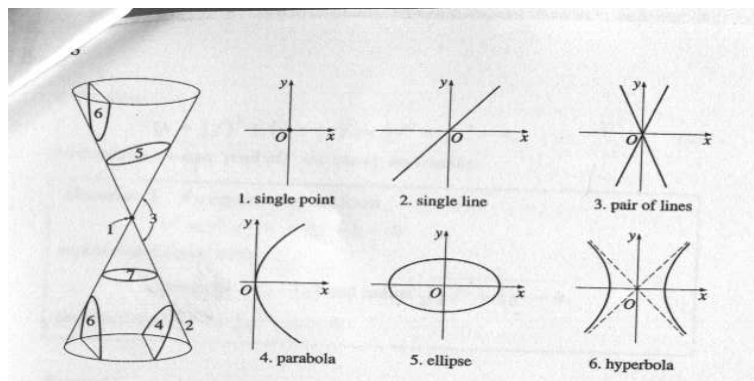

7. Còniques

En aquest tema estudiarem les equacions de les còniques i algunes propietats dels espills de forma cònica. També vorem com calcular les rectes tangents i normals a un punt d'una cònica. Finalment, estudiarem com reduir una cònica als seus eixos mitjançant una translació i/o una rotació.

Sembla ser que els primers en estudiar les còniques (o seccions còniques) varen ser els grecs. Aquestes corbes són totes les corbes que es poden obtenir al intersectar un pla i un con circular doble, com podeu observar en el següent dibuix



Noteu que hi ha tres interseccions que donen lloc a corbes degenerades, és a dir, a un punt, una recta o bé un parell de rectes. Nosaltres anem a estudiar les altres corbes: circumferència, el·lipse, paràbola i hipèrbola.

L'expressió algebraica general d'una cònica és una equació del tipus

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (0.1)$$

amb $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$. En aquest tema estudiarem primer alguns casos particulars i després donarem unes propietats que ens permetran identificar la

cònica i reduir-la als seus eixos (fer una rotació als eixos coordinats per tal que siguin paral·lels als eixos de la cònica i després fer una translació a l'origen).

7.1 Circumferències

Definició geomètrica. Una circumferència en $\mathbb{R}^2$ és el conjunt de punts del pla (x, y) que estan a una distància fixa (radi) d'un punt fix (centre).

Siguem $c = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ les coordenades del centre i $r > 0$ el radi, aleshores els punts (x, y) que estan en la circumferència de centre c i radi r verifiquen la relació $d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$. Per tant, l'equació d'una circumferència en $\mathbb{R}^2$ amb centre (a, b) i radi r és

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.} \quad (1.2)$$

Equació d'una circumferència. Si ara desenvolupem l'anterior expressió arribem a

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0, \quad (1.3)$$

i si ara escrivim $f = -2a$, $g = -2b$ i $h = a^2 + b^2 - r^2$, es té que

$$x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0. \quad (1.4)$$

Per tant, una equació general del tipus

$$x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0, \quad (1.5)$$

amb la condició que $f^2 + g^2 - 4h > 0$ és l'equació de la circumferència. Per tal d'obtenir el centre i el radi cal “completar quadrats”, és a dir,

$$\left(x + \frac{f}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{g}{2}\right)^2 = x^2 + fx + \frac{f^2}{4} + y^2 + gy + \frac{g^2}{4},$$

i ara només cal resoldre l'equació en r

$$h = \frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} - r^2.$$

Amb aquest procés hem obtingut el centre de la circumferència $(-\frac{f}{2}, -\frac{g}{2})$ i el radi $r = \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} - h}$.

Teorema 7.1.1 L'equació $x^2 + y^2 + fx + gy + h = 0$ amb $f^2 + g^2 - 4h > 0$ és l'equació d'una circumferència de centre $(-\frac{f}{2}, -\frac{g}{2})$ i radi $r = \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} - h}$.

Exemple. Troba el centre i el radi de les següents circumferències:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$, b) $2x^2 + 2y^2 + x + y = 0$.

Cal completar els quadrats en les anterior equacions i s'obté que

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = ((x+2)^2 - 4) + ((y-3)^2 - 9) - 12 = (x+2)^2 + (y-3)^2 - 25 = 0,$$

és a dir, per a la primera

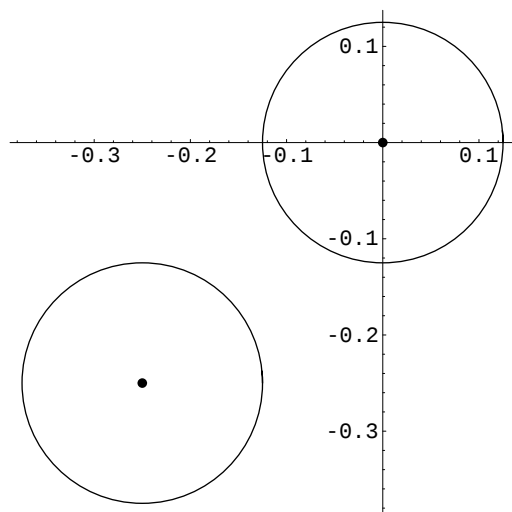
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25, \quad c = (-2, 3), \quad r = 5.$$

Amb la segona, en primer lloc podem dividir els dos membres per 2 i així els coeficients de x^2 i y^2 ja són iguals a 1,

$$0 = x^2 + y^2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = (x + \frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2,$$

per tant,

$$(x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}, \quad c = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), \quad r = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$



Circumferències $(x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$ i centrada a l'origen $x^2 + y^2 = \frac{1}{8}$.

Nota. Noteu que poden haver casos on no es puguin completar quadrats. Per exemple, la següent equació no correspon a cap circumferència

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0.$$

Si provem de completar quadrats arribem a

$$0 = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = ((x + 1)^2 - 1) + ((y + 1)^2 - 1) + 3,$$

i per tant,

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = -1,$$

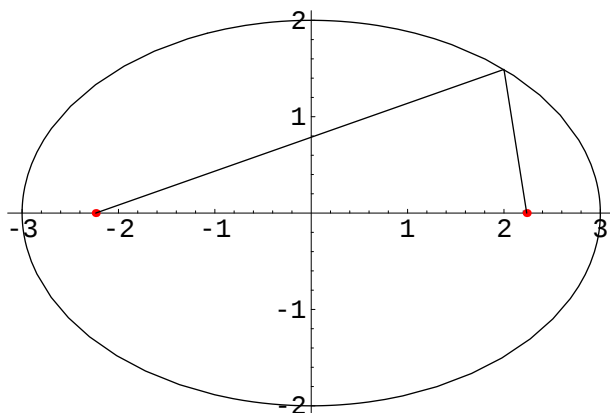
és a dir, $r^2 = -1$ i això és impossible.

7.2 El·lipse

Definició geomètrica. S'anomena **el·lipse** al conjunt de punts de $\mathbb{R}^2$ tals que la suma de les distàncies a dos punts fixos (focus) del pla és constant.

Suposem que P és un punt de l'el·lipse i que F_1 i F_2 són els punts fixos (focus) de l'el·lipse, aleshores es compleix que

$$\text{distància}(P, F_1) + \text{distància}(P, F_2) = k \in \mathbb{R}.$$



$$\text{El·lipse d'equació } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Terminologia. Els punts F_1 i F_2 s'anomenen *focus* de l'el·lipse. El segment de la recta que passa pels focus s'anomena *eix major* de l'el·lipse. El segment de la recta perpendicular a l'eix major que passa pel punt mig entre els focus rep el nom d'*eix menor*. Els punts d'intersecció entre l'el·lipse i els seus eixos són els *vèrtexs* de l'el·lipse. El punt d'intersecció dels dos eixos, és a dir, el punt mig entre els focus, és el *centre*. El quocient entre la distància entre els focus i la distància entre els vèrtexs, que més endavant s'escriurà $\frac{c}{a}$, s'anomena *excentricitat* de l'el·lipse i es denota per $e = \frac{c}{a}$.

7.2.1 Deducció de l'equació de l'el·lipse

Suposem que l'eix major de l'el·lipse és l'eix d'abscisses, i que el centre és l'origen de coordenades. És a dir, els focus tenen com a coordenades $F_1 = (-c, 0)$ i $F_2 = (c, 0)$. Per a simplificar, escriurem $k = 2a$. Volem determinar els punts P , de coordenades $P = (x, y)$, que verifiquen la condició $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

D'una banda,

$$d(P, F_1) = d((x, y), (-c, 0)) = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

D'una altra banda,

$$d(P, F_2) = d((x, y), (c, 0)) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Per tant, la condició de definició de l'el·lipse es transforma en

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Passem el segon terme del primer membre al segon membre i elevem al quadrat per tal d'eliminar una arrel quadrada

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Desenvolupem quadrats i eliminant termes obtenim

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Tornem a calcular quadrats per tal d'eliminar la segona arrel quadrada

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2).$$

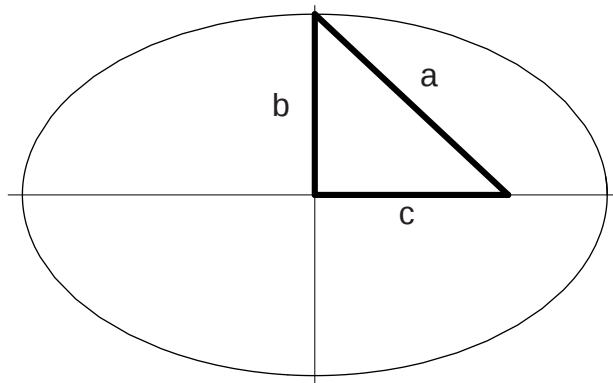
Equació que es redueix a

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

i que també es pot escriure com a

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad (2.6)$$

on $b^2 = a^2 - c^2$.



Resum. Si els focus de l'el·lipse són $F_1 = (-c, 0)$ i $F_2 = (c, 0)$ aleshores els elements de l'el·lipse es poden calcular amb les relacions

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad , \quad e = \frac{c}{a},$$

on e és l'excentricitat. A més a més, els vèrtexs són $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(-b, 0)$ i $(b, 0)$.

Nota. Si el centre de l'el·lipse és el punt (x_0, y_0) i els eixos són paral·lels als eixos coordenats, aleshores l'equació general és

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Nota. El cas particular d'el·lipse amb $a^2 = b^2$ correspon a una circumferència. Noteu que en aquest cas, $c = 0$, els dos focus són el mateix punt: el centre de l'el·lipse, que ara és el centre de la circumferència, i que l'excentricitat és nul·la.

Una equació del tipus

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2.7)$$

amb $A \neq C$, però del mateix signe és, en general, l'equació d'una el·lipse. No obstant, a vegades no és així, vegeu Exemple 7.2.1. Per tal d'obtenir el centre i els eixos cal “completar quadrats”. Anem a veure com fer-ho amb un exemple.

Exemple. Troba el centre i els elements de la següent cònica:

$$4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0.$$

Al completar quadrats es té que

$$4(x^2+4x+4-4)+9(y^2-2y+1-1)-11=4(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0,$$

i per tant, $4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36$, que podem escriure com

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Per tant, el centre és $(-2, 1)$ i la longitud dels semieixos és $a = 3$, $b = 2$. Com la relació que es compleix és $a^2 - c^2 = b^2$, aleshores $c = \sqrt{5}$.

Exemple 7.2.1 Com a exemple d’una possible equació que “pareix ”que siga la d’una el·lipse, però que no ho és, podem fer un canvi en l’expressió de l’anterior exemple

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 + \mathbf{37} = 0.$$

Aleshores després de completar quadrats obtenim que

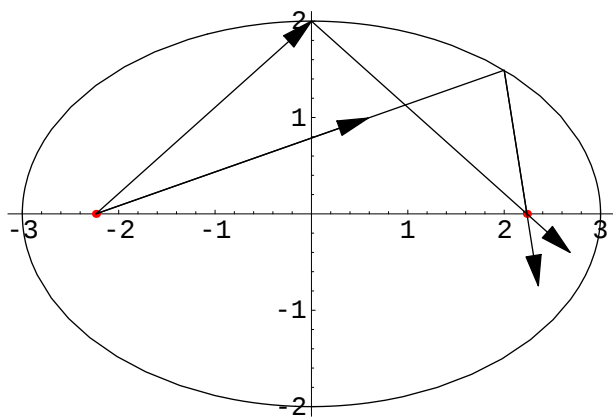
$$9(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = -1,$$

i per tant, no hi ha cap solució real.

7.2.2 Espills el·líptics

Una propietat de les el·lipses és que **si en un dels focus posem una font de llum o de so, aleshores, els rajos reflectits sobre l'el·lipse passen tots per l'altre focus**. En aquest principi, que ara demostrarem, es basa la construcció d'algunes sales que permeten escoltar una conversa que està tenint lloc en un dels focus, per un espia situat en l'altre focus.

El primer que hem de fer és calcular la recta tangent a l'el·lipse en un punt. Considerem una el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i volem calcular la recta tangent en un punt (x_0, y_0) de l'el·lipse.



Espill el·líptic amb $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Derivant la mateixa equació de la cònica, considerant y funció de x , tenim que $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$, és a dir, $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$. Per tant, la recta tangent té com a equació

$$(y - y_0) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Un vector director de la recta tangent és $v_{tg} = (1, -\frac{b^2x_0}{a^2y_0})$. La recta incident és la recta que passa pel primer focus $F_1 = (-c, 0)$ i pel punt $P = (x_0, y_0)$. Per tant, un vector director de la recta incident és $v_{F_1P} = (x_0 + c, y_0)$.

Volem comprovar que el raig reflectit passa per l'altre focus de l'el·lipse, o dit d'un altra manera, que la recta que uneix el punt d'incidència, $P = (x_0, y_0)$ amb l'altre focus $F_2 = (c, 0)$ forma amb la recta tangent el mateix angle que la recta incident.

Un vector director de la recta que uneix P i F_2 és $v_{F_2P} = (x_0 - c, y_0)$. Tot el que resta ara és calcular els angles que formen els parells de vectors v_{F_1P} , v_{tg} i v_{F_2P} , v_{tg} i comprovar que són el mateix angle.

El cosinus de l'angle definit per v_{F_1P} i v_{tg} és

$$\frac{v_{F_1P} \cdot v_{tg}}{|v_{F_1P}| |v_{tg}|} = \frac{x_0 + c - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}y_0}{\sqrt{1 + (\frac{b^2x_0}{a^2y_0})^2} \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}}.$$

El cosinus de l'angle definit per v_{F_2P} i v_{tg} és

$$\frac{v_{F_2P} \cdot v_{tg}}{|v_{F_2P}| |v_{tg}|} = \frac{x_0 - c - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}y_0}{\sqrt{1 + (\frac{b^2x_0}{a^2y_0})^2} \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}}.$$

Simplificant els numeradors d'ambdues expressions i tenint en compte que $a^2 - b^2 = c^2$, arribem a que els numeradors es poden escriure com a

$$\frac{c}{a^2}(x_0c + a^2), \quad \frac{c}{a^2}(x_0c - a^2).$$

Per tant, els cosinus seran el mateix si

$$\frac{x_0c + a^2}{\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} = \frac{x_0c - a^2}{\sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}}.$$

Per tal de provar que aquesta expressió és certa, elevem al quadrat, reduïm al mateix denominador, i obtenim

$$(x_0c + a^2)^2 ((x_0 - c)^2 + y_0^2) = (x_0c - a^2)^2 ((x_0 + c)^2 + y_0^2).$$

Fent-hi operacions, arribem a

$$(a^2 - c^2)x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

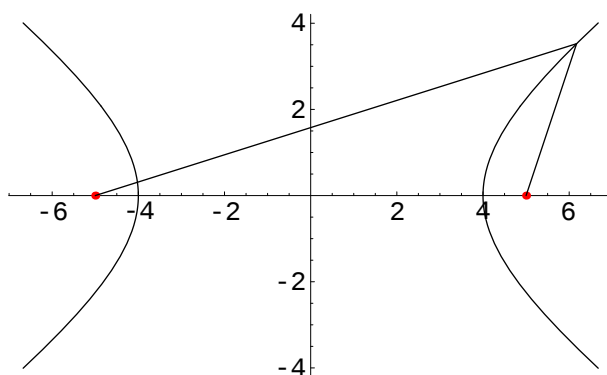
que es pot escriure com a $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ i aquesta relació és certa donat que el punt (x_0, y_0) és un punt de l'el·lipse. És a dir, coincideixen els cosinus dels angles i per tant també els angles, tal com volem demostrar.

7.3 Hipèrbola

Definició geomètrica. Siguen F_1 i F_2 dos punts distints del pla i siga k un nombre real positiu menor que la distància que els separa. El conjunt dels punts del pla P tals que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k$$

s'anomena hipèrbola.



Hipèrbola d'equació $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Terminologia. Els punts F_1 i F_2 s'anomenen *focus* de la hipèrbola. La recta que passa pels focus determina dos punts en la hipèrbola que s'anomenen *vèrtexs* de la hipèrbola. El segment de recta que uneix els dos vèrtexs rep el nom d'*eix transvers*. El punt mig entre els focus, és el *centre*.

7.3.1 Deducció de l'equació de la hipèrbola

Suposem que l'eix transvers de la hipèrbola és l'eix d'abscisses, i que el centre és l'origen de coordenades, és a dir, els focus tenen com a coordenades

$(-c, 0)$ i $(c, 0)$. Per a simplificar, escriurem $k = 2a$. Volem determinar els punts P , de coordenades (x, y) , que verifiquen la condició $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Com adés, la condició de definició de la hipèrbola es transforma en

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Passem el segon terme del primer membre al segon membre i elevem al quadrat per tal d'eliminar una arrel quadrada.

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Desenvolupem quadrats i eliminant termes i obtenim

$$-a^2 + cx = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Tornem a calcular quadrats per tal d'eliminar la segona arrel quadrada.

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2).$$

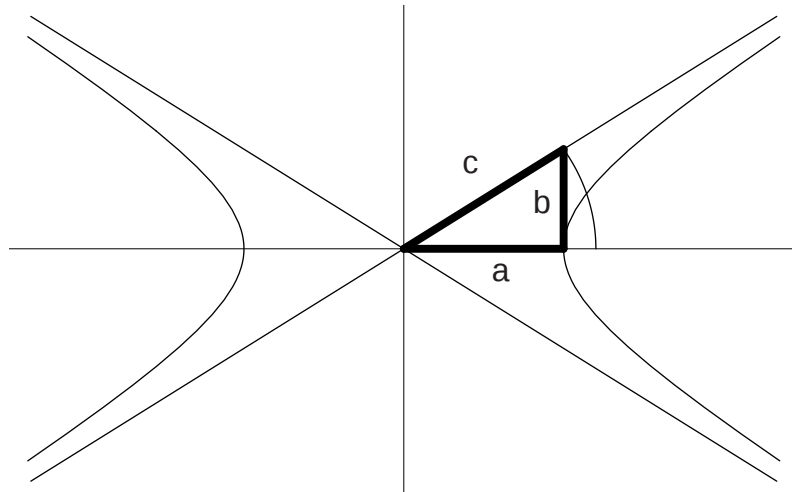
Equació que es redueix a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

que també es pot escriure com a

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad (3.8)$$

on $b^2 = c^2 - a^2$.



Asímtotes de la hipèrbola. Anem ara a determinar les equacions de les rectes que apareixen en el dibuix anterior i que són les anomenades **asímtotes de la hipèrbola**. Aquestes rectes són asímtotes obliques de la gràfica de la funció $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ que s'obté al despejar la y de l'equació general d'una hipèrbola, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Recordem que l'asímtota obliqua d'una funció $f(x)$ venia determinada per l'equació $y = mx + n$ amb

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad i \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx).$$

Per tant, per a $f(x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$,

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}} = \pm \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm \frac{b}{a},$$

i ara per a l'asímtota $y = \frac{b}{a}x + n$ calculem

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - a^2 - x^2)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Per tant, les equacions de les asímtotes de la hipèrbola són

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad i \quad y = -\frac{b}{a}x.}$$

Nota. Si el centre de la hipèrbola és el punt (x_0, y_0) aleshores l'equació que defineix la hipèrbola és

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.}$$

Una equació de segon grau en dues variables x i y , i on falta el terme creuat xy , és a dir, del tipus

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

on es verifica que A i C **NO** són del mateix signe **sempre** és una equació que defineix una hipèrbola. Per tal d'arribar a saber els elements de la hipèrbola cal completar quadrats.

Exemple. Troba els elements de la següent hipèrbola

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0.$$

Si completem quadrats es pot escriure com

$$0 = (x^2 + 2x + 1 - 1) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 7 = (x + 1)^2 - 4(y - 1)^2 - 4,$$

és a dir, $(x + 1)^2 - 4(y - 1)^2 = 4$, i també

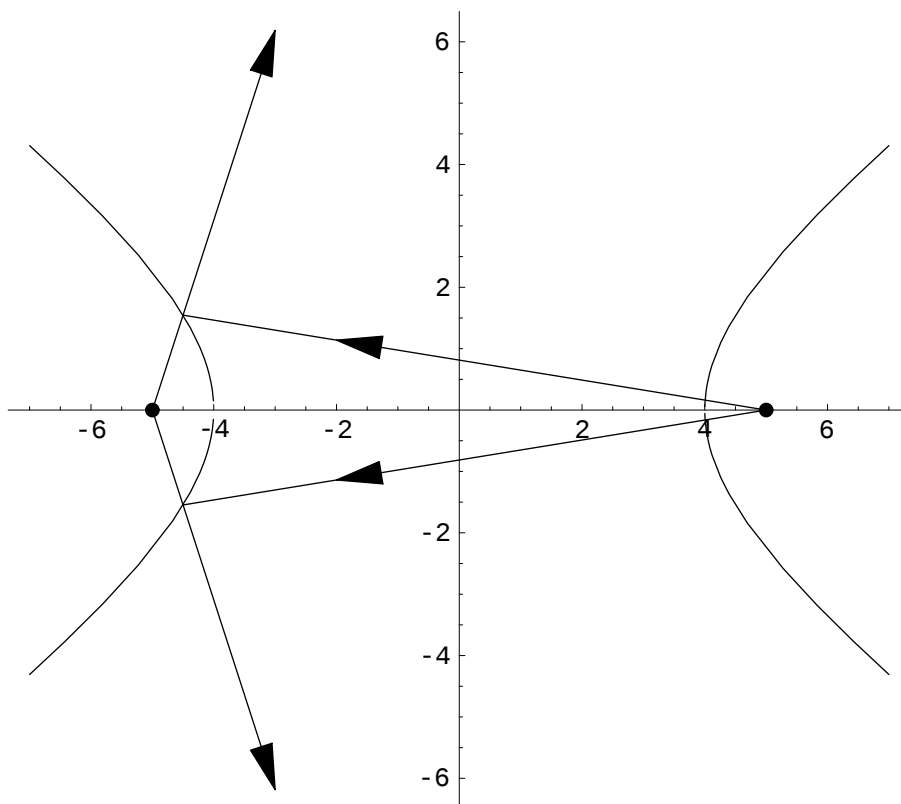
$$\frac{(x + 1)^2}{4} - \frac{(y - 1)^2}{1} = 1.$$

Per tant, el centre és $(-1, 1)$ i $a = 2$, $b = 1$.

Nota. A diferència del cas de l'el·lipse on al completar quadrats podien donar resultats no reals vegeu Exemple 7.2.1, ara sempre és possible completar quadrats i només canvia la posició de l'hipèrbola com es pot observar en el següent exemple.

7.3.2 Espills hiperbòlics

Com no podia ser d'una altra manera, les hipèrboles també tenen una propietat com a espills característica. Aquesta propietat és que **si en un dels focus posem una font de llum, aleshores, els rajos reflectits sobre l'altra branca de la hipèrbola semblen provenir d'una font de llum situada en l'altre focus.**



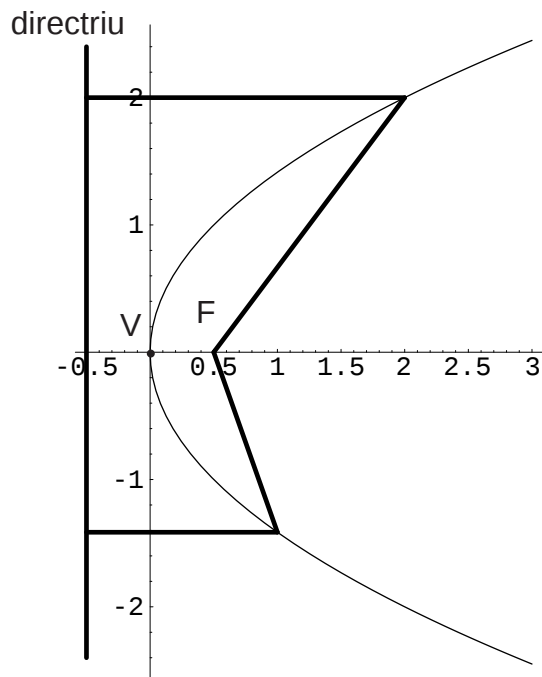
Espill hiperbòlic d'equació $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

La demostració d'aquesta propietat es deixa al lector interessat com a exercici.

7.4 Paràbola

Definició geomètrica. Siga ℓ una recta en el pla afí $\mathbb{R}^2$ i siga F un punt que no està en la recta. El lloc geomètric dels punts del pla que equidisten de la recta ℓ i del punt F s'anomena paràbola. És a dir, un punt P és un punt de la paràbola si

$$d(P, \ell) = d(P, F).$$



Paràbola $y^2 = 2x$ amb focus $F = (\frac{1}{2}, 0)$.

Terminologia. El punt F s'anomena **focus** de la paràbola i la recta ℓ rep el nom de recta **directriu**. La recta que passa pel focus i és perpendicular a la recta directriu s'anomena **eix** de la paràbola. El punt intersecció entre la paràbola i el seu eix és el **vèrtex** de la paràbola.

7.4.1 Deducció de l'equació de la paràbola

Potser siga necessari recordar com es calcula la distància d'un punt a una recta. Si la recta ℓ està donada per l'equació $Ax + By + C = 0$ i el punt P té com a coordenades (x_0, y_0) , aleshores,

$$d(P, \ell) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Suposem que l'eix de la paràbola és l'eix d'abscises i que el vèrtex és l'origen de coordenades. És a dir, el focus té com a coordenades $(\frac{c}{2}, 0)$ i la recta directriu té com a equació $x = -\frac{c}{2}$. Volem determinar els punts P , de coordenades (x, y) , que verifiquen la condició $d(P, \ell) = d(P, F)$.

D'una banda,

$$d(P, F) = d((x, y), (\frac{c}{2}, 0)) = \sqrt{(x - \frac{c}{2})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - \frac{c}{2})^2 + y^2}.$$

D'una altra banda $d(P, \ell) = d((x, y), x + \frac{c}{2} = 0) = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{c}{2}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x + \frac{c}{2}|$. Per tant, la condició de definició de la paràbola es transforma en

$$\sqrt{(x - \frac{c}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{c}{2}|.$$

Elevem al quadrat per tal d'eliminar tant l'arrel quadrada com el valor absolut.

$$(x - \frac{c}{2})^2 + y^2 = |x + \frac{c}{2}|^2 = (x + \frac{c}{2})^2 = x^2 + xc + \frac{c^2}{4}.$$

Desenvolupem ara el primer membre i eliminem termes. El resultat és l'equació de la paràbola amb vèrtex l'origen i focus en el punt $(\frac{c}{2}, 0)$,

$$\boxed{y^2 = 2cx.} \quad (4.9)$$

Nota. Si el vèrtex de la paràbola és el punt (x_0, y_0) aleshores l'equació és

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2c(x - x_0).}$$

Nota. Si el focus estiguera en l'eix y (punt $(0, \frac{c}{2})$), aleshores l'equació seria

$$\boxed{x^2 = 2cy.}$$

Nota. Si tenim una equació d'una cònica en la qual no apareix o bé el terme en x^2 o bé el terme en y^2 , aleshores és probable que la cònica siga una paràbola i que calga completar quadrats per tal d'obtenir els seus elements. Per exemple,

$$y = x^2 + 4x,$$

es pot escriure com

$$y = (x^2 + 4x + 4) - 4 = (x + 2)^2 - 4,$$

i ara com $(x + 2)^2 = y + 4$, o bé

$$(x + 2)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}(y + 4),$$

és a dir, el centre és $(-2, -4)$ i $c = \frac{1}{2}$.

7.4.2 Espills parabòlics

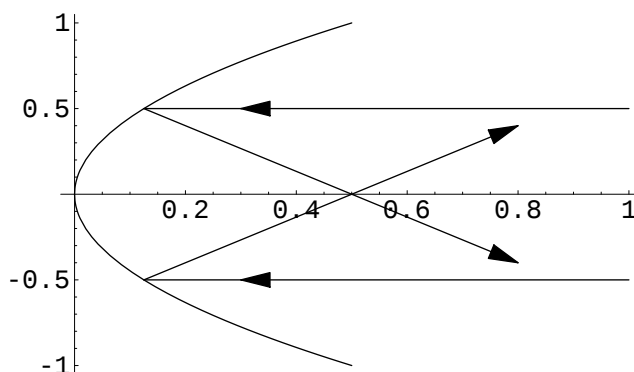
Una propietat de les paràboles és que **si un feix de rajos paral·lels a l'eix de la paràbola, incideix la cònica, aleshores, els rajos reflectats passen tots pel focus**. En aquest principi, que ara demostrarem, està basat el funcionament de les antenes parabòliques tan abundants des de fa uns anys. Les emissions del satèl·lit geoestacionari es concentren en el receptor que està situat en el focus.

El principi geomètric de reflexió de la llum diu, com és ben conegut, que l'angle de reflexió és igual a l'angle d'incidència. L'angle entre una recta i una corba és l'angle que formen la recta i la recta tangent a la corba en el punt intersecció. Per tant, el primer que hem de fer és calcular la recta tangent a la paràbola en un punt.

Considerem una paràbola d'equació $y^2 = 2cx$, amb $c > 0$. Volem calcular la recta tangent en un punt (x_0, y_0) de la paràbola. Derivant implícitament (pensant la y com funció de x) obtenim que $2y \cdot y' = 2c$, i per tant, $y' = \frac{2c}{2y} = \frac{c}{y}$. La recta tangent té com a equació

$$(y - y_0) = \frac{c}{y_0}(x - x_0),$$

si $x_0 > 0$.



Espill parabòlic d'equació $y^2 = 2x$.

Noteu que un vector director de la recta tangent és $v_{tg} = (1, \frac{c}{y_0})$, i que la recta incident és paral·lela a l'eix de la paràbola, que en aquest cas coincideix amb l'eix x . Per tant, un vector director de la recta incident és $v_{llum} = (1, 0)$.

Volem comprovar que el raig reflectit passa pel focus de la paràbola, és a dir, que la recta que uneix el punt d'incidència, $P = (x_0, y_0)$ amb el focus $F = (\frac{c}{2}, 0)$ forma amb la recta tangent el mateix angle que la recta incident.

Un vector director de la recta que uneix P i F és $v_{FP} = (x_0 - \frac{c}{2}, y_0)$. I ara, tot el que resta és calcular els angles que formen els parells de vectors v_{lum}, v_{tg} i v_{FP}, v_{tg} i comprovar que són el mateix angle.

D'una banda, el cosinus de l'angle definit per v_{lum} i v_{tg} és

$$\cos \beta = \frac{v_{lum} \cdot v_{tg}}{|v_{lum}| |v_{tg}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{c}{\sqrt{2cx_0}})^2}} = \frac{1}{|v_{tg}|}. \quad (4.10)$$

I d'una altra banda, el cosinus de l'angle definit per v_{FP} i v_{tg} és

$$\cos \alpha = \frac{v_{FP} \cdot v_{tg}}{|v_{FP}| |v_{tg}|} = \frac{(x_0 - \frac{c}{2}) + \frac{c}{\sqrt{2cx_0}}(y_0)}{|v_{tg}| \sqrt{(x_0 - \frac{c}{2})^2 + y_0^2}}.$$

Com que el punt (x_0, y_0) és un punt de la paràbola, això vol dir que $y_0^2 = 2cx_0$, i ho substituïm a l'expressió

$$(x_0 - \frac{c}{2})^2 + y_0^2 = (x_0 - \frac{c}{2})^2 + 2cx_0 = (x_0 + \frac{c}{2})^2.$$

I d'una altra banda,

$$(x_0 - \frac{c}{2}) + \frac{c}{\sqrt{2cx_0}}(y_0) = (x_0 - \frac{c}{2}) + \frac{c}{\sqrt{2cx_0}}(\sqrt{2cx_0}) = x_0 + \frac{c}{2}.$$

Per tant, el cosinus de l'angle definit per v_{FP} i v_{tg} és

$$\cos \alpha = \frac{(x_0 + \frac{c}{2})}{|v_{tg}| \sqrt{(x_0 + \frac{c}{2})^2}} = \frac{1}{|v_{tg}|},$$

és a dir, coincideix amb el cosinus de l'angle definit per v_{lum} i v_{tg} , vegeu (4.10), tal com es volia demostrar.

Noteu que amb això, hem demostrat que **tots el rajos reflectits per la paràbola passen pel focus de la mateixa**.

7.5 Excentricitat

Les tres còniques no degenerades (paràbola, el·lipse, hipèrbola) es poden definir com: El conjunt de punts de $\mathbb{R}^2$ que satisfan que la distància d'un punt P a un punt fix (focus) és un multiple (excentricitat) de la distància de P a una recta fixa (directriu).

Les diferents còniques s'obtenen amb diferents valors de l'excentricitat:

- El·lipse, si $0 < e < 1$. Es pot provar que si l'el·lipse està centrada en l'origen aleshores el focus té com a coordenades $F = (ae, 0)$ i la recta directriu és $x = \frac{a}{e}$. L'equació resultant és la donada en (2.6).
- Paràbola, si $e = 1$. Recordem que eren els punts del pla que estaven a la mateixa distància del focus i d'una recta, vore (4.9).
- Hipèrbola, si $e > 1$. Es pot provar que si la hipèrbola està centrada en l'origen aleshores el focus té com a coordenades $F = (ae, 0)$ i la recta directriu és $x = \frac{a}{e}$. L'equació resultant és la donada en (3.8).

7.6 Classificació de les còniques. Reducció d'una cònica als seus eixos

En aquest apartat, donada una equació del tipus

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

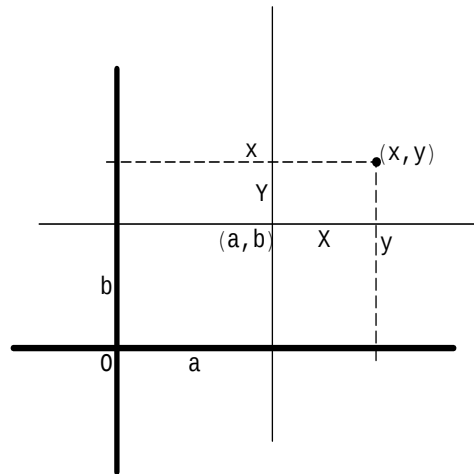
anem a determinar quin tipus de cònica tenim i quins són els seus elements, és a dir, focus, eixos, etc.

Per a començar, recordem com canvien les coordenades d'un punt del pla quan canviem el sistema de coordenades, és a dir, quan prenem un nou origen de coordenades o rotem els eixos.

7.6.1 Canvi del Sistema de Coordenades en el pla

Com es habitual, en el pla considerem un sistema de coordenades cartesianes, determinat per dues rectes (eixos) ortogonals. Una d'aquestes rectes és sol dibuixar horitzontal i s'anomena *eix d'abscisses*, o eix Ox , i l'altra en sentit vertical, i s'anomena *eix d'ordenades*, o eix Oy . El punt on es tallen els eixos s'anomena *origen* del sistema de coordenades, i cada punt del pla queda determinat per un par ordenat de nombres reals (x, y) que representen les distàncies als eixos d'ordenades i abscisses, respectivament.

Si es prem com eixos coordenats dues rectes paral·leles a les anteriors, que es tallen en un nou punt de coordenades (a, b) respecte als eixos originals, cada punt del pla tindrà, respecte als nous eixos, unes coordenades distintes de les anteriors, les distàncies als nous eixos. Si les coordenades d'un punt són (x, y) respecte al sistema de coordenades original, i (X, Y) respecte al nou, la relació entre les coordenades, com es pot vore en la següent figura



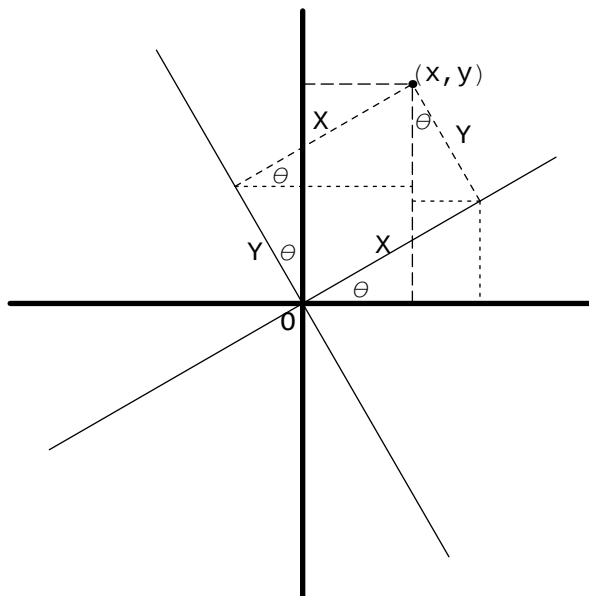
és

$$x = X + a, \quad y = Y + b.$$

Equivalentment,

$$X = x - a, \quad Y = y - b.$$

Considerem ara un sistema de coordenades on els eixos són el resultat de girar, amb centre l'origen de coordenades, un angle θ , els eixos originals.



Com s'aprecia en la figura anterior, les coordenades (x, y) d'un punt respecte als eixos originals, i les coordenades (X, Y) respecte als nous eixos, estan relacionades per les expressions:

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta. \quad (6.11)$$

Aquestes igualtats es poden escriure en forma matricial com segueix:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Equivalentment,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

7.6.2 Reducció d'una cònica als seus eixos

Considerem una cònica qualsevol, donada per la equació

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (6.12)$$

amb almenys un dels coeficients A, B, C , distint de zero.

Observem en primer lloc que en les equacions de la el·lipse, la hipèrbola i la paràbola deduïdes en apartats anteriors, no apareix el terme en xy . Com en la deducció d'aquestes equacions sempre es suposava que almenys un dels eixos de la cònica coincidia amb un dels eixos coordenats, tractem d'esbrinar si existeix alguna rotació dels eixos tal que, en la equació de la cònica respecte a les noves coordenades, no aparega aquest terme. Açò ens indicarà que els eixos de la cònica són paral·lels als nous eixos. Si θ és l'angle de rotació, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, i fem la substitució de x e y en 6.12 pels valors donats en 6.11, s'obté:

$$\begin{aligned} 0 &= A(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 + B(X \cos \theta - Y \sin \theta)(X \sin \theta + Y \cos \theta) \\ &\quad + C(X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 + D(X \cos \theta - Y \sin \theta) \\ &\quad + E(X \sin \theta + Y \cos \theta) + F \\ &= (A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta)X^2 \\ &\quad + (2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))XY \\ &\quad + (A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta)Y^2 \\ &\quad + (D \cos \theta + E \sin \theta)X + (E \cos \theta - D \sin \theta)Y + F, \end{aligned}$$

que és l'equació de la cònica respecte a les noves coordenades X, Y . El coeficient de XY és igual a $(C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta)$, i s'anul·larà si prenem

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{B}{A - C} \right).$$

(Si $B \neq 0$ i $A = C$, l'expressió anterior té sentit, si prenem $\theta = \pi/4$. Si $A = C$ i $B = 0$ l'equació 6.12 representa una circumferència.)

Aleshores,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{(A-C)^2}}}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{(A-C)^2}}}}$$

Si substituïm i multipliquem per 2, l'equació de la cònica en les noves coordenades és

$$\begin{aligned} 2F &+ \sqrt{B^2 + (A - C)^2} (X - Y)(X + Y) + \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{B^2}{(A-C)^2} + 1}}} (EX - DY) \\ &+ \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{B^2}{(A-C)^2} + 1}}} (DX + EY) + A(X^2 + Y^2) + C(X^2 + Y^2) = 0 \end{aligned}$$

Es pot comprovar que el producte dels coeficients de X^2 i Y^2 és

$$\Delta = 4AC - B^2,$$

és a dir, en la nova equació de la cònica, no apareix el terme en XY , i els coeficients de X^2 i Y^2 són del mateix signe si $\Delta > 0$, de distint signe si $\Delta < 0$ i s'anul·la si $\Delta = 0$. Per tant, **en principi**, la cònica serà

- a) Una el·lipse, si $\Delta > 0$
- b) Una hipèrbola, si $\Delta < 0$
- c) Una paràbola, si $\Delta = 0$,

tret que l'anul·lació d'algun dels coeficients done lloc a una cònica degenerada.

7.6.3 Determinació del tipus de cònica

Considerem l'equació original d'una cònica en la que suposarem que $B = 0$,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Podem distingir els següents casos:

- $A \neq 0, C = 0$:

Aleshores

$$0 = Ax^2 + Dx + Ey + F = A \left(x^2 + \frac{D}{A}x \right) + Ey + F = A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + Ey + \left(F - \frac{D^2}{4A} \right),$$

i per tant

$$\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 = -\frac{E}{A}y - \left(\frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} \right)$$

Si $E = 0$, es poden donar tres casos:

a) $\frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} > 0$, no hi ha punts que verifiquen l'equació: La cònica és el conjunt buit.

b) $\frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} < 0$, obtenim dues rectes paral·leles, de equacions

$$x = -\frac{D}{2A} + \sqrt{-\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2}}, \quad x = -\frac{D}{2A} - \sqrt{-\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2}}.$$

c) $\frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} = 0$: Obtenim una recta (doble) d'equació $x = -\frac{D}{2A}$.

Si $E \neq 0$, l'equació es pot escriure de la forma

$$\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 = -\frac{E}{A} \left(y + \frac{F}{E} - \frac{D^2}{4AE} \right),$$

que representa una paràbola de vèrtex $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{F}{E} + \frac{D^2}{4AE} \right)$, eix paral·lel a l'eix Oy i focus en el punt $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{F}{E} + \frac{D^2}{4AE} - \frac{E}{4A} \right)$.

- $A = 0, C \neq 0$: La situació és anàloga al cas anterior, si intercanviem x e y .

- $A \neq 0, C \neq 0$. En aquest cas

$$\begin{aligned} 0 &= Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = A \left(x^2 + \frac{D}{A}x \right) + C \left(y^2 + \frac{E}{C}y \right) + F \\ &= A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 + \left(F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} \right) \end{aligned}$$

Es poden distingir ara els següents casos:

a) $\text{Signe}(A) = \text{Signe}(C)$ y $F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} = 0$: La cònica es redueix a un punt, de coordenades $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C} \right)$.

b) $\text{Signe}(A) = \text{Signe}(C) = \text{Signe}\left(F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}\right)$. Cap punt satisfà l'equació.

c) $\text{Signe}(A) = \text{Signe}(C) = -\text{Signe}\left(F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}\right)$. La cònica és una el·lipse (una circumferència si $A = C$), amb eixos paral·lels als eixos coordenats, centre el punt $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ i semieixos $\sqrt{-\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AC}}$ y $\sqrt{-\frac{F}{C} + \frac{D^2}{4AC} + \frac{E^2}{4C^2}}$. El major d'aquests dos nombres ens indicarà si l'eix major és paral·lel a l'eix Ox o a l'eix Oy , i per tant la posició dels focus.

d) $\text{Signe}(A) = -\text{Signe}(C)$ i $F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} \neq 0$: La cònica és una hipèrbola, amb eixos paral·lels als eixos coordenats, centre el punt $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ i semieixos $\sqrt{\left|-\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AC}\right|}$ i $\sqrt{\left|-\frac{F}{C} + \frac{D^2}{4AC} + \frac{E^2}{4C^2}\right|}$. Els signes dels nombres $-\frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4AC}$ i $-\frac{F}{C} + \frac{D^2}{4AC} + \frac{E^2}{4C^2}$, que seran oposats, determinaran quin dels eixos és l'eix transvers de la hipèrbola.

e) $\text{Signe}(A) = -\text{Signe}(C)$ i $F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} = 0$: La cònica consisteix en un par de rectes, de equacions $\sqrt{A}x + \sqrt{-C}y + \frac{D}{2\sqrt{A}} - \frac{E}{2\sqrt{-C}} = 0$ i $\sqrt{A}x - \sqrt{-C}y + \frac{D}{2\sqrt{A}} + \frac{E}{2\sqrt{-C}} = 0$, si $A > 0, C < 0$, i $\sqrt{-A}x + \sqrt{C}y - \frac{D}{2\sqrt{-A}} + \frac{E}{2\sqrt{C}} = 0$ i $-\sqrt{-A}x + \sqrt{C}y + \frac{D}{2\sqrt{-A}} + \frac{E}{2\sqrt{C}} = 0$, si $A < 0, C > 0$.

7.6.4 Exemples

$$1. \frac{x^2}{2} + 2x + y^2 - 2y + 2 = 0$$

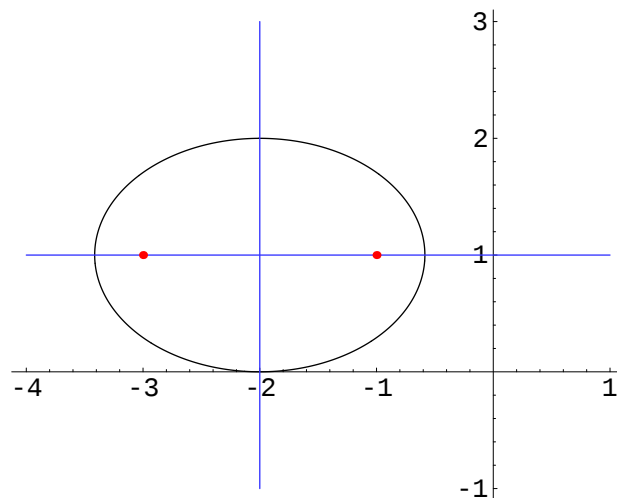
En aquest cas, els coeficients A i C són positius i $B = 0$, per tant l'equació, en principi, correspon a una el·lipse amb els eixos paral·lels als eixos coordenats. Per a comprovar-lo completarem quadrats:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x^2}{2} + 2x + y^2 - 2y + 2 = \frac{1}{2}(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + 2 \\ &= \frac{1}{2}((x+2)^2 - 4) + (y-1)^2 - 1 + 2 \\ &= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 + (y-1)^2 - 1 + 2 = \frac{1}{2}(x+2)^2 + (y-1)^2 - 1 \end{aligned}$$

o, equivalentment,

$$\frac{(x+2)^2}{2} + (y-1)^2 = 1,$$

que representa una el·lipse de centre el punt $(-2, 1)$, semieixos $\sqrt{2}$ en la direcció de l'eix Ox i 1 en la direcció de l'eix Oy . Com $\sqrt{2} > 1$ l'eix major està en la direcció de l'eix Ox , i es té $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{2-1} = 1$, per tant els focus estan en els punts $(-2, 1) + (1, 0) = (-1, 1)$ i $(-2, 1) - (1, 0) = (-3, 1)$. L'excentricitat és $e = c/a = 1/\sqrt{2}$.



2. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + \sqrt{3}x - y = 0$.

En aquesta equació apareix el terme en xy , per tant els eixos de la cònica que representa estan girats un cert angle respecte els eixos coordenats. Com hem vist, si girem els eixos un angle $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{B}{A-C}\right)$, l'equació respecte als nous eixos no tindrà terme en XY . En aquest cas, $A = 1, B = 2\sqrt{3}, C = 3$, per tant $\theta = \frac{1}{2} \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$. L'equació de la cònica respecte als nous eixos s'obté fent la substitució:

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta,$$

en aquest cas

$$x = X \frac{\sqrt{3}}{2} + Y \frac{1}{2}, \quad y = -X \frac{1}{2} + Y \frac{\sqrt{3}}{2},$$

amb açò,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(X \frac{\sqrt{3}}{2} + Y \frac{1}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3} \left(X \frac{\sqrt{3}}{2} + Y \frac{1}{2}\right) \left(-X \frac{1}{2} + Y \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\quad + 3 \left(-X \frac{1}{2} + Y \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \left(X \frac{\sqrt{3}}{2} + Y \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left(-X \frac{1}{2} + Y \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4Y^2 + 2X \end{aligned}$$

o, equivalentment,

$$Y^2 = -\frac{1}{2}X$$

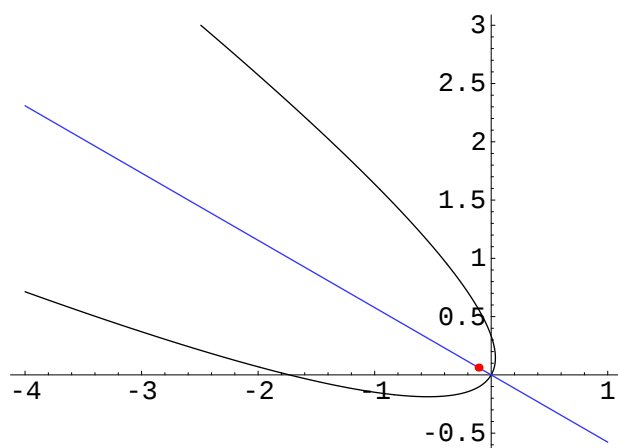
Aleshores, es tracta d'una paràbola que, respecte als nous eixos coordenats, té vèrtex en $(0, 0)$, el seu eix és l'eix OX (és a dir, la recta $Y = 0$) i el focus està en el punt $(-\frac{1}{8}, 0)$.

Respecte als eixos originals, l'eix serà la recta d'equació

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0,$$

i les coordenades del focus són

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{1}{16}\right).$$



3. $xy = 1$.

En aquest cas tenim $A = C = 0$, $B = 1$, per tant

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{B}{A - C} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

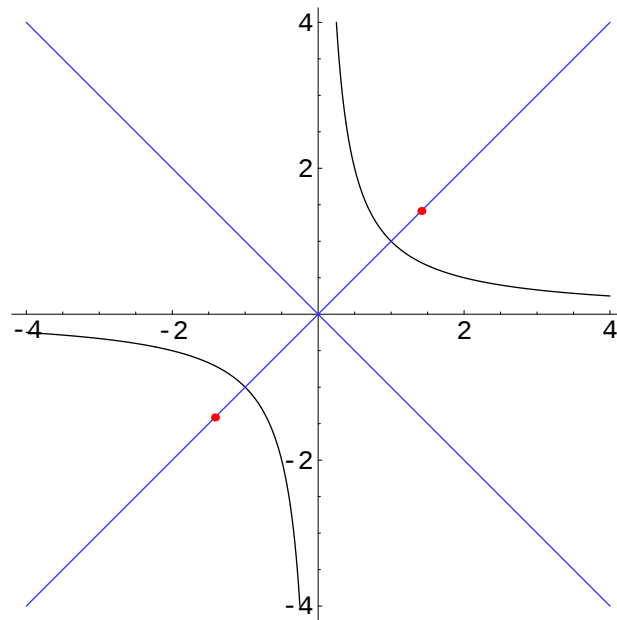
El canvi de coordenades ve donat per

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y,$$

el que ens dona

$$1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y \right) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2.$$

Es tracta, per tant, d'una hipèrbola amb $a = b = \sqrt{2}$ i $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$, per la qual cosa $e = c/a = \sqrt{2}$. L'eix transvers és la recta $Y = 0$ que en les coordenades originals té equació $y = x$, i els focus estan en els punts $(-2, 0)$ i $(2, 0)$, respecte a les coordenades X, Y , és a dir $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ i $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, en les coordenades x, y .



7.7 Exercicis de còniques

1 Determina els elements de les següents còniques:

(a) $3x^2 + 6x + y^2 - 2y = 0$,

(b) $4x^2 - 3y^2 + 4x + 1 = 0$,

(c) $x^2 + 4y^2 = 4$,

(d) $3y + x^2 = 0$,

(e) $2y^2 + x^2 = 6$,

(f) $x^2 + 4x - 4y^2 = 0$,

(g) $(x + 1)^2 = 2 + 2y^2$.

2 Troba les coordenades del centre, dels vèrtexs i focus, la longitud dels eixos i l'excentricitat de l'el·lipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3 Troba l'equació de l'el·lipse que té un eix menor de longitud 6 i que té per focus els punts $(4, 0)$ i $(4, -6)$.

4 Troba l'equació de la el·lipse centrada en l'origen, amb focus situats sobre l'eix x , excentricitat $\frac{5}{8}$ i que passa pel punt $(4\sqrt{5}, 3)$.

5 Troba l'equació de la hipèrbola centrada en el punt $(2, 1)$, que té un vèrtex en el punt $(5, 1)$ i tal que la corda perpendicular al eix focal té de longitud $\frac{32}{3}$.

6 Troba l'equació de la hipèrbola amb focus els punts $(3, 1)$ i $(3, -5)$ i tal que la longitud de l'eix és $2b = 2\sqrt{5}$.

7 Troba l'angle agut format per les asímptotes de la hipèrbola $x^2 - 3y^2 = 1$.

8 Troba els semi-eixos d'una el·lipse de la qual sabem que els seus eixos estan sobre els eixos de coordenades i que passa pels punts $(10, 5)$ i $(6, 13)$.

9 Troba l'equació de l'el·lipse que té els focus en els punts $(-3, 2)$ i $(5, 2)$, i que passa per el punt $(1, 5)$.

10 Troba l'equació de l'el·lipse centrada en l'origen, que té un vèrtex en el punt $(3, 0)$ i que passa pel punt $(1, \frac{8}{3})$.

11 Troba l'equació de l'el·lipse que té els focus en els punts $(-4, 0)$ i $(-4, 0)$ i que té una excentricitat de $\frac{2}{5}$.

- 12 Troba l'equació de la paràbola que té com a vèrtex el punt $(5, -2)$, com a eix la recta $y + 2 = 0$ i que passa pel punt $(3, 0)$.
- 13 El vèrtex d'una paràbola és el punt $(-1, 4)$ i la seua recta directriu és $y = 5$. Troba l'equació de la paràbola.
- 14 Troba la longitud del vector traçat des del focus de la paràbola $y^2 = 8x$ al punt d'ordenada 12.
- 15 Una paràbola, amb vèrtex l'origen i l'eix x com a eix, passa pel punt $(2, -3)$. Troba l'equació de la paràbola.
- 16 Determina l'equació de l'el·lipse referida als seus eixos tal que la distància entre els seus focus és 10 i els seus eixos estan en una relació $\frac{6}{5}$.
- 17 Una hipèrbola té els seus vèrtexs en els punts $(1, 0)$ i $(-1, 0)$, i les seues asímptotes formen (entre elles) un angle de 120° . Troba la seua equació.
- 18 L'equació $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$, és l'equació d'una cònica. Averigua de quina cònica es tracta, i troba els seus elements (focus, centre, excentricitat).
- b) Fes un dibuix de la cònica.
- 19 Determina l'equació de la hipèrbola d'excentricitat 2 i els focus de la qual són els mateixos que els de l'el·lipse d'equació $x^2 + 4y^2 = 4$.
- 20 Determina l'equació de la hipèrbola que passa per el punt $(\sqrt{2}, 2)$ i les asímptotes de la qual tenen com a equacions $y = 2x$ i $y = -2x$.
- 21 En la paràbola $y^2 = 2px$ s'hi inscriu un triangle equilàter de manera que un dels seus vèrtex està en l'origen. Determina la longitud dels costats del triangle.
- 22 L'equació $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 0$ és l'equació d'una cònica. Troba una rotació d'angle $\alpha \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ que permeti eliminar el terme en xy . Escriu l'equació en el nou sistema de coordenades. Dibuixa la corba i mostra ambdós sistemes de coordenades.
- 23 Fes el mateix per a l'equació $2x^2 + 4\sqrt{3}xy + 6y^2 + (8 - \sqrt{3})x + (8\sqrt{3} + 1)y + 8 = 0$.