
4. Límits i continuïtat

4.1 Successions

Definició 4.1.1 Una successió de nombres reals és una funció tal que el seu domini és el conjunt dels nombres naturals, $\mathbb{N}$. És a dir, és una funció $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, encara que usualment es denota per

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\},$$

o també per $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, o bé $\{a_n\}_{n=0}^\infty$.

Exemple 4.1.2 Una manera de definir una successió és especificar quin és el seu terme general. Per exemple,

$$\alpha_n = n \quad , \quad \beta_n = (-1)^n \quad , \quad \gamma_n = \frac{1}{n} \text{ amb } n > 0.$$

Definició 4.1.3 Una successió $\{a_n\}$ es diu que és **convergent** a un nombre real ℓ , i ho escriurem com $\{a_n\} \rightarrow \ell$ o bé com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell,$$

si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre natural n_0 tal que, si $n > n_0$, aleshores

$$|a_n - \ell| < \epsilon.$$

Les successions per a les quals el seu límit és $+\infty$ o bé $-\infty$ s'anomenen **divergents**.

És ben fàcil comprovar que les successions constants són convergents i que el límit és la mateixa constant.

Exemples. Les dues primeres successions de l'exemple anterior no són convergents. La tercera convergeix a 0. Vegem-ho: La primera successió, definida per $\alpha_n = n$, no és convergent. En efecte, suposem que fóra convergent a un nombre real ℓ . Agafem $\epsilon = \frac{1}{2}$, per la definició de convergència, existeix un n_0 tal que per a tot $n > n_0$, aleshores

$$|a_n - \ell| = |n - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Això vol dir que per a tot $n > n_0$, $n \in]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ i això no és cert.

La segona successió tampoc és convergent. És un exemple de les successions anomenades oscil·lants. Demostrarem ara que qualsevol nombre real no pot ser límit de la successió. Suposem que ℓ és un nombre real distint de 1 i de -1 . Siga $\epsilon = \min\{|\ell - 1|, |\ell + 1|\}$. És fàcil comprovar que per a aquest ϵ tenim que

$$1, -1 \notin]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[.$$

Per tant, per a tot $n \in \mathbb{N}$, tenim que $|a_n - \ell| \geq \epsilon$.

La tercera successió sí que és convergent i el límit és 0. Demostrem-ho. Siga $\epsilon > 0$, aleshores, $\frac{1}{\epsilon} > 0$ i sempre podem agafar un nombre natural n_0 que siga major que $\frac{1}{\epsilon}$. És a dir, siga n_0 tal que $\frac{1}{\epsilon} < n_0$. Siga ara $n > n_0$, aleshores

$$|a_n - \ell| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Per tant, hem provat que la successió convergeix a 0.

Propietats 4.1.4 Siguen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dues successions convergents amb límits A i B respectivament.

- La successió $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ també és convergent i el seu límit és $A + B$.
- La successió $\{a_n \cdot b_n\}_{n=0}^{\infty}$ també és convergent i el seu límit és $A \cdot B$.
- Si per a tot n , $b_n \neq 0$ i també $B \neq 0$, llavors la successió $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=0}^{\infty}$ també és convergent i el seu límit és $\frac{A}{B}$.
- Si per a tot n , $a_n \geq 0$, llavors la successió $\{(a_n)^{b_n}\}_{n=0}^{\infty}$ també és convergent i el seu límit és A^B .

Exemples. Vejam alguns límits de successions

- La successió $\{\frac{1}{n} + 3\}$ és convergent i el seu límit és la suma del límit de la successió $\{\frac{1}{n}\}$ més el límit de la successió constant $\{3\}$, és a dir, el límit és $0 + 3 = 3$.
- La successió $\{\frac{3}{n}\}$ és convergent i el seu límit és el producte del límit de la successió $\{\frac{1}{n}\}$ pel límit de la successió constant $\{3\}$, és a dir, el límit és $0 \cdot 3 = 0$.
- La successió $\{\frac{3n+5}{2n-3} = \frac{3+\frac{5}{n}}{2-\frac{3}{n}}\}$ és convergent i el seu límit és el quocient del límit de la successió $\{3 + \frac{5}{n}\}$ pel límit de la successió $\{2 - \frac{3}{n}\}$, és a dir, el límit és $\frac{3}{2}$.
- La successió $\{(\frac{3n+5}{2n-3})^{\frac{4n+1}{2n-1}}\}$ és convergent i el seu límit és $(\frac{3}{2})^2$.

En general, si el terme general d'una successió és un quocient de polinomis en n , $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ i volem calcular el límit quan n tendeix a infinit, aleshores es verifica que:

- Si els dos graus són iguals, $\text{grau}(p(n)) = \text{grau}(q(n))$, aleshores el límit és igual al quocient dels coeficients dels termes de major grau en n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a}{b}.$$

- Si el grau del numerador és major que el del denominador, $\text{grau}(p(n)) > \text{grau}(q(n))$, aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \infty.$$

- Si el grau del numerador és menor que el del denominador, $\text{grau}(p(n)) < \text{grau}(q(n))$, aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0.$$

4.2 Criteri de convergència de l'entrepà

Teorema 4.2.1 *Siguen $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ i $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ tres successions de nombres reals tals que, per a tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix la següent desigualtat*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Aleshores, si les successions $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ i $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ són convergents i ho són al mateix nombre real ℓ , també ho és la successió $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ i el seu límit és el mateix ℓ .

Definició 4.2.2 Una successió $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es diu que és creixent (decreixent) si per a tot $n \in \mathbb{N}$ tenim que

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}).$$

Exemple. Vejam el creixement/decreixement de les successions de l'exemple 4.1.2: La primera, $\alpha_n = n$, és creixent, la tercera, $\gamma_n = \frac{1}{n}$, és decreixent i la segona, $\beta_n = (-1)^n$, no és ni una cosa ni l'altra.

Definició 4.2.3 Una successió $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es diu que està fitada superiorment (inferiorment) si existeix un nombre real k tal que per a tot $n \in \mathbb{N}$ tenim que

$$a_n \leq k \quad (k \leq a_n).$$

Exemple. Tornant a les successions de l'exemple anterior, la primera, $\alpha_n = n$, està fitada inferiorment. Per exemple, el 0 és una fita inferior de la successió però no està fitada superiorment.

La segona successió, $\beta_n = (-1)^n$, està fitada inferiorment i superiorment, per exemple, per -2 i 3 . La tercera, $\gamma_n = \frac{1}{n}$, també està fitada inferiorment i superiorment, per exemple, per 0 i 2 .

El següent resultat ens permet assegurar que determinades successions són convergents sense haver de comprovar la definició de convergència.

Teorema 4.2.4 Siga $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successió, aleshores

- Si és creixent i està fitada superiorment llavors és convergent.
- Si és decreixent i està fitada inferiorment, llavors és convergent.

4.3 El número e

Es tracta d'estudiar uns tipus especials de successions i veure com es poden transformar en successions del tipus número e .

Propietat 4.3.1 La successió $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ és convergent i el seu límit és el número $e = 2,71828\dots$

Demostració. La convergència de la successió es demostra com a conseqüència del teorema anterior. És a dir, demostrarem primer que la successió és creixent i després provarem que està fitada superiorment. Per tant, necessàriament és convergent.

La successió de terme general $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ és creixent.

El que farem primer es desenvolupar l'expressió $(1 + \frac{1}{n})^n$ aplicant-hi el binomi de Newton.

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} (\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (\frac{1}{n})^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n!} (\frac{1}{n})^n.$$

Fent-hi operacions, arribem a la següent expressió de a_n :

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}).$$

Si comparem ara amb a_{n+1} observem que a_{n+1} té un terme més i que aquest terme és positiu. Observem també que cada factor en a_{n+1} , $(1 - \frac{k}{n+1})$, és major que els corresponents en a_n , $(1 - \frac{k}{n})$. Per tant, el resultat total serà també major. És a dir, $a_{n+1} > a_n$.

Demostrem ara que la successió està fitada superiorment.

Si en l'expressió de a_n calculada adés substituïm els factors $(1 - \frac{k}{n})$ per 1, obtenim que

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Noteu també que per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$, $2^k < k!$, per tant

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{2})^n = 3 - (\frac{1}{2})^{n-1} < 3.$$

És a dir, 3 és una fita superior de la successió.

En conclusió, la successió és creixent i està fitada superiorment, per tant, és convergent.

Hi ha moltes successions que són de la forma $\{(a_n)^{b_n}\}_{n=0}^{\infty}$ i per a les quals, aplicant-hi les propietats de les successions donades en la Propietat 4.1.4 s'obté una indeterminació del tipus 1^∞ . El límit d'algunes d'aquestes successions es pot determinar reduint-les a expressions relacionades amb el número e . La propietat següent ens mostra com es pot aconseguir la reducció.

Propietat 4.3.2 Siga $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successió que divergeix a ∞ , llavors, la successió

$$\{(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n}\}_{n=0}^{\infty}$$

és convergent al número e .

Exemples.

- La successió $\{(1 + \frac{1}{n^2})^n\}_{n=1}^{\infty}$ és convergent.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2} \cdot n} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

- La successió $\{(1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ és convergent, però no és del tipus número e ja que el límit de la successió de l'exponent no és infinit, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Per tant, el seu límit és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 1^0 = 1.$$

- La successió $\{(1 - \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ és convergent.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

- La successió $\{(\frac{n^2+2}{n^2-5})^{3n^2+2}\}_{n=0}^{\infty}$ és convergent.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2-5}\right)^{3n^2+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-5+(5+2)}{n^2-5}\right)^{3n^2+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n^2-5}\right)^{3n^2+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-5}{7}}\right)^{\frac{n^2-5}{7}}\right)^{\frac{7}{n^2-5} \cdot (3n^2+2)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{21n^2+14}{n^2-5}} = e^{21}.\end{aligned}$$

4.4 Funcions elementals

Ara estudiarem algunes propietats de les funcions més habituals i que utilitzarem durant la resta del curs.

4.4.1 Funcions polinòmiques

Definició 4.4.1 Una funció es diu que és **polinòmica de grau** n si existeixen nombre reals $a_0, a_1, \dots, a_n$, amb $a_n \neq 0$, tals que

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$.

Noteu que el domini d'una funció polinòmica és sempre tot $\mathbb{R}$. Les funcions polinòmiques de grau zero reben el nom de funcions constants, $f(x) = a_0$.

Nota. Les funcions polinòmiques o polinomis són molt habituals i importants en matemàtiques. Per exemple, hi ha un resultat molt important anomenat el **Teorema de Weierstrass** de 1885 que diu que és possible aproximar uniformement funcions contínues mitjançant polinomis. És a dir, sempre podem trobar un polinomi que s'aproxime tant com vullguem a una funció contínua. La definició de funció contínua es troba més endavant, Definició 4.5.3.

Una funció f es diu **racional** si existeixen dues funcions polinòmiques p, q tals que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$. El domini d'una funció racional és el conjunt dels nombres reals menys els punts on s'anul·la el denominador, $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \text{ tals que } q(x) = 0\}$.

4.4.2 Funció exponencial

Definició 4.4.2 Siga $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. La funció exponencial amb base a és la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = a^x$.

El domini d'una funció exponencial és $\mathbb{R}$ i és una funció injectiva. Algunes de les propietats les teniu a continuació.

Propietats 4.4.3 Siga $f(x) = a^x$, amb $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, aleshores

$$\begin{aligned} i) \quad a^0 &= 1, \\ ii) \quad a^{x+y} &= a^x \cdot a^y, \\ iii) \quad a^{x-y} &= a^x \cdot a^{-y} = \frac{a^x}{a^y}, \\ iv) \quad (a^x)^k &= a^{kx}. \end{aligned}$$

4.4.3 Funció logarítmica

Donat que la funció exponencial és una funció injectiva es pot definir la seua inversa. Aquesta inversa és la funció logarítmica i es denota per $g(x) = \log_a x$, és a dir, $\log_a x$ és l'exponent al qual hi ha que elevar la base a per a obtenir x ,

$$\log_a x = b \iff a^b = x.$$

El domini de la funció és $]0, +\infty[$ i el conjunt imatge és la recta real (els valors compresos entre $]0, 1]$ tenen com a imatge els reals negatius i els valors entre $[1, +\infty[$ els reals positius).

Si la base dels logaritmes és l'anomenat número $e = 2,71828\dots$, aleshores la funció logaritme es denota per $\ln x$ i s'anomena **logaritme neperià**.

Algunes propietats importants de la funció logarítmica, i que només escriurem per a la funció $\ln x$, són les següents

Propietats 4.4.4 Siga $f(x) = \ln x$, aleshores

$$\begin{aligned} i) \quad \ln 1 &= 0, (e^0 = 1) \quad , \\ ii) \quad \ln x \cdot y &= \ln x + \ln y \quad , \\ iii) \quad \ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \quad , \\ iv) \quad \ln x^k &= k \cdot \ln x \quad . \end{aligned}$$

Aquestes propietats es poden deduir de les de la funció exponencial i del fet que aquesta siga injectiva. En particular,

$$e^{\ln xy} = x \cdot y = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$$

$$e^{\ln \frac{x}{y}} = \frac{x}{y} = \frac{e^{\ln x}}{e^{\ln y}} = e^{\ln x - \ln y}$$

$$e^{\ln x^k} = x^k = (e^{\ln x})^k = e^{k \ln x}.$$

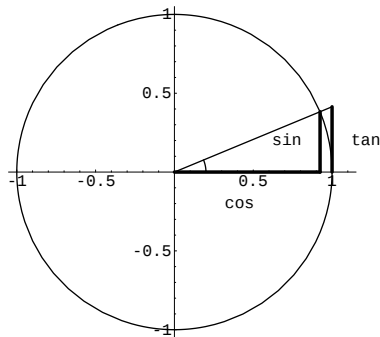
Curiositat. Les escales de mesura de la intensitat d'un terratrèmol més usades són de tipus logarítmic. En particular, l'escala de Richter utilitza una escala logarítmica de base 10, i per tant, un augment d'un grau en aquesta escala no es correspon amb un augment lineal de la magnitud d'un terratrèmol, sinó exponencial. Per exemple, un terratrèmol de grau sis és deu vegades menys intens que un de grau set, i cent vegades menys intens que un de grau vuit.

4.4.4 Funcions trigonomètriques

Les funcions trigonomètriques associen a un angle uns determinats valors. Un angle ve determinat per la seua mesura en radians (la longitud de l'arc de la circumferència unitat comprés entre dues semirectes). El **sentit positiu** dels angles és el que va de l'eix x a l'eix y . Així, si l'angle és positiu segueix aquest sentit i si és negatiu el sentit és el contrari.

Considerem la circumferència unitat i un angle mesurat en radians de x unitats. L'angle x ens determina un punt en la circumferència unitat de coordenades (a, b) aleshores definim les funcions

- **sinus** com $\sin(x) = a$,
- **cosinus** com $\cos(x) = b$.

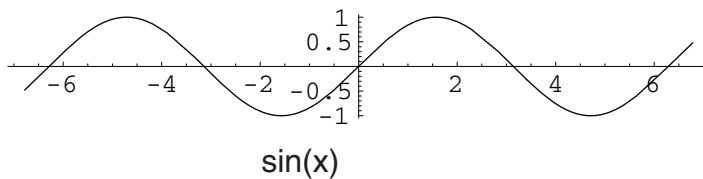


Una relació fonamental és la identitat

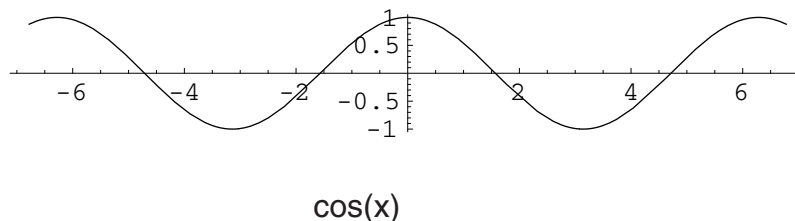
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Aquesta relació és conseqüència de la definició ja que el punt $(\sin x, \cos x)$ és un punt de la circumferència unitat.

Tant el sinus com el cosinus (i les funcions definides a partir d'elles) són funcions periòdiques, és a dir, tornen a prendre els mateixos valors en diferents intervals. Per tant, cap d'elles és injectiva en tota la recta real. A continuació podem veure les gràfiques de la funció sinus



i la funció cosinus



Les altres funcions trigonomètriques es defineixen a partir d'aquestes. Les funcions **tangent** i **secant**, definides per a $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Les funcions **cotangent** i **cosecant**, definides per a $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Les seues funcions inverses, amb les precaucions sobre els dominis de definició, s'anomenen **arc sinus**, **arc cosinus** i **arc tangent** i es denoten per $\arcsin$, $\arccos$ i $\arctan$, respectivament. Les dues primeres estan definides en l'interval $[-1, 1]$ i l'última en $\mathbb{R}$. Les altres inverses no són tan importants.

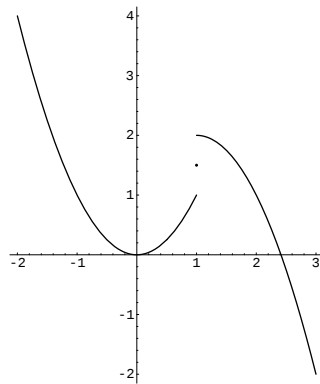
4.5 Límits de funcions

El concepte intuïtiu de límit d'una funció es pot expressar com: *Quan la variable x s'aproxima (tendeix) a un valor x_0 , el valor de la funció $f(x)$ s'aproxima (tendeix) a ℓ .* Amb un exemple entendrem millor aquest concepte.

Exemple 4.5.1 La funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [-2, 1[, \\ \frac{3}{2} & x = 1, \\ -x^2 + 2x + 1 & x \in]1, 3]. \end{cases}$$

té com a gràfica



Aleshores, si s'observa la seua gràfica sembla clar que el límit de la funció quan x s'aproxima a $x_0 = 0$ és igual a $\ell = 0$ i que quan ens aproximem a $x_0 = 2$ el límit de la funció és $\ell = 1$. Però que passa si ens aproximem a $x_0 = 1$? Això ho vorem de seguida.

Els nombres que estan prop d'un punt real x_0 els podem dividir entre els que estan a la seua esquerra i els que estan a la seua dreta. Per tant, podrem calcular:

- el **límit** de la funció en x_0 **per l'esquerra** (quan ens aproximem a x_0 amb valors que estan a la seua esquerra), i ho denotarem per

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

- el **límit** de la funció en x_0 **per la dreta** (quan ens aproximem a x_0 amb valors que estan a la seua dreta), i ho denotarem per

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Exemple. Per a la funció de l'exemple anterior (Exemple 4.5.1) es té que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2.$$

Per tant, segons per on ens aproximem al valor de $x_0 = 1$ obtenim un resultat diferent. En aquests casos direm que el límit de la funció **no existeix** quan x tendeix a 1.

Definició 4.5.2 Siga $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció i siga $x_0 \in D$. Direm que el **límit** de la funció f quan x tendeix a x_0 és un nombre real ℓ si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, aleshores $|f(x) - \ell| < \epsilon$. En aquest cas escriurem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Intuitivament aquesta definició vol expressar la següent noció: ens podem apropar a ℓ tant com siga necessari amb valors de la imatge de la funció f pròxims a x_0 i vice-versa, totes les imatges de punts pròxims a x_0 també estan pròximes a ℓ .

Nota. Encara que ja està inclòs en la definició, direm que el límit de la funció en x_0 val ℓ si els dos límits laterals són iguals a ℓ .

El concepte de límit apareix també en la definició de continuïtat d'una funció.

Definició 4.5.3 Una funció $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diu que es **contínua en un punt** $x_0 \in D$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Es diu que la funció f és contínua en D si ho és en tots els punts de D .

Per la definició de límit d'una funció quan x tendeix a x_0 , tenim que una funció és contínua en un punt x_0 del seu domini si per a tot $\epsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, aleshores $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Exemple. En l'exemple 4.5.1 la funció és contínua en $x_0 = 0$ i en $x_0 = 2$ però no és contínua en $x_0 = 1$ ja que no existeix el límit de la funció en $x_0 = 1$.

Idea geomètrica. S'acostuma a dir que una funció és contínua si es pot dibuixar (o recórrer) la seua gràfica sense alçar el llapis del paper en cap moment.

Exemples. Important! Les funcions polinòmiques són contínues i per tant, també les funcions constants. Les funcions racionals també (allà on estiguen definides). Les funcions exponencials, les logarítmiques i les trigonomètriques sinus i cosinus també. La tangent també ho és en els punts on està definida. És a dir, totes les funcions elementals són contínues.

Nota. Com a conseqüència de la definició de continuïtat quan tinguem que calcular el límit d'una funció **contínua** quan x tendeix a x_0 aquest límit és igual

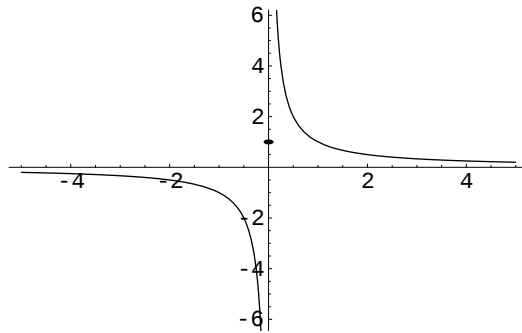
al valor de la funció en el punt x_0 , és a dir,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Un altre exemple és el següent: Siga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Aquesta és una funció definida en tot $\mathbb{R}$ però que no és contínua ja que no ho és en $x_0 = 0$. Vegem-ho. Siga $\epsilon = 1$ i siga $\delta > 0$ qualsevol. Agafem $x < 0$ tal que $-x < \delta$. Per tant, amb aquest x tenim que $|x - 0| = -x < \delta$ però $f(x) = \frac{1}{x} < 0$ i per tant $|f(x) - 1| = 1 - \frac{1}{x} > 1 > \epsilon$.



4.6 Criteri de l'entrepà per a funcions

Aquest és un primer mètode per tal de calcular alguns límits més complicats i que es pot utilitzar en moltes ocasions.

Teorema 4.6.1 *Siguen $f, g, h : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tres funcions tals que per a tot $x \in D$ es compleix la següent desigualtat*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Aleshores, si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x),$$

llavors també es compleix que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y$.

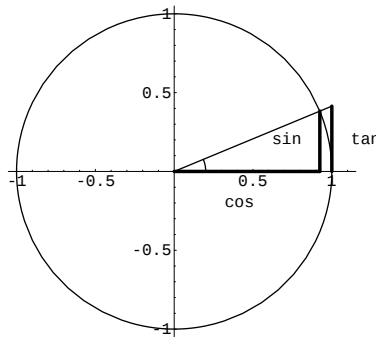
Exemple 4.6.2 Calculem el límit de la funció $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ quan x tendeix a zero i vejam que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Només cal recordar que per la mateixa definició de les funcions trigonomètriques, tenim que, per a valors de x entre 0 i $\frac{\pi}{2}$, es compleix que

$$\sin x \leq x \leq \tan x,$$

ja que x és la mesura en radians de la longitud de l'arc de circumferència entre els punts $(1, 0)$ i el punt $(\sin x, \cos x)$.



Per tant, si $x > 0$, podem dividir l'expressió anterior per $\sin x$ i obtenim

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Podem aplicar ara el criteri de l'entrepà, ja que el límit de la funció constant $f(x) = 1$ és el mateix valor, i el límit de $h(x) = \frac{1}{\cos x}$ quan x tendeix a 0 és també 1. Quan $x < 0$ podem fer el mateix però cal anar amb compte amb els signes i les desigualtats.

4.7 Exercicis

- 1 Calcula el domini de les següents funcions:

$$f(x) = \frac{1}{|x-2|}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 5, \quad p(x) = \sqrt{2-x}, \quad q(x) = 4 + 10x - x^2.$$

- 2 Donades les funcions $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ i $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Calcula $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$.

- 3 L'altura d'un cert cilindre és igual al diàmetre de la seua base. Expressa el volum, l'àrea lateral i l'àrea total del cilindre com a funció de la seua altura.

- 4 Prova que si

$$f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right),$$

aleshores

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

- 5 Prova que la gràfica de $x^2 + y^2 = 100$ talla la gràfica de $y = x + 14$ en els punts $(-8, 6)$ i $(-6, 8)$.
- 6 Determina el polinomi de grau 3 tal que per als valors de la variable 1, 2, 3 i 4 pren els valors 2, 13, 38 i 83 respectivament.
- 7 Determina el polinomi de grau menor o igual que 8 que per a $x = 0, a, -a, 2a, -2a$ s'anul·la, per a $x = \frac{a}{2}, -\frac{3a}{2}$ pren el valor 1 i per a $x = -\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}$ pren el valor -1 .
- 8 Siga $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Troba una relació entre $g(x)$ i $g(-x)$. Calcula la funció inversa de g .
- 9 La funció $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ és contínua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Defineix $f(2)$ per a que f siga contínua en $x = 2$. Podries fer el mateix per a $x = -2$?

- 10 Calcula els següents límits:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{2-x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-x}.$$

- 11 Calcula els següents límits:

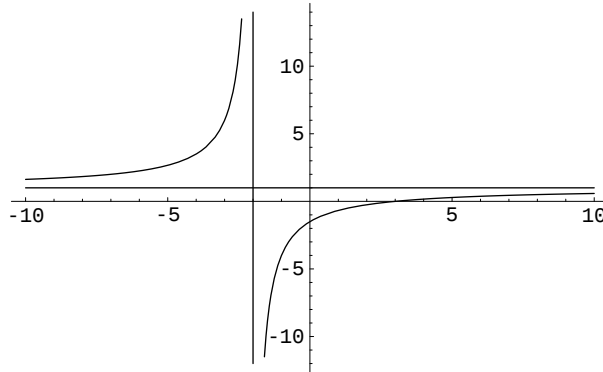
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)}{2x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(\cos x)^{\frac{1}{3}}}.$$

12 Prova que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

13 Calcula els següents límits

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}.$$

La gràfica d'aquesta funció és



14 Estudia la continuïtat de les següents funcions:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x < 2, \\ x^3 & x \geq 2 \end{cases} \quad b) \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0, \\ 1 - \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

15 Estudia la continuïtat de les següents funcions:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & x < 2, \\ 10 & x = 2, \\ 1 + x^3 & x > 2 \end{cases} \quad b) \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x & x < 1, \\ 1 & x = 1, \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

16 Calcula els valors de a i b per tal que la funció f siga contínua en $x = 1$ i discontinua en $x = 2$,

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & x \leq 1, \\ 3x & 1 < x < 2, \\ bx^2 - a & 2 \leq x. \end{cases}$$

17 Determina si les següents successions són fitades i creixents/decreixents

$$a_n = \frac{n-1}{n}, \quad b_n = \frac{n^2+1}{3n+2}, \quad c_n = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \quad d_n = \frac{(-2)^n}{n!0}.$$

18 Calcula els següents límits

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-2}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2+2}, \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5+n^2}{n^2-1}, \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4+n^2}{3n^4-n^3}.$$

19 Calcula els següents límits

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{2n}, \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-1} \right)^{\frac{3n}{2}}.$$