10. Integració de funcions de diverses variables. Aplicacions

Com ja vam estudiar en el Tema 6 la integral d'una funció $y = f(x)$ en un interval $[a, b]$ es pot considerar com l'àrea de la regió compresa baix de la gràfica de la funció fins a l'eix x, , és a dir, la integral definida

$$\text{Àrea } = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En aquest tema estudiarem com les integrals de funcions de diverses variables es poden interpretar com àrees i volums d'unes certes regions.

10.1 Integrals dobles

Començarem per estudiar les integrals d'una funció de dues variables definida sobre una regió rectangular $[a, b] \times [c, d]$, després algunes propietats d'aquestes integrals, i finalment, calcularem integrals sobre dominis més generals.

Suposem que la funció $f(x, y)$ està definida en una regió rectangular donada per $a \leq x \leq b$ i $c \leq y \leq d$. Aleshores, podem considerar particions dels intervals $[a, b]$ i $[c, d]$, és a dir,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_m = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d,$$

i triar en cada rectàngle $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$ un punt $(\tilde{x_k}, \tilde{y_l})$ i ara calcular la suma del volum dels $m \times n$ paral·lelepípedes que tenen per bases els rectàngles $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$ i altures $f(\tilde{x_k}, \tilde{y_l})$

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f(\tilde{x_k}, \tilde{y_l})(x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f(\tilde{x_k}, \tilde{y_l})\Delta x_k \Delta y_l,$$

on $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ i $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$.

Doncs bé, si en aquesta suma la distància entre els punts de la partició es fa tendir a zero, és a dir, $\Delta x_k \to 0, \Delta y_l \to 0$, aleshores en el límit aquesta suma és el que s'anomena la integral doble de la funció en el rectangle $[a,b] \times [c,d]$ i es representa per $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$.

Definició 10.1.1 *Amb les mateixes notacions que abans*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta x_k \to 0, \Delta y_l \to 0} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} f(\tilde{x_k}, \tilde{y_l}) \Delta x_k \Delta y_l.$$

El raonament anterior, ens permet interpretar el valor de la integral $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$ com el volum del cos limitat pels plans $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d,\ z = 0$ i la gràfica de la funció f.

Algunes propietats de les integrals dobles estàn expressades en les següents Propietats.

Propietats 10.1.2 *Siga $f(x,y)$ una funció de dues variables definida en una regió rectangular R, aleshores*

(i) $\int\int_R k \cdot f(x,y)\ dxdy = k \cdot \int\int_R f(x,y)\ dxdy, \quad k \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int\int_R (f(x,y) \pm g(x,y)\ dxdy = \int\int_R f(x,y)\ dxdy \pm \int_R \int g(x,y)\ dxdy$.

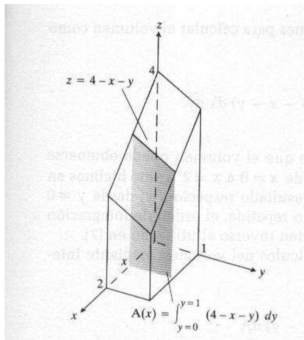
(iii) $\int\int_R f(x,y)\ dxdy \geq 0$ *si* $f(x,y) \geq 0$ *en* R.

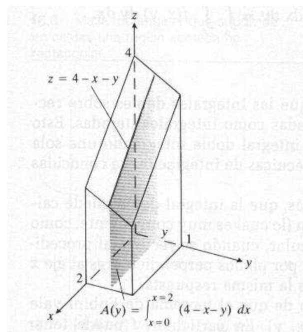
Exemple. Calculem el volum comprés baix del pla $z = 4 - x - y$ en la regió rectangular $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ del pla $z = 0$.

Sol. Una manera de calcular aquest volum és utilitzar el resultat ja conegut, Definició 6.5.1 del Tema d'Integració de funcions d'una variable, que ens permetia calcular el volum a partir de l'àrea d'una secció. En particular, ara podriem calcular el volum com

$$V = \int_{x=0}^{x=2} A(x)\ dx \quad \text{o bé} \quad V = \int_{y=0}^{y=1} A(y)\ dy,$$

com s'observa en els dibuixos





Les àrees de les seccions les podem calcular amb una integral com segueix

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy \quad , \quad A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\, dx,$$

i per tant, combinant açò arribem a que el volum el podem calcular amb

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x\right) dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right] = 5, \end{aligned}$$

o bé amb

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\, dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left[4x - \frac{x^2}{2} - yx \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y)\, dy = \left[6y - y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = 5. \end{aligned}$$

El fet que el volum siga el mateix si comencem integrant la variable x o la y, per a continuar després en l'altra no és cap fet estrany. De fet és el que passa sempre com ens diu el següent resultat.

Teorema 10.1.3 Teorema de Fubini. *Siga $f(x, y)$ una funció contínua en la regió rectangular $a \le x \le b$ i $c \le y \le d$, aleshores*

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy\, dx.$$

Exemple. Calcular la integral de la funció $f(x,y) = 10 - x^2 - 3xy$ en el domini $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3\}$.

Sol. Com el domini és un rectàngle $D = [0,1] \times [2,3]$, aleshores

$$\int_D (10 - x^2 - 3xy)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_2^3 (10 - x^2 - 3xy) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[10y - x^2 y - 3x \frac{y^2}{2} \right]_2^3 dx = \int_0^1 \left(30 - 3\, x^2 - 3x \frac{9}{2} - 20 + 2x^2 + 6x \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(10 -\ x^2 - \frac{15}{2} x \right) dx = \left[10x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{15}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{71}{12}$$

Teorema 10.1.4 Teorema de Fubini II. *Siga $f(x,y)$ una funció contínua en una regió R, aleshores*

- *Si R està definida per $a \le x \le b$ i $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, aleshores*

$$\int\int_R f(x,y) dx\, dy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y) dy\, dx.$$

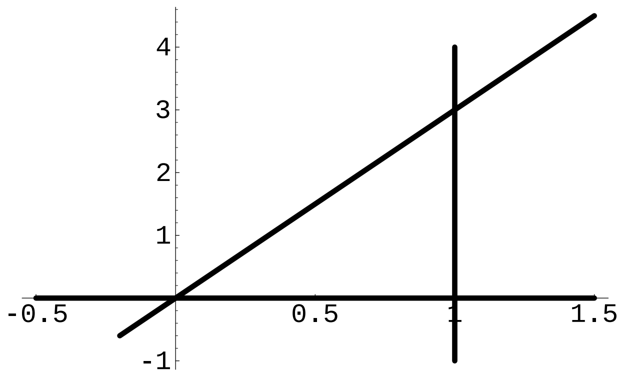
- *Si R està definida per $c \le y \le d$ i $g_1(y) \le x \le g_2(y)$, aleshores*

$$\int\int_R f(x,y) dy\, dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y) dx\, dy.$$

A continuació hi ha alguns exemples de com s'aplica aquest resultat.

Exemple 1. Calcular la integral de la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el domini D del pla limitat per les rectes $y = 3x$, $x = 1$ i l'eix x.

Sol. L'eix x és la recta $y = 0$. Així, el valor de x estarà comprés entre $x = 0$ (que és el valor de x en el punt intersecció de la recta $y = 3x$ amb la recta $y = 0$) i 1 (donat que $x = 1$ és una de les rectes que limiten el domini). D'una altra banda, el valor de y estarà comprés entre el valor que pren en $y = 0$, que és 0, i el valor que pren en $y = 3x$, que és $3x$, per tant (vore dibuix adjunt) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3x\}$.

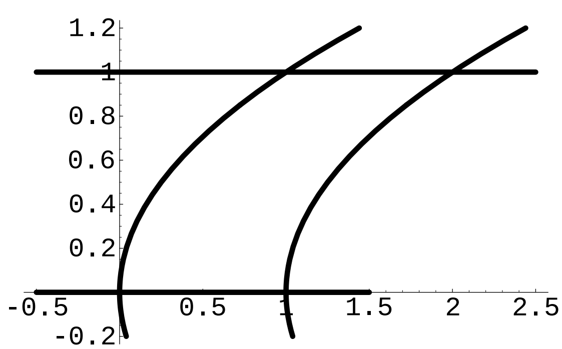


Ara com a consequència del Teorema de Fubini II 10.1.4 ,

$$
\begin{aligned}
\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{3x} (x^2+y^2)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{3x} dx \\
&= \int_0^1 (3x^3+9x^3)dx = \left[\frac{3x^4}{4}+\frac{9x^4}{4}\right]_0^1 = 3.
\end{aligned}
$$

Exemple 2. Calcular la integral de la funció $f(x,y)=x+y$ en el domini D del pla limitat per les rectes $y=0$, $y=1$ i les corbes $x=y^2$, $x=y^2+1$.

Sol. Com el domini està fitat per les rectes $y=0$, $y=1$, sembla clar que, en el domini D, la variable y varia entre 0 i 1. D'una altra banda, com el domini està comprés entre les corbes $x=y^2$ i $x=y^2+1$, la variable x varia entre y^2 i y^2+1. Per tant, el domini és $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y^2\le x\le y^2+1,\ 0\le y\le 1\}$.



Ara com a conseqüència del Teorema de Fubini II 10.1.4,

$$\begin{aligned}\int_D (x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^2+1} (x+y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_{y^2}^{y^2+1} dy \\ &= \int_0^1 (y^2+\frac{1}{2}+y)dy = \left[\frac{y^3}{3}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Exemple 3. Calcular la integral de la funció $f(x,y,z) = xz$ en el domini $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4, 3 \leq z \leq 3+\frac{3}{4}y\}$.

Sol. Apliquem el Teorema de Fubini II 10.1.4 a aquesta funció de tres variables, i obtenim que

$$\begin{aligned}\int_D x\,z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_0^4 \left(\int_3^{3+\frac{3}{4}y} xz\,dz\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^4 \left[x\frac{z^2}{2}\right]_3^{3+\frac{3}{4}y} dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^4 \left(\frac{9}{4}xy+\frac{9}{32}xy^2\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{9}{8}xy^2+\frac{3}{32}xy^3\right]_0^4 dx \\ &= \int_0^1 (18x+6x)dx = \left[12x^2\right]_0^1 = 12.\end{aligned}$$

10.2 Determinació dels límits d'integració

A vegades la part més difícil del càlcul d'una integral doble és determinar correctament quins són els límits d'integració. No obstant, això es por fer si es segueixen aquest consells:

- Si volem integrar primer respecte de y i després respecte de x

  1 Imaginem una recta **vertical** que talla a la regió R segons la direcció creixent de y.

  2 El límit inferior per a la y és el punt on la recta L entra en la regió i el límit superior és el punt d'eixida de la recta de la regió.

  3 Triem els límits de x que incloguen a totes les rectes **verticals** que tallen a R.

- Si volem integrar primer respecte de x i després respecte de y

  1 Imaginem una recta **horitzontal** que talla a la regió R segons la direcció creixent de x.

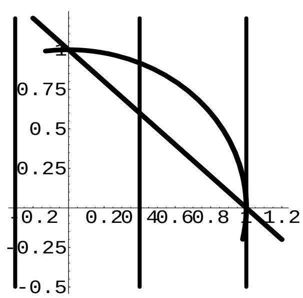
2 El límit inferior per a la x és el punt on la recta L entra en la regió i el límit superior és el punt d'eixida de la recta de la regió.

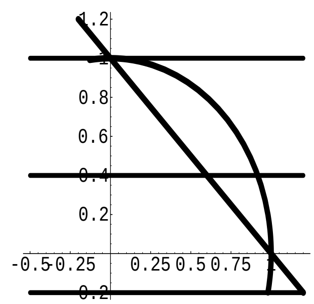
3 Triem els límits de y que incloguen a totes les rectes **horitzontals** que tallen a R.

Exemple. Determinar els límits d'integració de la regió compresa entre les corbes $x + y = 1$ i $x^2 + y^2 = 1$.

Sol. Si dibuixem una recta vertical a l'esquerra de la regió i anem menejant-la cap a la dreta (sentit positiu de l'eix x) el primer punt on talla a la regió és $x = 0$. Després en un punt a la dreta del zero la recta "entra" en la regió travessant la corba $x + y = 1$ i ix travessant la corba $x^2 + y^2 = 1$. Per tant, els límits d'integració per a la variable y són $y = 1 - x$ (inferior) i $y = \sqrt{1 - x^2}$ (superior). Finalment, la recta deixa de travessar la regió quan $x = 1$, i per tant, els límits d'integració per a la x són $x = 0$ (inferior) i $x = 1$ (superior),

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx.$$





Si en el mateix exemple busquem els límits d'integració amb rectes horitzontals s'observa que el primer punt on tallen a la regió és $y = 0$, després entren en la regió travessant la corba $x + y = 1$ i ixen travessant $x^2 + y^2 = 1$, i finalment deixen de tallar a la regió quan $y = 1$. Per tant, la integral es calcula amb

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy.$$

10.3 Exercicis

1 Determina el volum limitat per les superfíicies $z = x^2 + y^2$, $x + y = 2$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$.

2 Calcula el volum del domini limitat per el cilindre $y^2 = 4 - z$ i els plans $y = 2x$, $x = 0$ y $z = 0$.

3 Calcula el volum del domini limitat per el cilindre $x^2 = 4y$ i els plans $3x + y - z = 0$, $x = 2y$ y $z = 0$.

4 Calcula el volum del domini limitat per el cilindre $x^2 + y^2 = 4$ i els plans $z = 7x$, $y = 0$ y $z = 0$ en el primer octant.

5 Calcula el volum del domini limitat por el cilindre $(x^2 + y^2)z = 1$ y los plans $y = x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$ y $z = 0$ en el primer octant.

6 Calcula el volum del domini limitat por el cilindre $y = \cos x$ y los plans $z = y, x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ y $z = 0$.

7 Calcula el volum del domini limitat per el cilindre $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ i els plans $x + z = a$, $x = 0, y = 0$ i $z = 0$.

8 Calcula el volum del domini espacial determinat per la gràfica de la funció $z = 2x + 3y$ sobre el domini pla $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

9 Calcula el volum del domini espacial determinat per la gràfica de la funció $z = 2x + 1$ sobre el domini pla $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

10 Calcula el volum del domini espacial determinat per la gràfica de la funció $z = 4 - y^2 - \frac{1}{4}x^2$ sobre el domini pla $(y - 1)^2 + x^2 \leq 1$.

11 Calcula el volum del domini limitat per el paraboloide $z = x^2 + y^2$ i el cilindre $x^2 + y^2 \leq 1$.