
8. Quàdriques

Una superfície quàdrica en $\mathbb{R}^3$ és el conjunt de punts (x, y, z) que verifiquen la següent equació

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

amb $A, B, \dots, K \in \mathbb{R}$. A més a més, cal que almenys algun dels coeficients A, B, C, D, E o F siga distint de zero.

Podem fer una primera divisió entre les quàdriques com:

- (i) Degenerades. Són punts, rectes, plans o cilindres.
- (ii) No degenerades. Aquestes són ja superfícies més interessants i les que estudiarem un poc més.

De tota manera, el següent resultat ens mostra la relació entre les quàdriques i les còniques que ja hem estudiat abans.

Teorema. La intersecció d'una quàdrica (degenerada o no) amb un pla és una cònica.

8.1 Quàdriques degenerades

Anomenarem quàdriques degenerades a les següents:

- El conjunt buit,

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1.$$

- Un punt,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

- Una recta. Per exemple, l'eix z , és a dir, els punts $(0, 0, z)$,

$$x^2 + y^2 = 0.$$

- Un pla. Per exemple, el pla $x = 0$,

$$x^2 = 0.$$

- Un parell de plans. Per exemple, els plans $x = 0$ i $y = 0$,

$$xy = 0.$$

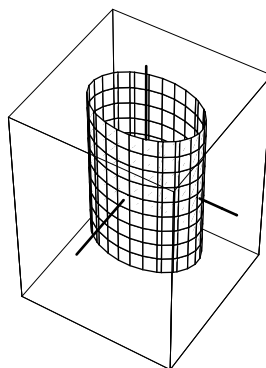
També ho són $x^2 - y^2 = 0$, o bé $x^2 = 1$.

- Cilindres. Un cilindre és una superfície generada per una recta que es mou al llarg d'una corba i que es manté paral·lela a una altra recta fixa.

- (i) Cilindre el·líptic,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

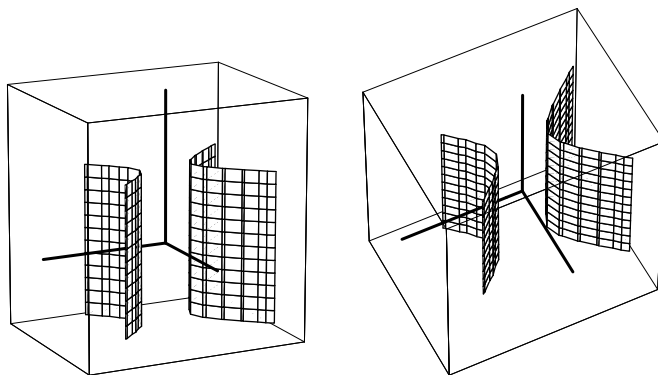
Per exemple, el cilindre el·líptic d'equació $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.



- (ii) Cilindre hiperbòlic,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Per exemple, la gràfica del cilindre hiperbòlic que té com a equació $\frac{x^2}{(1.3)^2} - \frac{y^2}{1} = 1$ és la següent



(iii) Cilindre parabòlic,

$$y^2 = 2cx.$$

Nota. El conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que verifica una equació de segon grau en la qual falta una de les variables és un cilindre paral·lel a l'eix de la coordenada que falta. Per exemple,

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 1.$$

8.2 Quàdriques no degenerades

Les quàdriques que estudiarem són

Quàdrica	Equació
Esfera	$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$
El·lipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$
Hiperboloide d'una fulla	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$
Hiperboloide de dues fulles	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$
Paraboloide el·líptic	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$
Paraboloide hiperbòlic	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$
Con	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

8.3 Esfera

Es el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que estan a la mateixa distància de un punt fix, anomenat centre. És a dir, si el centre és $C = (x_0, y_0, z_0)$ i el radi $r > 0$, aleshores

$$d(P, C) = d((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r,$$

per tant, els punts de l'esfera han de verificar

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Nota 8.3.1 . Si el centre és el punt $(0, 0, 0)$ aleshores

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Intersecció amb un pla. Anem a veure quines corbes obtenim al fer el tall de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ amb un pla horitzontal ($z = k$) o un pla vertical ($x = k$ o bé $y = k$) amb $k \in \mathbb{R}$:

- (i) Pla $z = k$, aleshores $x^2 + y^2 = r^2 - k^2$. Aquesta equació no té solució si $r^2 - k^2 < 0$ (no hi ha intersecció), té solució única si $r^2 - k^2 = 0$ (dos punts $N = (0, 0, r)$ i $S = (0, 0, -r)$) i la solució es una circumferència si $r^2 - k^2 > 0$ (punts de l'esfera del tipus (x, y, k) o bé $(x, y, -k)$).

(ii) La intersecció amb un pla vertical és anàloga.

8.4 El·lipsoide

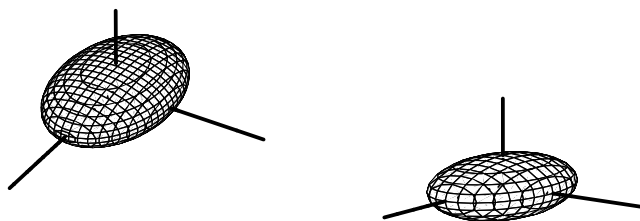
Es el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen la següent equació

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1,$$

on $C = (x_0, y_0, z_0)$ és el centre de l'el·lipsoide.

Nota 8.4.1 . Si el centre és el punt $(0, 0, 0)$ aleshores

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$



El·lipsoide d'equació $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$.

Intersecció amb un pla. Anem a veure quines corbes obtenim al fer el tall de l'el·lipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ amb un pla horitzontal ($z = k$) o un pla vertical ($x = k$ o bé $y = k$) amb $k \in \mathbb{R}$:

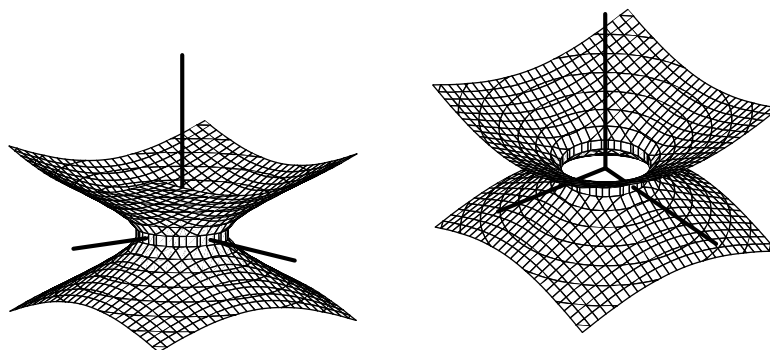
(i) Pla $z = k$, aleshores $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$. Aquesta equació no té solució si $1 - \frac{k^2}{c^2} < 0$ (no hi ha intersecció), té solució única si $1 - \frac{k^2}{c^2} = 0$ (dos punts $N = (0, 0, c)$ i $S = (0, 0, -c)$) i la solució es una el·lipse si $1 - \frac{k^2}{c^2} > 0$ (punts de l'el·lipsoide del tipus (x, y, k) o bé $(x, y, -k)$).

(ii) La intersecció amb un pla vertical és anàloga.

8.5 Hiperboloide d'una fulla

Suposem que el centre és el punt $(0, 0, 0)$ aleshores, l'hiperboloide d'una fulla és el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Hiperboloide d'una fulla d'equació $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$.

Intersecció amb un pla. Anem a veure quines corbes obtenim al fer el tall amb un pla horitzontal ($z = k$) o un pla vertical ($x = k$ o bé $y = k$) amb $k \in \mathbb{R}$:

(i) Pla $z = k$, aleshores la intersecció és una el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

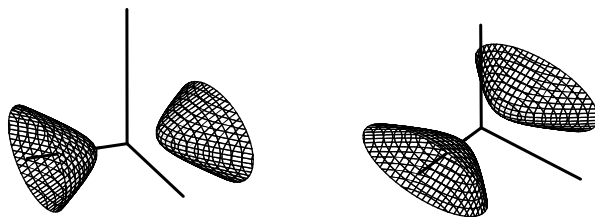
(ii) La intersecció amb un pla $x = k$ és una hipèrbola

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}.$$

8.6 Hiperboloide de dues fulles

Suposem que el centre és el punt $(0, 0, 0)$ aleshores, l'hiperboloide de dues fulles és el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Hiperboloide de dues fulles d'equació $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$.

Intersecció amb un pla. Anem a veure quines corbes obtenim al fer el tall amb un pla horitzontal ($z = k$) o un pla vertical ($x = k$ o bé $y = k$) amb $k \in \mathbb{R}$:

- (i) Pla $z = k$, aleshores la intersecció és una hipèrbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

- (ii) La intersecció amb un pla $x = k$ és

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}.$$

Noteu que ara hi haurà valors de k que faran que aquesta intersecció siga buida, un punt o bé una el·lipse.

8.7 Paraboloide el·líptic

Suposem que el centre és el punt $(0, 0, 0)$ aleshores, el paraboloid el·líptic és el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen l'equació

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Intersecció amb un pla. Anem a veure quines corbes obtenim al fer el tall amb un pla horitzontal ($z = k$) o un pla vertical ($x = k$ o bé $y = k$) amb $k \in \mathbb{R}$:

- (i) Pla $z = k$, aleshores la intersecció és el buit ($k < 0$), un punt ($k = 0$) o bé una el·lipse ($k > 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k.$$

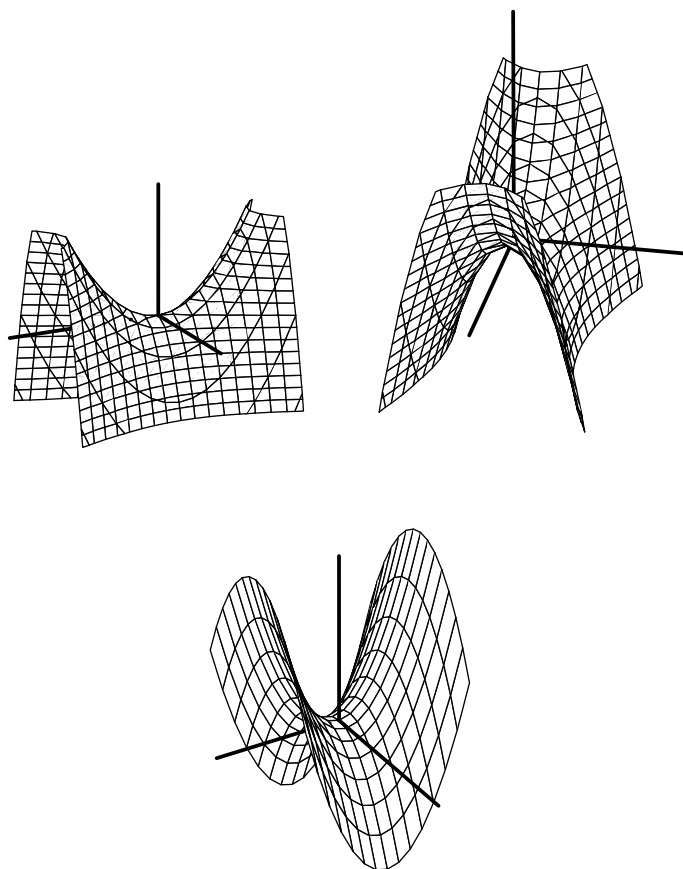
- (ii) La intersecció amb un pla $x = k$ és una paràbola d'equació

$$\frac{y^2}{b^2} = z - \frac{k^2}{a^2}.$$

8.8 Paraboloide hiperbòlic

Suposem que el centre és el punt $(0, 0, 0)$ aleshores, el paraboloide hiperbòlic és el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen l'equació

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



Paraboloide hiperbòlic d'equació $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1}$.

Intersecció amb un pla. Anem a veure quines corbes obtenim al fer el tall amb un pla horitzontal ($z = k$) o un pla vertical ($x = k$ o bé $y = k$) amb $k \in \mathbb{R}$:

- (i) Pla $z = k$, aleshores la intersecció és una hipèrbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k.$$

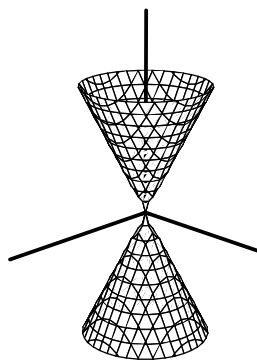
- (ii) La intersecció amb un pla $x = k$ és una paràbola d'equació

$$\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

8.9 Con

Suposem que el centre és el punt $(0, 0, 0)$ aleshores, el con és el conjunt de punts de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Con d'equació $\frac{x^2}{(0.5)^2} + \frac{y^2}{(0.5)^2} - \frac{z^2}{(1.5)^2} = 0$.

Intersecció amb un pla. Anem a veure quines corbes obtenim al fer el tall amb un pla horitzontal ($z = k$) o un pla vertical ($x = k$ o bé $y = k$) amb $k \in \mathbb{R}$:

- (i) Pla $z = k$, aleshores la intersecció és una el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}.$$

- (ii) La intersecció amb un pla $x = k$ és una hipèrbola d'equació

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2}.$$