2. Espais vectorials, matrius, determinants i sistemes d'equacions lineals

2.1 Definicions

Un espai vectorial és una estructura algebraica com també ho són el concepte de grup, d'anell o el de cos. Ací considerarem exclusivament espais vectorials sobre el cos commutatiu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, encara que la definició de tal concepte es pot fer sobre qualsevol altre cos.

Definició 2.1.1 *Es diu que un conjunt V té estructura d'espai vectorial, si:*

- *En V hi ha definida una llei de composició interna '$+$' de manera que $(V, +)$ és un grup commutatiu.*

- *Hi ha una llei de composició externa, denotada per '$\cdot$',*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, \overrightarrow{v}) & \longrightarrow & \alpha \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$$

  que satisfà les següents propietats $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$,

  (i) $\alpha \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \alpha \cdot \overrightarrow{w}$,

  (ii) $(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{v}$,

  (iii) $\alpha \cdot (\beta \cdot \overrightarrow{v}) = (\alpha\beta) \cdot \overrightarrow{v}$,

  (iv) $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.

Denotarem l'element neutre de $\mathbb{R}$ per 0 i l'element neutre de $(V, +)$ també per 0. Encara que es denoten amb el mateix símbol, el context permetrà deduir quan es tracta d'un escalar o d'un vector. Els elements de V es diuen vectors i els de $\mathbb{R}$ escalars. Els vectors es denotaran amb lletres llatines, $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, v\,\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \ldots,$ i els escalars amb lletres gregues, $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$, ...

Nota. El signe '$\cdot$' denota la llei de composició externa i d'ara endavant a vegades es suprimirà. Això es farà així sempre que no hi haja lloc a confusió.

Exemples.

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ és un espai vectorial.
- El conjunt de vectors fixos del pla ordinari que tenen un mateix punt origen.
- El conjunt, $\mathbb{R}^n[x]$, de polinomis d'una variable indeterminada, x, amb coeficients en $\mathbb{R}$, de grau n, amb la suma de polinomis i el producte d'un escalar per un polinomi.

Propietats. De la definició d'espai vectorial es compleix que

- $0 \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot 0 = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{v} \in V.$
- $\alpha \cdot (-\overrightarrow{v}) = (-\alpha) \cdot \overrightarrow{v} = -(\alpha \cdot \overrightarrow{v}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{v} \in V.$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{v} = 0$ implica que o bé $\alpha = 0$ ó bé $\overrightarrow{v} = 0$.
- Si $\alpha \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{w}$ i l'escalar $\alpha \neq 0$, aleshores $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.
- Si $\alpha \cdot \overrightarrow{v} = \beta \cdot \overrightarrow{v}$ i el vector $\overrightarrow{v} \neq 0$, aleshores $\alpha = \beta$.

2.2 Subespais vectorials

Definició 2.2.1 *Siga $(V, +, \cdot)$ un espai vectorial i siga H un subconjunt de V. Direm que H és un subespai vectorial de V si H és un espai vectorial amb les mateixes operacions.*

Exemples.

(i) Siga $V = \mathbb{R}^2[x]$ l'espai vectorial dels polinomis de coeficients reals de grau menor o igual que 2. El subconjunt de polinomis de V que s'anul·len en $x = 1$ és un subespai vectorial de V. Però el subconjunt de polinomis de V que en $x = 1$ prenen el valor 2 no ho és.

(ii) Siga $V = \mathbb{R}^3$, el subconjunt de vectors (x, y, z) tals que $2x - z = 0$ és un subespai vectorial de V. Però el subconjunt de vectors (x, y, z) tals que $2x - z = -2$ no ho és.

Proposició 2.2.2 Caracterizació dels subespais vectorials. *Siga* $(V, +, \cdot)$ *un espai vectorial i siga* H *un subconjunt de* V*. Aleshores,* H *és un subespai vectorial de* V *si i només si* $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in H$*, es compleix que*

$$\alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w} \in H,$$

per a qualsevol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exemples. Considerem l'espai vectorial dels vectors en el pla $\mathbb{R}^2$ i els següents subespais

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x + y = 0\} \quad , \quad H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x + y = 2\}.$$

Anem a provar que H_1 és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$ però que H_2 no ho és.

Siguen $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ i $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$ elements de H_1 (és a dir, verifiquen que $v_1 + v_2 = 0$ i que $w_1 + w_2 = 0$) i siguen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejam que l'element $\alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w}$ també és un element de H_1 siguen els que siguen α i β,

$$\alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w} = (\alpha v_1, \alpha v_2) + (\beta w_1, \beta w_2) = (\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2),$$

i es compleix que la suma de les seues coordenades és igual a zero

$$(\alpha v_1 + \beta w_1) + (\alpha v_2 + \beta w_2) = \alpha \cdot (v_1 + v_2) + \beta \cdot (w_1 + w_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Anem amb H_2, siguen $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ i $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$ elements de H_2 (és a dir, verifiquen que $v_1 + v_2 = 2$ i que $w_1 + w_2 = 2$) i siguen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vejam que l'element $\alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w}$ **NO** és en general un element de H_2,

$$\alpha \cdot \overrightarrow{v} + \beta \cdot \overrightarrow{w} = (\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2),$$

i es compleix que

$$(\alpha v_1 + \beta w_1) + (\alpha v_2 + \beta w_2) = \alpha \cdot (v_1 + v_2) + \beta \cdot (w_1 + w_2) = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 2.$$

Per tant, només per a alguns valors de α i β es compliria però **NO per a tots**. En particular, siguen $\overrightarrow{v} = (2, 0) \in H_2$ i $\overrightarrow{w} = (1, 1) \in H_2$, aleshores

$$2 \cdot (2, 0) + 5 \cdot (1, 1) = (4, 0) + (5, 5) = (9, 5) \notin H_2.$$

Exemples. Anem a provar que el subconjunt de polinomis de V que s'anul·len en $x = 1$ és un subespai vectorial de V

$$H_1 = \{Ax^2 + Bx + C \quad \text{a}mb \quad A + B + C = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{R}\}.$$

Per tal de fer-ho, siguen $\overrightarrow{v} = A_1x^2+B_1x+C_1 \in H_1$ i $\overrightarrow{w} = A_2x^2+B_2x+C_2 \in H_1$ dos elements de H_1, i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considerem el polinomi de grau 2 que s'obté al multiplicar-los per α i β, aleshores

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (A_1x^2 + B_1x + C_1) \quad + \quad & \beta \cdot (A_2x^2 + B_2x + C_2) = (\alpha A_1 + \beta A_2)x^2 \\ & +(\alpha B_1 + \beta B_2)x + (\alpha C_1 + \beta C_2),\end{aligned}$$

és un polinomi de segon grau que s'anul·la en $x = 1$,

$$\alpha(A_1 + B_1 + C_1) + \beta(A_2 + B_2 + C_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

ja que $\overrightarrow{v} = A_1x^2 + B_1x + C_1$ i $\overrightarrow{w} = A_2x^2 + B_2x + C_2$ són elements de H_1.

Per tant, H_1 és un subespai vectorial de l'espai vectorial dels polinomis de grau 2 que s'anul·len en $x = 1$.

Vejam però que el subconjunt de polinomis de V que en $x = 1$ prenen el valor 2 no és un subespai vectorial. Siga

$$H_2 = \{Ax^2 + Bx + C \quad \text{a}mb \quad A + B + C = 2, \quad A, B, C \in \mathbb{R}\}.$$

Aleshores quan agafem dos polinomis d'aquest subespai, $A_1x^2 + B_1x + C_1$ i $A_2x^2 + B_2x + C_2$, i els multipliquem per uns escalars α i β, i després calculem el seu valor en $x = 1$ es compleix que

$$\alpha(A_1 + B_1 + C_1) + \beta(A_2 + B_2 + C_2) = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 2,$$

però aquest valor **NO sempre és** igual a 2, és a dir, no es verifica per a tots els α i β. Nogensmenys, encara no hem provat que no és un subespai vectorial. Per tal de provar-ho anem a donar dos polinomis de H_2 que no ho verifiquen. Per exemple, siguen $\overrightarrow{v} = 4x^2 - x - 1$, i $\overrightarrow{w} = x^2 + x$, que en $x = 1$ prenen el valor 2, i siguen $\alpha = 2$ i $\beta = 3$, aleshores

$$2 \cdot \overrightarrow{v} + 3 \cdot \overrightarrow{w} = 2 \cdot (4x^2 - x - 1) + 3 \cdot (x^2 + x) = 11x^2 + x - 2,$$

i quan $x = 1$ pren el valor $11 + 1 - 2 = 10$. Per tant, H_2 no és un subespai vectorial de V.

2.3 Generació de subespais

Anem a vore com es poden obtenir fàcilment subespais vectorials a partir d'un conjunt de vectors.

Definició 2.3.1 *Siga* $\overrightarrow{w} \in V$ *i* $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\} \subset V$. *Es diu que* $\overrightarrow{w}$ *és* **combinació lineal** *de* $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ *si existeix un conjunt d'escalars* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ *tals que*

$$\overrightarrow{w} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{v_n}.$$

Exemple. El vector $(4, 6, 7)$ és combinació lineal de $\{(1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$ ja que podem trobar dos valors $\alpha_1 = 3$ i $\alpha_2 = -1$ tals que

$$(4, 6, 7) = 3 \cdot (1, 2, 3) + (-1) \cdot (-1, 0, 2).$$

Definició 2.3.2 *Siga* S *un subconjunt de* V. *Es defineix el* **subespai vectorial generat o engendrat per** S, *i es denota per* $\langle S\rangle$, *com el subconjunt de* V,

$$\langle S\rangle = \{\overrightarrow{w} \in V / \overrightarrow{w} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{v_n} : \overrightarrow{v_i} \in S\},$$

és a dir, és el conjunt de tots els vectors que es poden obtenir amb combinacions lineals dels elements de S.

Es diu també que S *és un sistema generador de* $\langle S\rangle$, *i de fet,* $\langle S\rangle$ *és el menor subespai vectorial de* V *que conté el conjunt* S.

Exemple. Considerem els següents subconjunts de $\mathbb{R}^3$,

$$S_1 = \{(1, 1, 0)\} \quad , \quad S_2 = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

El subespai vectorial generat per S_1 és

$$< S_1 >= \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{v} = \alpha \cdot (1, 1, 0) \ \text{amb} \ \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, \alpha, 0) \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

és a dir, tots els vectors de $\mathbb{R}^3$ que tenen les dos primeres coordenades iguals i la tercera igual a zero. El subespai vectorial generat per S_2 és

$$\begin{aligned} < S_2 > &= \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \overrightarrow{v} = \alpha \cdot (1, 1, 0) + \beta \cdot (0, 0, 1) \ \text{amb} \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha, \alpha, \beta) \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

és a dir, tots els vectors de $\mathbb{R}^3$ que tenen les dos primeres coordenades iguals (sobre la tercera no hi ha cap restricció!).

En l'exemple anterior a partir d'uns vectors hem trobat quin és el subespai vectorial que generen però a vegades el procés és a l'inrevés: Coneixem el subespai i volem trobar una família de vectors que generen el subespai. A continuació tenim un exemple.

Exemple. Trobar un conjunt de vectors que generen el següent subespai

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } 2x - z = 0\}.$$

La relació entre les coordenades d'un vector de H que ens determina el subespai ens diu que els vectors de H verifiquen que $z = 2x$,

$$(x, y, z) = (x, y, 2x) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 0),$$

i per tant, els vectors $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 2)$ i $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 0)$ generen el subespai H.

2.4 Dependència i independència lineal

Definició 2.4.1 *Direm que la família de vectors* $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ *és*

- *una* **família lligada** *si existeixen* $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, **algun d'ells distint de zero**, *tals que*

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = 0.$$

- *una* **família lliure** *si l'expressió*

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = 0$$

implica que $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$ *(***tots han de ser zero***).*

Exemple. En $\mathbb{R}^3$ es considera la família

$$\{\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 2), \overrightarrow{v_2} = (0, 1, 0), \overrightarrow{v_3} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{v_4} = (2, 3, -4)\}.$$

Aquesta és una família lligada ja que

$$\frac{2}{3}(1, 0, 2) + (-3)(0, 1, 0) + \frac{8}{3}(-1, 0, 1) + 1(2, 3, -4) = (0, 0, 0),$$

però la família formada només per $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ és lliure.

2.5 Espais vectorials de dimensió finita

Siga V un espai vectorial. Direm que V és de dimensió finita si existeix un subconjunt **finit** S de V tal que $< S >= V$, és a dir, si existeix un subconjunt generador finit de V. Així, tot vector $\overrightarrow{v}$ de V és combinació lineal d'un nombre finit de vectors de S.

A partir d'ara, i mentre no es diga una altra cosa, considerarem només espais vectorials de dimensió finita.

Definició 2.5.1 Base d'un espai vectorial. *Siga B un subconjunt finit, $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$. Es diu que B és base de V si i només si B és sistema generador de V (és a dir, $< B >= V$) i B és una família lliure.*

Exemples.

- $(\mathbb{R}^n, +, .)$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial. Una base és

  $$\{\overrightarrow{e_1} = (1, 0, \ldots, 0), \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \overrightarrow{e_n} = (0, 0, \ldots, 0, 1)\}.$$

  Aquesta base s'acostuma a anomenar la **base canònica** de $\mathbb{R}^n$.

- Una base de l'espai vectorial dels polinomis de grau n en una incògnita x, $\mathbb{R}^n[x]$, està formada pels $(n + 1)$ polinomis $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

- Si $S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ és una família lliure, aleshores S és una base de l'espai vectorial $< S >$.

Les següents afirmacions permeten parlar amb tot rigor de bases dels espais vectorials de dimensió finita. Les enunciarem sense demostrar-les.

Proposició 2.5.2

- *Tot espai vectorial de dimensió finita no trivial té almenys una base.*

- *En un espai vectorial de dimensió finita totes les bases tenen el mateix nombre de vectors.*

Definició 2.5.3 *Anomenarem dimensió d'un espai vectorial al nombre de vectors d'una qualsevol de les seues bases.*

Per conveni, direm que l'espai trivial $\{\overrightarrow{0}\}$ té dimensió zero. Recordem que la dimensió està ben definida ja que totes les bases tenen el mateix nombre de vectors.

Exemples.

- La dimensió de $\mathbb{R}^3$ és 3. Una base de $\mathbb{R}^3$ és, per exemple, la mateixa base canònica
$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$
Però n'hi ha d'altres (Quantes? Infinites!). A continuació teniu un parell
$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(-2,0,1),(1,1,0)\}\,,\; \mathcal{B}_2 = \{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}.$$

- La dimensió de $\mathbb{R}^3[x]$ és 4. Una base és $\{1,x,x^2,x^3\}$, però també n'hi ha infinites. Per exemple, aquesta també és una base,
$$\left\{B_0^4(x) = (1-x)^4, B_1^4(x) = 4x(1-x)^3, B_2^4(x) = 6x^2(1-x)^2,\right.$$
$$\left. B_3^4(x) = 4x^3(1-x), B_4^4(x) = x^4\right\}.$$
Els polinomis $B_i^4(x)$ són els polinomis de Bersntein d'ordre 4.

El que sí que farem serà demostrar un parell de mètodes per obtenir bases a partir de famílies de vectors que siguen, bé sistema generador, bé família lliure.

Proposició 2.5.4 *Siga V un espai vectorial de dimensió finita i suposem que tenim un sistema generador de V, $S = \{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_q}\}$. Aleshores, podem llevar vectors de S fins a obtenir una base de V.*

Demostració. Ja sabem que $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_q}\}$ és un sistema generador. Si a més a més, és lliure aleshores ja tenim una base. Si no és lliure llavors existeix un vector que és combinació lineal dels altres. Suposem que és l'últim. Si l'el·liminem del sistema generador encara ens quedarà un sistema generador, $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_{q-1}}\}$. Si aquesta nova família de vectors és lliure aleshores ja tenim una base. Si no és lliure llavors existeix un vector que és combinació lineal dels altres. Suposem que és l'últim. Si l'el·liminem del sistema generador encara ens quedarà un sistema generador, $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_{q-2}}\}$. Repetint el procés un nombre finit de vegades, com a màxim $q-1$, obtindríem finalment la base desitjada. □

Proposició 2.5.5 *Siga V un espai vectorial de dimensió finita i siga $S = \{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_q}\}$ una família lliure de vectors de V. Aleshores, podem afegir a S vectors de V fins a obtenir una base.*

Demostració. Ja sabem que $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_q}\}$ és lliure. Si a més a més és un sistema generador de V aleshores ja tindríem la base desitjada. Si no és sistema generador, llavors $< S >$ no és tot l'espai vectorial V, per tant existeix almenys un vector $\overrightarrow{w} \neq 0$ tal que $\overrightarrow{w}$ no pertany a $< S >$. Aleshores $\{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_q}\}$ és una família lliure. Repetint el procés, com que V és un espai vectorial de dimensió finita, tenim que després d'un nombre finit de pasos s'aconsegueix la base desitjada. Aquest procés és diu completació de la família lliure. $\square$

2.6 Coordenades d'un vector respecte d'una base

Definició 2.6.1 *Siga $\overrightarrow{v} \in V$ i $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ una base. Anomenarem* **coordenades** *del vector $\overrightarrow{v}$ respecte de la base B als escalars $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ tals que*

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{e_n}.$$

Habitualment, denotarem al vector com $\overrightarrow{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ i ja entendrem que les coordenades són respecte de la base que estiguem considerant(la base canònica serà la més utilitzada).

Exemple. Les coordenades del vector $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ respecte de la base canònica són $(3, -1, 1)$, però respecte de la base $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{e_2} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{e_3} = (1, 1, 0)\}$ són $\overrightarrow{v} = (2, -1, -1)_{\mathcal{B}_1}$, ja que

$$(3, -1, 1) = 2 \cdot (1, 0, 1) + (-1) \cdot (-2, 0, 1) + (-1) \cdot (1, 1, 0).$$

Proposició 2.6.2 *Les coordenades d'un vector respecte d'una determinada base són úniques.*

Demostració. Siga $\overrightarrow{v} \in V$ i $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ una base i suposem que tenim del mateix vector dues expressions en coordenades **distintes** respecte d'aquesta base

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{e_n}$$

i

$$\overrightarrow{v} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + ... + \beta_n \overrightarrow{e_n}.$$

Aleshores,

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) \overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2) \overrightarrow{e_2} + ... + (\alpha_n - \beta_n) \overrightarrow{e_n},$$

i donat que $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ és una família lliure, aleshores

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = ... = \alpha_n - \beta_n = 0.$$

És a dir,

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad , \quad \alpha_2 = \beta_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \alpha_n = \beta_n$$

i per tant, les coordenades del vector $\overrightarrow{v}$ respecte de la base B són úniques.

2.7 Matrius

Una **matriu** és una disposició rectangular de nombres que s'ordenen en files i columnes tancada entre claudàtors. Els nombres que apareixen en una matriu s'anomenen els *coeficients* de la matriu. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Les matrius s'acostumen a denotar per lletres majúscules. Direm que una matriu A és d'ordre $n \times m$ sobre $\mathbb{R}$ si té n-files i m-columnes amb coeficients reals, i es denotarà com $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Quan es parla d'una matriu general els coeficients s'acostumen a denotar amb dos subíndexs, a_{ij}, el primer fa referència al número de la fila i el segon al número de la columna en la qual es troba el coeficient. Per exemple,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

és una matriu d'ordre $n \times m$ sobre $\mathbb{R}$, la qual es pot expressar abreujadament com $[a_{ij}]_{n\times m}$, on $a_{ij} \in \mathbb{R}$. El nombre de files és n i el nombre de columnes és m.

Les matrius són molt útils per a resoldre sistemes d'equacions lineals com vorem en els apartats 2.17 i posteriors.

2.8 Tipus de matrius

- Matriu fila, té una única fila.
- Matriu columna, té una única columna.
- Matriu quadrada, té el mateix nombre de files que de columnes.

- **Matriu diagonal**. Si $a_{ij} = 0$ quan $i \neq j$.
- **Matriu identitat d'ordre** n. Una matriu quadrada d'ordre n, diagonal, amb els elements de la diagonal iguals a $1 \in \mathbb{R}$. Es denota per Id_n.
- Matriu triangular superior. Si $a_{ij} = 0$ quan $i < j$.
- Matriu triangular inferior. Si $a_{ij} = 0$ quan $i > j$.
- Matriu escalar. Si és diagonal i tots els elements de la diagonal són iguals.
- Matriu simètrica. Si $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$, és a dir, si és simètrica respecte de la diagonal.
- Matriu antisimètrica. Si $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$.
- **Matriu trasposta** d'una donada. És la matriu que s'obté al canviar les files per les columnes, és a dir, $[a_{ij}]^T_{n\times m} = [a_{ji}]_{m\times n}$.
- Submatriu $[a_{ij}]_{n\times m}$. És la matriu resultant d'el·liminar d'una matriu algunes files i/o columnes.
- Bloc o caixa. És una submatriu formada per files i columnes consecutives.

2.9 Operacions amb matrius

Podem definir les següents operacions en el conjunt de totes les matrius d'un determinat ordre:

- **Suma de matrius.** La suma de dos matrius amb el mateix nombre de files i columnes és la matriu de la suma dels elements corresponents, és a dir,

$$[a_{ij}]_{n\times m} + [b_{ij}]_{n\times m} = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times m}.$$

- **Producte per un escalar.** El producte d'un escalar per una matriu és la matriu que té com a entrades el producte de l'escalar per l'entrada de la matriu original, és a dir,

$$\alpha \cdot [a_{ij}]_{n\times m} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{n\times m}.$$

Hi ha una altra operació que es pot fer amb matrius: el producte. Però ara, per tal de que es puga fer, cal que les files i columnes de les matrius guarden una relació: el nombre de columnes de la primera matriu ha de ser igual al nombre de files de la segona matriu.

Definició 2.9.1 *Siguen $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times p}$ dues matrius. (***Noteu nombre de columnes de la matriu A = nombre de files de la matriu B.***) Definim la matriu producte de A per B, $A \cdot B$, com la matriu $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ on*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{im} \cdot b_{mk}.$$

En paraules, l'element c_{ik} (fila i, columna k) és la suma del producte de la fila i-èssima de A per la columna k-èssima de B.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 3-2\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+4\cdot 0 & 3\cdot 0+4\cdot 2 & 3\cdot 3+4\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Exemple. La multiplicació de dues matrius (quan es pot fer!) **NO** és una operació commutativa com ho prova el següent exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Propietat 2.9.2 *El conjunt $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb la suma i el producte de matrius és un anell amb identitat. L'element identitat és la matriu identitat d'ordre n.*

Fixeu-vos bé que només podem donar tal estructura quan $n = m$. En altre cas, el producte no és una operació interna. Tampoc no ho és en l'espai de totes les matrius perquè si dues matrius no tenen una certa coincidència entre el nombre de files d'una i el de columnes de l'altra, aleshores no es poden multiplicar.

Definició 2.9.3 *Una matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diu* **inversible o regular** *si existeix $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$. En aquest cas B se denota per A^{-1} i es diu que $B = A^{-1}$ és la matriu inversa de A.*

El conjunt de les matrius d'ordre $n\times n$ amb la suma i el producte de matrius no és un cos ja que no tota matriu distinta de la matriu nul·la és inversible. Per exemple la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no és inversible com es pot comprovar fàcilment. En la secció de determinants caracteritzarem totalment aquelles matrius que són inversibles.

2.10 Rang d'una matriu

Definició 2.10.1 *Siga $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ una matriu d'ordre $n \times m$. El* **rang** *de la matriu A és la dimensió del subespai generat pels n vectors fila.*

Nota. També es pot definir el rang d'una matriu com la dimensió del subespai generat pels m vectors columna, ja que els dos coincideixen.

El següent resultat ens permet determinar si una matriu és o no inversible.

Proposició 2.10.2 *Una matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és inversible si i només si el rang de A és màxim, és a dir, és igual a n.*

Proposició 2.10.3 *El rang d'una matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ no canvia si a una fila (columna) se li suma una altra fila (columna) multiplicada per un número real.*

Mètode de diagonalització. Com a consequència d'aquest resultat un bon mètode per tal de determinar el rang d'una matriu és el de fer zeros baix de la diagonal. El procés es pot resumir com:

(i) Suposem que el primer element de la primera fila, a_{11}, siga distint de zero (si és zero canviem la primera fila per una altra on el primer element és distint de zero).

(ii) Com que el nostre element $a_{11} \neq 0$ ara ja podem fer zeros en la resta de les files en la primera posició, $a_{1j} = 0$, multiplicant la primera fila per $\frac{1}{a_{1j}}$ i restant el resultat a la fila j-èssima.

(iii) Ara cal repetir el procés per a la segona fila que ja té un zero en la posició $a_{21} = 0$, és a dir, si el coeficient $a_{22} \neq 0$ es repeteix el procés.

(iv) El procés acaba quan ja tenim zeros baix de la diagonal i el rang de la matriu és igual al nombre de files no nul·les.

Nota. Aquest procés és més senzill si en la posició a_{11} aconseguim que hi haja un 1.

Nota. De fet, el procés es pot continuar després cap a dalt a partir de l'última fila que no és tota igual a zero i s'obté a la fi una matriu diagonal.

Exemple. Determinem el rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Per tant, el rang de la matriu és 3.

Breu descripció del procés. En el primer pas s'intercanvien les files 2 i 1. En el segon, a la fila 2 se li resta dos vegades la primera, a la tercera se li suma dos vegades la primera i a la quarta se li resta la primera. Tercer pas: a la tercera fila se li suma la segona i al quarta se li resta la segona. Quart pas: s'intercanvien les files 2 i 3, i a la tercera fila se li suma quatre vegades la segona.

Nota. La qüestió de determinar si una família de vectors són o no linealment independents es pot reformular com "determinar el rang de la matriu formada per les coordenades dels vectors escrites en files". Si el rang de la matriu és igual al nombre de vectors (igual al nombre de files) els vectors són linealment independents i si el rang és més xicotet aleshores són linealment dependents.

Exemple. Determina segons els valors de $a \in \mathbb{R}$ quan els següents vectors són o no linealment independents $\{(1, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 1, a), (1, -2, 0)\}$.

Solució: Per tal de determinar quan són o no linealment independents els vectors anem a calcular el rang de la matriu formada pels vectors,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i, per tant, el rang és tres si $a \neq \frac{3}{2}$ (els tres primers vectors són linealment independents) o bé és dos si $a = \frac{3}{2}$ (els dos primers vectors són linealment independents i els altres dos són combinació lineal dels anteriors.)

2.11 Homomorfismes d'espais vectorials

Allò que és important de les matrius és que estan associades al concepte de transformacions d'espais vectorials. És per això que definirem ara aquest concepte que ens permetrà després estudiar les propietats del conjunt de les matrius.

Definició 2.11.1 *Siguen V i W dos espais vectorials reals. Una aplicació $f : V \to W$ es diu que és un homomorfisme d'espais vectorials, o* **aplicació lineal**, *si verifica:*

- $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V, \quad f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w}),$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V, \quad f(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{v}).$

Una **condició equivalent** és la següent:

$$\boxed{f(\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}) = \alpha \cdot f(\vec{v}) + \beta \cdot f(\vec{w}) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V.}$$

Propietats. Algunes conseqüències d'aquesta definició són:

(i) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(ii) $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.

(iii) Si H és un subespai de V aleshores $f(H) = \{f(\vec{v}) : \vec{v} \in H\}$ és un subespai de W. En particular, prenent-hi $H = V$, tenim que $f(V)$ és un subespai de W. Aquest subespai s'anomena **imatge de l'aplicació lineal** f, i es denota per Imf.

(iv) Si S és un subespai de W aleshores $f^{-1}(S) = \{\overrightarrow{v} \in V : f(\overrightarrow{v}) \in S\}$ és un subespai de V. En particular, si $S = \{\overrightarrow{0}\}$, llavors $f^{-1}(\overrightarrow{0})$ és un subespai de V. Aquest subespai s'anomena **nucli de l'aplicació lineal** f, i es denota per Ker$f$. (L'origen d'aquesta nomenclatura és la paraula alemana *kernel* que significa nucli).

Definició 2.11.2 *Siga $f : V \to W$ un homomorfisme d'espais vectorials, es defineix el rang de f, i es denota per rg(f), com a la dimensió del subespai imatge de l'homomorfisme, Imf.*

2.12 Equacions d'una aplicació lineal

Siga $f : V \to W$ una aplicació lineal d'espais vectorials. Siguen $B_1 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ una base de V (dimensió de $V = n$) i $B_2 = \{\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \ldots, \overrightarrow{d_m}\}$ una base de W (dimensió de $W = m$). Calculem la imatge per f de cadascun dels vectors $\overrightarrow{e_i}$ de la primera base. Aquesta imatge es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de la segona base. Així,

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{e_1}) &= \mu_{11}\overrightarrow{d_1} + \mu_{21}\overrightarrow{d_2} + \cdots + \mu_{m1}\overrightarrow{d_m}, \\
f(\overrightarrow{e_2}) &= \mu_{12}\overrightarrow{d_1} + \mu_{22}\overrightarrow{d_2} + \cdots + \mu_{m2}\overrightarrow{d_m}, \\
&\ldots \\
f(\overrightarrow{e_n}) &= \mu_{1n}\overrightarrow{d_1} + \mu_{2n}\overrightarrow{d_2} + \cdots + \mu_{mn}\overrightarrow{d_m}.
\end{aligned}$$

Suposem que un vector $\overrightarrow{v} \in V$ té per expressió $\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{e_n}$, i que la seua imatge $f(\overrightarrow{v})$ té per expressió $f(\overrightarrow{v}) = \alpha_1\overrightarrow{d_1} + \alpha_2\overrightarrow{d_2} + \cdots + \alpha_m\overrightarrow{d_m}$, respecte de les bases de V i W. Volem determinar la relació entre les coordenades de $\overrightarrow{v}$ en la base B_1 i les coordenades de $f(\overrightarrow{v})$ en la base B_2.

Substituint en $f(\overrightarrow{v})$ tenim que

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{v}) &= \lambda_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \lambda_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + \lambda_n f(\overrightarrow{e_n}) \\
&= \lambda_1(\mu_{11}\overrightarrow{d_1} + \mu_{21}\overrightarrow{d_2} + \cdots + \mu_{m1}\overrightarrow{d_m}) \\
&\quad +\lambda_2(\mu_{12}\overrightarrow{d_1} + \mu_{22}\overrightarrow{d_2} + \cdots + \mu_{m2}\overrightarrow{d_m}) \\
&\quad +\cdots + \lambda_n(\mu_{1n}\overrightarrow{d_1} + \mu_{2n}\overrightarrow{d_2} + \cdots + \mu_{mn}\overrightarrow{d_m}) \\
&= (\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{12} + \cdots + \lambda_n\mu_{1n})\overrightarrow{d_1} \\
&\quad +(\lambda_1\mu_{21} + \lambda_2\mu_{22} + \cdots + \lambda_n\mu_{2n})\overrightarrow{d_2} \\
&\quad +\cdots + (\lambda_1\mu_{m1} + \lambda_2\mu_{m2} + \cdots + \lambda_n\mu_{mn})\overrightarrow{d_m}.
\end{aligned}$$

Com que les coordenades d'un vector són úniques (Prop [**?**]), aleshores

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{12} + \cdots + \lambda_n\mu_{1n}, \\
\alpha_2 &= \lambda_1\mu_{21} + \lambda_2\mu_{22} + \cdots + \lambda_n\mu_{2n}, \\
&\ \ \cdots \\
\alpha_m &= \lambda_1\mu_{m1} + \lambda_2\mu_{m2} + \cdots + \lambda_n\mu_{mn}.
\end{aligned}$$

Aquesta és la relació que existeix entre les coordenades $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ de $\overrightarrow{v}$ en la base B_1 i les coordenades $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ de $f(\overrightarrow{v})$ en la base B_2.

En notació matricial,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \ldots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \ldots & \mu_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matriu $[\mu_{ij}]$ s'anomena **matriu de l'aplicació lineal** f respecte de les bases B_1 i B_2, i es denota per $M(f, B_1, B_2)$.

Exemple. Siga $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y) = (2x + y, x - y, x - 2y)$, i siguen B_1 i B_2 les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, respectivament. Les imatges dels vectors de la primera base s'escriuen com a combinació lineal dels vectors de la segona com a

$$\begin{aligned}
f(1,0) &= (2,1,1) = 2\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1), \\
f(0,1) &= (1,-1,-2) = 1\cdot(1,0,0) + (-1)\cdot(0,1,0) + (-2)\cdot(0,0,1).
\end{aligned}$$

Per tant, la matriu de l'aplicació lineal és

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Agafem ara $B_1' = \{(1,2),(-1,1)\}$ i $B_2' = \{(0,1,-1),(-2,0,1),(1,1,1)\}$. Respecte d'aquestes altres bases,

$$\begin{aligned} f(1,2) &= (4,-1,-3) = -\frac{1}{5}\cdot(0,1,-1) - \frac{12}{5}\cdot(-2,0,1) - \frac{4}{5}\cdot(1,1,1), \\ f(-1,1) &= (-1,-2,-3) = \frac{1}{5}\cdot(0,1,-1) - \frac{3}{5}\cdot(-2,0,1) - \frac{11}{5}\cdot(1,1,1). \end{aligned}$$

Per tant, ara la matriu de l'aplicació lineal és

$$M(f, B_1', B_2') = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}.$$

Exemple. Anem a estudiar la matriu associada a una aplicació lineal de $\mathbb{R}^2$ especial: les rotacions.

Una **rotació** d'angle θ és una aplicació lineal $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

En forma matricial, la rotació d'angle θ s'escriu com a

$$R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nota. Noteu que $R_0 = Id$, $R_\theta \circ R_\gamma = R_{\theta+\gamma}$, i que $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.

2.13 Determinants

Una de les operacions més importants associades a les matrius és el determinant. És important perquè entre altres coses, permet saber si la matriu és o no inversible, permet determinar si una família de vectors és o no lliure i permet calcular fàcilment la solució d'alguns sistemes d'equacions lineals. La definició que s'estudiarà ací no és la més elegant des del punt de vista matemàtic, però sí la més operativa. És una definició que no ens permetrà provar alguns resultats, però que sí ens permetrà calcular.

Determinant d'una matriu. El determinant **només** el podem calcular de les matrius quadrades, és a dir, d'aquelles que tenen el mateix nombre de files i columnes.

La definició que donarem açí és recursiva i ens permetrà calcular el determinant d'una matriu $n \times n$ a partir de determinants de matrius $(n-1) \times (n-1)$.

Els determinants d'ordre 2 i 3. El determinant d'una matriu quadrada d'ordre 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

és igual a

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

El determinant d'una matriu quadrada d'ordre 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

és igual a

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Exemple. Calcula el determinant de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

El determinant és

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot (-2) \\ &\quad -(-1) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = 6 - 4 + 4 - 4 = 2. \end{aligned}$$

Nota. Encara que no gastarem aquesta definició, podriem dir que el determinant d'una matriu quadrada d'ordre n és la suma de tots els productes possibles de n elements de la matriu de manera que no hi ha en un mateix sumand dos elements de la mateixa fila o dos elements de la mateixa columna, i cadascun d'aquests sumands està afectat d'un cert signe.

2.14 Desenvolupament del determinant pels elements d'una línia

Siga $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Anem a definir el determinant d'una matriu quadrada A, i que denotarem per $|A|$, com una aplicació

$$|\ | : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

Definició 2.14.1 *Donada una matriu $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$,*

- *s'anomena* **menor complementari de l'element** a_{ij} *de A i es representa per A_{ij} al determinant de la matriu $(n-1)\times(n-1)$ que s'obté al suprimir la fila i-èssima i la columna j-èssima de la matriu A.*

- *s'anomena* **adjunt d'un element** a_{ij} *de la matriu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, i es denota per D_{ij}, al menor complementari afectat pel signe més o menys segons la següent expressió*

$$\boxed{D_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.}$$

La següent Proposició ens diu com calcular el determinant d'una matriu $n\times n$ qualsevol mitjançant determinants d'ordres $(n-1)\times(n-1)$. En particular, fent el càlcul recursivament es pot calcular el determinant d'una matriu només coneixent com calcular els determinants de matrius d'ordre 3×3 o bé de 2×2.

Proposició 2.14.2 *Siga $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, amb $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, aleshores*

$$\boxed{|A| = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + ... + a_{in}D_{in}.}$$

Aquesta expressió s'anomena determinant desenvolupat pels elements de la fila i-èssima. A més a més, també podem desenvolupar el determinant pels elements de la columna i-èssima

$$\boxed{|A| = a_{1i}D_{1i} + a_{2i}D_{2i} + ... + a_{ni}D_{ni}.}$$

Nota. Noteu que quan hi ha que desenvolupar un determinant per una fila o una columna és interessant que ho feu per una on haja el major nombre de zeros ja que així vos estalviareu fer alguns calculets!

Definició 2.14.3 *Una matriu $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és diu que és regular si el seu determinant no s'anul·la, $|A| \neq 0$.*

Exemple. Anem a calcular el determinant d'una matriu 4×4, desenvolupant per la primera columna

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (12 + 10 + 12) + (-2) \cdot (12 + 8 + 10) + (-1) \cdot (4 - 6) = 44.$$

Per tant, la matriu és inversible.

2.15 Propietats dels determinants

Propietats 2.15.1 *Siga $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, i A_i la fila i-èssima de la matriu A. Aleshores:*

(i) *El determinant de la matriu trasposta és el mateix que el de la matriu original, és a dir, $|A| = |A^T|$. Per tant, és el mateix parlar de files o de columnes pel que fa a determinant. Per això, a partir d'ara només parlarem de línies.*

(ii) *Si es permuten en A dues línies contigües, el determinant canvia de signe.*

(iii) $|A_1, ..., A_i + A_i', ..., A_n| = |A_1, ..., A_i, ..., A_n| + |A_1, ..., A_i', ..., A_n|$.

(iv) $|A_1, ..., \alpha \cdot A_i, ..., A_n| = \alpha \cdot |A_1, ..., A_i, ..., A_n|$.

(v) $|A| = 0$ *si i només si els seus vectors files (o columnes) formen un sistema lligat.*

(vi) *Si sumem a una línia una combinació lineal de les altres línies paral·leles, aleshores el determinant no varia.*

(vii) *Siguen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, aleshores*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

La següent proposició ens permet calcular el rang d'una matriu, i per tant la dependència-indepèndencia dels vectors que la formen, amb l'ajuda dels determinants.

Proposició 2.15.2 *El rang d'una matriu* $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és el major rang dels seus menors no nuls, és a dir, el rang de la major de les seues submatrius quadrades regulars.*

Exemple. Determina segons els valors de $a \in \mathbb{R}$ quan els següents vectors són o no linealment independents $\{(1,0,1),(0,2,1),(1,1,a),(1,-2,0)\}$.
Solució: La matriu formada pels vectors és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

que té 4 files i 3 columnes (quatre vectors de $\mathbb{R}^3$), per tant segur que n'hi ha un que és combinació lineal dels altres tres ja que la dimensió de $\mathbb{R}^3$ és 3 (nombre màxim de vectors linealment independents). Per exemple, si calculem el determinant de la submatriu formada pels dos primers vectors i el últim,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2+2=0,$$

és a dir, són linealment dependents, i per tant, només hi ha dos vectors linealment independents. Ens quedem en els dos primers, per exemple, que es veu clarament que són linealment independents. Ara, per tant calculem el determinant de la matriu formada pels tres primers vectors

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a-2-1,$$

i per tant, si $a \neq \frac{3}{2}$ els tres primers vectors són linealment independents. Ara bé, si $a = \frac{3}{2}$ són linealment dependents, i per tant, en podem llevar un. D'una ullada veiem que podem llevar el tercer, per exemple

$$(1,1,\frac{3}{2}) = (1,0,1) + \frac{1}{2}\cdot(0,2,1).$$

En resum, si $a \neq \frac{3}{2}$ hi ha tres vectors linealment independents i si $a = \frac{3}{2}$ només hi ha dos vectors linealment independents.

Nota. Comparar aquesta resolució amb la donada en l'apartat 2.10.

2.16 Càlcul de la matriu inversa

Com ja sabeu, no totes les matrius tenen inversa, només les quadrades poden ternir-ne, però no totes. Anem a vore una condició necessària i suficient per a que una matriu tinga inversa i, a més a més, anem a vore com es calcula explícitament la inversa d'una matriu.

Definició 2.16.1 *Donada una matriu $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, s'anomena* **matriu adjunta de** A *a la matriu que té per elements als adjunts corresponents de la matriu, i es denota per $\tilde{A} = [D_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

Proposició 2.16.2 *Donada una matriu $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tenim que*

$$\boxed{A \cdot (\tilde{A}^T) = (\tilde{A}^T) \cdot A = |A|\, Id_n.}$$

Proposició 2.16.3 *Una matriu quadrada A és inversible si i només si $|A| \neq 0$.*

Prova. ($\longrightarrow$) Si A és inversible aleshores existeix A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = Id_n$. Com que el determinant d'un producte és igual al producte de determinants, i com que $|Id_n| = 1$, aleshores $1 = |Id_n| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$, i per tant, $|A| \neq 0$.
($\longleftarrow$) Si el determinant no s'anul·la, $|A| \neq 0$, aleshores considerem la matriu $B = \frac{1}{|A|}(\tilde{A}^T)$. Comprovem que B és la inversa de A.

$$A \cdot B = A \cdot \frac{1}{|A|}(\tilde{A}^T) = \frac{1}{|A|}(A \cdot \tilde{A}^T) = \frac{1}{|A|}|A| Id_n = Id_n.$$

Per tant, B és la matriu inversa de A. $\square$

Corol·lari 2.16.4 *Siga $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ amb $|A| \neq 0$, aleshores,*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|}.}$$

Noteu també que de l'expressió $A \cdot A^{-1} = Id_n$ es dedueix que $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Exemple 2.16.5 Calcula la matriu inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

En primer lloc, hi ha que calcular el determinant per vore si s'anul·la (NO podrem calcular-la!) o no. El determinant és $|A| = 6 - 4 + 4 - 4 = 2 \neq 0$. Per tal de calcular la matriu inversa cal primer calcular la matriu adjunta

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

i també la trasposta d'aquesta

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, la matriu inversa és

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{5}{2} & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.17 Sistemes d'equacions lineals

Definició 2.17.1 *Anomenarem* **sistema de m equacions lineals amb n incògnites** *al conjunt d'equacions*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \right.$$

on $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ amb $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ i les incògnites $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- *Una* **solució del sistema** *és qualsevol subconjunt de n elements ordenats $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ amb $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tals que satisfan les equacions del sistema.*

- *La* **matriu de coeficients** *del sistema és la matriu $A = [a_{ij}]_{n\times m} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, formada pels coeficients de les n incògnites en les m equacions.*

- *La* **matriu de termes independents** *és la matriu columna $B = [b_i]_{1\times m}$ formada pels segons membres de les equacions.*

- *La* **matriu ampliada***, s'acostuma a denotar per A', i és la matriu A a la qual se li ha afegit una columna més, la dels termes independents B.*

- *La* **matriu incògnita** *és la matriu columna $X = [x_i]_{1\times n}$ formada per les incògnites.*

- *La* **matriu columna j-èsima** *és la matriu columna $A_j = [a_{ij}]_{1\times m}$ formada pels elements de la columna j.*

Noteu que són equacions lineals, és a dir, no hi ha cap incògnita que tinga termes en x_i^2 o de grau superior.

Expressions equivalents d'un sistema d'equacions:

- Expressió matricial: $A \cdot X = B$.

- Expressió en vectors columna: $x_1\overrightarrow{A_1} + x_2\overrightarrow{A_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{A_n} = B$.

- Expressió vectorial: $f_A(X) = B$, on $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és l'aplicació lineal que té per matriu a la matriu A en les bases canòniques de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

Sistemes homogenis. Un sistema $A \cdot X = B$ es dirà homogeni si $B = 0$, és a dir, si tots els termes independents són nuls. Un sistema homogeni **sempre** té solució ja que la solució trivial $X = (0, 0, \ldots, 0)$ sempre verifica el sistema, és a dir, quan tots el valors de les variables s'anul·len.

Definició 2.17.2 *Donat el sistema d'equacions lineals $A \cdot X = B$ s'anomena sistema homogeni associat al sistema $A \cdot X = 0$.*

2.18 Existència de solucions

El següent resultat ens permet asegurar si un sistema d'equacions lineals té o no solució i de quin tipus només comparant els rangs de la matriu de coeficients i de la matriu ampliada.

Teorema 2.18.1 (Teorema de Rouché-Frobenius) *Donat el sistema $A \cdot X = B$, on $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, aleshores*

- *rg*$(A) = $ *rg*$(A') \Rightarrow$ *sistema compatible* $\begin{cases} \textit{rg}(A) = n \Rightarrow \textit{determinat} \\ \quad \textit{Solució única.} \\ \\ \textit{rg}(A) = m < n \Rightarrow \textit{indeterminat} \\ \quad \textit{Conjunt de solucions} \\ \quad = \textit{ es despejen les } m \textit{ variables} \\ \quad \textit{en funció de les } n-m \textit{ variables.} \end{cases}$

- *rg*$(A) \neq$ *rg*$(A') \Rightarrow$ *sistema incompatible. No hi ha solucions.*

Exemple. Discuteix i resol el següent sistema d'equacions lineals segons els valor de λ.

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 5 \\ 2x - y + \lambda z &= -1 \\ 3x - z &= 4. \end{cases}$$

Sol. La matriu ampliada és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & \lambda & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & \lambda+4 & -11 \\ 0 & -3 & 5 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & \lambda+4 & -11 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, es compleix que

- si $\lambda \neq 1$ aleshores el sistema és compatible i determinat, és a dir, el sistema te una única solució.

- si $\lambda = 1$, aleshores $rangA = rangA' = 2 < 3 =$nº incògnites, és a dir, el sistema és compatible indeterminat. La solució s'obté posant dues de les variables en funció d'una altra. En particular,

$$\begin{cases} -3y + 5z = -11 & y = \frac{5z+11}{3} \\ x + y - 2z = 5 & x = 5 - y + 2z = 5 - \frac{5z+11}{3} + 2z = \frac{z+4}{3}. \end{cases}$$

Per tant, una vegada triem un valor per a l'incògnita z determinem la x com $x = \frac{z+4}{3}$ i la y com $y = \frac{5z+11}{3}$. Hi ha infinites solucions.

2.19 Sistemes de Cramer

Definició 2.19.1 *Un sistema $A \cdot X = B$ és diu de Cramer quan el nombre d'incògnites és igual al nombre d'equacions i el rang de A és màxim.*

Com que el rang de A és màxim aleshores coincideix amb el rang de A' i el sistema és compatible determinat. A més a més, com el nombre d'incògnites és igual al nombre d'equacions la matriu A és quadrada, $A \in M_{n\times n}$, i el rang $A = n$.

Resolució d'un sistema de Cramer. Com que rg$A = n$ és màxim i A és una matriu quadrada, aleshores és regular, és a dir, existeix A^{-1}. Multiplicant per A^{-1} els dos membres de la igualtat $A \cdot X = B$, s'obté

$$X = A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

i per tant $X = A^{-1} \cdot B$ (és una matriu columna!) és l'única solució del sistema de Cramer. En particular, es pot provar que la solució de la incògnita x_j es pot calcular com

$$\boxed{x_j = \frac{|C_j|}{|A|},}$$

on la matriu C_j és la matriu que té per columnes a les columnes de la matriu A tret de la columna j-èsima, en la qual apareix la columna B.

Exemple. Resol el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z &=& 1, \\ 2y - 2z &=& -1, \\ 2x - 2y + 3z &=& 0. \end{array} \right.$$

Sol. El nombre d'incògnites, 3, coincideix amb el nombre d'equacions i la matriu de coeficients és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

el determinant de la qual és $|A| = 6 - 4 + 4 - 4 = 2 \neq 0$, i per tant, el seu rang és igual a 3. És a dir, el sistema és de Cramer. Comprovarem ara el funcionament dels dos mètodes que coneixem per resoldre aquests sistemes. El primer, multiplicant per la matriu inversa la matriu dels termes independents. La matriu inversa ja l'hem calculat en l'exemple 2.16.5 i és

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{5}{2} & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ara la multipliquem per B, obtindrem

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{5}{2} & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ -4 \end{pmatrix},$$

i per tant, la solució del sistema és $x = 3/2, y = -9/2, z = -4$.

D'una altra banda, el mètode de Cramer ens diu que s'han de calcular els determinants de les següents matrius,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

i que les solucions venen donades per

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{3}{2}, \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = -\frac{9}{2}, \qquad z = \frac{|A_3|}{|A|} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Per tant, els dos mètodes són equivalents.

2.20 Diagonalització de matrius

Siga A una matriu quadrada $n \times n$. Direm que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ és un **vector propi** amb valor propi associat λ si es verifica que

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v},$$

i que amb notació matricial es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Els valors propis d'una matriu quadrada (si existeixen!) s'obtenen al resoldre el sistema homogeni

$$det(A - \lambda \cdot I) = 0,$$

on I és la matriu identitat d'ordre n. Aquesta equació es coneix com **equació característica** de A.

Nota. Aquest resultat és una conseqüència del fet que els valors propis verifiquen que

$$A \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{v},$$

per a algun $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, i per tant,

$$0 = A \cdot \overrightarrow{v} - \lambda \cdot I \cdot \overrightarrow{v} = (A - \lambda I) \cdot \overrightarrow{v},$$

és un sistema homogeni que només té solucions distintes de la trivial quan es compleix que $det(A - \lambda I) = 0$.

Si l'equació característica de la matriu A té n arrels distintes (valors propis distints), $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, aleshores associat a cada valor propi podem trobar un vector propi resolent el sistema d'equacions $0 = (A - \lambda I) \cdot \overrightarrow{v}$, que per força és un sistema **compatible indeterminat**. Això vol dir que per a cada valor propi haurem de fer una tria d'un vector propi associat.

Els vectors propis ens permeten definir una matriu P, quan posem les seues coordenades en columna, que verifica

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La matriu de pas P està formada per les coordenades dels vectors propis associats als valors propis posades en columna. Per exemple, si els vectors propis són (v_1, v_2) i (w_1, w_2) aleshores la matriu P és igual a

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Una de les raons per les quals és interessant diagonalitzar una matriu es perquè així els vectors propis associats formen una base de $\mathbb{R}^n$, i a més a més, la matriu de pas P és precisament la matriu que transforma la base original en aquesta base.

Es complementarà aquest apartat amb la utilització del programa MatLab que permet resoldre aquest problema d'una manera molt senzilla i pràctica.

Nota. També es pot diagonalitzar la matriu quan la multiplicitat d'algun valor propi és major que 1 però coincideix amb la dimensió del subespai propi associat al valor propi.

Exemple. Diagonalitza la següent matriu

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Sol. En primer lloc hi ha que determinar els valors propis resolent l'equació característica

$$\begin{aligned} 0 &= det(A-\lambda\cdot I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(-5-\lambda)^2 + 18(-5-\lambda) = (-5-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1). \end{aligned}$$

Per tant, els valors propis són $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$ i $\lambda_3 = 1$. Ara calculem els vectors propis associats als valors propis. En primer lloc per a $\lambda_1 = -5$. Busquem un vector de coordenades $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tal que $A\cdot\overrightarrow{v} = -5\cdot\overrightarrow{v}$, i per tant, hem de resoldre el sistema d'equacions $(A+5\cdot I)\cdot\overrightarrow{v} = 0$,

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El resultat és $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ i no hi ha cap restricció sobre v_3. Per tant, un possible vector propi és $\overrightarrow{w_1} = (0,0,1)$.

Ara es repeteix per a $\lambda_2 = -2$. Hem de resoldre el sistema d'equacions $(A+2\cdot I)\cdot\overrightarrow{v} = 0$,

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El resultat és $v_2 = -v_1$ i $v_3 = v_1$. Per tant, un possible vector propi és $\overrightarrow{w_2} = (1,-1,1)$.
Finalment per a $\lambda_3 = 1$, hem de resoldre el sistema d'equacions $(A-1\cdot I)\cdot\overrightarrow{v} = 0$, i el resultat és $v_1 = -2v_2$ i $v_3 = 0$. Per tant, un possible vector propi és $\overrightarrow{w_3} = (-2,1,0)$.

Ara la matriu de pas, formada pels vectors propis associats als valors propis posats en columna, verifica que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, és a dir, si

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aleshores,

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot A \cdot P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A més a més, els tres vectors propis formen una base de $\mathbb{R}^3$, és a dir, $\{\overrightarrow{w_1} = (0, 0, 1), \overrightarrow{w_2} = (1, -1, 1), \overrightarrow{w_3} = (-2, 1, 0)\}$ és una base.

2.21 Exercicis

1 Averigua si el subconjunt $S = \{(a, b, 1)|a, b \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2 Troba les equacions paramètriques i implícites del subespai vectorial engendrat pels vectors $(1, 2, 0)$ i $(0, -1, 2)$.

3 Demostra que el vector $(-1, 3, 7)$ no és combinació lineal dels vectors $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 0)$.

4 Troba el valor de x per a que el vector $(11, -16, x)$ siga linealment dependent dels vectors $(2, -1, 3)$ i $(-1, 2, 1)$.

5 Averigua si són o no sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$ els vectors

$$\{(3, -1, 2), (1, 0, -1)\}.$$

6 Averigua si són o no sistema de generadors de $\mathbb{R}^3$ els vectors

$$\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}.$$

7 Troba la condició que han de complir els components dels vectors de $\mathbb{R}^3$ per a que siguen combinació lineal dels vectors $(1, 0, -1)$ i $(0, 1, 2)$.

8 Averigua si és o no una base de $\mathbb{R}^3$ la família de vectors

$$\{(1, -2, -1), (-3, 0, 2), (0, -6, -1)\}.$$

9 Troba una base dels següents subespais vectorials:

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y, z)|x + y = 0, x - 2z = 0\} \\ M &= \{(x, y, z)|2x + y - 3z = 0\} \\ N &= \{(x - y, y - z, z - x)|x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

10 Troba les coordenades del vector $(3, -1, 2)$ en la base

$$\{(3, -2, 1), (2, -1, 2), (0, 0, 1)\}.$$

11 Donada la família $\{(1, 2, -3), (3, 2, 3), (-5, -2, -1), (2, 0, 2)\}$, averigua si es pot extraure una base de $\mathbb{R}^3$.

12 Calcula el rang de les següents famílies de vectors

$$\{(1,0,2),(2,-1,1),(-1,1,-1)\}, \qquad \{(-2,1,-1),(3,-1,2),(-1,1,0)\}$$

13 Calcula els valors de m i n per a que siguen linealment dependents els vectors

$$\{(-1,2,-3,4),(1,-1,m,1),(-3,5,-8,n)\}.$$

14 Donada la família de vectors $\{(1,0,2),(3,1,0),(-1,1,2),(0,0,1)\}$, discuteix si es pot o no extraure una base de $\mathbb{R}^3$.

15 a) Defineix els conceptes de dimensió d'un espai vectorial, V, i de base d'un espai vectorial, V, de dimensió n.

b) Dóna una base de $\mathbb{R}^3$ que continga al vector $\overrightarrow{e_1}=(1,1,1)$.

c) Troba les coordenades del vector $\overrightarrow{v}=(2,-1,3)$ respecte de la base triada en l'apartat b).

16 Siguen

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -6 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les expressions

$$(A^T)^2, \quad A\cdot B^T, \quad A+3B-C^T, \quad A\cdot B-C\cdot A^T, \quad (2A-3B)^T\cdot C$$

17 Determineu les matrius X i Y tals que

$$5X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}, \quad X+2Y=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

18 Calcula les matrius $2A-3B$, $A\cdot B$ i $B\cdot A$ amb les següents matrius

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

19 Calculeu el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

20 Calculeu la matriu inversa de les següents matrius

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

21 Resol l'equació $\det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 5 & x & 2 \end{pmatrix} = 0.$

22 Calculeu el determinant de la matriu $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

23 Calcula x per a que el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & x \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ siga 2.

24 Calcula el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

25 Calcula el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

26 Quin és el rang de la matriu identitat d'ordre 2? I de la d'ordre 3? I de la d'ordre n?

27 Calcula el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

28 Calcula les matrius inverses de

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

29 Resol els següents sistemes

$$\begin{cases} 3x - 4y + z &= 4 \\ 2x + y - 5z &= 8 \\ x + 2y + 3z &= 14. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 2y + 6z &= -1 \\ 2x - y + 3z &= 2. \end{cases}$$

30 Discuteix els següents sistemes d'equacions

$$\begin{cases} x - 3y - 4z &= 3 \\ ax + 5y - az &= 6 \\ 15x + 5ay - 30z &= 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y - az &= 7 \\ ax - 3y + z &= 0 \\ ax - y + z &= 0. \end{cases}$$

31 Discuteix els següents sistemes d'equacions

$$\begin{cases} x + y - 6z &= 0 \\ x - 2y + 6z &= 0 \\ 3x - y + mz &= 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + ay + z &= a + 2 \\ x + y + az &= -2(a+1) \\ ax + y + z &= a. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z &= 2 \\ 2x - my + nz &= 4 \\ x \ + z &= 2. \end{cases}$$

32 Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x + y &= 1 \\ ty + z &= 0 \\ x + (1-t)y + tz &= t + 1 \end{cases}$ determina el paràmetre t de manera que

a) El sistema tinga solució única.

b) El sistema tinga infinites solucions.

c) El sistema no tinga solució.

33 Resol els següents sistemes aplicant el mètode de Cramer

$$\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ y + z + t &= 2 \\ x + z + t &= 2 \\ x + y + t &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y &= 4 \\ 2x - y - z &= 8 \\ x + 2y - z + t &= 12 \\ 2x - t &= 12. \end{cases}$$

34 Discuteix, segons els valors del paràmetre a els següents sistemes homogenis:

$$\left\{\begin{aligned} ax+y+2z &= 0\\ 4x+ay-z &= 0\\ 4x+2y+z &= 0\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x+y-2z &= 0\\ ax-2y+z &= 0\\ 2x+ay &= 0.\end{aligned}\right.$$

35 Resol els següents sistemes d'equacions

$$\left\{\begin{aligned} ax+y+z &= a\\ x+ay+z &= a\\ x+y+az &= a.\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x+2y-3z &= 0\\ 2x+y+az &= 0\\ x-z &= 0.\end{aligned}\right.$$

36 Resol els sistemes

$$\left\{\begin{aligned} 3x-2y+z &= 3\\ 2x+3y-2z &= 0\\ 4x-y+z &= 6\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x+y &= 1\\ 2x+2y &= 1\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x+2y+z &= 0\\ 2x-3y-5z &= 0\end{aligned}\right.$$

37 Resol els sistemes

$$\left\{\begin{aligned} x+5y-z &= 5\\ 2x+3y-4z &= 1\\ x-2y-3z &= 2\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} a+b-c &= 0\\ -a+2b+d &= 4\\ 2a+c-d &= 0\end{aligned}\right.$$

38 Classifica i resol, sempre que això siga possible, els següents sistemes

$$\left\{\begin{aligned} x-y+2z &= 4\\ y+3z &= -1\\ 4x-2z &= 12\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} 2x-3y+4z &= -12\\ x+4y-3z &= 15\\ 11y-10z &= 42\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x+ay &= 1\\ ax+y &= -1\end{aligned}\right.$$