

Complements al tema 1

Resum

Explicarem el teorema de Steinitz i les seues conseqüències.

Teorema 1 (de Steinitz). *Siga V un espai vectorial i $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ una base, si el sistema de vectors $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_p\}$ és linealment independent, aleshores:*

$$p \leq q.$$

Hom pot substituir p vectors de la base $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ pels vectors del sistema $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_p\}$ de manera que s'obté també una base de V

Demostració *Com que el sistema $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ és una base de V , totes els vectors de $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_p\}$ es podran escriure com una combinació lineal dels vectors de $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ aleshores hi ha $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$ en $\mathcal{R}$ de manera que :*

$$s_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

Com que algun λ_i serà diferent de zero, doncs el vector s_1 no és el vector nul, per formar part d'un sistema linealment independent, podem suposar sense perdre generalitat que λ_1 no és zero. Tenim doncs que :

$$v_1 = s_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \quad (1)$$

Vegem que el sistema format per $\{s_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ és una base de V .

- *és un sistema linealment independent:*
Si ens plantegem el sistema d'equacions:

$$0 = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \quad (2)$$

i substituïm s_1 obtenim

$$0 = \alpha_1 (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n =$$

és a dir

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2) v_2 + \dots + (\alpha_1 \lambda_n + \alpha_n) v_n = 0$$

Com que el sistema $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ és linealment independent tenim :

$\alpha_1 \lambda_1 = 0$; $\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 = 0 \dots \alpha_1 \lambda_n + \alpha_n = 0$ però λ_1 és diferent de zero aleshores necessàriament :

$\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0 \dots \alpha_n = 0$

aleshores les úniques solucions del sistema (2) són $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ i per tant el sistema $\{s_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ és linealment independent.

- és un sistema generador: Si w és un vector de V s'escriurà com una combinació lineal dels vectors $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$, existiran doncs uns escalars $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ tals que :

$$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$$

Si substituïm v_1 emprant l'equació (1) tenim expressat w com a combinació lineal dels vectors $\{s_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$

Qué és el que hem provat fins ara?

Doncs que podem canviar el vector s_1 per un dels vectors (que era v_1) del sistema $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ i el nou sistema obtingut és una base de V . Podem repetir el raonament amb la nova base $\{s_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ i el sistema $\{s_2, s_3 \dots s_p\}$.

Aleshores hi ha $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$ en $\mathcal{R}$ de manera que :

$$s_2 = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

Algun $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \dots, \lambda_n$, serà diferent de zero, ja que en cas contrari, $s_1 = \lambda_1 s_2$ i això entra en contradicció amb el fet que s_1 i s_2 siguen linealment independents. Raonant de manera anàloga arribem a la conclusió que podem substituir un dels vectors (posem per cas v_2) per s_2 i el sistema obtingut $\{s_1, s_2, v_3 \dots v_n\}$ serà de nou una base de V . Ja estem en condicions de provar el teorema:

- $p \leq n$ ja que si $p > n$ podríem substituir tots els vectors $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ pels vectors $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_n\}$, que seria una base de V i encara restarien $p - n$ vectors $\{s_{n+1}, s_{n+2}, \dots s_p\}$ que, com que $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_n\}$ seria una base de V , es podrien escriure com a combinació lineal de $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_n\}$, això contradiria que $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_p\}$ siga un sistema linealment independent.
- Hom pot substituir p vectors de la base $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ pels vectors del sistema $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_p\}$ de manera que s'obté també una base de V . Ja que ho hem provat per a s_1 i s_2 però el procés es pot generalitzar.

Queda provat doncs el teorema de Steinitz.

Algunes conseqüències importants són

- Totes les bases d'un espai vectorial V tenen el mateix nombre de vectors. Este nombre rep el nom de dimensió de l'espai V .**
Si tenim dues bases $\{s_1, s_2, s_3 \dots s_p\}$ i $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ pel teorema anterior tenim que $p \leq n$ i $n \leq p$ i per tant $p = n$.
- Un sistema format per $n+1$ vectors d'un espai vectorial de dimensió n són linealment dependents.**
Si $\{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ és una base de V , el teorema anterior ens assegura que qualsevol sistema de vectors independents cont com a màxim n vectors, per tant un sistema format per $n+1$ vectors no pot ser linealment independent.

- c) **Si V és un espai vectorial de dimensi'o n , qualsevol sistema format per n vectors linealment independents és una base de V .**

Doncs si $\dim(V)=n$, hi haurà una base $B_1 = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ formada per n vectors, si tenim un sistema format per n vectors (en general diferents) linealment independents, $S_2 = \{s_1, s_2, s_3 \dots s_n\}$, el teorema anterior ens permet canviar tots els vectors de B_1 per tots els vectors de S_2 i el nou sistema format és una base, aleshores S_2 és una base de V .

- d) **Si $H \subset V$ és un subespai vectorial de V , $\dim(H) \leq \dim(V)$ i $\dim(H) = \dim(V)$ si i només si $H = V$**

Si $\dim(H) = p$ tenim que hi haurà un sistema format per p vectors linealment independents, pel teorema anterior $p \leq \dim(V)$. Supossem que $\dim(H) = \dim(V) = n$, i siga w un vector de V , si $B_H \{s_1, s_2, s_3 \dots s_n\}$ és una base de H , els n vectors seran linealment independents i per l'apartat anterior seran una base de V , aleshores w s'expressarà com a combinació lineal dels vectors de B_H i en conseqüència w també estarà en H .