5x - y + 9 = 0 \\ x + 5y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - 5y \end{array}\right\} \rightarrow 5(6 - 5y) - y + 9 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 30 - 25y - y + 9 = 0 \rightarrow y = \frac{39}{26} = \frac{3}{2} \rightarrow x = 6 - 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$

Luego: $M\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

- M es el punto medio de AC $\rightarrow \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-2 + C_1}{2}, \frac{-1 + C_2}{2}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3 = -2 + C_1 \rightarrow C_1 = -1 \\ 3 = -1 + C_2 \rightarrow C_2 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow C(-1, 4)$

• B y D están en las rectas que equidistan de AC.

Dichas rectas son todos los puntos $P(x, y)$ tales que:

$$d(P, r) = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

pues, al ser un cuadrado, sus diagonales son iguales. Es decir:

$$d(P, r) = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{|(1, 5)|}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|5x - y + 9|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \rightarrow \begin{cases} 5x - y + 9 = 26/2 \\ 5x - y + 9 = -26/2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1: 5x - y - 4 = 0 \\ t_2: 5x - y + 22 = 0 \end{cases}$$

Así:

$$B = t_1 \cap s: \left.\begin{cases} 5x - y - 4 = 0 \\ x + 5y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 30 - 25y - y - 4 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 1)$$

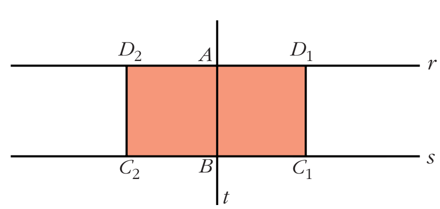
$$D = t_2 \cap s: \left.\begin{cases} 5x - y + 22 = 0 \\ x + 5y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 30 - 25y - y + 22 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = -4 \Rightarrow D(-4, 2)$$

• La longitud de la diagonal será:

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{26}$$

80 **De un cuadrado conocemos dos vértices contiguos $A(3, 1)$ y $B(4, 5)$. Calcula los otros vértices. ¿Cuántas soluciones hay?**



C y D son puntos de las rectas s y r perpendiculares a AB, y cuyas distancias a B y A, respectivamente, son $|\overrightarrow{AB}|$:

• $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 4) \rightarrow s: x + 4y + k = 0 \\ \text{Como } B \in s \end{array}\right\} \rightarrow 4 + 20 + k = 0 \Rightarrow k = -24 \rightarrow$

$$\rightarrow s: x + 4y - 24 = 0$$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \;\rightarrow\; r\text{: } x + 4y + k' = 0 \\ \text{Como } A \in r\end{array}\right\} \rightarrow 3 + 4 + k' = 0 \;\rightarrow\; k' = -7 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; r\text{: } x + 4y - 7 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \;\rightarrow\; t\text{: } 4x - y + k'' = 0 \\ \text{Como } A \in t\end{array}\right\} \rightarrow 12 - 1 + k'' = 0 \;\rightarrow\; k'' = -11 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; t\text{: } 4x - y - 11 = 0$

- C y D son puntos que están en las rectas cuya distancia a AB es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

Sean $P(x, y)$ tales que:

$$d(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$\begin{cases} 4x - y - 11 = 17 \;\rightarrow \\ 4x - y - 11 = -17 \;\rightarrow \end{cases} \begin{cases} t_1\text{: } 4x - y - 28 = 0 \\ t_2\text{: } 4x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas. Hay dos soluciones. Así:

$C_1 = t_1 \cap s \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \;\rightarrow\; x = 24 - 4y \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow\; 96 - 16y - y - 28 = 0 \;\rightarrow\; y = 4 \;\rightarrow\; x = 8 \;\rightarrow\; C_1(8, 4)$

$C_2 = t_2 \cap s \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \;\rightarrow\; x = 24 - 4y \end{cases} \rightarrow$

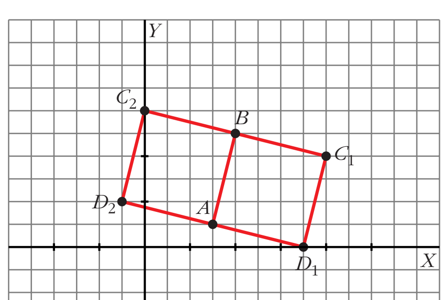
$\rightarrow\; 96 - 16y - y + 6 = 0 \;\rightarrow\; y = 6 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; C_2(0, 6)$

$D_1 = t_1 \cap r \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \;\rightarrow\; x = 7 - 4y \end{cases} \rightarrow$

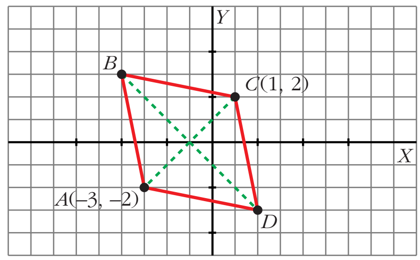
$\rightarrow\; 28 - 16y - y - 28 = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; x = 7 \;\rightarrow\; D_1(7, 0)$

$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \;\rightarrow\; x = 7 - 4y \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow\; 28 - 16y - y + 6 = 0 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; D_2(-1, 2)$



81 **La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que su lado y tiene por extremos los puntos $A(-3, -2)$ y $C(1, 2)$. Halla los vértices B y D y el perímetro del rombo.**



• $\overrightarrow{AC} = (4, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Como esta diagonal mide lo mismo que el lado, entonces el perímetro será:

$$Perímetro = 4\,|\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$$

• Los otros dos vértices están en la perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ por ser su punto medio $M(-1, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{La recta } AC \text{ tiene por vector director } (1, 1) \rightarrow x - y + k = 0 \\ \text{Como, además, } A(-3, -2) \in \text{recta } AC\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow -3 + 2 + k = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow AC: x - y + 1 = 0$$

La recta s perpendicular a AC será:

$$\left.\begin{array}{l}s: x + y + k' = 0 \\ \text{Como } M(-1, 0) \in s\end{array}\right\} \rightarrow -1 + k' = 0 \rightarrow k' = 1 \rightarrow s: x + y + 1 = 0$$

Los puntos B y C serán los (x, y) que estén en s y cuya distancia al vértice A sea igual a la diagonal, es decir, igual a $4\sqrt{2}$.

$$(x, y) \in s \rightarrow x + y + 1 = 0 \rightarrow x = -1 - y$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y + 2)^2} = 4\sqrt{2} \rightarrow (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 32$$

$$\rightarrow (2 - y)^2 + (y + 2)^2 = 32 \rightarrow 4 + y^2 - 4y + y^2 + 4 + 4y = 32 \rightarrow 2y^2 = 24 \rightarrow$$

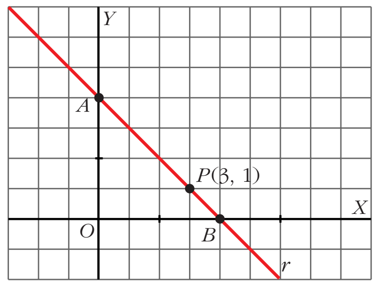
$$\rightarrow y^2 = 12 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{3} \rightarrow x_1 = -1 - 2\sqrt{3} \\ y_2 = -2\sqrt{3} \rightarrow x_2 = -1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Luego, los vértices B y C son:

$$(-1 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) \quad \text{y} \quad (-1 + 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

82 **Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(3, 1)$ y forma con la parte positiva de los ejes de coordenadas un triángulo de área 6.**

- Las rectas que pasan por $P(3, 1)$, tienen de ecuación: $y - 1 = m(x - 3)$



- Los vértices A y B serán los puntos de corte de la recta con los ejes:

$$x = 0 \;\rightarrow\; y - 1 = -3m \;\rightarrow\; y = 1 - 3m$$

$$y = 0 \;\rightarrow\; 0 - 1 = mx - 3m \;\rightarrow\; x = \frac{3m - 1}{m}$$

Luego: $A(0, 1 - 3m)$ y $B\left(\frac{3m - 1}{m}, 0\right)$

- Como $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

Tomando como base OA y altura OB:

$$6 = \frac{(1 - 3m)\left(\dfrac{3m - 1}{m}\right)}{2} \;\rightarrow\; (1 - 3m)\left(\frac{3m - 1}{m}\right) = 12 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{-9m^2 - 1 + 6m}{m} = 12 \;\rightarrow\; -9m^2 - 1 + 6m = 12m \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 9m^2 + 6m + 1 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = -3$$

Luego la recta es:

$$r\!: y - 1 = -3(x - 3) \;\rightarrow\; r\!: y = -3x + 10$$

83 **Determina la ecuación de una recta de pendiente -2 que forma con los ejes un triángulo de área igual a 81. ¿Cuántas soluciones hay?**

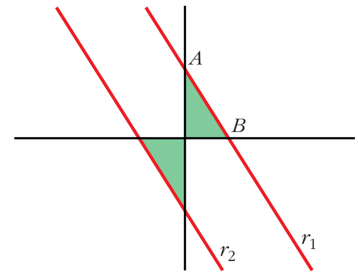
- Las rectas de pendiente –2 tienen por ecuación:

$$y = -2x + k$$

- Los puntos de corte con los ejes, A y B, son:

Si $x = 0 \;\rightarrow\; y = k \;\rightarrow\; A(0, k)$

Si $y = 0 \rightarrow x = \frac{k}{2} \rightarrow B\left(\frac{k}{2}, 0\right)$



- Así:

Área $= \frac{k/2 \cdot k}{2} = 81 \rightarrow k^2 = 324 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 18 \\ k_2 = -18 \end{cases}$

Dos soluciones:

$$r_1: y = -2x + 18 \quad \text{y} \quad r_2: y = -2x - 18$$

84 **Conocemos dos vértices de un trapecio rectángulo $A(1, 1)$ y $B(5, 1)$ y sabemos que uno de sus lados está sobre la recta $y = x + 1$. Calcula los otros dos vértices. (Hay dos soluciones.)**

Podemos comprobar que $A, B \notin r$.

Como un lado está sobre r, los otros dos vértices están en r y, por tanto, A y B son vértices consecutivos.

Además, un vector director de r es $\vec{r} = (1, 1)$, que no es proporcional a $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$.

Por tanto, $\vec{r} \nparallel \overrightarrow{AB} \rightarrow$ los lados AB y CD no son paralelos, luego no son las bases del trapecio.

Podemos construir dos trapecios:

a) ABC_1D_1, donde AB es la altura del trapecio:

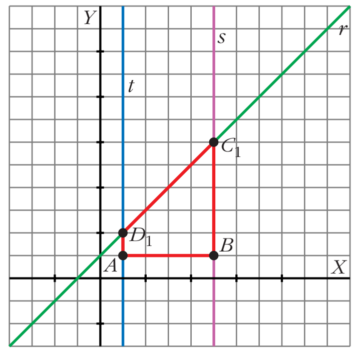
C_1 y D_1 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a AB que pasan por B y A, respectivamente.

- $\left.\begin{array}{l} t \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow 4x + k = 0 \\ \text{Como } A(1, 1) \in t \end{array}\right\} 4 + k = 0 \rightarrow k = -4 \rightarrow t: 4x - 4 = 0 \rightarrow t: x = 1$

Así: $D_1 = t \cap r \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow y = 2 \rightarrow D_1(1, 2)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow 4x + k = 0 \\ \text{Como } B(5, 1) \in s \end{array}\right\} 4 \cdot 5 + k = 0 \rightarrow k = -20 \rightarrow s: 4x - 20 = 0 \rightarrow s: x = 5$

Así: $C_1 = s \cap r: \begin{cases} x = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \rightarrow y = 6 \rightarrow C_1(5, 6)$



b) ABC_2D_2, donde C_2D_2 es la altura del trapecio:

C_2 y D_2 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a r que pasan por B y C, respectivamente (es decir, C_2 y D_2 son los pies de dichas perpendiculares).

- $\left.\begin{array}{l} t \perp r \;\to\; y = -x + k \\ \text{Como } \; A \in t \end{array}\right\} \to 1 = -1 + k \;\to\; k = 2 \;\to\; t\text{: } y = -x + 2$

  Así: $D_2 = t \cap r\text{: } \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \;\to\; -x + 2 = x + 1 \;\to\; 1 = 2x \;\to$

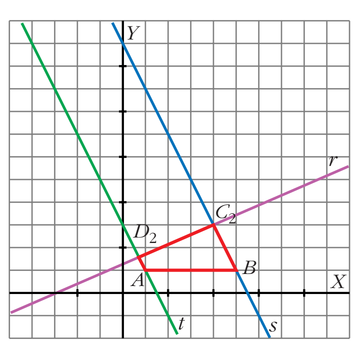
  $\to\; x = \dfrac{1}{2} \;\to\; y = \dfrac{3}{2} \;\to$

  $\to\; D_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp r \;\to\; y = -x + k \\ \text{Como } \; B \in s \end{array}\right\} \to 1 = -5 + k \;\to\; k = 6 \;\to\; s\text{: } y = -x + 6$

  Así: $C_2 = s \cap r\text{: } \begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases} \;\to\; -x + 6 = x + 1 \;\to\; 5 = 2x \;\to$

  $\to\; x = \dfrac{5}{2} \;\to\; y = \dfrac{7}{2} \;\to\; C_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$



85 **Las rectas $x + y - 2 = 0$ y $9x - 3y - 4 = 0$ son dos alturas del triángulo ABC de vértice $A(2, 2)$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo.**

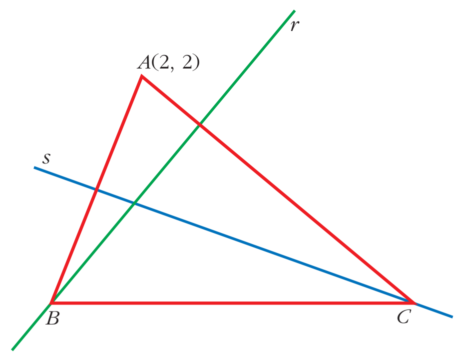
☛ ***Halla las pendientes de los lados AB y AC que son perpendiculares a las alturas. Obtén los puntos B y C como intersección de la altura y el lado correspondiente.***

Comprobamos que $A \notin r: x + y - 2 = 0$

$A \notin s: 9x - 3y - 4 = 0$

Pendientes: $m_r = -1$, $m_s = 3$

Luego r y s son las alturas correspondientes a los puntos B y C.



- $\vec{AC} \perp r \to$ la ecuación de AC será:

  $AC: x - y + k = 0$ (pues la pendiente $m_{AC} = 1$ por $AC \perp r$)

  Como $A \in AC$, entonces:

  $$2 - 2 + k = 0 \to k = 0 \to AC: x - y = 0$$

- $\left.\begin{array}{l} \vec{AB} \perp s \to AB: 3x + 9y + k = 0 \\ \text{Como } A(2, 2) \in AB \end{array}\right\} \to 6 + 18 + k = 0 \to$

  $\to k = -24 \to AB: 3x + 9y - 24 = 0 \to$

  $\to AB: x + 3y - 8 = 0$

- $B = r \cap AB: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -x - y + 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$

  $2y - 6 = 0 \to$

  $\to y = 3 \to x = 2 - y = -1 \to B(-1, 3)$

  $C = s \cap AC: \begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \to x = y \end{cases} \to 9y - 3y - 4 = 0 \to$

  $\to y = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \to x = \dfrac{2}{3} \to C\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

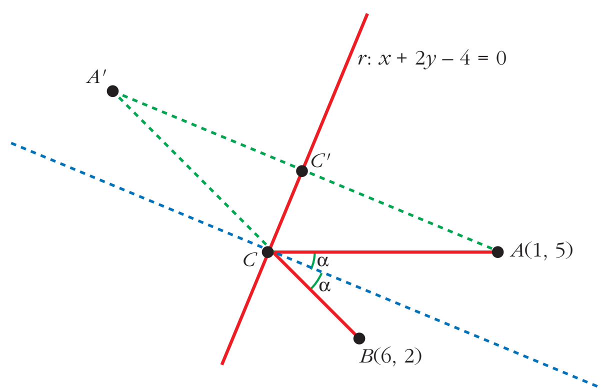
Así:

$$\vec{BC} = \left(\frac{5}{3}, \frac{-7}{3}\right) \;\rightarrow\; \text{la pendiente es } \; m_{BC} = \frac{-7/3}{5/3} = \frac{-7}{5}$$

Como $B \in BC$:

$$BC\!: y - 3 = \frac{-7}{5}(x + 1) \;\rightarrow\; BC\!: y = \frac{-7}{5}x + \frac{8}{5} \;\rightarrow\; BC\!: 7x + 5y - 8 = 0$$

86 **Supongamos que la recta $r: x + 2y - 4 = 0$ es un espejo sobre el que se refleja un rayo luminoso que parte de $A(1, 5)$ y llega a $B(6, 2)$. ¿En qué punto de la recta incidió el rayo?**



- Hallamos el punto A' simétrico de A respecto a la recta r:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Como } AA' \perp r \;\rightarrow\; AA'\!: 2x - y + k = 0 \\ \text{Como } A \in AA' \end{array}\right. \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2 - 5 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 3 \;\rightarrow\; AA'\!: 2x - y + 3 = 0$$

$$C' = r \cap AA'\!: \left\{\begin{array}{l} x + 2y - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = 4 - 2y \\ 2x - y + 3 = 0 \end{array}\right. \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2(4 - 2y) - y + 3 = 0 \;\rightarrow\; 8 - 4y - y + 3 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 5y = 11 \;\Rightarrow\; y = \frac{11}{5} \;\rightarrow\; x = \frac{-2}{5} \;\rightarrow\; C'\left(\frac{-2}{5}, \frac{11}{5}\right)$$

C' es el punto medio de AA' $\rightarrow$

$$\rightarrow\; \left(\frac{-2}{5}, \frac{11}{5}\right) = \left(\frac{x + 1}{2}, \frac{y + 5}{2}\right) \;\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-2}{5} = \dfrac{x + 1}{2} \\[2ex] \dfrac{11}{5} = \dfrac{y + 5}{2} \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} -4 = 5x + 5 \\ 22 = 5y + 25 \end{array}\right. \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = -9/5 \\ y = -3/5 \end{array}\right. \;\rightarrow\; A'\left(\frac{-9}{5}, \frac{-3}{5}\right)$$

• $\overrightarrow{A'B} = \left(6 + \frac{9}{5}, 2 + \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{39}{5}, \frac{13}{5}\right)$ → la pendiente es: $m_{A'B} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$

Además, $B \in A'B$.

$$A'B: y - 2 = \frac{1}{3}(x - 6) \;\rightarrow\; A'B: x - 3y = 0$$

• Por último, el punto C en el que incidió el rayo será el punto de corte de r con $A'B$:

$$C = r \cap A'B: \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = 4 - 2y \\ x - 3y = 0 \end{cases} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (4 - 2y) - 3y = 0 \;\rightarrow\; 4 - 5y = 0 \;\rightarrow$$

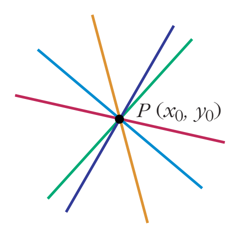
$$\rightarrow\; y = \frac{4}{5} \;\rightarrow\; x = 4 - 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} \;\rightarrow\; C\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

87 **El conjunto de todas las rectas que pasan por un punto $P(x_0, y_0)$ se llama *baz de rectas* de centro P y su expresión analítica es:**

① $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ o bien

② $y = y_0 + m(x - x_0)$



Dando valores a a y b en ① se obtiene una recta del haz, excepto en el caso $a = 0$ y $b = 0$.

Dando valores a m en ② se obtiene una recta del haz, excepto la paralela al eje OY.

a) Escribe la ecuación del haz de rectas de centro (3, –2).

b) Halla la ecuación de la recta de ese haz, que pasa por el punto (–1, 5).

c) ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a $2x + y = 0$?

d) Halla la recta del haz cuya distancia al origen es igual a 3.

a) $a(x - 3) + b(y + 2) = 0$; o bien $y = -2 + m(x - 3)$

b) Si pasa por (–1, 5), entonces, sustituyendo en $y = -2 + m(x - 3)$, obtenemos:

$$5 = -2 + m(-1 - 3) \;\rightarrow\; 7 = -4m \;\rightarrow\; m = -\frac{7}{4}; \text{ es decir:}$$

$$y = -2 - \frac{7}{4}(x - 3) \;\rightarrow\; 4y = -8 - 7x + 21 \;\rightarrow\; 7x + 4y - 13 = 0$$

c) Si es paralela a $2x + y = 0$ tendrá pendiente –2;

por tanto, será:

$$y = -2 - 2(x - 3) \;\rightarrow\; y = -2 - 2x + 6 \;\rightarrow\; 2x + y - 4 = 0$$

d) Una recta del haz tiene por ecuación:

$y = -2 + m(x - 3) \quad \rightarrow \quad y = -2 + mx - 3m \quad \rightarrow \quad mx - y - 3m - 2 = 0$

Su distancia al origen ha de ser igual a 3:

$\dfrac{|-3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$; es decir:

$|-3m - 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$. Elevamoso al cuadrado y operamos:

$9m^2 + 12m + 4 = 9(m^2 + 1)$

$9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 9$

$12m = 5 \quad \rightarrow \quad m = \dfrac{5}{12}$

Por tanto, será:

$\dfrac{5}{12}x - y - \dfrac{15}{12} - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 5x - 12y - 39 = 0$

88 **Determina el centro del haz de rectas de ecuación $3kx + 2y - 3k + 4 = 0$.**

Llamamos (x_0, y_0) al centro del haz. Vamos a escribir la ecuación que nos dan de la forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$:

$3kx + 2y - 3k + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 3k(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0$

$3kx - 3kx_0 + 2y - 2y_0 = 0$

$3kx + 2y - 3kx_0 - 2y_0 = 0$

Han de ser iguales las dos ecuaciones. Por tanto:

$-3kx_0 = -3k \quad \rightarrow \quad x_0 = 1$

$-2y_0 = 4 \quad \rightarrow \quad y_0 = -2$

El centro del haz es el punto (1, –2).