9. Funcions de diverses variables

Ja hem estudiat abans en el Tema 4 les funcions reals de variable real, és a dir, funcions que només depenien d'una variable. Nogensmenys, moltes vegades volem estudiar el comportament d'una "funció"que depén de més d'una variable. Per exemple, una funció que a cada punt de la superfície terrestre li assigne la seua altura sobre el nivell del mar o la pressió atmosfèrica en aquest punt.

Definició 9.0.1 *Una funció de diverses variables* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *és una regla que a cada punt del domini* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ *li assigna un nombre real,* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$*.*

Nosaltres estudiarem fonamentalment les funcions de dues i tres variables ja que amb elles els conceptes i càlculs ens resultaran més fàcilment intel·ligibles. No obstant algunes definicions, com l'anterior, les donarem per a funcions definides en $\mathbb{R}^n$.

Exemples.

(i) $f : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida com $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ara el domini és $D_1 = \mathbb{R}^2$ i el seu conjunt imatge és $[0, +\infty[$.

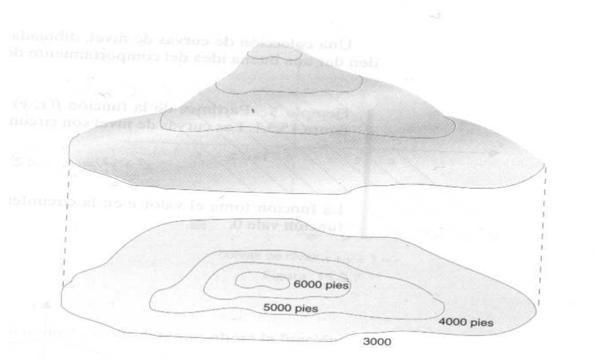
(ii) $g : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida com $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$. Ara el domini és $D_1 = \{(x, y)/y < x^2\}$ i el seu conjunt imatge és $[0, \infty[$.

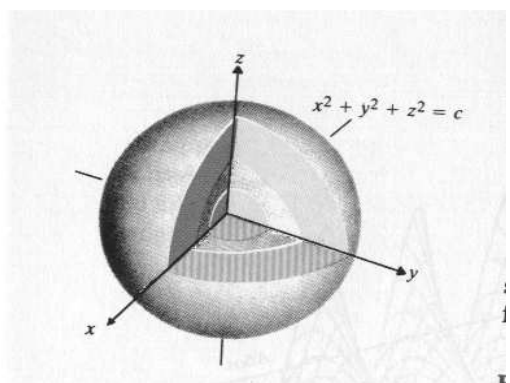
Representació gràfica. Les funcions de dues variables s'acostumen a representar gràficament amb:

- *corbes de nivell.* Es representen els valors de la funció en el propi domini, és a dir, és un representació en un subconjunt de $\mathbb{R}^2$ (un subconjunt d'un pla). Les corbes de nivell són les corbes en el domini de la funció formades pels punts (x, y) on la funció pren un valor constant, $f(x, y) = c$. Un exemple són les isòbares dels mapes del temps.

- *gràfica de la funció.* Es representa la funció com una superfície en l'espai, és a dir, es dibuixen els punts de l'espai

$$\{(x, y, f(x, y)) \text{ amb } (x, y) \in D\}.$$





Les *línies de contorn* són les corbes que s'obtenen al tallar la superfície $\{(x, y, f(x, y))\}$ amb el pla $z = c$, i per tant, són corbes en la superfície tals que representen un valor fix de la funció $f(x, y) = c$.

Nota. Si es té una funció de tres variables, $f(x, y, z)$, aleshores no es pot utilitzar el mètode de representar la seua gràfica (subconjunt de $\mathbb{R}^4$), i només es parla de *superfícies de nivell*: Els punts (x, y, z) on la funció f pren un valor constant, $f(x, y, z) = c$.

Exemple. Dibuixa les corbes nivell i les línies de contorn per a la funció $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ en $0, 50$ i 75.

9.1 Limits i continuïtat

La idea intuïtiva de límit d'una funció de diverses variables és la mateixa que en el cas d'una funció de variable real: El límit d'una funció quan ens aproximem a un punt és ℓ si aquest valor no depèn del camí pel qual ens aproximem al punt.

Definició 9.1.1 *Direm que el límit d'una funció $f(x, y)$ quan (x, y) tendeix a (x_0, y_0) és ℓ si per a qualsevol $\epsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que per a tots els punts (x, y) tals que si*

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{aleshores} \quad |f(x,y) - \ell| < \epsilon.$$

La notació usual és

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell.$$

Nota. Una manera senzilla de trobar el "possible candidat" a límit d'una funció $f(x, y)$ quan (x, y) tendeix a (x_0, y_0) consisteix en calcular els límits iterats: Calcular en primer lloc el límit de la funció $f(x, y)$ quan y tendeix a y_0 i després el de $f(x_0, y)$ quan x tendeix a x_0, i viceversa. És a dir,

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \qquad \text{i} \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Cal remarcar que aquest procediment **no ens garanteix** que el límit de la funció existesca, però en el cas d'existir si que coincideix amb el valor que obtenim en les dues expressions. Així, el càlcul del límit d'una funció de diverses variables es redueix al càlcul de "diversos" límits de funcions d'**una** variable.

Exemple. Calcula el límit de la funció $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ en $(1, 2)$.

Calculem els límits iterats,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2} \tfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) &= \lim_{x\to 1} \tfrac{2x^2}{x^4+4} = \tfrac{2}{5}, \\
\lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1} \tfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) &= \lim_{y\to 2} \tfrac{y}{1+y^2} = \tfrac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Per tant, el **possible** valor del límit de la funció quan ens aproximem al punt $(1, 2)$ és $\frac{2}{5}$.

La importància del camí per el qual ens aproximem a un punt queda palesa en el següent exemple.

Exemple. Calcula el límit de la funció $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ en $(0, 0)$.

En primer lloc calculem els límits iterats:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=0\\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0.\end{aligned}$$

Si ens aproximem al punt $(0,0)$ amb rectes, és a dir, amb punts de la forma (x,mx) on $m\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x^2+m^2}=0.$$

Ara bé, si ens aproximem al llarg de la paràbola (x,x^2) aleshores

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Per tant, no existeix el límit de la funció en $(0,0)$.

Les propietats que compleixen els límits són anàlogues a les propietats que verifiquen les funcions d'una variable real.

Propietats 9.1.2 *Siguen f i g funcions reals tals que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\ell_1,\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}g(x,y)=\ell_2.$$

Aleshores:

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)\pm g(x,y))=\ell_1\pm\ell_2$.
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}k\cdot f(x,y)=k\cdot\ell_1,\quad k\in\mathbb{R}$.
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)\cdot g(x,y)=\ell_1\cdot\ell_2$.
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$ *si* $\ell_2\neq 0$.

Ara la continuïtat d'una funció de dues variables també implica l'existència del límit, del valor de la funció i que aquests valors coincidesquen.

Definició 9.1.3 *Direm que la funció $f(x,y)$ és contínua en (x_0,y_0) si*

(i) f *està definida en* (x_0,y_0),

(ii) *existeix* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$,

(iii) *es compleix que* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Una funció és contínua si ho és en tots els punts del seu domini.

Com a consequència de les Propietats 12.1.1 es compleix que la suma, resta, producte, quocient, etc. de funcions contínues és una funció contínua (on estiga definida i tinga sentit).

A més a més, les funcions polinòmiques, les exponencials, les trigonomètriques i les racionals són contínues en els punts on estan definides, i la composició de funcions contínues és contínua.

Per exemple, les següents funcions són contínues:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}, \quad g(x,y) = \cos(\frac{x+y}{x^2+1}), \quad h(x,y) = e^{x+y}.$$

Exemple. La funció

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no és contínua en $(0,0)$, però si ho és en $(0,1)$.

El fet de que no siga contínua en $(0,0)$ està clar ja que no existeix el límit de la funció en $(0,0)$. Anem a vore que si és contínua en $(0,1)$, i de fet en qualsevol punt $(x,y) \neq (0,0)$. En els punts $(x,y) \neq (0,0)$ la funció f és un quocient de polinomis en les variables x i y on no s'anul·la el denominador, i per tant, és una funció contínua en tots aquests punts.

9.2 Derivades parcials

Les derivades parcials d'una funció de diverses variables s'obtenen al deixar constants totes les variables independents menys una i fer la derivada respecte d'aquesta.

Definició 9.2.1 *Siga $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció i (x_0, y_0) un punt interior de D, és a dir, que existisca un cercle amb centre en (x_0, y_0) contingut en D. La derivada parcial de f respecte de x en el punt (x_0, y_0) es defineix com*

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h},$$

i la derivada parcial de f respecte a y en el punt (x_0, y_0) com

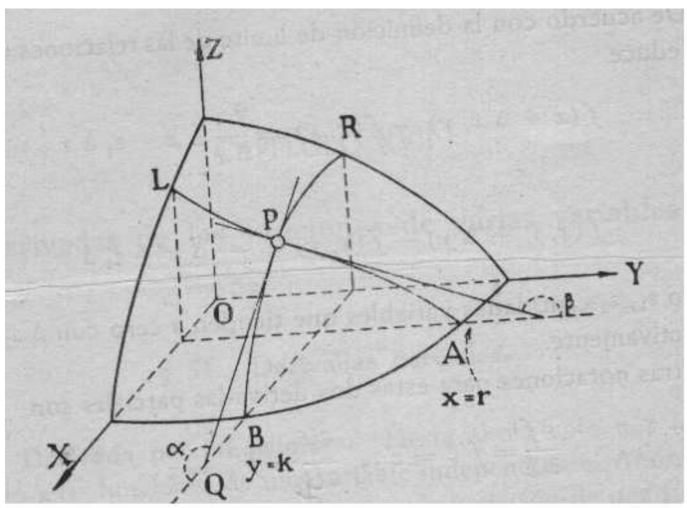
$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

Interpretació geomètrica. Si considerem la superfície $\{(x, y, f(x, y))\}$ i fixem la coordenada $y = y_0$ s'obté la corba intersecció de la superfície amb el pla $y = y_0$, és a dir, la corba de coordenades $\{(x, y_0, f(x, y_0))\}$. Ara, com que tenim una corba en $\mathbb{R}^3$ podem considerar la recta tangent a la corba en el punt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Aquesta recta és precisament la recta en el pla $y = y_0$ que passa pel punt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ amb pendent igual a $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$. La seua expressió vectorial és,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \cdot 1 \\ y &= y_0 \\ z &= f(x_0, y_0) + \lambda \cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}. \end{aligned}$$

L'angle que forma la recta tangent a la corba $f(x, y_0)$ en $x = x_0 = r$ amb el pla $z = 0$ està determinat per la pendent de la recta tangent. En particular, la pendent és igual a la tangent de l'angle que formen el pla $z = 0$ i la recta tangent,

$$m = \tan \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}.$$



Nota. Noteu que l'angle està determinat pels vectors $(1, 0, 0)$ (direcció positiva de l'eix x) i $\overrightarrow{QP}$ en el cas de que la intersecció siga amb un pla $y = y_0$, i per $(0, 1, 0)$ (direcció positiva de l'eix y) i $\overrightarrow{AP}$ en el cas de que la intersecció siga amb un pla $x = x_0$.

Nota. Les derivades parcials successives es defineixen d'una manera anàloga. Siga $f(x, y)$ una funció derivable i siguen f_x i f_y les funcions derivades parcials de f, aleshores les derivades parcials segones són

$$f_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_x}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x_0+h, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{h},$$

i de la mateixa manera

$$f_{xy}(x_0, y_0) \quad , \quad f_{yx}(x_0, y_0) \quad , \quad f_{yy}(x_0, y_0).$$

A més a més, es verifica la igualtat de les derivades parcials creuades,

$$f_{xy} = f_{yx},$$

és a dir, no importa l'ordre en el qual derivem parcialment la funció. Aquest resultat es coneix com *Lema de Schwarz*.

Exemple. Calcula les derivades parcials primeres i segones respecte a x i y de la funció,

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - y^3.$$

La derivada parcial respecte a x en un punt (x_0, y_0) és,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\left((x_0+h)^2-(x_0+h)y_0+y_0^2-y_0^3\right)-\left(x_0^2-x_0y_0+y_0^2-y_0^3\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{2hx_0+h^2-hy_0}{h} = 2x_0 - y_0,
\end{aligned}$$

i, en general, en un punt (x, y) les derivades parcials són

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y, & \tfrac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y - y^2, \\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} &= 2, & \tfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} &= 2 - 2y, \\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -1, & \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -1.
\end{aligned}$$

Exemple. Calcula les derivades parcials primeres respecte a x i y de la funció,

$$f(x, y) = x^2 + xy - e^x \cos y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Les derivades parcials són,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y - e^x \cos y + \tfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \tfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \\
\tfrac{\partial f}{\partial y} &= x + e^x \sin y + \tfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \tfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

9.3 Regla de la cadena

La regla de la cadena per a funcions de diverses variables és similar a la de les funcions d'una variable real. Recordem-la: Siguen f, g funcions contínues i suposem que volem calcular la derivada de $(f \circ g)(t) = f(g(t))$ en $t = t_0$, aleshores sabem que

$$(f \circ g)'(t_0) = f'(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$

Proposició 9.3.1 *Siga $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funció amb derivades parcials contínues i siga $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable en t_0 (si $g(t) = (x(t), y(t))$, aleshores les funcions x i y són diferenciables en t_0). Aleshores $f(x(t), y(t))$ és una funció diferenciable en t_0 i es compleix que*

$$\frac{d(f \circ g)}{dt}|_{t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x(t_0),y(t_0))} \cdot \frac{dx}{dt}|_{t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x(t_0),y(t_0))} \cdot \frac{dy}{dt}|_{t_0}.$$

Nota. D'una manera similar, si $f(x, y, z)$ i $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ satisfan les condicions anteriors, aleshores

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x(t),y(t),z(t))} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x(t),y(t),z(t))} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}|_{(x(t),y(t),z(t))} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Exemple. Siga $f(x, y) = xy$ i volem calcular la derivada de f al llarg de la trajectòria $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$.

La funció composició és $f(x(t), y(t)) = \cos t \cdot \sin t$, i per tant,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy)|_{(x(t),y(t))} \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\partial}{\partial y}(xy)|_{(x(t),y(t))} \cdot \frac{d}{dt}(\sin t) \\ &= y(t) \cdot (-\sin t) + x(t) \cdot (\cos t) = -\sin^2 t + \cos^2 t.\end{aligned}$$

També es pot calcular la derivada considerant la funció composició com una funció del nou paràmetre, és a dir, $F(t) = f(x(t), y(t)) = \cos t \cdot \sin t$ i ara derivar respecte a t,

$$\frac{d}{dt}(F) = F'(t) = (-\sin t) \cdot \sin t + \cos t \cdot \cos t = -\sin^2 t + \cos^2 t.$$

9.4 Gradients i derivades direccionals

La idea és la següent: Donat un punt de la imatge o gràfica de la funció estudiar la variació de la funció al llarg de les rectes que passen per aquest punt.

Suposem que tenim una funció de tres variables $f(x, y, z)$ i un punt del seu domini $P = (x_0, y_0, z_0)$ i considerem totes les rectes que passen per P,

$$x(t) = x_0 + t \cdot u_1 \quad , \quad y(t) = y_0 + t \cdot u_2 \quad , \quad z(t) = z_0 + t \cdot u_3,$$

amb $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ unitari (per no repetir direccions).

Calculem ara la variació de la funció f en P al llarg de les rectes, és a dir, la derivada respecte a t de la funció $f(x(t), y(t), z(t))$,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot u_3.$$

Aquesta expressió és el producte escalar dels vectors

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

Definició 9.4.1 *Siga $f(x, y, z)$ una funció amb derivades parcials en un punt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, aleshores el vector gradient de f en P_0 és el vector*

$$(\nabla f)_{P_0} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})|_{P_0}.$$

Definició 9.4.2 *Si $f(x, y, z)$ té derivades parcials continues en $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $\overrightarrow{u}$ és un vector unitari, aleshores la derivada de f en P_0 en la direcció de $\overrightarrow{u}$ és el nombre*

$$(D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \overrightarrow{u},$$

és a dir, el producte escalar de $\overrightarrow{u}$ pel vector gradient de f en P_0.

Nota. Aquestes dues definicions també són vàlides per a funcions de qualsevol nombre de variables.

Nota. Quan el vector $\overrightarrow{u}$ no és unitari, entenem que es tracta de la derivada direccional respecte el vector unitari en la direcció de $\overrightarrow{u}$.

Exemple. Calcula la derivada de f en P_0 en la direcció de $\overrightarrow{u}$ en els següents casos:

(i) $f(x, y, z) = x \cdot e^y + yz$, $P_0 = (2, 0, 0)$ i $\overrightarrow{u} = (2, 1, -2)$.

(ii) $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$, $P_0 = (3, 4)$, $\overrightarrow{u} = (1, 1)$.

(iii) $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$, $P_0 = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{u} = (2, -3, 6)$.

9.4.1 *Propietats de la derivada direccional*

Anem ara a determinar en quines direccions canvia la funció més ràpid i més esplai. Per tal de fer-ho recordem que el producte escalar de dos vectors $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ verifica que

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|},$$

on θ és l'angle entre els dos vectors.

Proposició 9.4.3 *Siga $f(x, y, z)$ una funció amb derivades parcials continues en $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i siga $\overrightarrow{u}$ un vector unitari, aleshores*

$$(D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \overrightarrow{u} = |(\nabla f)_{P_0}| \cos\theta,$$

on θ és l'angle entre el vector gradient i el vector $\overrightarrow{u}$. Per tant,

- *La derivada direccional pren el seu valor positiu més gran quan $\cos\theta = 1$, és a dir, quan $\overrightarrow{u}$ està en la direcció del gradient.*
- *Anàlogament, decreix més ràpidament en la direcció de $-(\nabla f)_{P_0}$.*
- *Qualsevol direcció $\overrightarrow{u}$ perpendicular al gradient és una direcció de canvi zero, ja que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. És a dir, la derivada direccional s'anul·la.*

Exemple 9.4.4 Determinar les direccions de creixement nul, màxim i mínim de la funció $f(x, y, z) = x \cdot e^y + yz$ en el punt $P_0 = (2, 0, 0)$.

El vector gradient és $(\nabla f)_{P_0} = (e^y, xe^y + z, y)|_{P_0} = (1, 2, 0)$, i per tant,

- la direcció de creixement màxim és $\frac{(\nabla f)_{P_0}}{|(\nabla f)_{P_0}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$.
- la direcció de creixement mínim és $-\frac{(\nabla f)_{P_0}}{|(\nabla f)_{P_0}|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$.
- les direccions de creixement nul són vectors $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ perpendiculars a $\frac{(\nabla f)_{P_0}}{|(\nabla f)_{P_0}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$, i per tant, han de verificar que

$$\overrightarrow{u} \cdot \frac{(\nabla f)_{P_0}}{|(\nabla f)_{P_0}|} = u_1 + 2u_2 = 0 \quad \text{i} \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

A tall d'exemple, el vector $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$ és unitari i perpendicular al vector $\frac{(\nabla f)_{P_0}}{|(\nabla f)_{P_0}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$.

9.5 Pla tangent i recta normal a una superfície de nivell $f(x, y, z) = c$.

Suposem que $f(x, y, z)$ té derivades parcials continues en un punt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la superfície de nivell $S = \{(x, y, z) \text{ tals que} f(x, y, z) = c\}$, és a dir, les parcials $f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)$ són continues i $f(P_0) = c$.

Considerem una corba $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en la superfície de nivell S que passa per P_0, aleshores

$$f(\alpha(t)) = f(x(t), y(t), z(t)) = c,$$

i si ara derivem respecte de t es compleix que $\frac{d}{dt}\ (f(x(t), y(t), z(t))) = \frac{d}{dt}\ (c) = 0$, i per tant,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0.$$

Expressió que també es pot escriure com

$$\nabla f \cdot \overrightarrow{v} = 0,$$

on $\overrightarrow{v} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ és el vector velocitat de la corba $\alpha(t)$ en la superfície de nivell.

Com a conseqüència d'aquest resultat es compleix que **el vector gradient és perpendicular al vector velocitat de tota corba en la superfície de nivell**, és a dir, és perpendicular a totes les rectes tangents en un punt P_0 de la superfície de nivell. Totes aquestes rectes tangents pertanyen a un pla: el pla que passa per P_0 i és normal al vector gradient en P_0, $(\nabla f)_{P_0}$. Aquest pla és l'anomenat **pla tangent**.

Definició 9.5.1 *Siga $f(x, y, z)$ una funció amb derivades parcials continues en un punt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la superfície de nivell $S = \{(x, y, z)$ tals que $f(x, y, z) = c\}$.*

- *El pla tangent a la superfície de nivell S en P_0 té per equació*

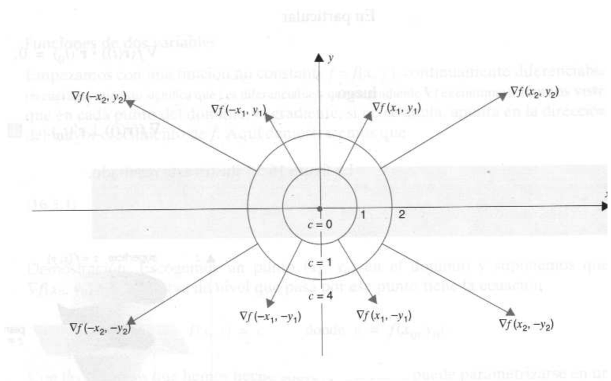
$$\boxed{f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.}$$

- *La recta normal a S en P_0 és la perpendicular al pla tangent i paral·lela al vector $(\nabla f)_{P_0}$ donada per les equacions*

$$\boxed{x(t) = x_0 + f_x(P_0) \cdot t \quad , \quad y(t) = y_0 + f_y(P_0) \cdot t \quad , \quad z(t) = z_0 + f_z(P_0) \cdot t.}$$

Nota. Un punt $P = (x, y, z)$ està en el pla tangent a la superfície de nivell en $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ si el vector $\overrightarrow{P_0P} = (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ és perpendicular al vector gradient de f en P_0.

Exemple. A continuació teniu dibuixades algunes corbes de nivell de la funció $f(x, y) = x^2 + y^2$ i el seu vector gradient $\nabla f = (2x, 2y)$.



Exemple. Calcula les equacions del pla tangent i la recta normal en el punt $P_0 = (1, 1, 1)$ de la superfície de nivell

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

La funció que considerem és $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, i el seu vector gradient és

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z) \qquad \text{i} \qquad (\nabla f)_{(1,1,1)} = (2, 2, 2),$$

per tant, l'equació del pla tangent a la superfície de nivell en $P_0 = (1, 1, 1)$ és

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0,$$

i l'equació de la recta normal

$$x = 1 + 2 \cdot t \quad , \quad y = 1 + 2 \cdot t \quad , \quad z = 1 + 2 \cdot t,$$

que amb el canvi de variable $s = 2t + 1$ queda com $\beta(s) = (s, s, s)$.

Nota Important. Si el que volem es calcular el pla tangent en un punt d'una superfície $z = f(x, y)$ el que cal fer es considerar la superfície de nivell

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0,$$

i aplicar els resultats anteriors de la Definició 12.5.1. Això ens donarà lloc a la següent expressió del pla tangent

$$\boxed{f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,} \tag{5.1}$$

i de la recta normal

$$\boxed{x=x_0+f_x(P_0)\cdot t \quad , \quad y=y_0+f_y(P_0)\cdot t \quad , \quad z=z_0-t.}$$

Exemple. Calcula les equacions del pla tangent i la recta normal en el punt $P_0=(1,1,-1)$ de la superfície

$$z=x^2-xy-y^2.$$

A partir de la funció $z=f(x,y)$ considerem la funció de tres variables $F(x,y,z)=f(x,y)-z=x^2-xy-y^2-z$ i la superfície de nivell $F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$. Calculem el seu vector gradient

$$\nabla F=(F_x,F_y,F_z)=(f_x,f_y,-1)=(2x-y,-x-2y,-1),$$

que en el punt $P_0=(1,1,-1)$ pren el valor $(\nabla F)_{P_0}=(1,-3,-1)$. Ara, d'acord amb les equacions donades en la Definició 12.5.1 s'obtenen les següents equacions del pla tangent,

$$(x-1)-3(y-1)-(z+1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad x-3y-z+1=0,$$

i de la recta normal

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t, \\ y &=& 1-3t, \\ z &=& -1-t. \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-4 &=& 0, \\ y-3z-4 &=& 0. \end{array}\right.$$

9.6 Aproximació lineal i estimació de l'increment

Suposem que una funció $f(x,y)$ és contínua i té derivades parcials de primer ordre continues, aleshores l'equació del pla tangent a la superfície $z=f(x,y)$ en un punt $P_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ és

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

com es dedueix de la fórmula (5.1).

Com el pla tangent i la superfície estàn molt prop en un entorn del punt P_0 aleshores podem definir una funció que ens done els valors del pla tangent en P_0,

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

com a aproximació al valor de la superfície en un entorn del punt P_0, és a dir,

$$\boxed{f(x, y) \approx T(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).}$$

Està clar que es produeix un error, no obstant, aquest error (en valor absolut) està fitat per la següent expressió

$$|E| \leq \frac{B \cdot (|x - x_0| + |y - y_0|)^2}{2},$$

on $B =$ valor màxim en el entorno de P_0 de $\{|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|\}$.

9.7 Màxims, mínims i punts de sella

Com en el cas de les funcions d'una variable ara ens proposem estudiar com determinar els valors on una funció de diverses variables pren el seu valor més gran (*màxims locals*) o més xicotet (*mínims locals*) en un entorn d'un punt.

La definició de màxim i mínim local és la següent:

Definició 9.7.1 *Siga f una funció de diverses variables i siga P_0 un punt interior del seu domini, aleshores*

- *Direm que f té un màxim local en P_0 si $f(P_0) \geq f(Q)$, per a tot Q en un cert entorn de P_0.*
- *Direm que f té un mínim local en P_0 si $f(P_0) \leq f(Q)$, per a tot Q en un cert entorn de P_0.*

Direm que P_0 és un extrem relatiu si P_0 és o bé un màxim local, o bé un mínim local.

A continuació teniu una manera senzilla de trobar els extrems relatius d'una funció de diverses variables.

Proposició 9.7.2 *Siga f una funció de diverses variables. Si f te un extrem relatiu en P_0 aleshores*

$$(\nabla f)(P_0) = 0 \qquad \textit{o} \qquad (\nabla f)(P_0) \textit{ no existeix.}$$

Com a consequència d'aquesta Prop. ja sabem on buscar els punts que són extrems relatius, no obstant no tots els punts que verifiquen les dues condicions anteriors són extrems relatius.

Definició 9.7.3 *Els punts interiors del domini d'una funció en els quals el vector gradient és zero o bé el vector gradient no existeix s'anomenen punts crítics de la funció.*

Exemple. Trobar els punts crítics de les següents funcions:

(i) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.

(ii) $g(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hi ha que calcular el vector gradient de les dues funcions

$$\nabla f = (4x - y, 2y - x - 7) \qquad , \qquad \nabla g = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}).$$

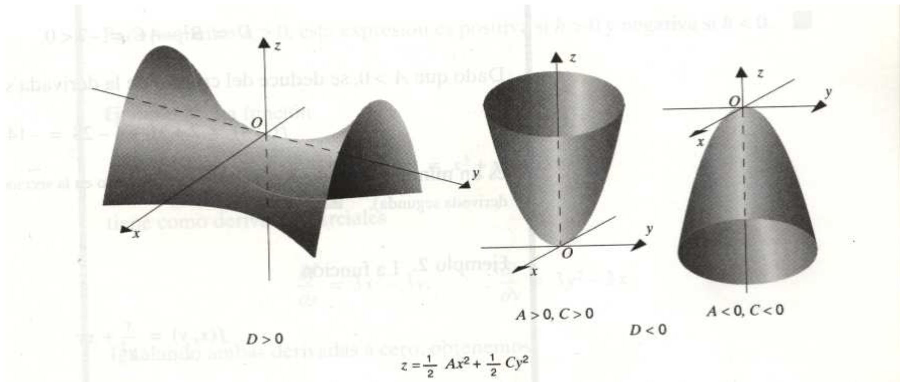
En el cas de la funció f el gradient s'anul·la en el punt $(1, 4)$ (hi ha que resoldre el sistema d'equacions) i és l'únic punt crític ja que el vector gradient existeix per a tots els punts del domini ($\mathbb{R}^2$). Per a la funció g el gradient s'anul·la en el punt $(0, 0)$, però en aquest punt el gradient no està definit, i per tant, el punt $(0, 0)$ és l'únic punt crític.

Com ja hem comentat el fet de que un punt siga crític no implica que el punt siga un extrem relatiu de la funció, i per tal d'esbrinar si ho és o no hi ha diferents mètodes.

Per a les funcions de dues variables $f(x, y)$ el mètode del discriminant ens permet identificar el comportament de la funció en un punt crític.

Proposició 9.7.4 *Si $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, aleshores es defineix el discriminant de f en (a, b) com $\Delta(a, b) = (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(a, b)$, i es compleix que*

- *f te un màxim relatiu en (a, b) si $f_{xx}(a, b) < 0$ i $\Delta(a, b) > 0$.*
- *f te un mínim relatiu en (a, b) si $f_{xx}(a, b) > 0$ i $\Delta(a, b) > 0$.*
- *f te un punt de sella en (a, b) si $\Delta(a, b) < 0$.*
- *El criteri no ens diu res en (a, b) si $\Delta(a, b) = 0$.*



Exemples. Calcula els valors extrems de les següents funcions.

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(ii) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$.

(iii) $f(x,y) = xy$.

9.7.1 *Extrems Absoluts*

Per tal de determinar els extrems absoluts d'una funció d'una o diverses variables cal tenir en compte que es pot demostrar (encara que no ho farem) el següent resultat: **Una funció continua pren els seus valors màxim i mínim absoluts en qualsevol regió tancada i fitada en la qual estiga definida**.

Dit açò, els valors màxims o mínims absoluts només es poden prendre en

- els punts crítics de la funció,
- o els punts de la frontera de la regió de definició.

Exemple. Troba els màxims i mínims absoluts de la funció $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 7x$ en el rectàngle $R = \{(x,y)$ tals que $x \in [0,7], y \in [-4,3]\}$.

Sol. En primer lloc calculem els punts on s'anul·la el seu vector gradient,

$$f_x = 2x + y - 7 = 0 \quad , \quad f_y = x + 4y = 0,$$

i obtenim que l'únic punt crític és el $(4,-1)$. Ara determinem si és un extrem relatiu amb el mètode del discriminant

$$f_{xx} = 2 \quad , \quad f_{xy} = 1 \quad , \quad f_{yy} = 4,$$

és a dir, $\Delta(4,-1) = 8 - 1 = 7 > 0$ i a més a més $f_{xx} = 2 > 0$. Per tant, el punt $(4,-1)$ és un mínim local i $f(x,y) = -14$. Si en la fronetra del rectàngle no hi ha cap punt quina imatge per f siga menor que -14, la funció tindrà en $(4,-1)$ un mínim absolut.

El punt $(4,-1)$ és l'únic extrem relatiu de f en el interior de la regió. Ens queda estudiar el seu comportament en la frontera. Aquesta està formada per quatre segments de recta: $\{(0,y)| -4 \leq y \leq 3\}$, $\{(7,y)| -4 \leq y \leq 3\}$, $\{(x,-4)|0 \leq x \leq 7\}$, $\{(x,3)|0 \leq x \leq 7\}$. Les restriccions de f a cada segment, venen donades per les funcions

$$\begin{aligned} F_0(y) &= f(0,y) = 2y^2, \quad F_7(y) = f(7,y) = 2y^2 + 7y, \qquad (7.2) \\ G_{-4}(x) &= f(x,-4) = x^2 - 11x + 32, \quad G_3(x) = f(x,3) = x^2 - 4x + 18. \end{aligned}$$

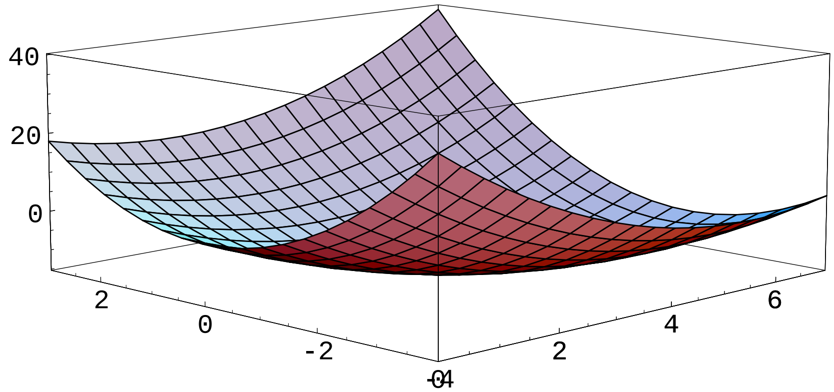
Per tal de determinar els extrems d'aquestes funcions d'**una** variable derivem i igualem a zero,

$$\begin{aligned} &F_0'(y) = 4y = 0, && F_7'(y) = 4y + 7 = 0, \\ &G_{-4}'(x) = 2x - 11 = 0, && G_3'(x) = 2x - 4 = 0, \end{aligned}$$

però tots aquests punts són mínims d'aquestes funcions ja que la seua segona derivada en estos punts és positiva. A més, en tots ells el valor de la funció és major que -14, per tant el mínim absolut es troba en el punt $(4,-1)$. El màxim absolut el prendrà la funció en algun dels vèrtexs del rectàngle,

$$\begin{aligned} &f(0,-4) = 32, && f(0,3) = 18, \\ &f(7,-4) = 4, && f(7,3) = 39. \end{aligned}$$

En definitiva, el màxim absolut es troba en el punt $(7,3)$ i el mínim absolut en $(4,-1)$ com s'observa en el dibuix de la gràfica de la funció.



Nota. Observar que totes les funcions de l'expressió (7.2) són paràboles el coeficient cuadràtic de les quals és positiu, i per tant, prenen el seu valor més alt en els extrems.

9.7.2 *Màxims i mínims condicionats*

Anem a estudiar com podem trobar els màxims o mínims d'una funció de diverses variables quan el seu domini te algún tipus de restricció. Per exemple, determinar les distàncies màxima i mínima de l'origen (o un altre punt) a una corba donada.

A vegades les restriccions es poden incorporar a la funció i aleshores es resol el problema de la manera habitual amb aquesta funció, però amb una variable menys com s'observa en el següent exemple.

Exemple. Determinar el punt en el pla $x + y - z + 1 = 0$ que està més prop de l'origen.

Es tracta de minimitzar la funció distància entre dos punts (l'origen i un punt del pla), és a dir,

$$d(O, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2},$$

que te el mateix mínim que la funció distància al quadrat (per tal d'evitar l'arrel quadrada),

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

sotmesa a la restricció de que el punt ha de ser del pla $x + y - z + 1 = 0$. Aquesta restricció es pot incorporar a la funció si s'aconsegueix escriure una de las variables en funció de les altres. Per exemple, $z = x + y + 1$, i aleshores la funció de la qual volem obtenir el seu valor mínim és

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1.$$

Apliquem a aquesta funció $F(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$ el mètode habitual, Proposició 12.7.1,

$$F_x = 4x + 2y + 2 = 0 \qquad , \qquad F_y = 4y + 2x + 2 = 0,$$

és a dir, el punt crític és $x = -\frac{1}{3}$ i $y = -\frac{1}{3}$. Vejam si és un mínim:

$$F_{xx} = 4 \quad , \quad F_{xy} = 2 \quad , \quad F_{yy} = 4,$$

i per tant, $\Delta(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = (F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2)(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 16 - 4 = 12 > 0$, i a més a més $F_{xx} = 4 > 0$. És a dir, el punt $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ és un mínim de la funció F, i per tant, el punt del pla $x + y - z + 1 = 0$ que està més prop de l'origen és el $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

No obstant, altres vegades no resulta possible incorporar les restriccions a la funció i aleshores el mètode per tal de resoldre aquests problemes rep el nom de **mètode dels multiplicadors de Lagrange**.

Multiplicadors de Lagrange. Suposem que $f(x, y, z)$ i $g(x, y, z)$ tenen derivades parcials continues. Per tal de trobar els valors màxims i mínims locals de f sotmesos a la restricció $g(x, y, z) = 0$ es calculen els valors de x, y, z i λ que compleixen simultàneament les equacions

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \text{i} \qquad g(x, y, z) = 0. \tag{7.3}$$

Nota. En alguns llibres aquest mètode s'explica amb l'ajuda d'una funció auxiliar

$$H(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z),$$

i ara es determina per a quins valors de x, y, z i λ s'anul·la el vector gradient de H,

$$\begin{aligned} H_x &= f_x - \lambda g_x = 0, \quad H_y = f_y - \lambda g_y = 0, \\ H_z &= f_z - \lambda g_z = 0, \quad H_\lambda = -g = 0. \end{aligned}$$

Exemple. Una sonda espacial amb forma d'el·lipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ entra en l'atmosfera de la Terra i la seua superfície comença a calentar-se. Després d'una hora, la temperatura en el punt (x, y, z) sobre la superfície de la sonda és

$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$. Determinar el/s punts més calent/s de la superfície de la sonda.

Sol. Hi ha que trobar els màxims de la funció T sotmesos a la restricció $g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0$, és a dir, els punts que verifiquen $\nabla T = \lambda \nabla g$ i $g(x, y, z) = 0$. D'aquesta manera s'obtene el sistema d'equacions

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 16x & = & 8\lambda x \quad \rightarrow \quad (2-\lambda)x = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2 \text{ o } x = 0, \\ 4z & = & 2\lambda y \quad \rightarrow \quad 2z = \lambda(4 + 2\lambda z) \quad \rightarrow \quad z = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}, \\ 4y - 16 & = & 8\lambda z \quad \rightarrow \quad y = 4 + 2\lambda z \quad \rightarrow \quad y = \frac{4}{1-\lambda^2}, \\ 0 & = & 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16. \end{array} \right.$$

Passem ara a discutir els possibles resultats:

- Si $x = 0$, aleshores la restricció és $y^2 + 4z^2 = 16$ i després de substituïr els valors trobats per a y i z s'obté que $\lambda = \pm\sqrt{3}$. Així, els punts són $(0, -2, +\sqrt{3})$ i $(0, -2, -\sqrt{3})$, i el valor de la temperatura en aquests punts

$$T(0, -2, +\sqrt{3}) = -24\sqrt{3} + 600 \quad , \quad T(0, -2, -\sqrt{3}) = 24\sqrt{3} + 600.$$

- Si $\lambda = 2$, aleshores $y = -\frac{4}{3}$, $z = -\frac{4}{3}$ i el valor de x s'obté de la restricció després de substituïr els valors de y i z que s'han obtés. Amb això s'arriba a que $x = \pm\frac{4}{3}$, i el valor de la temperatura en aquests punts és

$$T(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{128}{3} + 600 \quad , \quad T(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) = \frac{128}{3} + 600.$$

Per tant, els punts amb major temperatura de la sonda són $(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ i $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

1 Calcula les primeres i segones derivades parcials de les següents funcions:

a) $f(x,y,z) = 5x^3y + \cos x - xz^2$.

b) $g(x,y,z) = xyz$.

c) $h(x,y,z) =$ tg$(x^2y^2z^2)$.

d) $j(x,y,z) = xy^2 - yz^2$.

e) $k(x,y,z) = x^2e^{\frac{y}{z}}$.

f) $l(x,y,z) = F(x,y)G(y,z)$.

2 La superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ és tallada pel pla $x = 6$. Troba l'angle agut entre la recta tangent a la corba intersecció en el punt $(6,2,3)$ i el pla xy. Representa la figura.

3 La superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ és tallada pel pla $y = 2$. Troba l'angle agut entre la recta tangent a la corba intersecció en el punt $(4,2,1)$ i el pla xy. Representa la figura.

4 Troba les equacions de la recta tangent a la corba $z = 3x^2 + y^2, x = 1$ en el punt $(1,2,7)$. Representa la corba.

5 En els problemes següents, calcula la derivada direccional de la funció f, en el punt P_0, i en la direcció u:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad P_0 = (1,0)$, $\quad u = (1,-1)$,

b) $f(x,y) = \cos xy$, $\quad P_0 = (2, \frac{\pi}{4})$, $\quad u = (4,-1)$,

c) $f(x,y) = \frac{x-y^2}{x}$, $\quad P_0 = (1,1)$, $\quad u = (12,5)$,

d) $f(x,y) = x \arctan(\frac{y}{x})$, $\quad P_0 = (1,1)$, $\quad u = (2,-1)$,

e) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\quad P_0 = (3,4,12)$, $\quad u = (3,6,-2)$,

f) $f(x,y,z) = \cos xy + e^{yz} + \ln(xz)$, $\quad P_0 = (1,0,\frac{1}{2})$, $\quad u = (1,2,2)$.

6 Troba el vector gradient de les següents funcions

a) $u = x^3 - 2x^2y + 3$.

b) $u =$ arctg$(\frac{xy}{z})$.

c) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7 En els problemes següents, calcula la direcció de major creixement de f, en el punt P_0, i determina alguna direcció de canvi nul:

a) $f(x,y) = x^2 + \cos xy, \qquad P_0 = (1, \frac{\pi}{2})$,

b) $f(x,y,z) = e^{xy} + z^2, \qquad P_0 = (0,2,3)$,

c) $f(x,y,z) = (x+y-2)^2 + (3x-y-6)^2, \qquad P_0 = (1,1,0)$.

d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2, \qquad P_0 = (-1,1)$,

e) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2, \qquad P_0 = (2,-1,2)$,

f) $f(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2), \qquad P_0 = (1,1,1)$.

8 En quines dues direccions s'anul·la la derivada de

a) $f(x,y) = xy + y^2$ en el punt $P_0 = (2,5)$.

b) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en el punt $P_0 = (1,1)$.

9 Per a les següents funcions i punts, determina el pla tangent i la recta normal a la superfície donada en el punt P_0:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad P_0 = (1,2,2)$,

b) $x^2 + y^2 - z^2 = 18, \qquad P_0 = (3,5,-4)$,

c) $(x+y)^2 + z^2 = 25, \qquad P_0 = (1,2,4)$.

d) $z = x^2 + y^2, \qquad P_0 = (3,4,25)$,

e) $y = \sin x, \qquad P_0 = (0,0,0)$,

f) $z = 1 - x - y, \qquad P_0 = (0,1,0)$.

10 La derivada d'una funció $f(x,y,z)$ en un punt P_0 és major en la direcció $u = (1,1,-1)$ i el valor de la derivada és $3\sqrt{3}$. Calcula el vector gradient de f en P. Calcula la derivada de f en P i en la direcció $(1,1,0)$.

11 Calcula la derivada de $f(x,y,z) = xyz$ en la direcció del vector velocitat de l'hèlix

$$c(t) = (\cos(3t), \sin(3t), 3t)$$

en el instant $t = \frac{\pi}{3}$.

12 La corba $c(t) = (-t, \sqrt{t}, \ln t)$ talla la superfície

$$z = \ln(\frac{y + 2x^2 + y^2}{4})$$

en quan $t = 1$. Calcula l'angle d'intersecció, és a dir, l'angle entre el seu vector velocitat i el pla tangent a la superfície en el punt intersecció.

13 Determina els màxims, mínims i punts de sella de les següents funcions, i calcula també el valor de la funció en eixos punts:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$,

b) $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y$,

c) $f(x, y) = x^2 + xy$,

d) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$,

e) $f(x, y) = x \sin y$.

14 Determina els màxims, mínims absoluts de les següents funcions en els dominis donats:

a) $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en la placa triangular tancada i fitada per les rectes $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ en el primer quadrant.

b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$, en la placa triangular tancada i fitada per les rectes $x = 0$, $y = 4$, $y = x$ en el primer quadrant.

c) $f(x, y) = (x^2 - 4x)\cos(y)$, en la regió $1 \leq x \leq 3$, $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$.

15 Una placa circular plana té la forma de la regió $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incloent-hi la frontera $x^2 + y^2 = 1$, es calfa de manera que la temperatura en qualsevol punt és

$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

Determina els punts més calents i més freds de la placa, així com la seua temperatura.

16 Les parcials primeres i el discriminant $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ de cadascuna de les següents funcions és zero en l'origen. Determina si la funció té o no un màxim o un mínim en l'origen, imaginant, an cada cas, l'aspecte de la gràfica de la funció,

a) $f(x, y) = x^2y^2$,

b) $f(x, y) = 1 - x^2y^2$,

c) $f(x, y) = xy^2$.