

## Tema 2.- Va de funciones. Ejercicios

### 2.1.- Definición de funciones y funciones sencillas.

#### Forma de dar una función.

1. En un triángulo isosceles de perímetro 20, expresa la base como función del otro lado.
2. Da la función del cambio de escalas termométricas de la Celsius (la normal) a la Fahrenheit.
3. A fuego constante, dibuja la temperatura de un cazo de agua. Este es un ejemplo clásico de función definida a trozos.
4. En un rectángulo de perímetro 20, expresa el área como función de un lado.
5. En un triángulo equilátero expresa el área como función del lado.

#### Funciones lineales.

6. Halla el factor de proporcionalidad y dibuja las gráficas de las funciones

a)  $y = x$ ;    b)  $y = 2x$ ;    c)  $y = 0,5x$ ;    d)  $y = -\frac{1}{3}x$ ;    e)  $y = -4x$ .

7. Dibuja las rectas correspondientes a los factores de proporcionalidad

a)  $-\frac{2}{3}$ ;    b) 3;    c) 1;    d) -1;    e)  $\frac{5}{4}$ ;    f) 4.

8. Halla la intersección con los ejes de las rectas

a)  $y = 2x - 3$ ;    b)  $y = -x + 4$ ;    c)  $y = -2$ ;    d)  $x = 3$ .

¿Todas ellas son gráficas de funciones?

9. Halla la ecuación de las rectas que cumplen

a) pendiente  $3/4$  y pasa por  $(1, 0)$ .

b) Pasa por  $(3, 2)$  y por  $(-2, 4)$ .

c) Pasa por  $(4, -1)$  y por  $(-2, -3)$ .

d) Pasa por  $(1, 2)$ , por  $(3, -2)$  y por  $(0, 4)$ , si existe.

10. Considera todas las rectas de la forma  $y = ax + 2a$ . ¿Tienen un punto en común? ¿Cual?

11. Indica si las siguientes rectas son gráfica de una función lineal y dala.

a)  $x - 3y + 6 = 0$ ;    b)  $2x + 3y - 5 = 3$ .

12. Hallar los puntos que cumplen cada inecuación

a)  $5x - 7 \leq 2$ ;    b)  $3x + 4 \geq 5$ ;    c)  $-2x + 5 \leq -3$ .

Funciones cuadráticas.

13. Parábolas con coeficiente director 1. Dibújalas y halla el vértice.

a)  $y = x^2 + 6$ ;    b)  $y = x^2 + 2$ ;    c)  $y = -x^2 - 4$ ;

d)  $y = (x - 3)^2$ ;    e)  $y = (x - 2)^2$ ;    f)  $-x^2 + 3$ .

14. Escribe las ecuaciones de las parábolas con coeficiente director 1 y los vértices

a)  $(2, 3)$ ;    b)  $(-3, 2)$ ;    c)  $(-5, -1)$ .

15. Parábolas con coeficiente director -1. Dibújalas y halla el vértice.

a)  $y = -x^2 - 4$ ;    b)  $y = -(x - 3)^2 + 3$ .

16. Halla el vértice de las parábolas

a)  $x^2 - 2x + 5$ ;    b)  $x^2 + 4x + 3$ ;    c)  $x^2 - 8x + 4$ ;    d)  $x^2 - 4x$ ;

e)  $-x^2 + 5$ ;    f)  $-x^2 + 4x + 5$ ;    g)  $2x^2 + 2$ .

17. Dibuja las parábolas y compáralas

a)  $y = x^2 + 3$ ;    b)  $2x^2 + 3$ ;    c)  $\frac{1}{2}x^2 + 3$ .

18. Dibuja las parábolas y compáralas

a)  $y = (x - 2)^2$ ;    b)  $y = (x - 2)^2$ ;    c)  $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ .

19. Tengo el dibujo conjunto de

$$y = \frac{1}{3}x^2 + x + 2; y = x^2 - 2x + 2; y = -x^2 - 2x - 3$$

¿Cual es cual?

20. ¿Cual es el máximo de la función

$$y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}?$$

21. La altura que alcanza una bala de cañón en función del tiempo tiene la expresión

$$h = -5t^2 + 200t$$

¿En que momento alcanza la máxima altura?

22. Hallar los puntos que cumplen cada inecuación

a)  $x^2 - 6x - 5 \leq 2$ ;    b)  $2x^2 + 3x + 4 \geq 3$ ;    c)  $-x^2 + 3x + 5 \leq -1$ .

## 2.2.- Funciones algo más complicadas.

### Funciones polinómicas.

1. Indica si es polinómica y, en caso afirmativo, cual es el grado, coeficiente director y término independiente de cada una de las funciones:

a)  $x^3 - x + 1$ ;    b)  $(x - 1)(x + 1)$ ;    c)  $\sqrt{x + 2}$ ;

d)  $\frac{7x}{4}$ ;    e)  $\frac{x^3 + x - 5}{x + 1}$ .

2. Haz alguna de las siguientes divisiones con resto

a)  $(3x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 1) : (x - 4)$ ;    b)  $(3x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x^2 + x + 1)$ ;

c)  $(3x^4 - 2x^2 - 5x + 3) : (x - 2)$ ;    d)  $(x^6 + 2x^3 - x - 8) : (2x^2 - 8x)$ ;

e)  $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$ ;    f)  $(\frac{3}{2}x^4 - \frac{8}{5}x^3 + \frac{9}{7}x^3 + \frac{3}{5}x - 1) : (\frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{5}x + 4)$ .

3. Calcula tanto por la regla de Ruffini como por el método habitual el cociente y el resto de la división

$$(5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1) : (x - 2).$$

¿Sabías cual era el resto antes de empezar a dividir?

4. Sabemos que  $(x - 2)$  divide a  $x^3 - x^2 + ax - 10$ . ¿Cual es el valor de  $a$ ?

5. Descompón en factores lineales y cuadráticos

a)  $x^2 - 8x + 16$ ;    b)  $x^2 - 9$ ;    c)  $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ ;

d)  $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$ ;    e)  $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$ ;    f)  $x^3 - 4x^2 + x + 6$ ;

g)  $3x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ ;    h)  $x^4 - 1$ .

6. Estudia el signo de una función polinómica conociendo su factorización. Así

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

con  $a < b < c < d$ .

Función proporcionalidad inversa. Funciones algebraicas. Radicales

7. Simplifica las fracciones algebraicas

$$\text{a) } \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}; \quad \text{b) } \frac{2x^2 - 5x - 12}{16 - x^2}; \quad \text{c) } \frac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 + x}; \quad \text{d) } \frac{5 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}}$$

En cada caso encuentra el dominio de la función algebraica correspondiente, antes y después de simplificar.

8. Haz alguna de las siguientes operaciones con fracciones algebraicas

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{8}{x} + \frac{6}{x-1}; & \text{b) } & \frac{x+1}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x-1}{x+1}; \\ \text{c) } & \frac{4}{x-2} + \frac{2x}{x-2}; & \text{d) } & \frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x}. \end{aligned}$$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones

$$\text{a) } 3x - \frac{5}{2x} = \frac{7}{4x}; \quad \text{b) } x + 2 = \frac{5}{x}$$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones

$$\begin{aligned} \text{a) } & 3x - \frac{5}{2x} < \frac{7}{4x}; & \text{b) } & x + 2 \leq \frac{5}{x}; & \text{c) } & \frac{1-x}{1+x} \leq \frac{1+x}{x-2}; \\ \text{d) } & \frac{1-x}{1+x} \leq \frac{1+x}{|x-2|}; & \text{e) } & \frac{3}{1+x^2} \leq \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones/inecuaciones con radicales

$$\text{a) } \sqrt{x} + 2 = x; \quad \text{b) } \sqrt{x} + 2 \leq x; \quad \text{c) } \frac{\sqrt{x^2+9}}{4} + \frac{6-x}{5} = \frac{99}{60}.$$

### 2.3.- Funciones más complicadas aún.

#### Funciones trigonométricas.

Primero unas cuantas de traducción directa grados radianes.

1. Pasa de grados a radianes

$$\text{a) } 30^0; \quad \text{b) } 60^0; \quad \text{c) } 90^0; \quad \text{d) } 135^0.$$

2. Pasa de radianes a grados

$$\text{a) } \frac{7\pi}{4}; \quad \text{b) } \frac{4\pi}{3}; \quad \text{c) } \frac{2\pi}{3}.$$

3. Halla en grados y radianes el ángulo central del pentágono. Halla su ángulo interior.

4. Halla en grados y radianes el ángulo central del octágono. Halla su ángulo interior.

5. Busca algunos ejercicios de triangulación para agrimensores.

Relaciones entre el seno, el coseno y la tangente

6. Si estás por la labor de hacer un poco de teoría, busca dado uno de los tres, las formulas que dan los valores posibles de los otros dos (discute cuando has de tomar el valor positivo y cuando el negativo)

7. Si  $\text{sen } x = 0,5$ , ¿cual es el valor de  $\text{cos } x$  y de  $\text{tg } x$ ? (considera la respuesta en general y si sabes que  $x$  está en el primer cuadrante).

8. Lo mismo con  $\text{sen } x = -0,6$  (con el cuarto cuadrante en vez del primero)

9. Si  $\text{cos } x = 0,25$ , ¿cual es el valor de  $\text{sen } x$  y de  $\text{tg } x$ ? (considera la respuesta en general y si sabes que  $x$  está en el primer cuadrante).

10. Lo mismo con  $\text{cos } x = -0,5$  (con el cuarto cuadrante en vez del primero)

11. Si  $\text{tg } x = 3$ , ¿cual es el valor de  $\text{cos } x$  y de  $\text{sen } x$ ? (considera la respuesta en general y si sabes que  $x$  está en el primer cuadrante).

12. Lo mismo con  $\text{tg } x = -10$  (con el cuarto cuadrante en vez del primero)

Veamos las funciones de ángulos suplementarios y otros.

13. Calcula los valores de las tres funciones trigonométricas de  $\pi - x$  en función de las de  $x$ . En el dibujo y con la formula.

14. Calcula los valores de las tres funciones trigonométricas de  $\pi/2 + x$  en función de las de  $x$ . En el dibujo y con la formula.

15. Calcula los valores exactos de las tres funciones trigonométricas de  $\pi/12$ . Comprueba que son ciertos calculando los valores de  $(\pi/6 + \pi/12)$  y probando que dan los de  $\pi/4$ .

Funciones exponencial y logarítmica.

Primero unos cuantos ejercicios de exponenciales.

16. Simplifica

$$\text{a) } 2^{x/2} \cdot 8^{3x} \cdot 16^{2x/5}; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-x/2}; \quad \text{c) } 9^{-3x/2}.$$

17. Resuelve las ecuaciones

$$\text{a) } 3^{2x} = 81; \quad \text{b) } 10^{3x} = 1; \quad \text{c) } 2^{-1-x^2} = \frac{1}{64}; \quad \text{d) } 2^{3x} = 0, 5^{3x+2}.$$

18. Resuelve (usando la calculadora al final, si es necesario)

$$\text{a) } 2^{x+1} + 4^{x+3} = 5; \quad \text{b) } 3^x + 3^{x+2} = 30; \quad \text{c) } 5^{x-2} + 5^x + 5^{x+2} = 651.$$

19. Resuelve (usando la calculadora al final, si es necesario) los sistemas

$$\text{a) } \begin{cases} 7^{x+y} = 49^3 \\ 7^{x-y} = 49 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3^x + 5^y = 14 \\ 3^{2x+1} - 5^{2y+1} = 218 \end{cases}.$$

Ahora algunos de logaritmos

20. Halla una serie de logaritmos fáciles

$$\text{a) } \log_2 128; \quad \text{b) } \log_{10} 0, 1; \quad \text{c) } \log_5 (625)^3; \quad \text{d) } \log_{49} 7; \quad \text{e) } \log_{0,5} \sqrt[3]{64}.$$

21. Resolver las ecuaciones

$$\text{a) } \log_7 x = 2; \quad \text{b) } \log_x 10 = 1/4; \quad \text{c) } \log_8 x = 1/3; \quad \text{d) } \log_a x = 0.$$

22. Logaritmos, potencias, exponenciales

$$\text{a) } \log_a a^2 \sqrt{a}; \quad \text{b) } 2^{\log_a a^2}; \quad \text{c) } \log_x \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right); \quad \text{d) } 10^{\log_a a^3 \sqrt{a}}; \quad \text{e) } \log_{10}(10^{10 \log_{10} 10^2}).$$

23. Algunas ecuaciones

$$\text{a) } \log_a x = \log_a 9 - \log_a 4; \quad \text{b) } 5 \log_{10} x - \log_{10} 32 = \log_{10}(x/2); \quad \text{c) } \log_x 10 = 5 - 3 \log_{10} x.$$

24. Algunos sistemas de ecuaciones

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 60 \\ \log_{10} x + \log_{10} y = 30 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 25 \\ \log_{10} y = \log_{10} x - 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y \log_{10} x - x \log_{10} y = 1 \end{cases}.$$