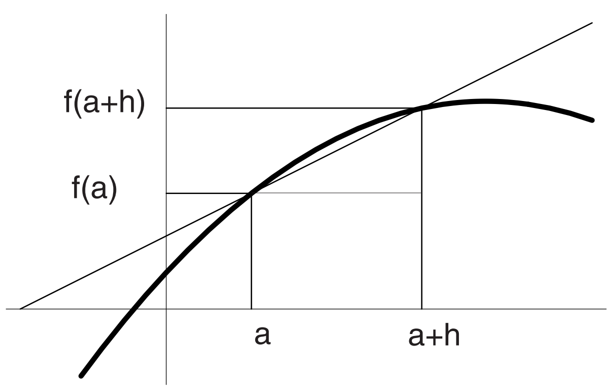
5. Derivades

5.1 El problema de la tangent a un corba plana

Un dels primers problemes que es poden plantejar quan s'estudien funcions reals és el següent: Siga $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció. Donat un valor del domini, a, determina la recta que passa per $(a, f(a))$ i que més s'aproxima a la gràfica de la funció. La recta que més s'aproxima vol dir que en un entorn del punt $(a, f(a))$ la gràfica i la recta es diferencien molt poc.

Una manera de determinar aquesta recta és la de construir rectes que passen per dos punts de la gràfica, és a dir, la de constriur secants a la gràfica, i després fer tendir un dels punts a l'altre. La recta tangent serà la recta límit de les rectes secants.



En el dibuix es pot observar que s'han determinat els punts de la gràfica $(a, f(a))$ i $(a+h, f(a+h))$. Els dos punts determinen un triangle rectangle que té per catet horitzontal un segment de longitud h i per catet vertical un segment de longitud $|f(a+h) - f(a)|$. La hipotenusa del triangle és un segment de la recta secant que és la recta que passa pel punt $P = (a, f(a))$ i té pendent

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

L'equació de la recta secant es pot escriure, utilitzant l'equació punt-pendent, com

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a).$$

Per tant, l'equació de la recta tangent (que és la recta límit de les secants quan $h \to 0$), és la recta que passa per P amb pendent

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

i la seua equació és

$$y - f(a) = \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)(x - a).$$

5.2 Derivada d'una funció

Definició 5.2.1 *Una funció f és derivable en x si existeix el límit*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En aquest cas el límit es denota per $f'(x)$ i s'anomena derivada de f en x.

Direm que una funció és derivable si ho és en tot el seu domini.

Amb aquesta definició podem escriure l'equació de la recta tangent en un punt $(a, f(a))$ com

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a).}$$

Exemples. Alguns exemples del concepte de derivada d'una funció són els següents:

(i) La derivada d'una funció constant és nul·la. En efecte, si f és una funció constant, aleshores es compleix que $f(x+h) - f(x) = 0$, i per tant el límit és zero.

(ii) La derivada de la funció $f(x) = x$ és $f'(x) = 1$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

(iii) La derivada de la funció $f(x) = x^2$ és $f'(x) = 2x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

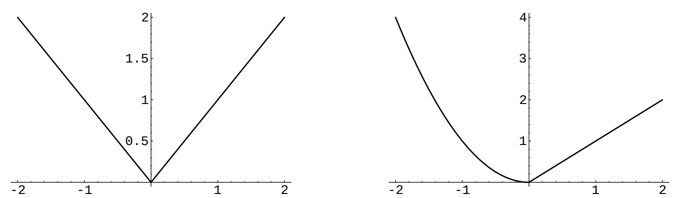
(iv) La funció valor absolut no és derivable en 0. Vejam-ho calculant els límits laterals quan $h \to 0$. Si considerem per una banda que $h > 0$, tenim que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1,$$

però si considerem que $h < 0$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

Com que els límits laterals no coincideixen aleshores la funció no és derivable en $x = 0$. Recordeu que si la funció és derivable, aleshores el límit $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ ha d'existir sense que importe si ens aproximem per la dreta o per l'esquerra.



(v) La funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0, \\ x & x > 0, \end{cases}$$

no és derivable en 0. El raonament és semblant a l'anterior exemple.

Teorema 5.2.2 *Si f és derivable en el punt a aleshores f és contínua en a.*

Demostració: Una aplicació de que el límit d'un producte és el producte dels límits quan ambdós existeixen ens diu que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Per una altra banda, la igualtat $\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = 0$ és equivalent a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Per tant, f és contínua en a. □

Teorema 5.2.3 *Siguen f i g dues funcions derivables en x, aleshores*

(i) $f+g$ *també és derivable en x i*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

(ii) $f \cdot g$ *també és derivable en x i*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

(iii) si $g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ *també és derivable en x i*

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demostració: Provarem només la derivada del producte de funcions,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\quad = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple. La funció $f(x) = x^n$ és derivable i $f'(x) = n\, x^{n-1}$.

Teorema 5.2.4 *Les funcions* $\sin(x)$ *i* $\cos(x)$ *són derivables i*

$$\sin'(x) = \cos(x), \qquad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Demostració. Utilitzant les relacions trigonomètriques (8.3) del Tema 0 es verifica que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}.
\end{aligned}$$

Ja sabem que $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$. Només queda comprovar que $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin^2(h)}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sin^2(h)-1}{h\left(\sqrt{1-\sin^2(h)}+1\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2(h)}{h\left(\sqrt{1-\sin^2(h)}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\left(\frac{-\sin(h)}{\sqrt{1-\sin^2(h)}+1}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-\sin(h)}{\sqrt{1-\sin^2(h)}+1}=1\cdot 0=0.
\end{aligned}
$$

□

Com que les altres funcions trigonomètriques s'expressen com a quocients de les dues anteriors, les seues derivades es poden calcular fent servir les derivades del sinus i del cosinus i les fórmules de la derivada d'un quocient. Per exemple,

$$
\begin{aligned}
(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\frac{(\sin(x))'\cos(x)-\sin(x)(\cos(x))'}{(\cos(x))^2}\\
&= \frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}=\frac{1}{(\cos(x))^2}=1+(\tan(x))^2.
\end{aligned}
$$

Teorema 5.2.5 *La funció $f(x)=\log_a x$ definida per a $x>0$ és derivable i*

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}.$$

Demostració.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(\frac{x+h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\log_a((\frac{x+h}{x})^{\frac{1}{h}})=\log_a(\lim_{h\to 0}(\frac{x+h}{x})^{\frac{1}{h}})\\
&= \log_a(\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}})=\log_a\left(\lim_{h\to 0}(1+\frac{1}{\frac{x}{h}})^{\frac{x}{h}}\right)^{\lim_{h\to o}\frac{h}{x\cdot h}}\\
&= \log_a(e^{\frac{1}{x}})=\log_a(a^{\frac{1}{x}\log_a e})=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.
\end{aligned}
$$

□

Nota. En particular, si el logaritme és neperià, es compleix que

$$\boxed{\ln'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln e}=\frac{1}{x}.}$$

5.3 Més Propietats de les derivades

Teorema 5.3.1 **(Regla de la cadena.)** *Si g és derivable en a i f és derivable en $g(a)$, aleshores $f \circ g$ també és derivable en a i*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Demostració. Siga $k = g(a+h) - g(a)$, com que g és derivable, en particular és contínua i per tant $\lim_{h\to 0} g(a+h) - g(a) = \lim_{k\to 0} k = 0$. Amb açò tenim que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= f'(g(a)) \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.3.2 **(Derivada de la funció inversa.)** *Si f és derivable en a, $f'(a) \neq 0$ i f és una bijecció, aleshores f^{-1} també és derivable en $f(a)$ i*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demostració De la identitat $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = Id(a) = a$, s'obté, derivant i aplicant-hi la regla de la cadena, que

$$(f^{-1})'(f(a)) \cdot f'(a) = 1.$$

Per tant, $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$. □

Nota. Com aplicació d'aquest resultat calculem a continuació la derivada de les funcions logaritme, de l'arc sinus, l'arc cosinus i l'arc tangent:

(i) Les derivades de les funcions exponencials $f(x) = a^x$ amb $a > 0$ i de $g(x) = e^x$ són

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a, \quad g'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x.$$

La demostració d'aquest resultat es demana en l'exercici 4.

(ii) Les funcions arc sinus, arc cosinus i arc tangent són les inverses de les funcions sinus, cosinus i tangent. Si $f(y) = \sin y$ es compleix que $f^{-1}(x) = \arcsin x = y$, i aleshores $x = \sin(\arcsin x) = \sin y = f(y)$ (Noteu que hem canviat el nom de la variable de la funció f). Per tant,

$$\begin{aligned}(\arcsin)'(x) &= (f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Anàlogament amb $f(y) = \cos y$, i $f^{-1}(x) = \arccos x = y$, aleshores $x = \cos(\arccos x) = \cos y = f(y)$ i es compleix que

$$\begin{aligned}(\arccos)'(x) &= (f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-\sin y} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

I també amb $f(y) = \tan y$, i $f^{-1}(x) = \arctan x = y$, aleshores $x = \tan(\arctan x) = \tan y = f(y)$ i es compleix que

$$\begin{aligned}(\arctan)'(x) &= (f^{-1})'(x) = (f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Nota. La derivada d'una funció del tipus $f(x) = (g(x))^{h(x)}$. Per tal d'obtenir-la apliquem logaritmes neperians a les dues part de l'expressió, $\ln(f(x)) = h(x) \cdot \ln(g(x))$, i derivem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)},$$

per tant,

$$\boxed{f'(x) = (g(x))^{h(x)} \cdot \left(h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \tfrac{g'(x)}{g(x)}\right).}$$

Dos casos particulars són les derivades de les funcions exponencials $f(x) = a^x$ amb $a > 0$ i de $g(x) = e^x$,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x,$$

i també quan $f(x) = a^{h(x)}$ i $g(x) = e^{h(x)}$,

$$(a^{h(x)})' = a^{h(x)} \cdot (h'(x) \cdot \ln a) \qquad (e^{h(x)})' = e^{h(x)} \cdot h'(x).$$

Exemple. Calcula la derivada de la funció $f(x) = x^x$. La solució és

$$f'(x) = x^x \cdot (1 + \ln x).$$

Com a resum, ací teniu algunes de les derivades de les funcions més habituals:

$f'(x) =$	$(f(u(x)))' =$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$((u(x))^n)' = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$
$(e^x)' = e^x$	$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln(u(x)))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a(u(x)))' = \frac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin(u(x)))' = \cos(u(x)) \cdot u'(x)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos(u(x)))' = -\sin(u(x)) \cdot u'(x)$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$((\tan u(x))' = \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x) = (1 + \tan^2 u(x)) \cdot u'(x)$
$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin(u(x)))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos(u(x)))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arctan(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

5.4 Extrems relatius d'una funció

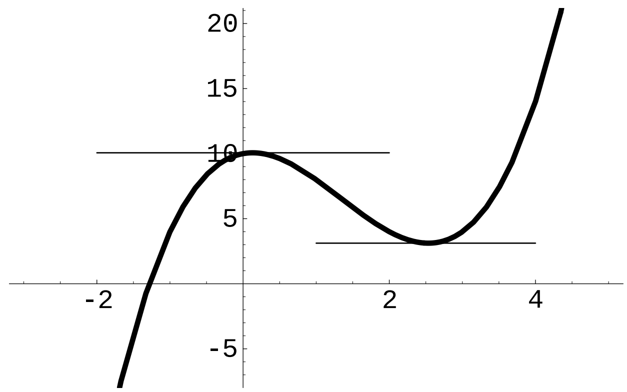
Definició 5.4.1 *Siga f una funció derivable i x_0 un punt del domini de f. Es diu que*

(i) *x_0 és un punt màxim relatiu de f si existeix un interval $[a, b]$ contingut en el domini de f, amb $x_0 \in]a, b[$ i tal que $f(x_0) \geq f(y), \quad \forall y \in [a, b]$.*

(ii) *x_0 és un punt mínim relatiu de f si existeix un interval $[a, b]$ contingut en el domini de f, amb $x_0 \in]a, b[$ i tal que $f(x_0) \leq f(y), \quad \forall y \in [a, b]$.*

El valor $f(x_0)$ rep el nom de valor màxim (mínim) relatiu de f i direm que f assoleix un màxim (mínim) relatiu en x_0. Es diu que f té un extrem relatiu en un punt x_0 si x_0 és un màxim o un mínim relatiu.

A continuació teniu un dibuix on apareixen un màxim i un mínim relatius.



Teorema 5.4.2 *Siga f una funció derivable. Si x_0 és un extrem relatiu, aleshores $f'(x_0) = 0$.*

Demostració Suposem que x_0 és un màxim relatiu. Això vol dir que existeix un interval $[a, b]$ tal que $x_0 \in]a, b[$ i $f(x_0) \geq f(y), \quad \forall y \in [a, b]$. Per tant, si h és un nombre real tal que $x_0 + h \in [a, b]$, aleshores $f(x_0) \geq f(x_0 + h)$, és a dir, $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$.

Si h és positiu, aleshores $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$, i per tant,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Si h és negatiu, aleshores $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$, i per tant,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

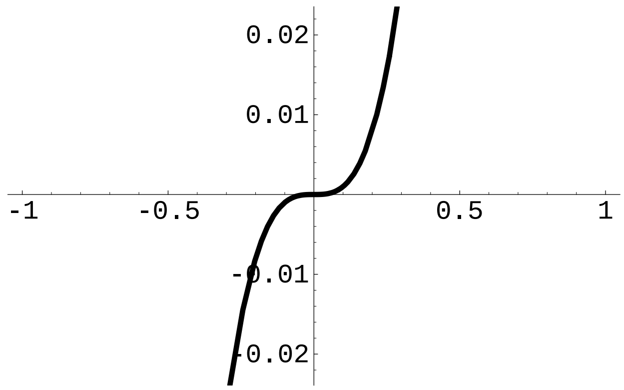
Com que la funció f és derivable en x_0 , els límits han de ser iguals i coincidir amb $f'(x_0)$. Això significa que

$$f'(x_0) \leq 0 \quad \text{i} \quad f'(x_0) \geq 0,$$

és a dir, $f'(x_0) = 0$.

En el cas que x_0 siga un mínim, la demostració és semblant. □

Nota. El recíproc no és cert, és a dir, $f'(x_0) = 0$ no implica que x_0 siga un extrem. Un exemple d'aquesta afirmació és $f(x) = x^3$. Noteu que $f'(0) = 0$, però $x = 0$ no és un extrem de f ja que si $x < 0$, aleshores $f(x) < 0$, mentre que si $x > 0$, aleshores $f(x) > 0$.



Definició 5.4.3 *Es diu punt singular d'una funció f a tot punt x_0 del domini tal que*

$$f'(x_0) = 0.$$

El valor $f(x_0)$ rep el nom de valor singular de f.

5.5 Alguns Teoremes importants

Teorema 5.5.1 Teorema de Rolle. *Si f és contínua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ i $f(a) = f(b)$, aleshores existeix un punt $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Demostració La demostració es basa en que tota funció contínua en un interval $[a, b]$ assoleix un valor màxim i un valor mínim. Si el valor màxim s'assoleix en un punt $x_0 \in]a, b[$, aleshores, donat que la funció és derivable en x_0, tenim que $f'(x_0) = 0$.

Si el valor mínim s'assoleix en un punt $x_0 \in]a, b[$, aleshores, donat que la funció és derivable en x_0, tenim que $f'(x_0) = 0$.

Suposem, finalment, que el valor màxim i el valor mínim s'assoleixen en els extrems. Com que $f(a) = f(b)$, això vol dir que la funció és constant i ara, per a qualsevol $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$. □

Exemple 1. La funció $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$ en $[0, 16]$ compleix que $f(0) = f(16) = 4$, però la seua derivada $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-8}}$ no s'anul·la en cap punt de $[0, 16]$. Què passa amb el teorema de Rolle?

Exemple 2. Prova que es verifica el teorema de Rolle per a la funció $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ en $[0, 8]$. Quin és el valor x_0 tal que $f'(x_0) = 0$?

Teorema 5.5.2 Teorema del valor mitjà. *Si f és contínua en $[a, b]$ i és derivable en $]a, b[$, aleshores existeix un punt $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Demostració La demostració es fonamenta en el Teorema de Rolle. Es considera la funció

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

i s'aplica el Teorema de Rolle a aquesta funció.

Noteu que la funció h és contínua en $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$. A més a més, $h(a) = f(a) = h(b)$. Per tant, es compleixen les hipòtesis del Teorema de Rolle. En conseqüència, existeix un $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Definició 5.5.3 *Es diu que una funció és creixent (decreixent) en un interval I si sempre que $x, y \in I$ amb $x < y$, aleshores $f(x) < f(y) \quad (f(x) > f(y))$.*

Corol·lari 5.5.4 *Siga f una funció derivable en un interval I. Si $f'(x) > 0$ per a tot $x \in I$, aleshores f és creixent en I. Si $f'(x) < 0$ per a tot $x \in I$, aleshores f és decreixent en I.*

Demostració Considerem el cas $f'(x) > 0$. Siguen $y, z \in I$ tals que $y < z$. La funció f és contínua en $[y, z]$ i derivable en $]y, z[$. Per tant, aplicant-hi el Teorema del valor mitjà, tenim que, existeix un $x \in]y, z[$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Ara bé, com que $f'(x) > 0$, això vol dir que

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} > 0,$$

i com que $z - y > 0$, aleshores $f(z) - f(y) > 0$, és a dir, $f(y) < f(z)$. Per tant, f és creixent. □

Nota. En els punts màxims i mínims d'una funció $f(x)$ es compleix que $f'(x_0) = 0$, i això es pot interpretar com que la pendent de la recta tangent és zero. Per tant, la tangent és horitzontal, és a dir, té per equació

$$\boxed{y - f(x_0) = 0.}$$

5.6 Derivades successives

Definició 5.6.1 *Siga f una funció derivable tal que f' siga també derivable en un punt x_0, aleshores, la derivada de f' en x_0 s'anomena segona derivada de f en x_0 i es denota per $f''(x_0)$.*

De la mateixa manera es poden definir les derivades tercera, f''', quarta, $f^{(iv)}$, etc. i derivada n-èssima, $f^{(n)}$.

Teorema 5.6.2 *Siguen f i f' funcions derivables. Suposem que $f'(x_0) = 0$:*

(i) Si $f''(x_0) > 0$, aleshores f té un mínim relatiu en x_0.

(ii) Si $f''(x_0) < 0$ aleshores f té un màxim relatiu en x_0.

Demostració Per definició tenim que

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h},$$

i donat que $f'(x_0) = 0$, es pot reescriure com a

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h}.$$

Suposem ara que $f''(x_0) > 0$. Això vol dir que el quocient $\frac{f'(x_0+h)}{h}$ ha de ser positiu per a h suficientment menut. Per tant, per a h menut, $f'(x_0+h)$ ha de ser positiu quan h és positiu i $f'(x_0+h)$ ha de ser negatiu quan h és negatiu. Això vol dir que f és creixent en un interval a la dreta de x_0 i que és decreixent en un interval a l'esquerra de x_0. Per tant, f té un mínim en x_0.

La demostració per a $f''(x_0) < 0$ és anàloga. □

5.7 Regla de l'Hôpital

Teorema 5.7.1 Teorema del valor mitjà de Cauchy. *Siguen f i g dues funcions contínues en $[a, b]$ i derivables en $]a, b[$, aleshores existeix un nombre $x_0 \in\ ]a, b[$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Demostració La demostració no és més que una altra aplicació del Teorema de Rolle, ara a la funció $h(x) = (f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$. En efecte, la funció h és contínua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ i a més a més,

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b).$$

Per tant, existeix un $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$0 = h'(x_0) = (f(b) - f(a))g'(x_0) - (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

$\square$

El teorema del valor mitjà de Cauchy té una aplicació molt important en el càlcul d'un determinat tipus de límits.

Teorema 5.7.2 Regla de l'Hôpital ($\frac{0}{0}$). *Suposem que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \textit{i} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

on a també pot ser $+\infty$ o $-\infty$, i suposem també que existeix $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Aleshores, existeix $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i es compleix que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemples. Calculem els següents límits:

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$

(ii) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{-1+\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = -\frac{1}{2}.$

Demostració Demostrarem primer quan $x \to a \in \mathbb{R}$ i deixarem per a més endavant el cas $x \to \infty$.

Suposem per tant que $\lim_{x \to a} f(x) = 0, \lim_{x \to a} g(x) = 0$ i que $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ i volem demostrar que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

El fet de que existisca el límit $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ vol dir que tant f' com g' existeixen en un interval de la forma $[a - h, a + h]$. Ara bé si són funcions derivables en eixe interval, aleshores són contínues en el mateix interval. Com que $\lim_{x \to a} f(x) = 0, \lim_{x \to a} g(x) = 0$ i com que tant f com g són contínues en a, aleshores, $f(a) = g(a) = 0$.

Podem aplicar ara el teorema de Cauchy per a l'interval $[a, a + h]$ i tenim per tant que existeix un nombre $c_h \in]a, a + h[$ tal que

$$(f(a + h) - f(a))g'(c_h) = (g(a + h) - g(a))f'(c_h).$$

Tenint en compte que $f(a) = g(a) = 0$, només queda

$$f(a + h)g'(c_h) = g(a + h)f'(c_h).$$

Ara bé, si existeix el límit $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, aleshores, necessàriament el límit $\lim_{x\to a} g'(x)$, si existeix, és distint de zero. Per tant, podem suposar tant que $g'(c_h) \neq 0$, com que $g(a+h) \neq 0$ i així podem dir que

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(c_h)}{g'(c_h)}.$$

Si fem ara tendir $h \to 0$, tenim que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c_h)}{g'(c_h)} = \ell.$$

I així demostrem el primer cas. Demostrem ara el cas $x \to \infty$. Ací la clau està en fer $x = \frac{1}{t}$ i aplicar el cas anterior de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0} \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

La segona versió del teorema de l'Hôpital, que no demostrarem, és la següent

Teorema 5.7.3 Regla de l'Hôpital ($\frac{\infty}{\infty}$). *Suposem que*

$$lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \quad i \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty,$$

on a també pot ser $+\infty$ o $-\infty$, i suposem també que existeix $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Aleshores, existeix $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i es compleix que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemples. Calculem els següents límits:

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$

(ii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec 3x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x} = -\frac{1}{3}.$

5.8 Diferenciació implícita

A vegades no tenim l'expressió explícita d'una funció, sinó que el que ens donen és una relació on apareix la funció d'una forma implícita. Si en aquest cas volem estudiar la variació de la funció, és a dir la derivada, podem fer dues coses: La primera seria aïllar directament la funció i després derivar, o la segona, derivar implícitament i després aïllar la funció derivada. S'ha de fer notar que el primer mètode no sempre és factible. De vegades pot ser difícil, o impossible, aïllar la funció. Per tant, en general, és més fàcil aïllar la derivada una vegada feta la diferenciació implícita.

Aquest mètode de la diferenciació implícita s'acostuma a utilitzar quan la gràfica d'una equació $F(x, y) = 0$ no és una funció. No obstant, certes parts de la gràfica poden considerarse com gràfiques de funcions, és a dir, que en eixes parts podem considerar $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$. En aquest cas, quan volem estudiar la variació de la funció $f(x)$, és a dir la derivada, podem derivar implícitament i després aïllar la funció derivada.

Exemple. Siga $y = f(x)$ una funció tal que $x^2 + y^2 = 1$. Volem calcular $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

- El primer mètode, aïllar la funció i després derivar, és possible en aquest cas. En efecte, $y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Per tant,

$$f'(x) = \mp\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \mp\frac{x}{\sqrt{y^2}} = \mp\frac{x}{y} = .$$

- El segon mètode. Derivem, respecte de la variable x, tota l'expressió $x^2 + y^2 = 1$, i tenim en compte que y és una funció de x. La derivada implícita és

$$2x + 2yy' = 0.$$

  Aïllem ara y'

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

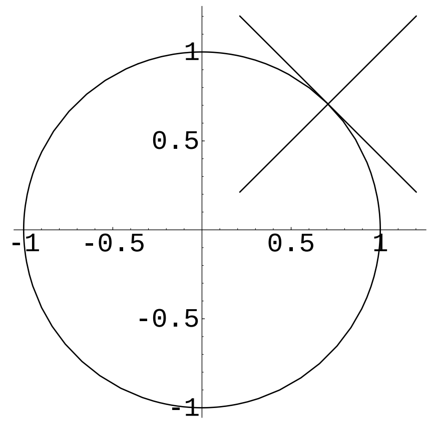
D'aquest resultat podem treure la següent conseqüència.

Nota. Com ja sabeu, l'equació $x^2 + y^2 = 1$ és l'equació de la circumferència centrada en l'origen i de radi 1. D'una altra banda, y' és la pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció, en aquest cas, la circumferència. També coneixem la relació que hi entre les pendents de dues rectes ortogonals: si m és la pendent d'una recta, aleshores $-\frac{1}{m}$ és la pendent de la recta ortogonal. Per tant, hem provat que la recta tangent a la circumferència en un punt (x_0, y_0) és ortogonal a la recta que uneix l'origen amb el punt (x_0, y_0). En efecte, aquesta recta té com a pendent $\frac{y_0}{x_0}$ mentre que la recta tangent té com a pendent $y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0}$. En particular, en un punt (x_0, y_0) de la circumferència tenim les equacions

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0)} \qquad \text{recta tangent,}$$

i també,

$$\boxed{y - y_0 = \frac{y_0}{x_0} \cdot (x - x_0)} \qquad \text{recta normal.}$$



Exemple. Troba la recta tangent a la corba $2x^6 + y^4 = 9xy$ en el punt $(1, 2)$.

De primer comprovem que el punt pertany a la corba. En efecte,

$$2(1^6) + 2^4 = 2 + 16 = 18.$$

Derivem ara implícitament, donat que el primer mètode, aïllar y, no és ara factible.

$$12x^5 + 4y^3y' = 9y + 9xy'.$$

Aïllem y',

$$y' = \frac{9y - 12x^5}{4y^3 - 9x}.$$

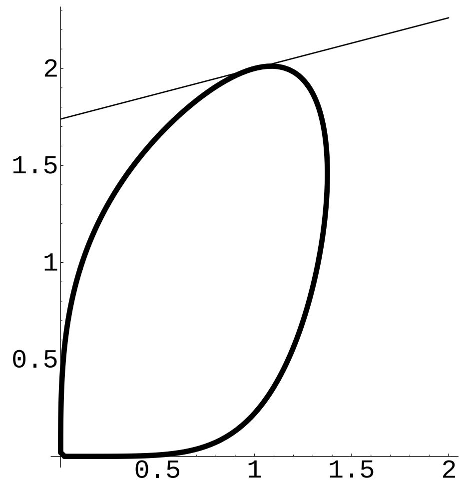
En el punt $(1, 2)$ el seu valor és

$$y'(1) = \frac{9 \cdot 2 - 12}{4 \cdot 2^3 - 9 \cdot 1} = \frac{6}{23}.$$

Per tant, la recta tangent és

$$y - 2 = \frac{6}{23}(x - 1).$$

Ací teniu un dibuix de la recta tangent en el punt $(1, 2)$,



5.9 Angle entre corbes

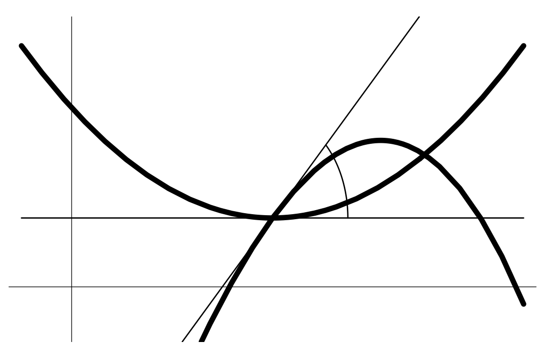
Definició. L'angle entre dues corbes en un punt d'intersecció és l'angle entre les rectes tangents a eixes corbes en el punt d'intersecció.

Si les tangents són perpendiculars diem que les corbes són ortogonals.

Vejam com calcular l'angle. Siguen f i g dues funcions derivables tals que les seues gràfiques es tallen en un punt $(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0))$. Les pendents de les rectes tangents a les gràfiques de f i g en x_0 són

$$f'(x_0) = m_1 = \tan \alpha_1, \qquad g'(x_0) = m_2 = \tan \alpha_2.$$

Ací teniu un dibuixet de la situació



Si les tangents són perpendiculars, aleshores la relació entre les pendents és

$$\boxed{m_2 = -\tfrac{1}{m_1}.}$$

Si les tangents no són perpendiculars, aleshores $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ és distint de $\frac{\pi}{2} = 90°$ i $m_1 \cdot m_2 \neq -1$. Per tant,

$$\tan\beta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}.$$

En l'expressió anterior s'ha utilitzat la següent relació trigonomètrica que s'obté fàcilment a partir de les relacions (8.3) del Tema 0,

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_2 - \alpha_1) &= \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1}{\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1}\\ &= \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_1}.\end{aligned}$$

En principi, l'angle β resultant podria ser més gran que $\frac{\pi}{2} = 90°$, però si el que volem es obtenir sempre un angle β més xicotet que $\frac{\pi}{2} = 90°$ només tenim que considerar com a solució

$$\boxed{\tan\beta = |\tfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}|.}$$

Exemple. Calcula l'angle entre les corbes $y = x^2$ i $xy = 1$.

El punt d'intersecció és toba resolent l'equació

$$x \cdot x^2 = 1, \text{ i per tant } x = 1.$$

Aleshores, el punt d'intersecció és $(1, 1)$ i les pendents de les rectes tangents són

$$m_1 = (2x)_{(1,1)} = 2, \qquad m_2 = (\frac{-y}{x})_{(1,1)} = -1.$$

Per tant, les corbes no es tallen ortogonalment (ja que $m_2 = -1 \neq -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$) i es compleix que

$$\tan\beta = |\frac{-3}{1 + (-2)}| = 3,$$

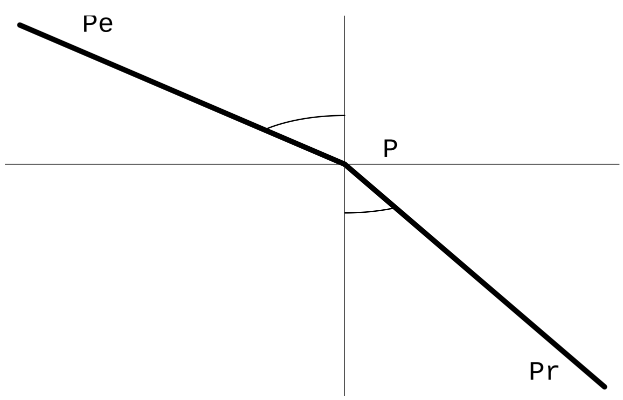
i l'angle agut entre les dues corbes és $arc\tan\beta = 3$.

5.10 Un exemple de minimització: la refracció de la llum

És ben sabut que la velocitat de la llum depén del medi per on vaja. Recordareu també, de segur, que quan la llum passa d'un medi a un altre, pateix un canvi de direcció. És el fenòmen anomenat refracció de la llum. Allò que potser no siga tan conegut és que aquest fenòmen pot explicar-se com a conseqüència d'un problema de minimització. Això és el que farem en aquest paragraf.

Per a simplificar el problema suposarem que estem en un pla. Tenim dos medis, M_1 i M_2 que estan en contacte al llarg d'un recta. La velocitat de la llum en cadacun del medis és v_1 i v_2, respectivament. Suposarem que un raig de llum, emés des d'un punt P_e en el medi M_1 arriba a un altre punt P_r del segon medi M_2.

Un dibuix il·lustratiu és el següent on hem triat el sistema de referència per tal que les coordenades del punt emissor siguen $P_e = (0, a)$, les del punt de contacte del raig amb el medi M_2 siguen $P = (x, 0)$ i les del punt d'arribada $P_r = (d, b)$:



D'acord amb la fórmula temps= $\frac{\text{distància}}{\text{velocitat}}$ el temps empleat per la llum per anar de P_e a P és

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1},$$

i de P a P_r

$$t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Hi ha que minimitzar per tant, la funció

$$t(x) = t_1(x) + t_2(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Ara,

$$t'(x) = \frac{x}{v_1 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{v_2 \cdot \sqrt{b^2 + (d - x)^2}},$$

ara bé, del dibuix es dedueix que $\sin\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ i que $\sin\alpha_2 = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, i per tant,

$$t'(x) = \frac{\sin\alpha_1}{v_1} - \frac{\sin\alpha_2}{v_2}.$$

Si restringim $x \in [0, d]$ aleshores la funció t, que és derivable en eixe interval, verifica que $t'(0) < 0$ i $t'(d) > 0$. Per tant, ha d'haver un punt intermedi x_0 tal que $t'(x_0) = 0$, és a dir, quan el punt P té de coordenades $P = (x_0, 0)$ es verifica la **Llei de Snell**,

$$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}.}$$

5.11 Dibuix de gràfiques de funcions

Anem a vore com a partir d'una sèrie de dades referents a una funció podem dibuixar la gràfica d'aquesta amb prou fiabilitat.

(i) **Domini de la funció.** És el conjunt de punts per als quals té sentit la funció que volem estudiar. Per exemple, per als polinomis és tot $\mathbb{R}$, per a un quocient de polinomis és $\mathbb{R}$ menys els punts on s'anul·la el denominador,...

(ii) **Simetries.** Estudiarem només dos:

- Simetria eix y, quan es compleix que $f(-x) = f(x)$.
- Simetria respecte de l'origen, quan es compleix que $f(-x) = -f(x)$.

Nota. No ni ha simetria respecte de l'eix x, ja que llavors f no seria una aplicació, és a dir, hi hauria valors del domini que tindrien dues imatges.

(iii) **Tall amb els eixos.** Trobem els punts de tall amb

- Tall eix x, cal fer la segona coordenada zero, $f(x) = 0$.
- Tall eix y, cal fer la primera coordenada zero, $x = 0$.

(iv) **Asímptotes.** Són rectes del pla a les quals tendeix la gràfica d'una funció en un entorn d'un punt. Poden ser:

- *Horitzontals.* Una recta $y = b$ és asímptota horitzontal de f si

$$\lim_{x\to+\infty} = b \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} = b.$$

- *Verticals.* Una recta $x = a$ és asímptota vertical de f si

$$\lim_{x \to a^+} = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a^-} = \pm\infty.$$

- *Oblíqües.* Quan $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ és un quocient de polinomis tal que el grau de $p(x)$ és una unitat major que el grau de $q(x)$. Aleshores, podem fer la divisió dels polinomis i arribem a

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = ax + b + \frac{c}{q(x)},$$

  i l'asímptota oblíqua és justament $y = ax + b$.

(v) **Creixement-Decreixement.** Cal fer la derivada de la funció i trobar els punts singulars, és a dir, els punts on $f'(x) = 0$. Després, amb aquestos punts, i els possibles punts on no estiga definida la funció, cal possar-los en la recta real i donar valors a l'esquerra i dreta d'eixos valors. Quan la derivada siga positiva marcarem un signe $+$ (creixent) i quan siga negativa un signe $-$ (decreixent). Amb açò ja podem saber de quin tipus és un punt crític:

- Si no hi ha canvi de signe d'esquerra a dreta d'un punt és per que o bé és un punt d'inflexió o bé és un punt on hi ha una asímptota vertical.
- Si hi ha canvi de signe, el punt és un màxim si el canvi és de $+$ a $-$ (creixent-decreixent), i és un mínim si és de $-$ a $+$ (decreixent-creixent).

(vi) **Concavitat cap a d'alt-cap a baix.** Una funció f direm que és còncava cap a d'alt (cap a baix) en un interval si en eixe interval la derivada f' creix (decreix).

El criteri empleat per determinar el tipus de concavitat es basa en el signe de la segona derivada. Direm que la gràfica de la funció f en un interval I és

- còncava cap a d'alt en I si $f'' < 0$ en I.
- còncava cap a baix en I si $f'' > 0$ en I.

Per tal d'averiguar els intervals on la funció és còncava cap a d'alt o cap a baix cal possar els punts on s'anul·la la segona derivada, i els possibles punts on no estiga definida la funció, en la recta real i donar valors a l'esquerra i dreta d'eixos valors. Quan la segona derivada siga positiva marcarem un signe $+$ (còncava cap a baix) i quan siga negativa un signe $-$ (còncava cap a d'alt). Amb açò ja podem saber els punts d'inflexió (punts on canvia la concavitat).

Exemples. Dibuixar la gràfica de les següents funcions:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}, \qquad g(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6), \qquad h(x) = x \cdot e^x.$$

5.12 Exercicis de derivades i les seues aplicacions

1 Troba l'equació de la recta tangent a $y = \frac{x+2}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ en el punt $(10, 4)$.

2 Troba les interseccions amb l'eix d'abscisses de la recta tangent i de la recta normal a la corba $y = x - 8(x-3)^{\frac{1}{2}}$ en el punt d'abscisa $x = 4$.

3 Troba l'àrea d'un triangle limitat per la tangent a $xy = 3$ en $(3, 1)$ i els eixos de coordenades.

Prova que l'àrea del triangle limitat pels eixos de coordenades i la recta tangent a $xy = m$ en $(a, \frac{m}{a})$ és independent de a.

4 Prova que $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

5 Troba la derivada de cadascuna de les següents funcions:

$$
\begin{aligned}
a)\ y &= \frac{1-x^2}{1+x^2}, \qquad b)\ y = \frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}, \qquad c)\ y = e^{-x}\sin x, \qquad d)\ y = e^{\tan(x)},\\
e)\ y &= x\ln x, \qquad f)\ y = x^3\ln x, \qquad g)\ y = \ln\frac{1}{x^2-1}, \qquad h)\ y = x^{\frac{1}{x}},\\
i)\ y &= \arcsin(5x), \quad j)\ y = \arccos(2x), \quad k)\ y = \frac{1}{2}\arctan(ax), \quad l)\ y = \arctan(e^x),\\
m)\ y &= (1 - x + \arcsin(x))^{\frac{1}{2}} \qquad n)\ y = \arcsin(x) - \ln(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

6 Troba la segona derivada en cadascuna de les segënts funcions:

$$
a)\ y = x^4 - 2x^2 + 1, \qquad b)\ y = \frac{x}{4+x}, \qquad c)\ y = \frac{4}{(3x)^{\frac{1}{2}}},
$$

$$
d)\ y = x(x-2)^{\frac{1}{2}}, \qquad e)\ y = \frac{x-3}{2x-5}; \qquad f)\ y = x(2x-5)^{\frac{1}{2}}.
$$

7 Calcula els següents límits

$$
a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}, \qquad b)\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}, \qquad c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}.
$$

8 Calcula el límit quan x tendeix a zero de les següents expressions

$$
\begin{array}{llllll}
a) & \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x}, & b) & \dfrac{1 - (1+x)^{\frac{1}{n}}}{x}, & c) & \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{\cos x - 1},\\
d) & \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}, & e) & \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x - x^2}}, & f) & \dfrac{\tan x}{x}.
\end{array}
$$

9 Calcula els següents límits

$$a) \quad \lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2+3x+3}{2x^3+2x^2+5x+5}, \qquad b) \quad \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin(2x)}, \qquad c) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x},$$

$$d) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}, \qquad e) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-\ln(x+1)-1}{x^5}, \qquad f) \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec 3x}{\sec x}.$$

10 Troba l'equació de la recta normal a la funció $x^2 - y^2 = 3a^2$ en el punt $(2a, a)$.

11 Determina a i b de manera que $y^2 = ax + b$ siga tangent a $x - 2y = 1$ en el punt $(3, 1)$.

12 Determinar a, b i c de manera que la corba $y = ax^2 + bx + c$ passe per $(1, 3)$ i siga tangent a $4x - y = 2$ en el punt $(2, 6)$.

13 Troba els punts de la corba $y = 4 - x^2$ en què la recta tangent és paral·lela a la recta $y = 4x$.

14 Troba els punts de la corba $y = 1-x^3$ en què la recta tangent és perpendicular a la recta $x = 12y$.

15 Troba els angles en què la corba $y = 3x^2 - x$ talla a l'eix x.

16 Les corbes $x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$ i $4x - 3 = y^2$ es tallen en els punts $(1, -1)$ i $(1, 1)$. Troba els angles amb què es tallen.

17 Prova que les corbes $x^2 = 4(y + 1)$ i $x^2 = -4(y - 1)$ es tallen perpendicularment en tots els punts de la seua intersecció.

18 Troba el triangle isósceles d'àrea constant i de perímetre mínim.

19 Un pla MN separa un medi en què la velocitat de propagació de la llum és v_2 del medi en què la velocitat és v_1. Quina serà la llei de propagació per què un raig de llum vaja del punt A al punt B en l'interval de temps més curt possible?

20 En un semi-cercle de radi r inscriure un trapeci d'àrea màxima.

21 Troba l'àrea del rectangle de perímetre màxim que es pot tallar en una placa circular.

22 Troba el prisma recte de base quadrada, volum constant i de superfície mínima.

23 Entre els prismes rectes de base quadrada i amb diagonal constant, troba el de volum màxim.

24 Calcula la mínima quantitat M de material per poder construir un cilindre circular recte i buit, obert en la seua part superior, per a que puga contenir un volum V i tal que el grosor de les seues parets siga a.

25 La intensitat d'il·luminació d'un punt és inversament proporcional al quadrat de la distància del punt al focus lluminós. Dues llums, una de les quals té 8 vegades més intensitat que l'altra, estan separades per 6 metres. A quina distància de la llum de major intensitat és la il·luminació total mínima?

26 Troba els punts d'inflexió de la corba $y = 6 + (x-3)^5$.

27 Troba els punts d'inflexió de la corba $y = x^3 + 10x$ i indica per a quins valors de x la corba és còncava o convexa.

28 Representa gràficament les funcions

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad g(x) = \frac{1+x}{x-1}.$$

29 Representa les següents corbes

$$a)\; y = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}, \qquad b)\; y = \frac{3}{x} + x - 4, \qquad c)\; y = x^3 - x - 2.$$

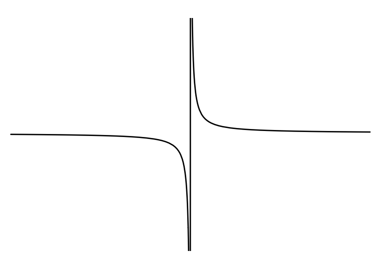
30 Representa les següents corbes

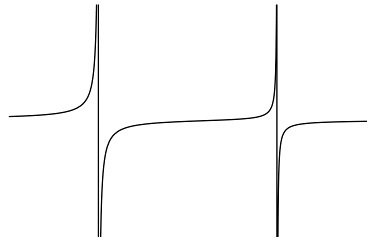
$$a)\; y = \frac{x(x^2-3)}{3x^2-1}, \qquad b)\; y = \frac{x^5}{25} - \frac{x^4}{20} - \frac{2x^3}{5} + 1, \qquad c)\; y = \frac{9x + x^4}{x - x^3}.$$

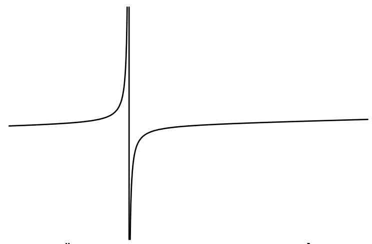
31 Emaparella les funcions amb les gràfiques raonadament.

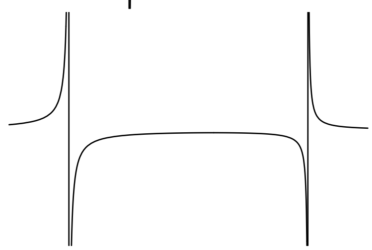
$$a) \quad f_1(x) = \tfrac{x^2-x+1}{x^2-4} \qquad b) \quad f_2(x) = \tfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$$

$$c) \quad f_3(x) = \tfrac{x^2+3x-6}{x+4} \qquad d) \quad f_4(x) = \tfrac{x^2-2x-2}{x^2-4}.$$









32 Troba l'equació de la circumferència que té per centre el punt $(-2, 1)$ i que passa per $(2, 4)$.

33 Troba els punts de $y = \frac{x^2}{x-1}$ en els que $\frac{dy}{dx} = 0$.

34 Troba l'equació de la circumferència que té per centre el punt $(-2, 2)$ i que és tangent a la recta $12x - 5y = 135$.

35 Troba l'equació de la circumferència que és tangent a $x^2 + y^2 = 13$ en el punt $(-3, 2)$ i que passa per $(-5, 0)$.

36 Troba les equacions de les rectes de pendent 2 i que són tangents a la circumferència $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0$.

37 Troba les equacions de les rectes que passen pel punt $(4, 7)$ i que són tangents a la circumferència $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 13 = 0$.