6. Integració de funcions d'una variable. Aplicacions.

En el tema de derivades vam estudiar el problema de donada una funció, $f(x)$, calcular la seua derivada, és a dir, trobar la funció $f'(x)$. Doncs bé, en aquest tema estudiarem el problema invers: Donada una funció, $f(x)$, cal trobar una funció, $F(x)$, tal que la seua derivada siga precisament la funció $f(x)$, és a dir,

$$F'(x) = f(x).$$

Definició 6.0.1 *Una funció F s'anomena primitiva de f en $[a, b]$ si F és contínua en $[a, b]$ i es compleix que $F'(x) = f(x)$ per a tot punt $x \in]a, b[$.*

Exemples. Trobar les funcions primitives de

$$a)\ f(x) = c, c \in \mathbb{R}, \quad b)\ g(x) = x, \quad c)\ h(t) = t^4, \quad d)\ p(x) = e^x.$$

Teorema 6.0.2 *Siga $f(x)$ una funció contínua en $[a, b]$. Si $F_1(x)$ i $F_2(x)$ són dues primitives de $f(x)$ en $[a, b]$, aleshores la seua diferència és una constant,*

$$F_1(x) - F_2(x) = C \in \mathbb{R}.$$

Demostració. Definim la funció $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ en $[a, b]$, i com F_1 i F_2 són primitives de f es compleix que

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

per a tot valor $x \in]a, b[$, i per tant, la funció $G(x)$ ha de ser constant. Ara apliquem el Teorema del valor mitjà (Teorema 5.5.2) a la funció $G(x)$:

(i) és contínua en $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$,

(ii) existeix un punt $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$G'(x_0) = \frac{G(b) - G(a)}{b - a}.$$

Donat que, $G'(x) = 0$ per a tots els valors de l'interval $]a, b[$ es verifica que $G(b) = G(a)$, i la funció G és constant. Siga $C \in \mathbb{R}$ la constant tal que $G(x) = C$, aleshores

$$F_1(x) = F_2(x) + G(x) = F_2(x) + C,$$

és a dir, les dues primitives difereixen en una constant. □

Com a consequència d'aquest resultat té sentit la següent definició.

Definició 6.0.3 *Si una funció F és una primitiva de f aleshores l'expressió $F(x) + C$, on $C \in \mathbb{R}$, s'anomena* **integral indefinida o integral** *de la funció $f(x)$, i ho escriurem com*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \quad \textit{on} \quad F'(x) = f(x).$$

Nota. De la defineió anterior es dedueix que si derivem una integral indefinida obtenim la funció que voliem integrar, és a dir,

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Aquesta és la raó per la qual a vegades es diu que integrar és "el contrari" de derivar.

Nota. Una bona estratègia per tal de calcular una integral és fer primer una conjectura de quin ha de ser el resultat i després derivar aquesta funció conjecturada. Segons el resultat obtés es modifica o no la conjectura.

Propietats 6.0.4 *Siguen f i g funcions contínues, aleshores es compleix que*

(i) $\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int (f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$.

Exemples. Calcular les següents integrals

$$a) \int 8x\, dx, \qquad b) \int (2x - x^3 + 2x^4)\, dx, \qquad c) \int e^{4x}\, dx, \qquad d) \int \sin(3x)\, dx.$$

La regla de la cadena estudiada en el tema de funcions també apareix en el càlcul d'integrals senzilles.

Propietat 6.0.5 *Siguen f i u dues funcions tals que es pot definir la funció composició $(f \circ u)(x) = f(u(x))$. Aleshores,*

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = F(u(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

on F és una primitiva de f.

Demostració. És una conseqüència de la regla de la cadena estudiada en el tema de funcions. La derivada de la funció composició $F(u(x))$, com ja sabem, és igual a

$$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x),$$

donat que F és una primitiva de la funció f. Per tant,

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = F(u(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

□

Nota. Aquesta propietat s'utilitza per tal de resoldre integrals amb el **mètode de substitució**. La idea és definir una nova variable t igual a l'expressió $u(x)$ de manera que la derivada de $u'(x)$ aparega al calcular la derivada de la nova variable t, és a dir,

$$t = u(x) \quad \text{i} \quad dt = u'(x)\, dx.$$

Exemple. Calcula les següents integrals

$$a) \int (x^2+2)^2 \cdot x\, dx, \quad b) \int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx.$$

Per tal de resoldre la primera, siga $t = x^2 + 2$, aleshores $dt = 2x\, dx$ i la integral es transforma en

$$\int (x^2+2)^2 \cdot x\, dx = \int t^2 \cdot \frac{dt}{2} = \int \frac{t^2}{2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + C.$$

Ara, només queda desfer el canvi,

$$\int (x^2+2)^2 \cdot x\, dx = \frac{(x^2+2)^3}{6} + C.$$

Per tal de resoldre la segona, siga $t = \sin x$, aleshores $dt = \cos x\, dx$ i la integral es transforma en

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C,$$

i desfent el canvi,

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Exemples. Calcula les següents integrals

$$a) \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\, dx, \quad b) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\, dx, \quad c) \int e^{x^4} \cdot x^3 \, dx.$$

6.1 Algunes fórmules d'integració

A continuació teniu algunes de les integrals immediates més habituals

$\int \, dx = x + C$	$\int u'(x)\, dx = u(x) + C$
$\int dx = x + C$	$\int u'(x)\, dx = u(x) + C, \quad n \neq -1$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int (u(x))^n \cdot u'(x)\, dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{u(x)} u'(x)\, dx = \ln \lvert u(x) \rvert + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int e^{u(x)} \cdot u'(x)\, dx = e^{u(x)} + C$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{u(x)} \cdot u'(x)\, dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$
$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$	$\int \sin(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = -\cos(u(x)) + C$
$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$	$\int \cos(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \sin(u(x)) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(u(x))} \cdot u'(x)\, dx = \tan(u(x)) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$	$\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}\, dx = \arctan(u(x)) + C.$

6.2 Integració per parts

Aquest és un tipus especial d'integrals que es poden calcular fàcilment utilitzant el següent resultat

Teorema 6.2.1 *Siguen* $u(x)$ *i* $v(x)$ *dues funcions continues en* $[a, b]$*, aleshores*

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\, dx.$$

Demostració: La prova es basa en la derivada del producte de dues funcions, és a dir,

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

i ara integrant

$$\int (u(x) \cdot v(x))' \, dx = u(x) \cdot v(x) = \int v(x) \cdot u'(x) \, dx + \int u(x) \cdot v'(x) \, dx.$$

Per tant,

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \, dx.$$

$\square$

Exemple. Calcular $\int x \cdot \sin x \; dx$. Triem com a funcions $u(x) = x$ i $v'(x) = \sin x$, aleshores tenim que $u'(x) = 1$ i $v(x) = \int \sin x \; dx = -\cos x$. Per tant,

$$\int x \cdot \sin x \, dx = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = x \cdot (-\cos x) + \sin x + C.$$

Nota. Per tal de comprovar si hem fet bé un integral **sempre** podem derivar el resultat obtés i vore si coincideix amb la funció que voliem integrar. En particular, en l'exemple anterior,

$$(x \cdot (-\cos x) + \sin x + C)' = 1 \cdot (-\cos x) + x \cdot (-(-\sin x)) + \cos x + 0 = x \sin x.$$

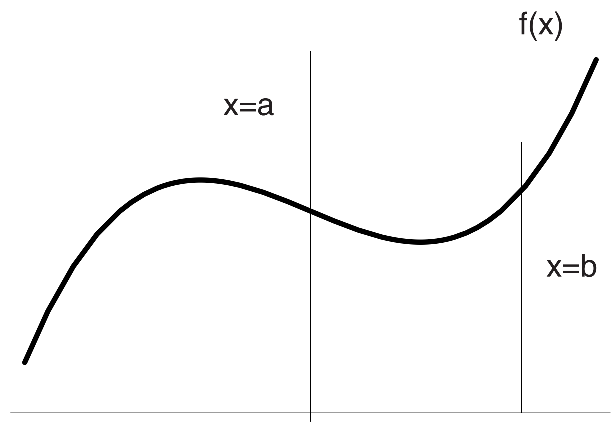
Nota. Aquest mètode d'integració per parts s'acostuma a utilitzar en integrals del tipus

$$\begin{array}{ll} \int x^k \cdot \sin(ax) \, dx & \int x^k \cdot \cos(ax) \, dx \\ \int x^k \cdot e^{ax} \, dx & \int x^k \cdot \ln x \, dx. \end{array}$$

6.3 Integrals definides

Anem ara a vore la relació de les integrals amb el càlcul d'àrees de regions, i posteriorment ens serviran també per calcular alguns volums.

Suposem que tenim una regió, R, limitada en la seua part superior per la gràfica d'una funció $f(x)$ contínua no negativa, en la seua part inferior per l'eix x, per l'esquerra per la recta $x = a$ i per la dreta per la recta $x = b$, és a dir, una regió com la del següent dibuix,



Exemple. Calcular l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x) = x^2$ i les rectes $y = 0$, $x = 0$ i $x = 3$.

Una forma d'aproximar el valor d'aquesta àrea és dividir l'interval $[0, 3]$, per exemple en intervals d'amplitud 1, és a dir,

$$x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3,$$

i després calcular els valors màxims, M_i, i mínims, m_i, que pren la funció $f(x) = x^2$ en cada subinterval,

$$\begin{array}{lll} [x_0, x_1] = [0, 1], & m_1 = 0, & M_1 = 1, \\ [x_1, x_2] = [1, 2], & m_2 = 1, & M_2 = 4, \\ [x_2, x_3] = [2, 3], & m_3 = 4, & M_3 = 9. \end{array}$$

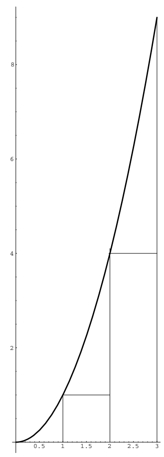
Ara l'àrea de la regió que volem calcular estarà compresa entre l'àrea inferior

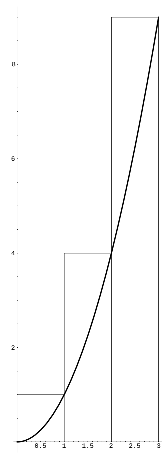
$$s = (x_1 - x_0) \cdot m_1 + (x_2 - x_1) \cdot m_2 + (x_3 - x_2) \cdot m_3 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 5,$$

i l'àrea superior

$$S = (x_1 - x_0) \cdot M_1 + (x_2 - x_1) \cdot M_2 + (x_3 - x_2) \cdot M_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 14,$$

com es pot apreciar en el següent dibuix



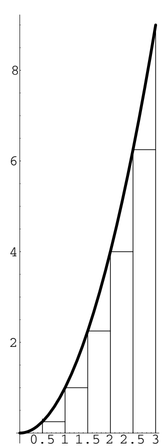


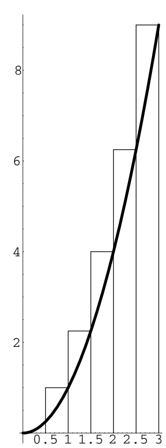
Si ara repetim el procés però per a intervals d'amplitud $\frac{1}{2}$ tindrem la següent partició de l'interval $[0,3]$,

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{2} < x_2 = 1 < x_3 = \frac{3}{2} < x_4 = 2 < x_5 = \frac{5}{2} < x_6 = 3,$$

i si ara calculem els valors màxims, M_i, i mínims, m_i, que pren la funció $f(x) = x^2$ en cada subinterval,

$$\begin{array}{lll}
[x_0,x_1] = [0,\frac{1}{2}], & m_1 = 0, & M_1 = \frac{1}{4}, \\
[x_1,x_2] = [\frac{1}{2},1], & m_2 = \frac{1}{4}, & M_2 = 1, \\
[x_2,x_3] = [1,\frac{3}{2}], & m_3 = 1, & M_3 = \frac{9}{4}, \\
[x_3,x_4] = [\frac{3}{2},2], & m_4 = \frac{9}{4}, & M_4 = 4, \\
[x_4,x_5] = [2,\frac{5}{2}], & m_5 = 4, & M_5 = \frac{25}{4}, \\
[x_5,x_6] = [\frac{5}{2},3], & m_6 = \frac{25}{4}, & M_6 = 9,
\end{array}$$





L'àrea inferior de la regió amb aquesta partició és

$$\begin{aligned} s &= (x_1 - x_0) \cdot m_1 + (x_2 - x_1) \cdot m_2 + \cdots + (x_6 - x_5) \cdot m_6 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{55}{4} = 6'875, \end{aligned}$$

i l'àrea superior

$$\begin{aligned} S &= (x_1 - x_0) \cdot M_1 + (x_2 - x_1) \cdot M_2 + \cdot + (x_6 - x_5) \cdot M_6 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \cdots + \frac{1}{2} \cdot 9 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} + 9) = 11'375. \end{aligned}$$

Per tant, l'àrea de la regió verifica que

$$s = 6'875 < A(R) < S = 11'375,$$

i si seguim el mateix procés de subdivisió de l'interval $[0, 3]$ en intervals cada vegada més xicotets sembla clar que cada vegada tindrem unes fites inferiors i superiors més pròximes al valor "real" de l'àrea d'aquesta regió. Aquest procés s'explica en general a continuació i necessitarem algunes definicions previes.

Definició 6.3.1 *Anomenarem partició de l'interval tancat* $[a, b]$ *a tot subconjunt finit de* $[a, b]$ *que continga els punts* a *i* b*, és a dir,*

$\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ *amb* $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Definició 6.3.2 *Siga* $f(x)$ *una funció contínua en l'interval* $[a, b]$ *i siga* $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ *una partició de l'interval* $[a, b]$*. Denotem per* m_i *i* M_i *els valors mínim i màxim que pren la funció* f *en l'interval* $[x_{i-1}, x_i]$*, respectivament. Es defineix:*

- *Suma inferior associada a* $\mathcal{P}$ *de* f *al número*

$$\begin{aligned} s_f(\mathcal{P}) &= (x_1 - x_0) \cdot m_1 + (x_2 - x_1) \cdot m_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot m_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i. \end{aligned}$$

- *Suma superior associada a $\mathcal{P}$ de f al número*

$$\begin{aligned} S_f(\mathcal{P}) &= (x_1 - x_0) \cdot M_1 + (x_2 - x_1) \cdot M_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot M_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i. \end{aligned}$$

Bé, ara ja podem definir la integral definida.

Definició 6.3.3 *Siga $f(x)$ una funció contínua en $[a, b]$ i $\mathcal{P}$ una partició de l'interval $[a, b]$. S'anomena integral definida (o integral) de f entre a i b a l'únic número $\int_a^b f(x)\,dx$ que verifica que*

$$s_f(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S_f(\mathcal{P}),$$

per a qualsevol partició de l'interval $[a, b]$.

Propietats 6.3.4 *Siguen f i g funcions contínues en $[a, b]$, aleshores es compleix que*

(i) $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_a^b (f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ *si* $f(x) \geq 0$ *en* $[a, b]$.

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

(v) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

(vi) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$ *si* $a \leq c \leq b$.

Algunes integrals definides es poden resoldre fent un canvi de variable com hem fet abans, però ara cal canviar també els líimits d'integració.

Propietat 6.3.5 *Siguen f i u dues funcions tals que es pot definir la funció composició $(f \circ u)(x) = f(u(x))$. Aleshores, si fem el canvi $t = u(x)$ es compleix que*

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt.$$

Teorema 6.3.6 (Teorema fonamental del càlcul) *Siguen f una funció contínua en $[a, b]$ i F una primitiva de f en $[a, b]$, aleshores es compleix que*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exemple. Calcular $\int_1^2 \frac{10x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$.

Siga $t = u(x) = x^3 + 1$ i $dt = 3x^2\,dx$, aleshores $u(1) = 2$, $u(2) = 9$ i es compleix que

$$\int_1^2 \frac{10x^2}{(x^3+1)^2}\,dx = \int_2^9 10 \cdot \frac{\frac{1}{3}dt}{t^2} = \frac{10}{3}\left[-\frac{1}{t}\right]_2^9 = \frac{35}{27}.$$

Exemple. Ara ja podem calcular el valor exacte de l'àrea de la regió determinada per la funció $f(x) = x^2$ i les rectes $y = 0, x = 0$ i $x = 3$. Una primitiva de $f(x) = x^2$ és $F(x) = \frac{x^3}{3}$, i per tant,

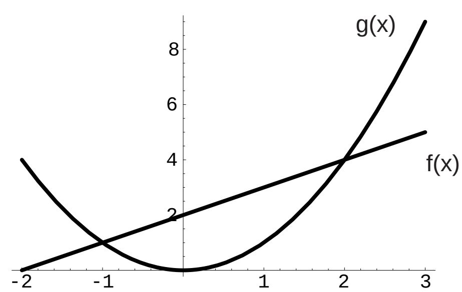
$$A(R) = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9.$$

6.4 Àrea entre dues corbes

Siguen f i g dues funcions tals que les seues gràfiques es tallen i el que volem es determinar l'àrea de la regió (o regions) que determinen aquestes dues corbes.

Per tal de calcular aquesta àrea el primer que cal fer es determinar els punts on es tallen les gràfiques de les funcions. Això ho podem fer igualant les expressions de les funcions f i g (punts comuns) i després resoldre l'equació corresponent. Els punts d'intersecció són els límits d'integració que ficarem en l'expressió

$$A(R) = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\right|.$$



Si els punts d'intersecció de la les dues corbes són més de dos, $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, aleshores anirem integrant entre dos punts d'intersecció successius,

$$A(R) = \left|\int_{x_0}^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \cdots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} (f(x) - g(x))\,dx\right|.$$

Nota. El valor absolut es pren per tal d'evitar que el resultat siga negatiu. Això només voldria dir que la "nostra suposició" de quina de les dues corbes està per damunt de l'altra era errònia.

Exemple. Calcular l'àrea de la regió limitada per les funcions $f(x) = x + 2$ i $g(x) = x^2$.

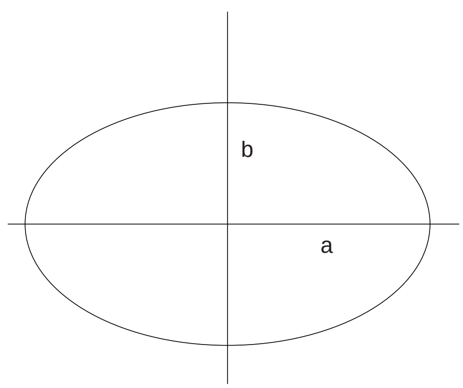
Les dues funcions es tallen quan $f(x) = g(x)$, és a dir, quan

$$x + 2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, x = 2.$$

Per tant, l'àrea de la regió és

$$\int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Exemple. Calcular l'àrea de l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Com es veu en el dibuix l'àrea de la regió és igual al doble de l'àrea de la regió compresa per la funció $f(x) = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ i l'eix x (recta $y = 0$). Per tant,

$$A(R) = 2 \cdot \int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}\, dx,$$

i ara amb un canvi de variable,

$$\frac{x}{a} = \sin t, \qquad dx = a \cos t\, dt$$

els límits d'integració canvien a

$$\begin{aligned} \frac{-a}{a} &= -1 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-\pi}{2}, \\ \frac{a}{a} &= 1 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

i la integral es transforma en

$$\begin{aligned} A(R) &= 2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t(a\cos t)\,dt = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \\ &= 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \qquad (4.1) \\ &= 2ab(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})) = \pi\cdot ab, \end{aligned}$$

on s'ha utilitzat la fórmula $\cos t = \sqrt{\frac{1+\cos(2t)}{2}}$, del Tema 0, equació (8.4).

6.5 Càlcul d'alguns volums

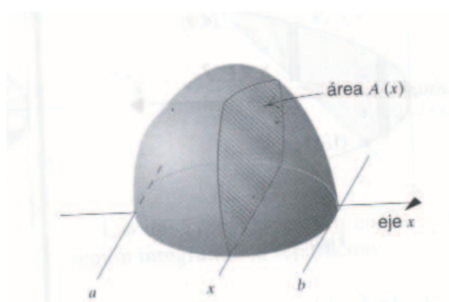
Anem a estudiar com calcular el volum d'un sòlid del qual coneixem l'àrea d'una secció transversal i el volum d'un sòlid de revolució.

Per tal d'entendre com calcularem aquests volums cal començar amb el volum d'un cilindre de base coneguda, A, i altura, h. En aquest cas es compleix que

$$V = \text{base} \times \text{altura} = A \times h$$

6.5.1 *Volum d'un sòlid del qual coneixem l'àrea d'una secció transversal*

Suposem que el sòlid està fitat per dos plans paral·lels perpendiculars a l'eix x en $x = a$ i $x = b$. Anem a calcular el volum a partir del volum d'una llesca d'aquest sòlid i després integrant.

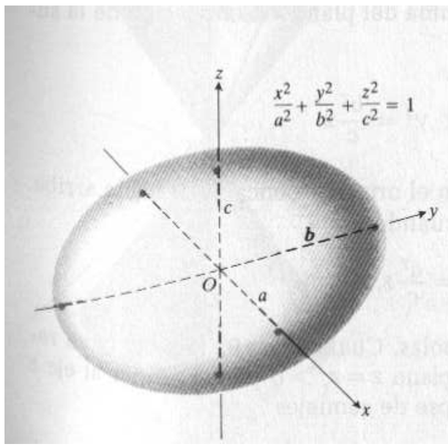


Nota. D'aquesta manera podríem calcular per exemple el volum d'una barra de pa.

Definició 6.5.1 *Suposem que l'àrea transversal d'un sòlid està determinada per la funció $A(x)$. Aleshores, el volum del sòlid des de $x = a$ fins a $x = b$, és*

$$V = \int_a^b A(x)\, dx. \qquad (5.2)$$

Exemple. Calcular el volum de la part superior d'un el·lipsoide d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



L'àrea d'una secció transversal de l'el·lipsoide és igual a l'àrea de l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$, és a dir,

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2-z^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2-z^2)}{c^2}} = 1,$$

que utilitzant la fórmula (4.1) és igual a

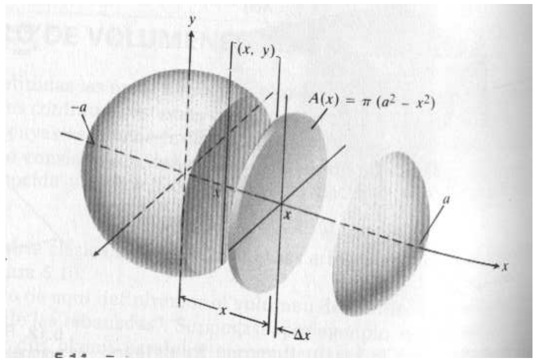
$$A(z) = \pi \cdot \frac{ab}{c^2}(c^2 - z^2).$$

Ara el volum de l'el·lipsoide és igual a

$$V = \int_{-c}^{c} \pi \cdot \frac{ab}{c^2}(c^2-z^2)\, dz = \pi \cdot \frac{ab}{c^2} \int_{-c}^{c} (c^2-z^2)\, dz = \pi \cdot \frac{ab}{c^2} \left[c^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-c}^{c} = \frac{4\pi}{3} abc.$$

6.5.2 *Volum d'un sòlid de revolució*

Un sòlid de revolució està generat per la rotació d'una regió plana al voltant d'un eix situat en el seu pla.



Per tal de calcular el seu volum només cal determinar l'àrea de la secció transversal, és a dir, del cercle de radi $r = f(x)$,

$$A(x) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (f(x))^2,$$

i aplicar l'anterior fórmula (5.2)

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2\, dx.$$

Exemple. Calcular el volum de la esfera que s'obté al fer girar el cercle $x^2 + y^2 = r^2$ al voltant de l'eix x.

L'àrea d'una secció transversal en un punt x entre $-r$ i r està determinada per la funció $f(x)$ que s'obté a partir de la y de l'expressió $x^2 + y^2 = r^2$,

$$f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Per tant,

$$V = \int_{-r}^{r} \pi \cdot (f(x))^2\, dx = \int_{-r}^{r} \pi \cdot (r^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3.$$

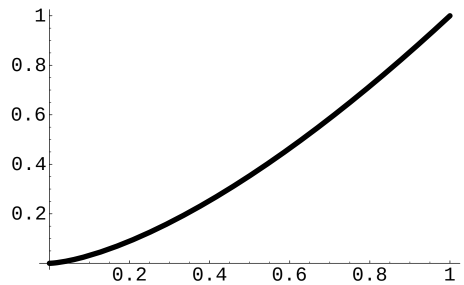
6.6 Longitud de una corba

La idea per tal de calcular la longitud d'una corba és anar calculant la longitud de corbes poligonals que s'aproximen a la corba. Com a conseqüència s'arriba a la següent definició.

Definició 6.6.1 *Siga $f(x)$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$. La longitud de la corba $f(x)$ desde $x = a$ fins a $x = b$ es defineix com*

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Exemple. Calcular la longitud de la corba $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ entre $x = 0$ i $x = 1$.



La derivada de la funció és $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$, i ara

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x}\, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{4+9x}}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \int_0^1 \frac{3}{2} \cdot (4+9x)^{\frac{1}{2}} \cdot 9\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \left[(4+9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{27}(4^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

6.7 Exercicis d'integració

(1) $\int (x^2 - 2\sin x) dx$. (2) $\int (x^2 - 2\cos x) dx$. (3) $\int (a^x - e^x) dx$.

(4) $\int (x - \frac{1}{x}) dx$. (5) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx$. (6) $\int (1 - \sin x + \frac{1}{\sin^2 x}) dx$.

(7) $\int \cos 5x dx$. (8) $\int \cos(\frac{3}{4}x) dx$. (9) $\int \cos(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}) dx$.

(10) $\int \frac{1}{\sin^2(ax-b)} dx$. (11) $\int \frac{xdx}{a^2+x^2}$. (12) $\int \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}}$.

(13) $\int x \ln x dx$. (14) $\int x \cos x dx$. (15) $\int x^2 \ln x dx$.

(16) $\int x^2 \cos x dx$. (17) $\int e^x \cos x dx$. (18) $\int e^x \sin x dx$.

(19) $\int x^2 \cos^2 x dx$. (20) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$. (21) $\int \frac{2}{3x+4} dx$.

(22) $\int \frac{\cos t}{3+\sin t}dt$. (23) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. (24) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx$.

(25) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$. (26) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x+3}}dx$. (27) $\int \frac{x^{-1}}{1+\ln^2 x}dx$.

(28) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$. (29) $\int e^{\frac{x}{4}}2dx$. (30) $\frac{1}{2}\int (e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})dt$.

(31) $\int ye^{2y^2}dy$. (32) $\int(10^t - 10^{-t})dt$. (33) $\int e^{\cos(\pi t)}\sin(\pi t)dt$.

(34) $\int a^t b^t dt$. (35) $\int \sqrt{ae^t}dt$. (36) $\int (e^{2x+3})^3 e^{2x}dx$.

(37) $\int e^{\tan(2y)}\sec^2(2y)2dy$. (38) $\int(e^t+1)dt$. (39) $\int \frac{e^{2t}+e^t+1}{e^t+1}dt$.

(40) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$. (41) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$. (42) $\int \frac{\csc^2 x}{1+4\cot^2 x}dx$.

(43) $\int_0^1 \frac{dx}{x+4}$. (44) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sec(2t-\pi)dt$. (45) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4+\sin x}dx$.

(46) $\int_0^a (a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^4 dx$. (47) $\int_0^1 (\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$. (48) $\int_0^a a(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^4 dx$.

(49) $\int_0^1 t\arctan t dt$. (50) $\int_0^{\pi} \sin^2(t)\cos t dt$. (51) $\int_0^{\pi} \sin^2(\frac{t}{3})dt$.

(52) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t))^{\frac{3}{2}}\sin(t)dt$. (53) $\int_0^1 re^{r^2}dr$. (54) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cot^2(t)dt$.

(55) $\int_0^1 (e^x+e^{-x})^3 dx$. (56) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{2}}dx$. (57) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(2x)dx$.

(58) $\int_0^e x\ln x dx$. (59) $\int_0^1 te^t dt$. (60) $\int_1^2 t\sqrt{2-t}dt$.

(61) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$. (62) $\int_0^{\pi} (1+\cos t)^3 \sin t dt$. (63) $\int_0^4 (e^x+e^{-x})x^2 dx$.

(64) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t)\sin^2(2t)dt$. (65) $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$. (66) $\int_1^e t^2\ln(t^2)dt$.

(67) Troba l'àrea limitada per l'arc de la hipèrbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ i l'ordenada corresponent a $x = m$.

(68) Demostra que la corba $y = 3x^2$ divideix en dues parts iguals l'àrea del triangle format per 'eix x, la recta $y = \lambda x$ i l'ordenada corresponent al punt d'intersecció de la recta amb la corba.

(69) Troba l'àrea limitada per la corba $x^2 = 64y^3$ i la recta $x = 8y$. Solució: $\frac{4}{5}$.

(70) Troba l'àrea limitada per les corbes $y^2 = 4x$ i $y^2 = x+3$. Solució: 8.

(71) Troba l'àrea limitada per la corba $y = x^2$ i la recta $x = y$.

(72) Troba l'àrea limitada per la corba $y = 4x - x^2$ i la recta $x = y$.

(73) Troba l'àrea limitada per la corba $8y = x^3$ i la recta $2x = y$.

(74) Troba l'àrea limitada per la corba $y^2 = 9x$ i la recta $2x = y$.

(75) Troba l'àrea limitada per la corba $y = 4x - x^2$ i la recta $y + 2x - 8 = 0$.

(76) Troba l'àrea limitada per la corba $y = 2x^2$ i la recta $2x = y - 4$.

(77) Troba l'àrea limitada per les corbes $y = x^3$ i $y^2 = x$.

(78) Troba l'àrea limitada per la corba $y^2 = x + 1$ i la recta $x = y$.

(79) Troba l'àrea limitada per les corbes $y = x^2$ i $y = 2 - x^2$.

(80) Troba l'àrea limitada per les corbes $y = x^3$ i $y = x^4$.

(81) Troba el volum de l'el·lipsoide de revolució que s'obté al fer girar una el·lipse amb eixos de 16 i 12 unitats. (Sol. 384π)

(82) Troba el volum d'una esfera de radi a.

(83) Troba el volum de la figura que s'obté al girar sobre l'eix x l'àrea limitada per les següents corbes: $y = x^3, y = 0, x = 1, x = 2$.

(84) Troba la longitud de la corba $x^3 = ay^2$ entre els punts $(0, 0)$ i $(4a, 8a)$. (Sol. $\frac{8a}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1)$.)

(85) Troba la longitud de l'arc de paràbola $x = t^2, y = 2t$ entre el vèrtex i el punt $(1, 2)$.