1. Notacions matemàtiques i conceptes bàsics

Anem a introduir algunes convencions que utilitzarem en el decurs d'aquesta assignatura.

1.1 Conjunts

Siguen A i B dos conjunts qualsevol. El elements d'un conjunt els denotarem habitualment amb les lletres $x, y, z, \cdots$ Aleshores, denotem que un objecte(element) x pertany(està) en un conjunt com

$$\begin{array}{ll} x \in A & \text{l'element } x \text{ està en } A \\ x \notin A & \text{l'element } x \text{ NO està en } A \end{array}$$

A partir d'uns conjunts A i B podem definir uns altres conjunts com per exemple

$$\emptyset, \quad A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \times B.$$

Denotem els conjunts dels nombres com

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},}$$

és a dir, el naturals $\mathbb{N}$ estan continguts en els enters $\mathbb{Z}$, aquests en els racionals $\mathbb{Q}$ i aquests en els reals $\mathbb{R}$.

Un altre conjunt de nombres és el dels complexos, $\mathbb{C}$. Aquests es poden representar en el pla $\mathbb{R}^2$.

1.2 Notacions

Algunes de les convencions normalment utilitzades en matemàtiques són

$$
\begin{array}{rl}
\infty & \text{(infinit)},\\
\forall & \text{(per a tot ...)},\\
\exists & \text{(existeix un ...)},\\
\nexists & \text{(NO existeix cap ...)},\\
\Longleftrightarrow & \text{(si i només si ...)}.
\end{array}
$$

En quant a notacions que són habituals cal esmentar que en general, n, vol denotar que el nombre és natural, z que és enter, q que és racional i x denota a un punt qualsevol d'un conjunt X.

Les lletres gregues $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ usualment denoten angles, mentre que λ, μ, ρ acostumen a denotar nombres qualsevol.

1.3 Nombres reals

La seua representació habitual és en una recta. Dins del nombres reals hi ha uns subconjunts molt utilitzats que són els *intervals*,

$$[a, b], \quad]a, b[, \quad] - \infty, a[, \quad [a, \infty[, ...$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$ i on $a < b$.

Propietat. Entre dos nombres reals qualssevol existeix una infinitat de nombres racionals i irracionals.

Valor absolut. Es defineix el valor absolut d'un nombre real a com

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a \leq 0. \end{cases}$$

Interpretació: És la distància de a fins al 0. Noteu que $|a-c|$ és la distància de a fins a c.

Propietats. El valor absolut verifica que

- $|a| = 0$ sii $a = 0$.
- $| - a| = |a|$.

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualtat triangular).

Més endavant el valor absolut apareixerà en expressions com les següents:

$$|x| < \delta \quad \text{i } |x - a| < \delta$$

amb $\delta, a \in \mathbb{R}$. La seua equivalència és

$$|x| < \delta \iff -\delta < x < \delta,$$

i

$$|x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta.$$

1.4 Fórmula quadràtica general

Les arrels de l'equació quadràtica

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

venen donades per les fórmules

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.5 Propietats de l'exponenciació

Siguen $a, b \in \mathbb{R}$ i $n, m \in \mathbb{N}$, aleshores

(i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

(ii) $(a^n)^m = a^{nm}$,

(iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$,

(iv) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,

(v) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$,

(vi) $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Encara que s'han enunciat per a exponents que son nombres naturals els exponents enters i racionals compleixen les mateixes propietats.

1.6 Factorials

Es defineix el factorial d'un nombre natural com

$$0! = 1, \qquad 1! = 1, \qquad 2! = 2 \cdot 1, \qquad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1, ...$$

i en general, d'una forma recursiva $n! = n \cdot (n-1)!$, és a dir,

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.} \tag{6.1}$$

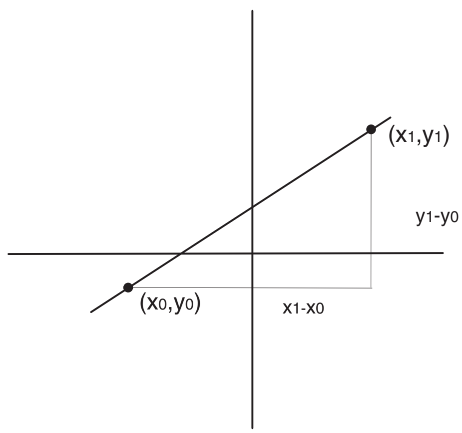
1.7 Geometria analítica

Siguen $P_0 = (x_0, y_0)$ i $P_1 = (x_1, y_1)$ dos punts de $\mathbb{R}^2$. La **distància** entre els dos punts és

$$\boxed{d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.}$$

La **pendent** de la recta que passa pels dos punts és

$$\boxed{m = \tfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.}$$



Equacions d'una recta.

- recta vertical: $x = a$ amb $a \in \mathbb{R}$.
- Equació punt i pendent

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0).} \tag{7.2}$$

- Si coneixem dos punts de la recta (x_0, y_0) i $P(x_1, y_1)$, aleshores

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

- Forma general

$$Ax + By + C = 0, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Rectes paral·leles i perpendiculars. Siguen r_1 i r_2 dues rectes amb pendents respectives m_1 i m_2. Aleshores,

- r_1 i r_2 són paral·leles si i només si

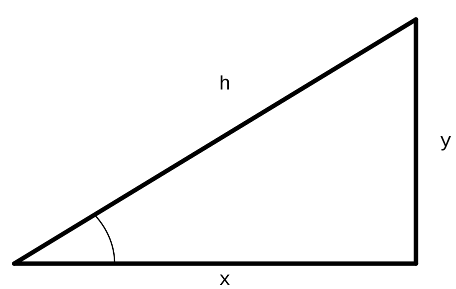
$$m_1 = m_2.$$

- r_1 i r_2 són perpendiculars si i només si

$$m_1 = \frac{-1}{m_2}.$$

1.8 Trigonometria

En un triangle rectangle



es defineixen els valors del sinus, cosinus i tangent com

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\text{costat oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{costat contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{h},}$$

i també

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{costat oposat}}{\text{costat contigu}} = \frac{y}{x}.}$$

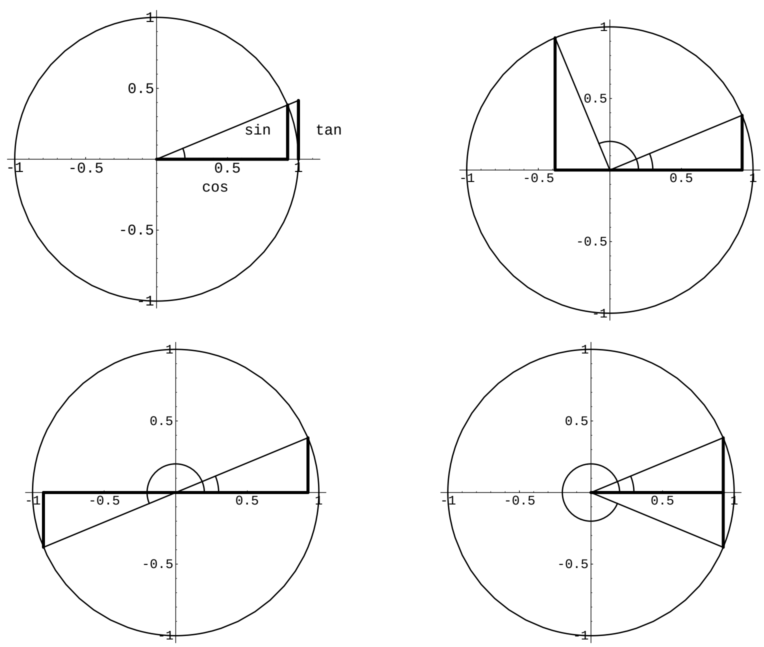
A partir d'aquestes es defineixen la cosecant, secant i la cotangent com

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Alguns valors del sinus, cosinus i tangent d'angles:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0 = 0°$	0	1	1
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2} = 90°$	1	0	$+\infty$
$\pi = 180°$	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2} = 270°$	-1	0	$-\infty$

Una bona forma de recordar els valors del sinus i el cosinus així com el seu signe és utilitzant els següents dibuixos



Aquests dibuixos també vos poden permetre recordar l'expressió tal vegada més important de la trigonometria

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.}$$

D'ací es pot deduir que tant els sinus com el cosinus **sempre** prenen valors en l'interval $[-1, 1]$, és a dir, entre -1 i 1.

Si ara dividim l'expressió anterior per $\cos^2\theta$ arribem a l'expressió

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta.$$

Unes formuletes de la suma i resta d'angles són

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Noteu que com a conseqüència es poden obtenir algunes altres fórmules de la trigonometria

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= \sin(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \\ \sin^2\alpha &= \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \\ \cos^2\alpha &= \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

1.9 Aplicacions

Definició 1.9.1 *Una* **aplicació** f *entre dos conjunts* X *i* Y, $f : X \to Y$, *és una regla que a cada* $x \in X$ *li assigna un* **únic** *element* $f(x) \in Y$, *que s'anomena imatge de* x *per* f. *Al conjunt* X *se l'anomena conjunt inicial i a* Y *conjunt final.*

El conjunt

$$f(X) = \{y \in Y \text{ tals que existeix un } x \in X \text{ que verifica } y = f(x)\}$$

està format per totes les imatges d'elements de X, i se l'anomena conjunt *imatge* de f, o també, conjunt imatge de X per f.

S'anomena *gràfica o grafo* de l'aplicació f al conjunt

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \text{ amb } x \in X\}.$$

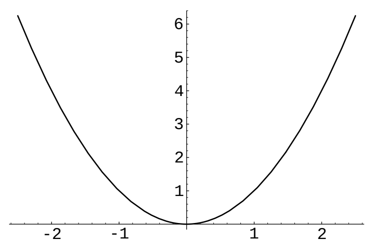
Definicions. Una aplicació $f : X \to Y$ es diu que és

(i) **injectiva** si sempre que $f(x) = f(y)$ això implica que $x = y$, és a dir, un element de la imatge de f només té una antiimatge.

(ii) **sobrejectiva** (suprajectiva) o sobre si $f(X) = Y$, és a dir, si el conjunt imatge i el conjunt final coincideixen, o si qualsevol element de Y té antiimatge.

(iii) **bijectiva** si és injectiva i sobrejectiva.

Exemple. L'aplicació $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida com $f(x) = x^2$ i que té com a gràfica



compleix que

(i) no és injectiva en $\mathbb{R}$, ja que, per exemple, $f(-2) = f(2) = 4$.

(ii) no és sobre en $\mathbb{R}$, ja que cap valor negatiu té antiimatge.

Nogensmenys, l'aplicació f és

(i) injectiva quan el seu domini és només $[0, \infty[$ o bé $]-\infty, 0]$.

(ii) és sobre si es considera com a conjunt final $[0, \infty[$, és a dir, $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$.

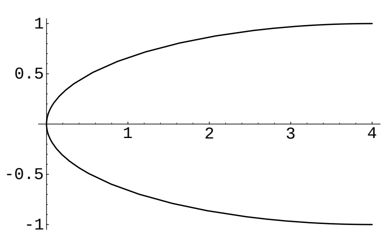
(iii) és bijectiva si considerem com a conjunt inicial $[0, \infty[$ i com a conjunt final $[0, \infty[$, és a dir, $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$.

Nota. Si tenim una gràfica aquesta serà

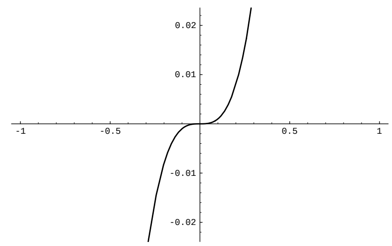
- una aplicació si cada vegada que tracem una recta paral·lela a l'eix y aquesta recta només talla una vegada a la gràfica que tenim.
- injectiva si cada vegada que tracem una recta paral·lela a l'eix x només talla a la gràfica en un punt.

- sobrejectiva si cada vegada que tracem una recta paral·lela a l'eix x que pase per un punt del conjunt final aquesta recta talla a la gràfica de f.

Alguns exemples d'aquests conceptes són els següents:



No és una aplicació.



Gràfica de $f(x) = x^3$. És una aplicació, injectiva i sobre.

Definició. Donades dues aplicacions $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ es defineix l'aplicació **composició de** f **i** g com

$$\boxed{g \circ f : X \to Y \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).}$$

Això sempre que tinguen sentit, és a dir, cal que x estiga en el domini de f i que $f(x)$ estiga en el domini de g. En un altre cas, l'expressió $g(f(x))$ no té sentit.

Exemple. Siguen $f(x) = x^2$ i $g(x) = x + 3$, aleshores

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2, \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3. \end{aligned}$$

Com podeu comprovar en aquest exemple la composició de funcions **NO** és commutativa.

Quan una aplicació $f : X \to Y$ és bijectiva existeix l'aplicació **inversa**, $f^{-1} : Y \to X$. Aquesta es defineix com la única aplicació $f^{-1} : Y \to X$ tal que $(f \circ f^{-1})(y) = id_Y(y) = y$ i $(f^{-1} \circ f)(x) = id_X(x) = x$, per a qualssevol $x \in X$ i $y \in Y$.

Exemples. Dos exemples són:

- La inversa de l'aplicació $g(x) = x + 3$ és la funció $g^{-1}(x) = x - 3$.
- La inversa de l'aplicació $f(x) = 2x + 1$ és la funció $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Nota. En aquest capítol $X, Y \subset \mathbb{R}$ i llavors a les aplicacions les anomenarem *funcions reals de variable real* o simplement *funcions*, i la seua gràfica és un subconjunt de $\mathbb{R}^2$.

1.10 Concepte de funció

Definició 1.10.1 *Siga $D \subset \mathbb{R}$ un conjunt de nombres reals. Una funció f amb domini D és una regla que a cada element x de D li assigna un únic nombre real $f(x)$.*

Terminologia. Normalment les funcions es denoten per la lletra llatina f i per les següents en l'alfabet, $g, h, \ldots$. La variable es denota per la lletra x o les següents $y, z, \ldots$. El valor que la funció f associa a x es denota per $f(x)$.
Exemples. Algunes funcions són:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ amb $f(x) = x^2$.

(ii) $f : (\mathbb{R} - \{1\}) \to \mathbb{R}$ amb $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$.

(iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ amb

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}). \end{cases}$$

En principi, les funcions no tenen perquè estar definides en tot $\mathbb{R}$. El conjunt dels nombres reals als quals se'ls aplica una funció rep el nom de *domini de la funció*, és a dir, és el subconjunt de $\mathbb{R}$ on la funció esta ben definida.

Definició 1.10.2 *El subconjunt de $\mathbb{R}^2$*

$$\{(x, f(x)) : x \in \textit{domini de } f\}$$

s'anomena la gràfica de la funció f.

Noteu que la gràfica d'una funció no és més que el conjunt que la defineix.

Propietats 1.10.3 *Siguen f, g dues funcions. Aleshores, per a tot $x \in \mathbb{R}$, es defineixen les següents funcions:*

(i) La funció suma de f i g és

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

(ii) La funció producte de f i g és

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

(iii) *La funció quocient de f i g, sempre que $g(x) \neq 0$, és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(iv) *La funció composició de f i g, $f \circ g$, és*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Tot això sempre que tinguen sentit, és a dir, per a la composició per exemple, cal que x estiga en el domini de g i que $g(x)$ estiga en el domini de f. En un altre cas, l'expressió $f(g(x))$ no té sentit.

Definició 1.10.4 *Siga $f : D \to f(D)$ una funció injectiva, (D és el domini de la funció). Aleshores podem definir una altra funció, $g : f(D) \to D$ de la següent manera: Donat un nombre $a \in f(D)$, sabem que existeix almenys un $x \in D$ tal que $f(x) = a$. Ara bé, donat que f és injectiva, aleshores aquest x és únic. Per tant, podem definir $g(a) = x$. La funció g rep el nom de funció inversa de f i es denota per f^{-1}. Es pot comprovar fàcilment que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id$.*

Nota. Noteu que al dir que $f : D \to f(D)$ ja estem assumint que és sobre!
Exemples. Alguns exemples són:

(i) La funció inversa de $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida per $g(x) = x^2$ només té sentit quan és injectiva, és a dir, quan $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Aleshores, la funció inversa $g^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ és $g^{-1}(x) = +\sqrt{x}$.

(ii) Si $f(x) = 2x + 3$, aleshores $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.