

Tema 3.- Límites

3.1.- Existencia.

Dada una función real de variable real $f(x)$, vamos a preocuparnos de calcular cual es el límite de la función en un punto cerca del cual está siempre definida y cual es el límite cuando la variable se hace muy grande (o muy pequeña). Empecemos por este segundo caso.

Límite en $+\infty$.

El límite puede no existir. Si existe puede ser de tres tipos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

Vamos a estudiarlo en las gráficas.

Ejemplo Las funciones x^n con $n \geq 1$ tienden a $+\infty$.

Las funciones x^n con $n \leq -1$ tienden a 0.

Las funciones sen y cos no tienen límite.

La función exponencial con base $a > 1$ tiende a $+\infty$.

La función exponencial con base $a < 1$ tiende a 0.

La función logarítmica con base $a > 1$ tiende a $+\infty$.

La función logarítmica con base $a < 1$ tiende a $-\infty$.

Límite en $-\infty$.

El límite puede no existir. Si existe puede ser de tres tipos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

Vamos a estudiarlo en las gráficas.

Ejemplo Las funciones x^n con $n \geq 1$ tienden a $+\infty$ si n es par y a $-\infty$ si es impar.

Las funciones x^n con $n \leq -1$ tienden a 0.

Las funciones sen y cos no tienen límite.

La función exponencial con base $a > 1$ tiende a 0.

La función exponencial con base $a < 1$ tiende a $+\infty$.

La logarítmica no existe en los negativos.

Límites en $p \in \mathbb{R}$.

El límite por la derecha puede no existir. Si existe puede ser de tres tipos

$$\lim_{x \rightarrow p+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow p+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow p+} f(x) = l$$

El límite por la izquierda puede no existir. Si existe puede ser de tres tipos

$$\lim_{x \rightarrow p-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow p-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow p-} f(x) = l$$

Si ambos límites existen y son iguales, el valor común se representa $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$.

Ejemplo Las funciones ‘normales’ que están definidas en p , el valor del límite es $f(p)$. Por ejemplo, son normales: los polinomios, las trigonométricas (si es la tangente en puntos que no sean $(2k+1)\pi/2$), la exponencial y el logaritmo. También lo son los cocientes de las anteriores con denominador $\neq 0$.

Estudiar $1/x$ cuando $x \rightarrow 0$.

Estudiar $\operatorname{tg} x$ cuando $x \rightarrow \pi/2$.

Estudiar una fracción algebraica en todo punto.

3.2.- Propiedades de los límites.

1.- Con la suma.

- Si las funciones tienden a números finitos, la suma (resta) tiende a la suma (resta).

$$\lim_{x \rightarrow p} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x).$$

- Si una de las dos tiende a un infinito y la otra a un número finito l , la suma tiende al mismo infinito que la primera. Esto se suele recordar diciendo

$$\infty + l = \infty.$$

- Si las dos funciones tienden al mismo tipo de infinito, la suma también.
Esto se suele recordar diciendo

$$\infty + \infty = \infty.$$

- Si las dos funciones tienden a infinito con distinto signo hay que analizar el caso particular.

Indeterminación 1

$$\infty - \infty.$$

- Si una función $f(x)$ tiende a infinito, la función $-f(x)$ tiende al infinito de signo contrario.

2.- Con el producto.

- Si las dos funciones tienden a números finitos, el producto tiende al producto.

$$\lim_{x \rightarrow p} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} g(x).$$

- Si una de las dos tiende a un infinito y la otra a un número finito $l > 0$ (o a $+\infty$), el producto tiende al mismo infinito que la primera.

- Si una de las dos tiende a un infinito y la otra a un número finito $l < 0$ (o a $-\infty$), el producto tiende al infinito de signo contrario a la primera.

- Si una de las dos tiende a un infinito y la otra a 0, hay que analizar el caso particular.

Indeterminación 2

$$0 \cdot \infty.$$

3.- Con el cociente $f(x)/g(x)$

- Si $g(x)$ tiende a un número finito $q \neq 0$, el cociente tiende al cociente.

$$\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)}.$$

- Si $f(x)$ está acotada y $g(x)$ tiende a un ∞ el cociente tiende a 0.

Indeterminación 3

$$\infty/\infty.$$

- Si Si $f(x)$ tiene limite $\neq 0$ y $g(x)$ tiende a 0, el cociente puede tender a un ∞ o no existir, dependiendo del signo de $g(x)$ cerca de p .

Indeterminación 4

$$0/0.$$

4.- La exponencial $e^{f(x)}$.

- Si $f(x)$ tiende a un número finito q , la exponencial tiende a e^q .

$$\lim_{x \rightarrow p} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}.$$

- Si $f(x)$ tiende a $+\infty$, la exponencial tiende a $+\infty$.
Si $f(x)$ tiende a $-\infty$, la exponencial tiende a 0.

5.- El logaritmo $\ln f(x)$.

- Si $f(x)$ tiende a un número finito $q > 0$, el logaritmo tiende a $\ln q$.

$$\lim_{x \rightarrow p} \ln f(x) = \ln \lim_{x \rightarrow p} f(x).$$

- Si $f(x)$ tiende a $+\infty$, el logaritmo tiende a $+\infty$.
Si $f(x)$ tiende a 0, el logaritmo tiende a $-\infty$.

6.- La exponencial $g(x)^{f(x)}$.

Usando que

$$g(x)^{f(x)} = e^{\ln g(x) \cdot f(x)}$$

sólo hay que hallar

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot \ln g(x).$$

Indeterminación 5 y 6 :

$$1^\infty; \quad \infty^0.$$

Ejemplo Un límite que hay que recordar es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$