Tema 1.- Va de números

1.1.- Números para contar.

Una de las primeras actividades intelectuales que realiza el ser humano es la de contar: el número de flechas, el número de ovejas, el número de enemigos, etc.

En Matemáticas esas actividades están relacionadas con los números enteros, primero con los positivos y también con los negativos.

Enteros positivos

Los números enteros positivos (o 'naturales') son los inmediatamente relacionados con el concepto de contar. Son

$$\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Por tanto, son números 'naturales'. El conjunto de estos números se denomina $\mathbb{N}$ y contiene el 0 o no a gusto del profesor.

Son los números más elementales, pero tiene propiedades interesantes:

1.- Operaciones. Hay definida una suma y un producto con las habituales propiedades: asociatividad, conmutatividad, existencia de 0 y 1 y distributividad del producto respecto a la suma.

Además, tanto la suma como el producto tienen una *ley de simplificación*.

a.- Si $x + y = x + z$, se cumple $y = z$.

b.- Si $x \cdot y = x \cdot z$ y $x \neq 0$, se cumple $y = z$.

Ejemplo Notad que la del producto no es cierta para $x = 0$ ya que

$$0 \cdot 7 = 0 \cdot 3 \quad \text{y} \quad 7 \neq 3.$$

El producto permite dar significado a *potencias* de un número con exponente natural (x^n es el producto de x por sí mismo n veces) que tiene las propiedades habituales

a.- $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$.

b.- $(x^m)^n = x^{mn}$.

c.- $x^m \cdot y^m = (xy)^m$

2.- Orden. Hay una relación de orden compatible con la suma y el producto.

a.- $x + y \leq x + z$, si y sólo si $y \leq z$.

b.- Si $x \neq 0$, $x \cdot y \leq x \cdot z$ si y sólo si $y \leq z$.

Ejemplo Así $15 \leq 28$ equivale a $0 \leq 13$ y $15 \leq 27$ equivale a $5 \leq 9$.

El orden no es compatible con las potencias. Pruébalo.

3.- División con resto, divisibilidad y factorización.

Todo ello está basado en la existencia de un algoritmo de división con resto. Destaquemos la propiedad de que todo natural se puede escribir de forma única como producto de números primos. Expresarlo de esa manera es 'factorizarlo'.

Ejemplo

$$17532 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 487$$

Con la factorización podemos construir inmediatamente el *máximo común divisor* y el *mínimo común múltiplo* de dos números naturales. También se pueden hallar usando el algoritmo euclídeo.

4.- Sistemas de numeración

Toda esta parafernalia permite escribir los números naturales como estáis acostumbrados.

Veamos primero el significado de la expresión habitual de un número natural. Así

$$17532 = 1 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$

Hemos usado el 10 como base, pero podíamos haber usado cualquiera. Por ejemplo el 9, entonces

$$17532_{(9} = 1 \cdot 9^4 + 7 \cdot 9^3 + 5 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 1$$

<u>Enteros</u>

La primera ampliación de los números 'naturales' es para representar 'deudas': los enteros negativos.

Nos permiten resolver ecuaciones como

$$x + 7 = 1$$

que no tienen solución en los números naturales.

$$\{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

1.- Operaciones Conserva las propiedades vistas y le añade la existencia para todo número de un inverso para la suma.

La existencia de números negativos hace un poco extraña la multiplicación (el hecho de que tenga que ser $(-5) \cdot (-3) = 15$ aún os sorprende a algunos). Pero todo funciona bien.

2.- Orden. También extiende el orden definido en los naturales y sigue siendo compatible con la suma y con el producto por números positivos. Pero el producto (o la simplificación) por números negativos invierte la desigualdad. Así

b.- Si $x \leq 0$, $x \cdot y \leq x \cdot z$ si y sólo si $y \geq z$.

1.2.- Números para medir.

Salen naturalmente en cuanto se intenta 'medir' las cosas. Una vez fijamos un patrón, e.g. el metro, no siempre hay una cantidad entera de unidades en lo que estamos midiendo. Para medir el cacho que sobra, parece lógico dividir el patrón en trozos iguales más pequeños.

<u>Fracciones</u>

Dicho de otra manera, ahora queremos introducir números que nos permitan resolver ecuaciones de la forma

$$27x = 13.$$

Para ello queremos expresiones de la forma

$$\frac{13}{27}.$$

El primer hecho extraño es la existencia de varias fracciones que representan el mismo número ya que resuelven la misma ecuación. Así

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{512}{1024}.$$

0.- Fracciones irreducibles.

Escogemos como representación de una fracción

$$\frac{a}{b} \quad \text{con} \quad b > 0 \text{ y m.c.d.}(a, b) = 1.$$

La llamamos representación irreducible.

1.- Operaciones. La suma se define

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Se realiza de forma más sencilla si ambas fracciones se representan con el mismo denominador (por ejemplo, el mínimo común múltiplo) ya que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

El producto es

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Con esto, toda fracción no nula tiene inverso respecto al producto. Así

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Las potencias de fracciones se definen

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

2.- Orden. Suponemos todas las fracciones de este apartado con denominador positivo.

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ cuando } ad \leq cb.$$

Ejemplo $1/7 \leq 1/5$

El orden es compatible con suma por números cualesquiera y producto por números positivos.

3.- Expresión decimal de una fracción. Podemos usar indefinidamente la división con resto y llegar a obtener

$$\frac{1}{3} = 0,33333\cdots = 0,\widehat{3}.$$

¿Que significa esto? La expresión decimal significa

$$0,33333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \ldots.$$

De la misma manera, siempre podemos hallar una expresión decimal de un número fraccionario y siempre es periódica.

Por cierto, algunos números tienen dos expresiones decimales ¿cuales?.

Recíprocamente, toda expresión decimal periódica corresponde a un número fraccionario.

¿Y las no periódicas, como $0,1223334444\ldots$?

Radicales

También salen naturalmente en cuanto se intenta 'medir' las cosas. Así, medir la diagonal de un cuadrado de lado 1 fue un dolor de muelas para los griegos (la diagonal mide $\sqrt{2}$ que no es una fracción).

Las más sencillas (cuadradas y cúbicas) salen de manera natural a partir de problemas geométricos, por ejemplo la razón áurea. Nosotros las añadiremos algebraicamente, como soluciones de la ecuación

$$x^n = a.$$

La solución de esa ecuación se representa tradicionalmente como

$$x = \sqrt[n]{a}.$$

También parece lógico representarlo como

$$x = a^{1/n}.$$

Luego,

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

Cumplen las propiedades habituales de potencias.

Su expresión decimal no es periódica.

Las fracciones que contienen radicales pueden tener varias expresiones. Para evitar confusiones, cuando se puede, se eliminan los radicales del denominador. Veremos ejercicios de ello.

Números trascendentes

Aún queda por ver la mayor parte de los números reales. Son los 'trascendentes'. Como ejemplo de ellos dos que ya conocéis

La razón de la longitud de una circunferencia con su diámetro (ya conocida en la antigüedad)

$$\pi = 3,141592\ldots$$

y la base de los logaritmos naturales, de introducción más reciente

$$e = 2,718281\ldots$$

Valor absoluto y parte entera

A todo número real se le puede asignar su *valor absoluto* olvidándonos del signo. Así

$$| 2,3 |= 2,3; | -3,5 |= 3,5.$$

También podemos hablar de la *parte entera* de un número real como el mayor entero que es menor o igual que él. Así

$$E(2,3) = 2; E(e) = 2; E(-1,5) = -2.$$

Conjuntos numéricos

El conjunto de los números naturales se denota por $\mathbb{N}$ (conteniendo a 0 o no según las manías del 'profe'), el de los números enteros por $\mathbb{Z}$, el de los racionales $\mathbb{Q}$, y el de todos los reales por $\mathbb{R}$.

Otros conjuntos numéricos interesantes son los que están compuestos por todos los números entre dos. Así si $a < b$, se definen los intervalos de extremos a y b por

$]a, b[$ está formado por los números reales x que cumplen $a < x < b$.
$[a, b[$ está formado por los números reales x que cumplen $a \leq x < b$.
$]a, b]$ está formado por los números reales x que cumplen $a < x \leq b$.
$[a, b]$ está formado por los números reales x que cumplen $a \leq x \leq b$.

También interesantes son los que están compuestos por todos los números mayores (o menores) que uno dado. Así, se definen los intervalos no acotados de extremo a

$]a, \infty[$ está formado por los números reales x que cumplen $a < x$.
$[a, \infty[$ está formado por los números reales x que cumplen $a \leq x$.
$]-\infty, a[$ está formado por los números reales x que cumplen $x < a$.
$]-\infty, a]$ está formado por los números reales x que cumplen $x \leq a$.